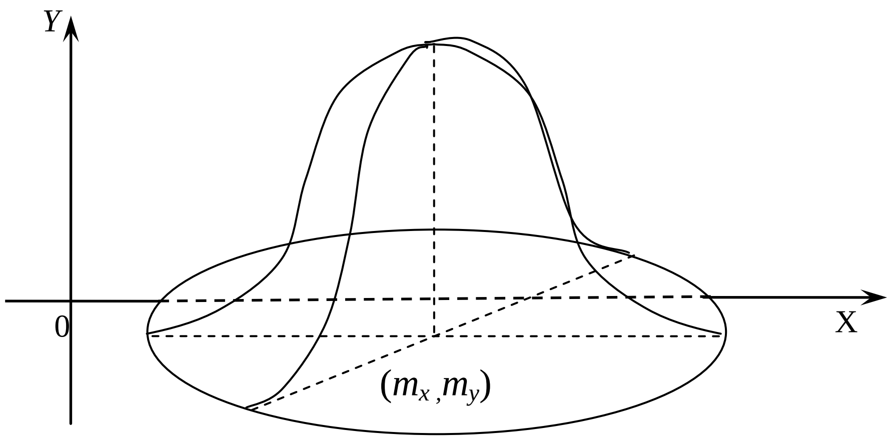
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Учебное пособие



ПАВЛОДАР 2014

УДК 519.21 (075.8)
ББК.22. 17 Я73
Б 78

Рекомендовано к печати Ученым Советом
Инновационного Евразийского университета
Протокол №5 от 27.11.2013 года

Рецензенты:
Аяшинов М.М. – кандидат физмат наук, доцент. (Инновационный Евразийский Университет)
Павлюк И.И. – кандидат физмат наук, доцент. (Павлодарский Государственный Университет им. С. Торайгырова)

Бокаева М.С.
Б78 Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие / М.С. Бокаева, Д. Исмоилов, Н.Д. Сарбасова. – Павлодар: Инновац. Евраз. ун-т, 2014 – 431 с.

ISBN 978-601-7380-26-7

Настоящий курс лекций посвящён основам университетской дисциплины «Теории вероятностей и математическая статистика» разработан на основании Типовой учебной программы для специальности 050109 «Математика», Алматы, 2007, ГОСО 3.08.259, Астана, 2006 и рабочей программы дисциплины Теории вероятностей и математической статистики для специальностей: 5В050109 «Математика», 5В060100 «Математика», 5В011100 «Информатика», 5В060200 «Информатика», 5В070300 «Информационные системы», 5В070400 «Вычислительная техника и программное обеспечение».

Курс лекций может быть рекомендован для экономических, технических и гуманитарных специальностей педагогических и технических высших учебных заведений, и колледжей. В книге также изложена в необходимом объёме теория случайных процессов, основы теории информации, система массового обслуживания, применительно к тематике «прикладные вероятностные теории».

В книге приводятся в качестве приложения примеры решения задач с использованием системы «Statistica», подготовленной ст. преподавателем кафедры «Математика и информационные технологии» Сариновой Асией Жумабаевной (магистром педагогических наук – «информатика»).

УДК 519.21 (075.8)
ББК.22. 17 Я73

ISBN 978-601-7380-26-7

Содержание

Дополнение 1
Глава VI. Прикладные вероятностные теории

Дополнение 2
Глава VII. Элементы теории массового обслуживания

Дополнение 3

Maro az fitrati «hurshedi tobon» in pisand omad,
кі bo yak chashm mebinad buzurgu hurdi Dunyoro!

Введение

<u>Теория вероятностей</u> – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы.

<u>Предметом теории вероятностей</u> – является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных величин. Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях человеческой деятельности: естествознание и технике, в теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, медицине, астрономии, экономике, теории стрельбы, теории управления, в социологии и др.

Теория вероятностей, как и все направления математической науки, возникла из потребностей практики. Элементы теории вероятности частично были «знакомы» ещё первобытным людям: *возможность убить зверя у нескольких охотников, естественно, больше, чем у одного;* ***шансы выжить у одного человека, гораздо меньше, чем у группы (семьи) людей, …***

Возникновение теории вероятностей можно отнести к середине XVII века и связано с именами Гюгенса (1629-1665), Паскаля (1623-1662), П. Ферма (1601-1665) и Якоба Бернулли (1654-1705). Существует мнение, что начало изучения теории вероятностей как самостоятельная наука стала возникать в переписках Б. Паскаля и П. Ферма при обсуждении попытки создания решения некоторых задач из теории азартных игр. Примеры из области азартных игр широко применяются в теории вероятностей и в настоящее время, так как для них удобно и легко строить математические модели. Одной из первых книг по теории вероятностей «**О расчётах в азартной игре**» опубликовал голландский математик Х. Гюгенс. Второй этап развития теории вероятностей, как одной из фундаментальных направлений математики связано с именем Якоба Бернулли, который ввёл понятие «**классическое определение события**». Впервые им, доказанная теорема «***закон больших чисел***» (ЗБЧ), является первым теоретическим обоснованием ранее, накопленных знаний в этой области исследования.

Значительную роль в развитии аналитических методов теории вероятностей сыграли труды Муавра (1667-1754), П. Лапласа (1749-1827), К. Гаусса (1777-1855), С. Пуассона (1781-1840), П.Л. Чебышева (1821-1894), А.А. Маркова (1856-1922), А.М. Ляпунова (1857-1918), где были развиты так называемые предельные теоремы, которые внесли большой теоретический и практический вклад в дальнейшем развитии теории вероятностей.

В XVII-XIX веках центральное место в развитии теории вероятностей занимали исследования русских учёных П.Л. Чебышева, А.А. Маркова, А.М. Ляпунова. Некоторый итоги о достижениях русской науки были опубликованы В.Я. Буняковским (1804-1889). Им был написан первый в России курс теории вероятностей, оказавший большое влияние на развитие интереса к этой молодой области науки математики. С половины XIX столетия и примерно до двадцатых годов XX века в России широко культивировались исследования по применению теории вероятностей к статистике, которая применялась в особенности к страховому делу и демографии.

В конце XIX начале XX века благодаря исследованиям П.Л. Чебышева, А.А. Маркова и А.М. Ляпунова были созданы методы доказательств предельных теорем для сумм независимых произвольно распределённых случайных величин.

В развитие теории вероятностей большой вклад внесли математики советского периода: С.Н Бернштейн (1880-1968), Е. Слуцкий (1880-1948), П. Леви (1886-1971), А.Я. Хинчин (1894-1959), А.Н. Колмогоров (1903-1987), Б.В. Гнеденко (1912-1995) и ряд других. А также следует отметить вклад учёных Н. Винер (1894-1964), Э. Борель (1871-1956), В. Феллер (1906-1970), Р. Фишер (1890-1962) и многие другие.

С формально-аналитической точки зрения к этому же направлению примыкает работа основоположника неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевского (1792-1856), посвящённая теории ошибок при измерениях на сфере и выполненная с целью установления геометрической системы, господствующей во вселенной.

Следует особо отметить, что теория вероятностей как самостоятельная наука получила строгое формально-логическое обоснование на базе теории множеств. Впервые академик А.Н. Колмогоров, сформулировал и установил ***аксиоматику теории вероятностей*** (примерно в 1933 г.), используя прямое сходство алгебраических операций над подмножествами данного универсального множества и над событиями данного пространства элементарных событий.

Теория вероятностей способствовала существенному развитию математических дисциплин: математическая статистика, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, генетика, теория управления и ряда других. Современная теория вероятностей как научная дисциплина является строго обоснованной математической наукой. Она широко использует информацию и достижения в самых различных сферах человеческой деятельности и имеет многочисленные приложения в естественных и гуманитарных науках.

Уместно вспомнить некоторые моменты исторического развития естественных наук. Так, Исаак Ньютон (1643-1727), применив свой вариант дифференциального и интегрального исчисления, определил фундамент направления механистического детерминизма в виде основных законов динамики (механистического движения).

В скором времени, науке пришлось обратиться к более сложному движению, а именно тепловому движению. Оказалось, что механистического подхода в описании тепловых процессов недостаточно. Для этой цели потребовалось введение в схему описания данных процессов новых математических конструкций (закон Фурье, обнаруженный им в начале XIX века) и феноменологических показателей состояний систем (энтропия Клаузиуса).

Феномен энтропии, ставший важнейшей категории в методологии познания реального мира и процессов его развития был раскрыт Л.Больцманом (1844-1906), сформулировавшим в 1872 г. статистическую концепцию второго закона термодинамики.

Новый подход Л. Больцмана не заключался в том, чтобы ввести понятие вероятности в физике как средство аппроксимации. А в действительности он показал *принцип использования вероятности для демонстрации нового типа поведения систем, состоящих из огромного числа элементов.*

Наличие большого количества популяции систем позволяло применять законы теории вероятности, идеи перехода от микроскопического уровня к макроскопическому Больцман заимствовал у Дж. Максвелла (1831-1879), который в 1859 г. представил вероятностное распределение по скоростям молекул системы в состоянии термодинамического равновесия при условии, что поступательные движения молекул описываются законами классической механики. Фактически, Дж. Максвелл впервые показал диалектическую связь механистического и вероятностного детерминизма. Примечательно, что такое решение у Максвелла возникло под влиянием трудов одного из создателей научной статистики Л. Кетле (1796-1847), который первым ввел в социологию понятие «среднего» человека.

Использование вероятностного подхода дало ощутимые результаты в исследовании неравновестных систем, в которых реверсивно по отношению к равновесным системам хаос порождает новый порядок, новую более сложную организацию. Работы брюссельской школы во главе с лауреатом Нобелевской премии И. Пригожиным сформировали новую мировоззренческую платформу, представляющую случайность как важнейший атрибут эволюционного развития. Значительную роль в формировании современного научного мировоззрения сыграли весомые достижения в области генетики, биологии, химии, квантовой механики и других наук, полученные благодаря вероятностной интерпретации наблюдений (опытов, испытаний, экспериментов и т.д.). Следует особо отметить достижения в области информационных наук, например, так первой и пока единственной успешной попыткой определения информации можно назвать вероятностную теорию информации, основы которой были заложены математиком и инженером К. Шенноном в середине XX века.

Этот краткий исторический экскурс, представляющий эволюционную роль теории информации показывает значимость этой научной дисциплины в информационно-аналитической деятельности, в раскрытии описании реальных явлений и процессов на базе теории вероятностей и математической статистики

В огромном количестве случаев человеческой деятельности информация и разумная статистическая обработка полученных результатов окажут исследователю и в нашей повседневной жизнедеятельности неоценимую помощь, чтобы избежать от многих ошибок и нежелательных явлений.

Математическая статистика – раздел математики, в которой изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений с целью выявления присущих им закономерностей. Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей. Она возникла в XVII веке и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Эти математические дисциплины занимаются выявлением и изучением вероятностных закономерностей массовых случайных явлений.

Предметом математической статистики является изучение массовых случайных величин по результатам наблюдений (или специально поставленных экспериментов). В процессе исследоваия этих задач формируются методы сбора полученных данных в результате наблюдения (опыта, испытания, эксперимента, и т.д.), массовых случайных явлений с целью установления вида и основных свойств, предлагаемой математической модели.

Первая *задача математической статистики* – полученные результаты наблюдений некоторым способом представляются в удобном виде (для обозрения, анализа и систематизации)

Вторая *задача математической статистики* – дать предварительную оценку и приблизительную рекомендацию (оценку) и указать направление исследования, *интересующих* нас *характеристик*, наблюдаемой случайной величины. Например, чтобы представить приемлемую информацию относительно неизвестных параметров случайной величины в условиях неопределённости: оценку неизвестной вероятности, неизвестной функции распределения, оценку математического ожидания, оценку дисперсии и оценку параметров распределения, вид которых неизвестен и множество других статистических параметров.

Третья *задача математической статистики* – *проверка статистических гипотез,* т.е. решение вопроса соответствия (согласования) результатов оценивания с опытными данными.

При решении стандартных задач, выдвигаются гипотезы:

- наблюдаемая случайная величина подчиняется нормальному закону;

- математическое ожидание наблюдаемой случайной величины равно нулю, а её дисперсия равна единице (нормированный закон распределения);

- случайная величина имеет заданную вероятность и т.д.

«*Математическая статистика – это наука о принятия решений в условиях неопределённости».*

Одной из важнейших задач математической статистики является разработка методов, позволяющих по результатам обследования «*выборки»* (т.е. часть исследуемой совокупности от всей рассматриваемой совокупности объектов) делать обоснованные выводы о распределении того или иного признака (случайной величины) изучаемых объектов по всей совокупности.

Результаты исследования статических данных методами математической статистики используются для принятия обоснованных решений в задачах: управления различными процессами, прогнозирования и планирования организации производства, при контроле и качества выпуска продукций, при выборе оптимального времени настройки и запуска объектов в технологических процессах или своевременной замены частей действующей аппаратуры и т.д.

Бурное развитие математической статистики приходится на XIX-XX вв. и оно обязано в первую очередь трудам Я. Бернулли, П. Лапласса, К. Пирсона. В современном этапе развитии определяющую роль сыграли труды Г. Крамера, Р. Фишера, Ю. Неймана, П. Чебышева, А.М. Ляпунова, А.Я. Хинчина А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина Б..В. Гнеденко, Ю.В. Прохорова, А.Г. Постникова, С.Х. Сироджиддинова и многих других.

В завершение этого краткого исторического экскурса (подробную историческую информация можно прочитать в [1]), а мы приведём высказывания великих людей, на наш взгляд, имеющие прямое отношение к этой науке [2]:

- **Истина была единственной дочерью времени**. Да Винчи Леонардо (1452-1519).

- **Знания неврожденные опытом – матерью всякой достоверности, бесплодны и полны ошибок.** Да Винчи Леонардо.

- **Сомнение – это полпути к мудрости.** Публий Сир.

- Сомнение – это критерий веры. И. Зейме.

- **Дела мои - любовь и истина, труды радость и счастье. О, жизнь моя! Твои плоды истина и любовь**. Джами Абдрахмон Нураддин ибн Ахмад (1414-1492).

- В **одиночестве человек невыжил бы. Всё, то в чём он нуждается, он получает лишь благодаря обществу**. Абу- Али ибн Сина (Авицена 980-1037).

- **Среди мудрых нет чужаков!** Иоанн Дамаскин (Иоанн-Мансур, ок.675-до 753).

Далее приступим непосредственно к краткой характеристике разделов (глав) книги.

Курс лекций состоит из 7 глав, два из них предложены в качестве дополнения 1 и 2. Третье дополнение относится к примерам решения задач с использованием системы «Statistica». В конце имеются 7 приложений, состоящие из таблиц значений плотности распределений, функции распределений и т.д. Каждое из них пронумеровано (Приложение 1, 2 и т.д.). При составлении данного курса – лекций мы опирались на известные апробированные учебники и источники по теории вероятностей и математической статистике [1-13].

Главы объединены по темам, все темы и разделы снабжены численными примерами в необходимом количестве, а также имеются теоретические примеры, задачи и упражнения для самостоятельной работы.

В первую главу «**Случайные события и их вероятности**» входят с 1 по 6 темы. Где изложены:

- основы теории случайных событий (тема 1);

- элементы комбинаторики (в более развернутой подробной форме) и их применение к вычислению вероятностей (тема 2);

- определение вероятностей (классическое, статистическое и геометрическое), аксиоматическое построение теории вероятностей, данное академиком А.М. Колмогоровым (тема 3);

- теоремы сложения и умножения вероятностей и применение к их подсчету элементов комбинаторики, а также некоторые известные классические теоретические задачи (тема 4);

- формула полной вероятности, одно из важнейших понятий теории вероятностей – повторные независимые испытания (схемы испытания Бернулли), вероятность гипотез (формулы Байеса), кроме этого приводятся соответствующие выводы относительно наиболее вероятностного числа успехов независимых испытаний (тема 5);

- предельные теоремы к теореме Бернулли (формула Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа), а также дается обоснование закона больших чисел в форме Бернулли на основании интегральной формулы Муавра-Лапласа (тема 6).

Отметим, что каждая тема снабжена многочисленными примерами, иллюстрирующими содержание соответствующих пунктов каждой темы.

Переходим к характеристике второй главы «**Случайные величины**», содержащую 4 темы (7-10):

- рассматриваются случайные величины (дискретные и непрерывные), законы их распределения, функции плотности и функции распределения дискретной и непрерывной случайной величины, а также включен раздел о производящей функции конечной дискретной случайной величины (тема 7);
- исследуются числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение) случайных величин, а также среднее квадратичное отклонение одинаково распределенных взаимно-независимых случайных величин, кратко рассматриваются понятия моды и медианы, моменты случайных величин, ассиметрия и эксцесс, и кроме того с помощью производящих функций вычисляются соответствующие теоретические законы распределения случайных величин (тема 8);
- излагаются основные законы дискретных и непрерывных случайных величин (биномиальный закон распределения, распределение Пуассона, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение, равномерный закон распределения, показательный закон распределения, функция надежности, показательный закон надежности и характеристическое свойство показательного закона распределения, а также нормальный закон распределения), (тема 9);
- кратко рассмотрены предельные теоремы теории вероятности (неравенство Чебышева и Маркова, теорема Чебышева, доказан закон больших чисел в форме Чебышева, рассматривается на базе неравенства Чебышева доказательство закона больших чисел в форме Бернулли, а также исследуется центральная предельная теорема Ляпунова и ее применения) и примеры на применении нормального закона распределения случайных величин с использованием теоремы Ляпунова.

Переходим к описанию третьей главы **«Системы случайных величин»**, в которую входят 5 тем (с 11 по 15), в которых рассматриваются:

- системы случайных величин и законы их совместного распределения (понятие системы нескольких случайных величин, закон распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее интегральная функция, вероятность попадания точки в полосу и в прямоугольник, плотность совместного распределения вероятностей, интегральная функция распределения и связь функции плотности, зависимость и независимость двух случайных величин, условные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин), (тема 11);
- исследуются числовые характеристики двумерной случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, корреляционный момент, коэффициент корреляции и некоторые выводы относительно двумерного нормального распределения, линейная регрессия и прямые линии среднеквадратической регрессии, условное математическое ожидание, линейная корреляция и нормальная корреляция), (тема 12);
- рассматриваются кратко многомерные случайные величины (определения и примеры, характеристическая функция, примеры вычисления характеристических функций дискретных случайных величин – биномиального закона, закона Пуассона, геометрического закона и характеристическая функция непрерывных случайных величин – равномерного закона, показательного закона и нормального закона), (тема 13);
- весьма кратко рассматриваются функции случайных величин (функция одного и двух случайных аргументов), (тема 14);

- исследуются некоторые распределения функций нормальных случайных величин (распределение χ^2– квадрат распределения Пирсона, распределения Стьюдента, распределения Фишера-Снедекора), (тема 15).

В четвертой главе **«Теория случайных процессов»** исследуются основы теории случайных процессов, в которую входят 2 темы – 16 и 17:

- в теме 16 исследуются понятие случайной функции, стохастические процессы, процесс Пуассона, классификация случайных процессов, основные числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция случайного процесса), а также стационарный случайный процесс в узком и широком смысле, линейные и нелинейные преобразования случайных процессов, дифференцирование и интегрирование случайных процессов, элементы спектральной теории стационарных случайных процессов (функций), спектральная плотность, теорема Винера-Хинчина и стационарный белый шум (дельта-функция);

- в теме 17 рассматриваются марковские случайные процессы (излагаются понятия марковских цепей, марковские случайные процессы, дискретный марковский процесса, цепь Маркова, примеры марковских цепей, расчет цепи Маркова для стационарного режима и понятие о непрерывном марковском процессе, выводится уравнение Колмогорова).

В главе 5 **«Элементы математической статистики»** рассматриваются основные понятия и задачи математической статистики, в которую входят 3 темы – 18, 19, 20:

- в теме 18 рассматривается основные понятия и задачи математической статистики, генеральная и выборочная совокупности, статистическое распределение выборки, эмпирическая функция распределения, графическое изображение статистического распределения – полигон и гистограмма, и числовые характеристики эмпирического статистического распределения;

- в теме 19 исследуются элементы и теории оценок и проверки гипотез (оценки параметров распределения, требования предъявляемые к оценкам параметров, точечные оценки математического ожидания и дисперсии, оценки параметров нормального распределения, методы нахождения точечных оценок параметров распределения, метод моментов, метод максимального правдоподобия, сглаживание экспериментальных зависимостей – метод наименьших квадратов, интервальное оценивание параметров, доверительные интервалы для параметров нормального распределения, доверительный интервал для математического ожидания при известной и неизвестной дисперсии, доверительный интервал для среднеквадратического отклонения и другие характеристики вариационного ряда – мода, медиана, размах варьирования и т.д.);

- в теме 20 исследуется проверка статистических гипотез (задачи статистической проверки гипотез, статистическая гипотеза, статистические критерии, проверка гипотез об однородности двух или более анализируемых совокупностей, проверка гипотез о законе распределения, критерий согласия χ^2– критерий Пирсона, критерий Колмогорова, критерий однородности Смирнова), а также проверка гипотез об однородности параметров распределения – критерий Стьюдента (t – критерий), критерий Фишера (F – критерий) и построение статистических регрессионных моделей;

В главе 6 качестве Дополнения 1 предлагается **Прикладные вероятностные теории**, которая включает себя тему 21, название которой «Основы теории информации», в ней рассматривается:

- энтропия как мера неопределенностей;
- характеристика (определение) количества информации;
- основы теории измерений;
- основы теории кодирования и передачи информации;
- основные понятия формирования экономического кода информации;
- характеристика канала передачи информации;

- основы теории надежности и количественные характеристики надежности элементов, надежности системы.

Дополнение 2 включает в себя главу 7 **«Элементы теории массового обслуживания»**, состоящая из темы 22 и 23, где рассматриваются кратко:

- системы массового облуживания (структура и классификация системы массового обслуживания, Марковские случайные процессы с отказами, расчет системы массового обслуживания, системы массового обслуживания с неограниченным ожиданием и ограниченной длиной очереди), замкнутые системы массового обслуживания, (тема 22).

Тема 23 посвящена моделированию случайных величин методом Монте-Карло, где исследуются: метод Монте-Карло, случайные числа, оценки погрешностей метода Монте-Карло (разыгрывание дискретной случайной величины противоположных событий, полной группы событий, непрерывной случайной величины). Кратко исследуются метод обратных функций, метод суперпозиции, приближенное разыгрывание нормальной случайной величины, расчет многоканальной системы массового обслуживания метода Монте-Карло и применение метода Монте-Карло к вычислению определенных интегралов.

Дополнение 3 посвящено примерам решения задач с использованием системы «Statistica», где рассматриваются краткая характеристика системы, описательная статистика, построение гистограммы и проверка закона распределения, построение статистических регрессионных моделей и построение статистических регрессионных моделей методом шаговой регрессии.

Напомним, что каждая глава является автономной, в том смысле что, нумерация примеров и формул самостоятельная, ссылки на них осуществляется по принципу, например тема 10, пункт 5, формула 5, что означает указание на данную тему, пункт и соответствующую формулу. Нумерация рисунков в главах сквозная, за исключением глав дополнений.

В завершении мы благодарны нашим рецензентам: кандидатам физико-математических наук, доцентам: Аяшинову Масыгуту Макежановичу (ИнЕУ) и Павлюк Ивану Ивановичу (ПГУ им. С. Торайгырова) за ценные советы. А также выражаем благодарность Исмоиловой Наргис Додожоновне, которая постоянно помогала при формировании компьютерной версии данного курса лекций.

Данный курс лекций возник в течении ряда лет при проведении авторами теоретических и практических занятий по предмету «Теория вероятностей и математическая статистика и их приложения» в Таджикском Государственном университете им. В.И. Ленина (в настоящее время ТГНУ), Таджикском Государственном университете права, бизнеса и политики (ТГУпбп), Павлодарском Государственном педагогическом институте (ПГПИ) РК, Инновационном Евразийском университете (ИнЕУ) г. Павлодар РК.

Два величайших тирана на земле: случай и время.
Любое преувеличение - это вышедшая из себя истина!
Случайные события – спутники нашей жизни,
Необходимо о них постоянно помнить и изучать!

ГЛАВА I

Случайные события и их вероятности

Тема 1. Случайные события

1. Понятие испытаний, события

В естественных науках познание действительности происходит в результате испытаний (экспериментов), наблюдений или опыта. Под испытанием (наблюдением, опытом или экспериментом) в общем случае понимается наличие определенного комплекса условий, при которых проводится *целенаправленное испытание*. Можно предложить следующее определение.

*Целенаправленная деятельность, проводимая (происходящая) при наличии определенного комплекса условий с целью выявления того или иного результата, будем называть **испытанием**.*

Любой возможный результат – исход испытания или наблюдения называется событием.

Примеры:

а) Бросание монеты **– испытание**. Выпадение орла или решётки **– событие.**

б) Стрелок, стреляющий по мишени, разделенной на четыре участка.

Выстрел **– испытание.** Попадание в определенный участок мишени **– событие.**

в) В урне имеются цветные шары. Из урны берут один шар. Извлечение шара из урны – **испытание.** Появление шара определенного цвета **– событие.**

В теории вероятностей принято рассматривать три вида событий: ***достоверное, невозможное и случайное***.

1) ***Достоверным*** – называется событие, которое обязательно произойдет в данном испытании.

2) ***Невозможным*** – называется событие, которое заведомо не произойдет в данном испытании.

3) ***Случайным*** – называется событие, которое в данном испытании может произойти или не произойти, т.е. результат испытания нельзя заранее спрогнозировать (или предугадать).

Ожидаемые результаты при следующих ***испытаниях***: в подбрасывание игрального кубика (косточки), подбрасывание монеты (игра в орлянку), футбольного матча, стыковка двух космических кораблей точно в заранее назначенное время, выпуск готовой продукции в производстве и т.д., являются примерами событий.

Рассмотрим конкретные примеры для каждого вида событий:

- в урне, имеются лишь белые шары. Извлечение белого шара (событие A) - является *достоверным* событием.

- в урне имеются лишь белые шары, извлечение из урны цветного шара (событие B) - *невозможное* событие.

- подброшенная монета, она может упасть либо орлом, либо решеткой (событие C) - является *случайным* событием (если монета выпадёт *гранью*, то опыт вновь повторяется).

- при игре в домино открытие первоначально любой кости (их всего 28; от (0;0) до (6;6)) из набора - это *случайное* событие.

- если тело свободно падает на земную поверхность, то пройденный им путь s за t секунд после начало падения, равен $s = gt^2/2 -$ это *достоверное* событие (где g- постоянное число и выражает скорость свободного падения тела).

- если химически чистую воду при атмосферном давлении 760 мм рт. ст. нагреть до $100^0 C$, то вода начинает превращаться в пар – это *достоверное* событие.

- при любых химических реакциях, каких угодно веществ без обмена с окружающей средой общее количество вещества остаётся неизменным (*закон сохранения вещества*) – это *достоверное* событие.

События обозначаются заглавными буквами: $A, B, C, \cdots; A_i, B_j, C_k, \cdots$

Понятие событий связаны со стохастическим процессом испытания (действительной или умозрительной), если заранее нельзя предугадать его результат или исход.

Результаты (исходы) стохастического опыта называются ***случайными событиями*** *или просто* ***событиями***.

Таким образом, возникает вполне конкретная задача: поскольку случайные события «врываются» в нашу жизнь помимо нашего желания и постоянно окружают нас, необходимо научиться их изучать и для этой цели разработать методы их изучения.

Со случайными явлениями мы вынуждены сталкиваться в нашей жизни не время от времени, а постоянно, и зачастую именно они определяют структуру того или иного интересующего нас процесса, тем самым случайные события играют большую роль в нашей повседневной жизни, как в научных исследованиях, так и в практической деятельности.

2. Виды случайных событий, пространство элементарных событий

Несколько событий называют ***равновозможными,*** если в результате опытов ни одно из них не имеет большую возможность появления, чем другие.

Несколько событий называют ***не равновозможными,*** если в результате опытов хотя бы одно из них имеет большую возможность появления, чем другие.

Противоположным событием к данному событию A называется событие, которое происходит только тогда, когда не происходит событие A и оно обозначается через $\overline{A}$.

Примеры:

1) «*выпадение герба на монете при одном подбрасывании*» является противоположным событием к событию – «*выпадение решётки*». Этот же пример относится к *равновозможным* событиям

2) В ящике имеются три вида учебников по математике 6 книг, по физики 7 книг и по химии 3 книги. Произвольное извлечение из ящика одной книги *не равновозможное* событие.

События называются ***совместными*** **(*совместимыми*),** если появление одного из них не исключает появление других.

Пример: Из колоды карт случайно извлекли десятку *пики* (событие A), затем извлекли еще одну карту масти *пик* (событие B). Ясно, что события A и B могут быть совместными.

События называются ***несовместными (несовместимыми),*** если появление одного из них исключает появление других (другого).

Пример: Из ящика с деталями наудачу, извлекают одну деталь, появление стандартной детали исключает появление нестандартной. (Стандарт – событие A, нестандарт – событие B, они несовместны).

События, которые нельзя разделить на более простые события, называются ***элементарными*** событиями.

Пример: При бросании игральной косточки численная мера ожидания выпадение одной из цифр (от 1 до 6) равна 1/6. Появление каждого события ω_j во множестве $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$, равновозможные события (т.е. появления цифры $j = 1, 2, \cdots, 6;$ - равновозможные), при этом появление каждого из этих ***элементарных событий*** считается несовместными.

*Множество всех событий рассматриваемого опыта, одно из которых об*язательно *произойдет, причем любые, два из которых, несовместимы, называется* *полной группой событий*.

Отметим, что противоположные события образуют полную группу событий: $\Omega = \{A, \bar{A}\}$.

Равновозможные события, называются также ***случаями*** (***шансами***), ***событиями.***

Случай называется ***благоприятным событием***, если появление этого случая влечет за собой наступления некоторого события.

Событие *А*, состоящее из нескольких элементарных событий, называется ***составным.*** Каждое элементарное событие, принадлежащее событию *А* может благоприятствовать наступлению этого события в данном испытании.

Пример: Рассмотрим один из возможных случаев появления цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при подбрасывании игральной кости. Пусть событие *А – выражает выпадение только чётных цифр, а событие В – выражает выпадение не четных цифр*.

Очевидно, *А* и *В* являются ***случайными***, ***противоположными, составными, несовместными, равновозможными и образуют полную группу.***

В общем случае, если каждый элемент множества □ выражает какой-либо элементарный исход эксперимента, и наоборот любой элементарный исход данного эксперимента является элементом множества □, то множество □ называется ***пространством элементарных событий*** или ***вероятностным пространством.***

Вероятностью события называется «***численная мера***» степени объективной возможности наступления этого события. Вероятность любого события *А* заключена между нулем и единицей (см. ниже более полное определение).

Алгебра событий. В вероятностных пространствах используются алгебраические операции между событиями, аналогичные алгебраическим операциям, которые рассматриваются между подмножествами данного универсального множества (т.е. множества подмножеств данного множества).

3. Теоретико-множественная трактовка, алгебра событий

Определим основные понятия теории вероятностей, следуя теоретико-множественному подходу, разработанные академиком Колмогоровым А.Н. в 1933 году.

Пусть производится некоторый опыт (эксперимент) со случайным исходом. Множество $\Omega = \{\omega\}$ всех возможных взаимоисключающих исходов данного опыта называется *пространством элементарных событий, а сами исходы* ω *являются элементарными событиями* (или «элементами», «точками» пространства Ω).

Случайным событием *А* (или просто событием) называется любое подмножество множества Ω, если Ω конечное или счетное (т.е. элементы этого множества можно пронумеровать с помощью множества натуральных чисел), при этом считается $A \subseteq \Omega$.

Элементарные события, входящие в подмножество A пространства Ω, называются *благоприятствующими* событиями к *событию* A.

Множество Ω всегда является *достоверным событием.* Ему благоприятствует любое элементарное событие, которое в результате данного опыта непременно произойдёт.

Пустое множество $\varnothing$ всегда является *невозможным событием,* то есть в результате данного опыта оно произойти не может. Над событиями можно определить основные операции существующие для множеств.

Пусть $A,\ B,\ C,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\cdots$ являются элементами пространства Ω.

В формулировках многих задач при случайном выборе (чего-либо) часто употребляется слова «***наудачу***», «***случайным образом***». Эти слова означает, что все комбинации элементов, которые могут быть выбраны в рассмариваемом эксприменте, равновозможны.

Приведем основные алгебраические операции над событиями в данном элементарном пространстве Ω.

Суммой **(*или объединением*)** двух событий $A\in\Omega$ *и* $B\in\Omega$ называется такое событие, которое выражает появление хотя бы одного из событий *A* или *B*, и обозначается *A+B* (или $A\cup B$). Другими словами, под событием *A+B* понимают событие, которое произошло при тех исходах, когда произошло или событие A или событие B или оба произошли одновременно, т.е. произошло хотя бы одно из событий A или B. Достоверное событие Ω изображается прямоугольником, элементарные случайные события-точками прямоугольника. На рисунке 1, приведена *диаграмма Эйлера-Венна для сложения двух событий* по аналогии с операцией сложения двух множеств:

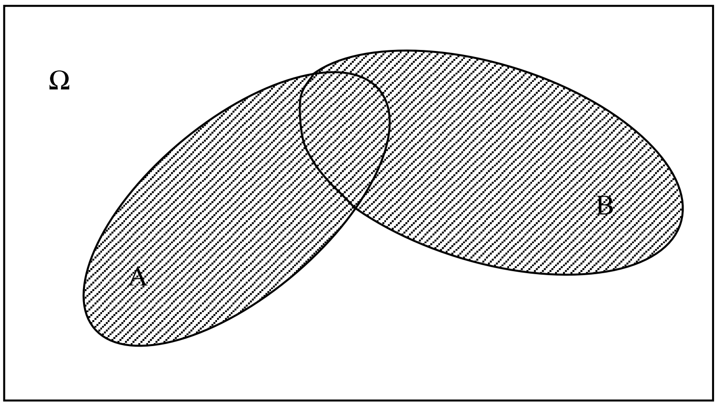


Рисунок 1

Произведением двух событий $A\in\Omega$ *и* $B\in\Omega$ называется событие, состоящее из тех элементарных исходов, которые одновременно входят как в *A* так и *B* (обозначается $A\cdot B$ (или $A\cap B$). Другими словами, $A\cdot B$ означает событие, при котором события *A* и *B* происходят одновременно. Действие произведения над событиями можно наглядно иллюстрировать с помощью *диаграммы Эйлера-Венна.* Достоверное событие Ω изображается прямоугольником, случайное событие – областью внутри прямоугольника. Действие произведения над событиями можно изобразить геометрически, оно показано на рисунке 2.

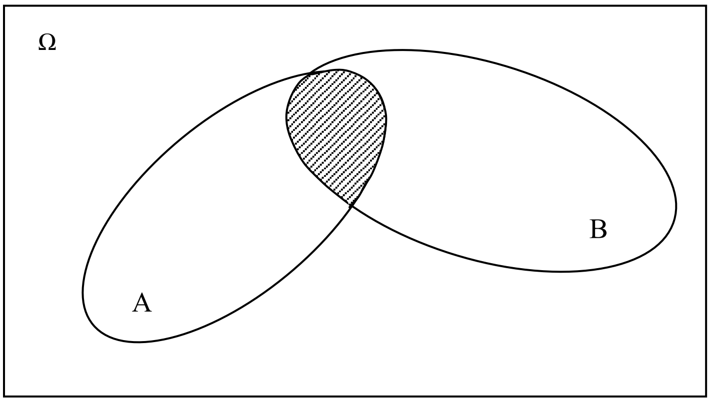


Рисунок 2

Пример. Каждый из трех стрелков произвел по одному выстрелу по цели. Пусть A – выражает попадание в цель первым стрелком, B – вторым стрелком и C – третьим стрелком. Нужно раскрыть смысл следующих событий:

1. $E_1 = A + B$;

2. $E_2 = A \cdot B \cdot C$;

3. $E_3 = A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$.

Решение: Расшифруем каждого из трёх случаев

1. $E_1 =$ $A+B$ - в цель попал либо первый A либо второй B стрелок или оба стрелка.

2. $E_2 = ABC$ - в цель попали все три стрелка.

3. $E_3 = AB+AC+BC$ - в цель попали либо первый и второй стрелки, либо первый и третий стрелки, либо второй и третий стрелки.

Разностью событий $A \in \Omega$ *и* $B \in \Omega$ (обозначается $A \setminus B$ *(или* $A - B$*)* называется такое множество, которое содержит элементы события *A,* не принадлежащие событию *B*.

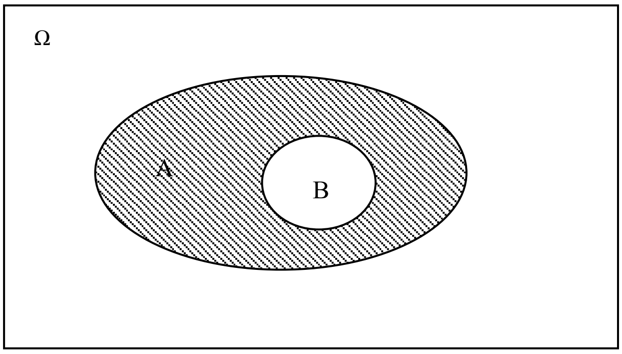


Рисунок 3

Говорят, что событие $A \in \Omega$ влечёт за собой событие B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элементы событие A содержится в B. (см. рисунок 3).

По определению невозможного события имеет место $\varnothing \subseteq A$, для любого $A \subseteq \Omega$.

Определения суммы и произведения событий справедливы для трех и более событий.

Невозможное событие будет обозначать $\varnothing$, а $\Omega -$ достоверное.

Операции над событиями обладают следующими свойствами (*аналогичные свойствам указанных операций над множествами*):

1. $A \cup A = A;\ A \cap A = A;$

2. $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A;$

3. $(A \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = A \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C});\ (A \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} = A \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C});$

4. $A \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (A \cup B) \cap (A \cup \mathrm{C});\ A \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (A \cap B) \cup (A \cap \mathrm{C});$

5. $A \setminus B = A \cap \overline{B};\ B \setminus A = B \cap \overline{A};$

$(\overline{A \setminus B} = \overline{A \cdot \overline{B}};\ (\overline{B \setminus A} = \overline{B \cdot \overline{A}};\ \ A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B).$

6. $(A \cup \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = (A \cap \overline{\mathrm{B}}) \cup (B \cap \overline{\mathrm{A}});$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} -$ (законы де Моргана).

Для проверки вышеуказанных свойств событий хорошо применяется графический метод (схема Эйлера-Вена иллюстрации к событиям). Рекомендуем в качестве самостоятельной работы проверить свойства операций над событиями. Отметим ещё некоторые тривиальные свойства операции над событиями:

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A;$$

$$A \cap \Omega = \Omega \cap A = A;$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing.$$

Если для элементарных событий $A_1, A_2, \cdots, A_n$ выполнены условия $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing;\ (i \neq j)$, то говорят, что эти события образуют ***полную группу элементарных событий.***

Полную группу событий образуют, любое событие A и его противоположное $\overline{A}$: $A + \overline{A} = \Omega;\ A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

В случае *несчётного пространства* Ω в качестве событий рассматривается не все подмножества Ω, а лишь некоторые классы этих подмножеств, называемые *алгебрами* или σ *-алгебрами* множеств.

Класс $S -$ полученное (образованное) из подмножеств пространства Ω, называется *алгеброй множеств (событий)*, если выполнены одновременно следующие требования:

1. $\varnothing \in \mathrm{S};\ \Omega \in \mathrm{S};$
2. Из того, что $A \in S$ вытекает, что $\overline{A} \in S$;
3. Из $A \in S$, $B \in S$ вытекает, что $A + B \in S; A \cdot B \in S.$;

Алгебру событий образует, например, система подмножеств $S = \{\varnothing; \Omega\}$. Действительно, в результате применения любой из вышеприведённых операций к любым элементам класса S снова получается элемент даннойсистемы: $\varnothing + \Omega = \Omega;\ \varnothing \cdot \Omega = \varnothing;\ \overline{\varnothing} = \Omega;\ \overline{\Omega} = \varnothing$.

При расширении операций сложения и умножения на случай счётного множества алгебра множества S называется σ *- алгеброй,* если из того, что $A_n \in S;\ n = 1,2,3,\cdots$, следует следующие предельные свойства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in S;\quad \prod_{n=1}^{\infty} A_n \in S.$$

Для этого достаточно выполнения одного из этих условий. Также отметим, что если пространство элементарных событий Ω конечно или счетное, то множество всех подмножеств образует алгебру.

Замечание. Ввиду того, что имеется прямое сходство операций над множествами и над событиями, поэтому все основные аналоги свойства операций над множествами без существенных изменений имеют место и для множества событий.

Используя выше приведённые действия над множествами, можно доказать новые и весьма полезные утверждения. Здесь мы приведём одно из них, а именно для любых двух событий A и B имеет место утверждение.

Сумму любых двух событий можно представить в виде суммы двух несовместных событий.

Действительно, имеем

$$A+B=(A+B)\cdot\Omega=A\cdot\Omega+B\cdot(A+\overline{A})=A\cdot\Omega+(A+\overline{A})\cdot B=$$

$$=A\cdot\Omega+A\cdot B+\overline{A}\cdot B=A\cdot(\Omega+B)+\overline{A}\cdot B=\Omega\cdot A+\overline{A}\cdot B=A+\overline{A}\cdot B.$$

Геометрическое доказательство рассматриваемого свойства можно изобразить по схеме Эйлера-Венна в виде равенства двух картинок.

Задание. Выполните чертёж и убедитесь самостоятельно.

<u>Тема 2</u>. Элементы комбинаторики и применение

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

Комбинаторика имеет непосредственное отношение к теории вероятностей. Близость этих разделов обусловлена, прежде всего, классическим способом подсчёта вероятностей. Формула, $P(A)=m/n$, где n – число всех элементарных исходов опыта, а $m-$ число исходов, благоприятных для A, сводит вычисления $P(A)$ к нахождению отношения двух чисел n и m; последняя задача во многих случаях носит явно комбинаторный характер. Кроме теории вероятностей, комбинаторика используется в теории вычислительных машин, теории автоматов, некоторых задачах экономики, биологии, генетики и т.д.

1. Правило суммы и произведения.

Решение многих комбинаторных задач базируется на двух фундаментальных правилах, называемых, соответственно, правила *суммы* и *произведения*.

1^0. **Правило суммы.** Правило суммы выражает следующий вполне конкретный факт: если X и Y - два непересекающихся конечных множества, то число элементов, содержащихся в объединении этих множеств, равно сумме чисел элементов в каждом из них. Действительно, если условимся обозначить число элементов конечного множества $n=|X|,\ m=|Y|$, то правило суммы запишется равенством

$|Z|=|X+Y|=|X|+|Y|=n+m$. Это правило легко обобщается для любого числа непересекающихся k множеств: если $X_1, X_2,\cdots,X_k-$ какие-то попарно непересекающиеся конечные множества, тогда их сумма определяется равенством:

$$|X_1+X_2+\cdots+X_k|=|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_k|.$$

Следует заметить, что задачи, которые можно решить применением только правила суммы, в основном несложные. Обычно правило суммы полезно использовать вместе с правилом произведения.

2^0. **Правило произведения.** Пусть заданы последовательности данной длины k: $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, состоящие из некоторых элементов $x_1, x_2, \cdots, x_k$ (необязательно различных). Для краткости условимся называть такие последовательности $k-$*мерными строками.* Две строки $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ и $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ будем считать различными в том и только в том случае, если хотя бы для одного номера i (из совокупности 1, 2, … , k) элемент $x_i \neq y_i$. Правило произведения формулируется следующим образом.

Пусть элемент x_1 может быть выбран n_1 способами; при каждом выборе x_1 элемент x_2 может быть выбран n_2 способами; при каждом выборе пары $\{x_1, x_2\}$ элемент x_3 может быть выбран n_3 способами; и т.д.; наконец, при каждом выборе $\{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}\}$ элемент x_k может быть выбран n_k способами. Тогда число различных строк $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$.

Это правило доказывается индукцией по k. Пусть $k = 2$. Обозначим через $a_1, a_2, \cdots, a_{n_1}$ различные значения для x_1. Среди строк $\{x_1, x_2\}$ имеется ровно n_2 строк, начинающихся с a_1, т.е. строки вида $\{a_1, x_2\}$, ровно n_2 строки, начинающихся с a_2, и т.д. Следовательно, число всех строк $\{x_1, x_2\}$ будет:

$$n_2 + n_2 + \cdots + n_2 = n_1 \cdot n_2;$$

число слагаемых равно n_1.

Предположим теперь, что правило произведения справедливо для строк длины k, тогда докажем, что оно верно и для строк длины $k+1$.

Любую строку

$$(*) \qquad (x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1})$$

можно рассматривать как строку из двух объектов: из строки $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ и элемента x_{k+1}. Первый объект, по предположению индукции, может быть выбран $n_2 \cdot n_2 \cdots n_k$ способами; при любом из этих способов элемент x_{k+1} по условию может быть выбран n_{k+1} способами. Далее, применяя уже доказанное правило для строк длины $k = 2$ получим, что число различных строк вида (*) будет $(n_1 \cdot n_2 \cdots n_k) \cdot n_{k+1}$.

Рассмотрим следующий пример. Сколько можно составить пятизначных чисел так, чтобы любые две соседние цифры числа были различны?

Решение. Пятизначному числу с цифрами $x_1, x_2, \cdots, x_5$ можно сопоставить строку $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. При этом выбор цифры x_1 (не нулевых) возможен 9 способами, если x_1 выбрана, то для выбора x_2 (любая из цифр 0, 1, 2,…, 9, отличное от x_1) имеется тоже 9 возможностей, после выбора x_1, x_2 для x_3 снова имеется 9 (любая из цифр 0, 1, 2,…, 9, отличное от x_2) возможностей выбора и т.д.

Применяя правило произведения, находим, что искомое количество чисел есть $9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 9^5$.

2. Размещение с повторениями

Множество с заданным порядком расположения элементов называют ***упорядоченным множеством***.

Например: $(a;b)$, $(b;a)$, $(a;b;c)$, $(b;a;c)$, $(a;b;c;d)$, $(b;d;c;a)$ и т.д.

Пусть множество M состоит из n элементов .

Любая строка длиной m, составленная из элементов множества M, называется размещением с повторениями из n элементов по m.

Словосочетание «***с повторениями***» подчеркивает тот факт, что в строке $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, где $x_i \in M$, некоторые элементы могут повторяться. Например, слово **«папа»** есть размещение с повторениями из двух элементов (**п** и **а**), но количество элементов равно четыре.

Число всех размещений с повторениями из n элементов по m зависит, только от n и m (а не от природы элементов множества M).

Количество всех упорядоченных выборов размещений из n элементов по m $(1 \le m \le n)$ элементов в каждом размещении обозначается $\overline{A}_n^m$. Из правила произведения следует, что

$$\overline{A}_n^m = n\cdot n\cdot \cdots \cdot n = n^m.$$

Пример 1. Сколькими способами m школьников могут разместиться по n аудиториям, если для каждого школьника обязательным условием является только номер аудитории, куда он должен войти, а не занимаемое им в аудитории место?

Решение. Перенумеруем всех школьников по прибытию к месту назначения и условимся, кого из них мы считаем первым, кого вторым и т.д. Пусть x_1 номер выбранной аудитории, первым студентом, x_2 - номер аудитории, выбранной вторым студентом и т.д. Строка $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ полностью характеризует распределение школьников по аудиториям. Каждое из чисел $x_1, x_2, \cdots, x_m$ может принимать любое целое значение от 1 до n. Таким образом, различных распределений по аудиториям будет столько, сколько строк длиною m можно составить из элементов множества $M = \{1, 2, \cdots, n\}$. Следовательно, их будет $\overline{A}_n^m$.

3. Размещения без повторений, перестановки, подстановки

На практике часто возникает необходимость в подсчёте числа строк (той или иной длины), составленных из элементов данного множества M и подчинённых некоторым дополнительным ограничениям. Рассмотрим одну из таких задач. Пусть множество M состоит из n элементов, а $m-$ мерные строки $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, удовлетворяющие следующему условию: все элементы $x_1, x_2, \cdots, x_m$ - *различны* и, естественно, такие строки могут существовать только для $m \le n$.

Любая $m-$мерная строка $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ указанного вида называется ***размещением без повторений*** из n элементов по m или просто ***размещением из*** n ***элементов по*** m .Число всех размещений из n элементов по m обозначается A_n^m .

Пример 2. В группе 20 студентов. Сколькими способами можно назначит старосту и помощника старосты группы?

Решение. Из 20 студентов старосту можно выбрать только 20 способами. Помощника из оставшихся 19 студентов можно выбрать только 19 способами. Поскольку, для каждого выбранного старосты можно подобрать помощника только 19 способами, то общее число всех возможных способов назначить в группе из 2-х человек старостой и помощника старосты, будет всего $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$ - число размещений из 20 по два.

Пример 3. Для праздника в школе ученики раскрашивали флажки в разные цвета. Верхнюю половину флажка красили в один цвет, а нижнюю – в другой. Для раскраски у них имелись синяя, красная, жёлтая и зелёная краски. Сколько различных двухцветных флажков могли подготовить дети к празднику?

Решение. В этом примере тоже размещение из 4 по 2, то есть $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Пример 4. Сколько двухзначных, трёхзначных или четырёхзначных чисел по отдельности из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить, если цифры в любом наборе не повторяются?

Решение. Двухзначных чисел $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$ Трёхзначных чисел $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Четырёхзначных чисел $A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Анализируя аналогичные примеры с числами 1, 2, 3, 4, … можно заметить следующую закономерность, которую сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 1. *Число размещений из* n *элементов по* m *равно ()()*

(1) $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Доказательство. Пусть множество M состоит из n элементов. Рассмотрим $m-$мерные строки $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, удовлетворяющие следующему условию: все элементы $x_1, x_2, \cdots, x_m$ - *различны.*

Чтобы найти A_n^m заметим, что для выбора элемента x_1 имеется n возможностей, если элемент x_1 выбран, то для выбора элемента x_2 остаётся $(n-1)$ возможностей, если уже выбраны элементы x_1 и x_2, то для выбора элемента x_3 остаётся $(n-2)$ возможностей и т.д. Следовательно, пользуясь правилом произведения, находим в итоге, что верно равенство (1).

Задача. Найти количество натуральных чисел, которые могут быть записаны с помощью цифр 0, 1, 2, …, 8, 9 так чтобы каждая цифра встречалась в записи не более одного раза.

Решение. Найдём количество всевозможных $m-$членных перестановок цифр $a_1 a_2 \cdots a_m$, где все a_j различны между собой, $a_1 \neq 1;\ m = 1, 2, \ldots, 10$. Число всевозможных $m-$членных перестановок из 10 цифр равно A_n^m. Количество тех $m-$членных перестановок, которые начинаются с цифры 0, равно количеству $(m-1)-$членных перестановок из оставшихся цифр 1, 2,…,9, т.е. A_9^{m-1} (при $m = 1; A_9^0 = 1$). Поэтому количество всевозможных $m-$ членных перестановок указанного вида составляет $Q_m = A_{10}^m - A_9^{m-1}$, ($m = 1,2,\ldots,10$).

Таким образом, количество искомых чисел равно:

$$\sum_{m=1}^{10} Q_m = \left(\frac{10!}{9!} - \frac{9!}{9!}\right) + \left(\frac{10!}{8!} - \frac{9!}{8!}\right) + \cdots + \left(\frac{10!}{0!} - \frac{9!}{0!}\right) = 8877690.$$

Особо важными являются частные случаи, когда число $m = 1;$, т.е. в строке участвуют только один элемент (одноэлементные строки), тогда равенства: $\overline{A}_n^1 = A_n^1 = A_n = n.$ очевидны.

Если же $m = n$, т.е., когда в строке участвуют *все элементы* множество M (причём каждый по одному разу). Тогда $A_n^n = P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Обычно к этому добавляют равенство $0! = 1$ согласно определению.

*Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел называют **«эн - факториалом»** (происходит от английского языка, смысл, которого примерно переводится как «состоящий из первых n множителей натурального ряда чисел»). Обозначается*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Приведём таблицу значений первых десяти факториалов

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Как видно из таблицы, значение $n!$ растёт стремительно быстро.

Рассмотрим задачу: Сколькими способами 10 человек могут занять очередь в банкомат для получения зарплату.

Решение. Первым может быть любой из десяти человек (десять способов), вторым любой из оставшихся девяти (девять способов), третьим любой из оставшихся восьми (восемь способов), четвёртым любой из оставшихся семи (семь способов), и т.д. В результате получим $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 36288800$. Это число и есть общее количество всех способов, которыми могут десять человек образовать очередь.

Вывод. *Для того чтобы найти число всех способов**,** которыми могут десять человек образовать очередь, необходимо перемножить число всех возможных способов занятия каждым из них места в очереди.*

Отметим любопытное свойство факториала (*сязвь с целой частью*)

Число нулей ***в конце*** *произведения* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ *вычисляется по формуле***:**

$$\alpha_5(n) = \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \cdots$$

где функция $[u]-$ *обозначает, целую часть вещественного числа* u.

Найдём к примеру

$$\alpha_5(71) = \left[\frac{71}{5}\right] + \left[\frac{71}{25}\right] + \left[\frac{71}{125}\right] + \cdots = 14 + 2 + 0 + 0 + \cdots = 16;$$

т.е. в конце числа $(71)!$ окажется ровно 16 нулей. Следовательно, $(71)! = (10)^{16} \cdot M$, где число M не кратно 10.

В общем случае справедлива формула: $n! = (10)^{\alpha_5(n)} \cdot N$, где число M не делится на 10.

Задание. Найти число нулей в конце числа $(n_k)! = (10^k + 1)!$ для показателей степени $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Как уже выше было отмечено, когда число $k = n$, т.е. когда в строке участвуют все элементы из множества M (при этом каждый по одному разу) представляет особый теоретический и практический интерес. Этот случай приводит нас к новым алгебраическим понятиям: перестановки и подстановки, имеющие важные применения в различных областях математики и её приложениях.

Перестановками *из n различных элементов называют всевозможное* (*слева на право*) *упорядочивание данного конечного множества* M, *состоящего из n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок определяется равенством:*

(2) $$P_n = n!$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$ (*читается «эн – факториал»*)

Примечание. *Поскольку, пустое множество* (*т.е. множество, не содержащее ни одного элемента*) *можно упорядочить единственным способом, то принято обозначать* $0! = 1$.

Рассмотрим одно важное понятие, связанное с понятием перестановок.

Если каждому элементу множества M *по некоторому правилу ставится в соответствие элемент того же множества* M, *то говорят, что дано* ***отображение множества*** M ***<u>в себя</u>.***

Пример 5. Пусть множество $M = \{a, b, c, d\}$. Тогда следующие действия будут отображениями в себя:

$$1.(a,b,c,d) \to (a,b,c,d);\ 2.\ (a,b,c,d) \to (b,b,c,c);$$
$$3.(a,b,c,d) \to (a,a,d,d);\ 4.(a,b,c,d) \to (d,b,c,a).$$

Пример 6. Пусть дано множество $M = \{1,2,3,4,5,6\}$. Тогда отображениями множества M *на себя будут*:

$$1)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix};\ 2)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&1&6&5\end{pmatrix};3)\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&1&5&6&4\end{pmatrix};4)\ \begin{pmatrix}4&3&2&1&5&6\\5&3&4&1&6&2\end{pmatrix};$$

и т.д. Очевидно, что общее число таких отображений будет 6!=720 (*почему?*).

Следует запомнить, что ***отображения <u>на себя</u> – это действие, при котором происходят различные упорядочения элементов заданного конечного множества*** M, *при этом на первой строке указываются элементы множества* M (*в произвольном виде упорядочения*), *а во второй строке, указывается какой элемент куда отображается.*

К примеру, отображение 2) может быть переписано в виде:

$$\begin{pmatrix}2&1&3&5&4&6\\3&2&4&6&1&5\end{pmatrix};\ \text{или}\quad \begin{pmatrix}3&1&4&5&2&6\\4&2&1&6&3&5\end{pmatrix};\ \text{и т.д.}$$

Здесь очень важно чтобы каждому элементу сопоставить один конкретный элемент того же множества, при этом в отображении участвуют все элементы без исключения и по одному разу. В алгебре такие отображения называются «***подстановками***» и достаточно полно изучаются теория перестановок и подстановок в связи построением теории определителей произвольного порядка, теории конечных групп, и т.д. [2]. Множество подстановок имеет широкое применение в теории конечных групп, симметрических многочленов и т.д.

Примеры:

$$а)\ \frac{(n-2)!}{n!}+\frac{(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{4};\quad б)\ \frac{20P_{n-2}}{P_{n-4}}=\frac{P_n}{P_{n-4}};$$

Решение.

а) По определению факториала имеем

$$\frac{(n-2)!}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}+\frac{(n-1)!}{n\cdot(n+1)\cdot(n-1)!}=\frac{1}{4};$$

После несложных упрощений получим равенство $n^2-1=8\Rightarrow n=3$. Ответ: $n=3$.

б) Согласно определению P_m имеем равенство $\frac{20(n-2)!}{(n-4)!}=\frac{n!}{(n-5)!};\ n\geq 5$.

После несложных упрощений получим уравнение

$(n-2)\cdot(n-3)(20-n\cdot(n-1)\cdot(n-4))=0$.

Следовательно, $n^3-5n^2+4n=20\Leftrightarrow(n-5)\cdot(n^2+4)=0,\ n=5.$ Ответ: $n=5$.

Вычислим значения арифметических функций, связанные с «*факториалами*».

Пусть функция определена равенствами:

с) $f(n)=\frac{(2n^2-3)!}{(n^2-1)!\cdot 9!};\quad f(3)=?$ *д*) $f(n)=\frac{(n^2-2n-3)!\cdot 8!}{(3n-1)\cdot(n+2)!};\quad f(5)=?.$

Решение :

с) Для $n=3$ имеем

$$f(3)=\frac{15!}{8!\cdot 9!}=\frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{9!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=89{,}375$$

д) Для $n=5$ имеем

$$f(5)=\frac{12!\cdot 8!}{14!\cdot 7!}=\frac{8}{13\cdot 14}=\frac{4}{91}.$$

Задания.

1. Пусть $a=\overline{xyz}-$трёхзначное число по основанию 10. Покажите, что множество существования решения уравнения

$$\overline{xyz}=x!+y!+z!$$

имеет положительную вероятность. Найдите эту вероятность.

2. Покажите, что множество решений уравнения $x!+y!=u!$ имеет положительную вероятность в неотрицательных целых числах $\{x,y;u\}$. Найдите эту вероятность.

2. Покажите, что множество решений уравнения $x!+y!+z!=u!$ имеет положительную вероятность в неотрицательных целых числах $\{x,y,z;u\}$. Найдите эту вероятность.

4. Сочетания, бином Ньютона

Пусть $M-$множество, состоящее из n элементов. Любое подмножество $Q\subseteq M$ (включая и пустое подмножество), содержащее m элементов, называется *сочетанием* по m *элементов из* n (или комбинацией по m элементов из n), при этом, разумеется, $0\leq m\leq n$, т.е. **сочетаниями** называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементам. Сочетания считаются различными, если их состав отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Теорема 2. *Число сочетаний из n элементов по m определяется равенством:*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m}. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть M заданное множество, состоящее из n элементов, Q- какое либо подмножество M, содержащее m элементов. Составим всевозможные перестановки из элементов Q, получим $m!$ различных строк длиной m. Если указанную операцию произвести с каждым $m-$элементным подмножеством множества M, то получим всего $C_n^m \cdot m!$ различных строк длиной m. Естественно, таким способом должны получиться без исключения все строки длиной m без повторений, которые можно составить из элементов множества M. Поскольку, по теореме 1, число таких строк A_n^m, то имеем равенство $C_n^m \cdot m! = A_n^m$, из которого следует доказательство теоремы. Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенствами

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m \Leftrightarrow C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}.$$

т.е. с учетом равенство (2) получаем (3). В частности,

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot n!} = 1, \quad C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = 1, \; C_n^m = 0, \quad k \notin [0,n].$$

Далее, рассмотрим несколько примеров на применение комбинаторных понятий.

Пример 7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение: Искомое число трехзначных чисел:

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

Выпишите самостоятельно эти наборы чисел.

Пример 8. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение: Искомое число сигналов $A_6^2 = \frac{6!}{4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 30$.

Пример 9. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение: Искомое число способов $C_{10}^2 = 10\cdot 9/1\cdot 2 = 45$.

Пример 10. Какое количество партий сыграли 8 шахматистов, встречаясь с каждым партнером только один раз.

Решение. В данной задаче набор пар несущественен. Двухэлементное множество можно упорядочить только 2!=2 способами ($2! = P_2$ – число перестановок). Следовательно, общее число партий (пар) будет в 2! меньше, чем число размещений $A_8^2 = 8\cdot 7 = 56$. Поэтому, общее число партий равно. $A_8^2/2! = 56/2 = 28$.

Решение этой задачи можно изящно иллюстрировать геометрически (см. рисунок 4). Рассмотрим выпуклый восьмиугольник $ABCDEFKL$. С каждой любой вершины восьмиугольника можно провести к другим вершинам семь отрезков, т.е. количество встреч партий шахматистов с другими партнерами равно числу отрезков, соединяющих с остальными. Общее число вершин (шахматистов) равно 8, а так как отрезки AB и BA и т.д. являются равными, то различных отрезков (партий) будет равно $8\cdot 7/2$.

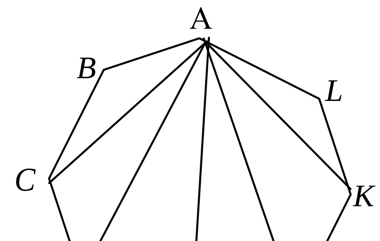


Рисунок 4

Задания. 1. Эту же задачу решите, с помощью турнирной таблицу встреч.

<u>Бином Ньютона.</u> Пусть a и b такие величины, для которых имеет место равенство $a \cdot b = b \cdot a$. Из школьного курса известны алгебраические тождества:

$(a+b)^0 = 1,$

$(a+b)^1 = a+b,$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a\ b^2 + b^3,$

$(a+b)^4 = a^3 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

Продолжая, этот процесс, т.е. пользуясь равенствами $(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)^{n-1}$ можно написать следующее равенство:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a\, b^{n-1} + b^n.$$

Данное равенство называется формулой бинома Ньютона. При этом мы воспользовались равенствами: $C_n^0 = C_n^n = 1$. Неотрицательные целые числа C_n^m (обычно называют их биномиальными коэффициентами) определены равенствами:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m},$$

если $m = 0,1,2,\cdots,n;$ и $C_n^m = 0,$ при остальных значениях m. Напомним, что принято 0!=1.

В частности, имеют место равенства:

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^n = 2^n;$$

$$(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^k C_n^k + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0,$$

Обычно формула бинома Ньютона доказывается методом математической индукции с учетом равенств:

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)^{n-1}\ ;\ C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Основные свойства бинома Ньютона.

1. В разложении $(a+b)^n$ содержится $n+1$ слагаемых.

2. Показатель степени параметра a убывает от n до 0, напротив, показатель степени b возрастает от 0 до n, в любом случае сумма показателей степени величин (параметров) a и b равна n – показателю степени бинома.

3. Биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны между собой, т.е. $C_n^m = C_n^{n-m}$; А также верно и другое разложение

(1) $$\left(b+a\right)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m b^{n-m} a^m =$$

$$= b^n + C_n^1 b^{n-1} a + \ldots + C_n^m b^{n-m} a^m + \ldots + C_n^{n-1} b\, a^{n-1} + a^n$$

4. Для биномиальных коэффициентов C_n^m верно равенство

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1};$$

Некоторые непосредственные выводы.

5. Из общей формулы (1) непосредственно выводятся следующие равенства:

а. Если сумма чисел $a+b=1$, то имеет место равенство

$$\left(a+b\right)^n = 1^n = 1 = \sum_{m=0}^{n} C_n^m b^{n-k} a^m =$$

$$= b^n + C_n^1 b^{n-1} a + \ldots + C_n^m b^{n-m} a^m + \ldots + C_n^{n-1} b\, a^{n-1} + a^n.$$

В дальнейшем это равенство играет важную роль в теории вероятностей.

в. Если $a=b=1$, то сумма биномиальных коэффициентов равно 2^n, т.е. верна формула

$$2^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m = 1^n + C_n^1 + \ldots + C_n^m + \ldots + C_n^{n-1} + 1^n.$$

с. Если $a=t;\ b=-t$, то сумма биномиальных коэффициентов всегда равна нулю.

$$\left(t+\left(-t\right)\right)^n = 0 = \sum_{m=0}^{n} C_n^m t^{n-m} \left(-t\right)^m =$$

$$= t^n - C_n^1 t^{n-1} t + \ldots + C_n^m t^{n-m} \left(-t\right)^m + \ldots + C_n^{n-1} t \left(-t\right)^{n-1} + \left(-t\right)^n.$$

В частности, полагая $t=1$, получим равенство

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \left(-1\right)^m C_n^m = 1 - C_n^1 + \ldots + \left(-1\right)^m C_n^m + \ldots + \left(-1\right)^{n-1} C_n^{n-1} + \left(-1\right)^n.$$

Формулу (1) можно переписать в виде:

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m b^{n-m} a^m = \sum_{m+k=n} \frac{n!}{m!\cdot k!} a^m b^k.$$

6. Биномиальные коэффициенты сначала возрастают, а затем, убывают. При этом:

- если показатель степени бинома четный, то биномиальный коэффициент среднего слагаемого разложения наибольший;

- если же показатель степени бинома нечетный, то биномиальные коэффициенты двух средних слагаемых равны между собой и являются наибольшими;

- на основании свойства **4.** биномиальные коэффициенты C_n^m могут быть вычислены с помощью так называемого «**треугольника Паскаля**»

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}
$$

В этих «***треугольных***» таблицах легко заметить, что каждое число, кроме крайних единиц, является суммой двух вышерасположенных чисел.

7. Поскольку биномиальный коэффициент начинается с нулевого члена, то в общем виде принято ($m+1$) – ое слагаемое $C_n^m a^{n-m} b^m$ считать m – им членом разложения, и обозначается: $T_m = C_n^m a^{n-m} b^m$.

Задача 1. Для выражения $(3x-2)^7$ найти шестое слагаемое.

Решение. Нужно воспользоваться биномиальной формулой, когда $n=7;\quad a=3x;\quad b=-2$.

Ответ. $T_7 = C_7^5 \cdot 3^2 \cdot x^2 \cdot 2^5$.

Задача 2..Найдите наибольший член разложения $(1+0{,}1)^{100}$.

Решение. Для решения этой задачи необходимо выяснить для каких m выполняется неравенства:

$$T_m < T_{m+1}, \quad T_m > T_{m+1}.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{T_{m+1}}{T_m} = \frac{C_{100}^{m+1} \cdot (0{,}1)^{m+1}}{C_{100}^m \cdot (0{,}1)^m} = \frac{100-m}{10(m+1)}.$$

Отсюда следует, что при

$$\frac{100-m}{10\cdot(m+1)} > 1; \quad 90 > 11\cdot m \;\Rightarrow\; m < 8\frac{2}{11},$$

т.е., при $m \ge 9;$ коэффициенты убывают. Значит, для номера $m=9,\quad T_9 -$ наибольший член разложения бинома и он же будет *десятым слагаемым*

$$T_9 = C_{100}^9 \cdot 1^{100-9} \cdot (0{,}1)^9.$$

Задача 3. Найти член разложения $\left(2x^2 - 3x^{-3}\right)^{10}$, не содержащий положительной степени x (т.е. найти слагаемое содержащее x^0).

Решение. Так как, $T_m = C_{10}^m \cdot 2^{10-m} \cdot \left(x^2\right)^{10-m} \cdot \left(-3x^{-3}\right)^m$, тогда выписывая показатель степени x, после несложных упрощений получим:

$$x^{2(10-m)-3m} = x^0 \Leftrightarrow 2(10-m) - 3m = 0 \Rightarrow m = \frac{20}{5} = 4.$$

Следовательно, четвёртый член разложения (он же *пятое слагаемое*) является решением задачи.

Ниже предложим некоторые сведения из теории арифметических функций.

Упражнения: А. Докажите, что

1. При любом простом p биномиальные коэффициенты C_p^k делятся на число p; *при* $1 \le k \le p-1$.

2. Докажите тождества:

$$\frac{n}{n-m+1}\cdot C_n^m = C_n^{m-1}\ ;\ 1\le m<n;$$

$$\frac{n-k}{(k+1)}\cdot C_n^k = C_n^{k+1}\ ;\ 0\le k<n;\quad C_{knn}^{rnm}=\frac{k}{r}\cdot C_{knm-1}^{rnm-1},\quad r,\,k\in Z_+;\ 1\le r\le k.$$

$$\frac{n}{n-m}\cdot C_{n-1}^m = C_{n-1}^{m-1}\ ;\ n>1;\ 0\le m<n;$$

$$\left(C_{n+1}^m\right)^4+\left(C_n^m\right)^4+\left(C_n^{m-1}\right)^4 = 2\cdot\left(\frac{\left(C_{n+1}^m\right)^2+\left(C_n^m\right)^2+\left(C_n^{m-1}\right)^2}{2}\right)^2$$

3. $C_{P^r-1}^{m-1}\,\vdots\, m$, если $1\le m<p^r$; $p-$ любое нечётное простое число. $r=1,2,3,\cdots$.

B. Дополнительные сведения. Пусть $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ - каноническое представление натурального числа n, определим классическую функцию Мебиуса $\mu(n)$ с помощью комбинаторных коэффициентов $C_1^{\alpha_j};\quad j=\overline{1,r},$ равенством:

(**) $$\mu(n)=(-1)^r C_1^{\alpha_1}\cdot C_1^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot C_1^{\alpha_r}$$

Докажите, что

1. Для любых взаимно простых натуральных m,n

$\mu(m\cdot n)=\mu(m)\cdot\mu(n);\ (m,n)=1,$ (свойство мультипликативности)

2. $\varepsilon_n=\sum_{d\backslash n}\mu(d)=\begin{cases}1\ ;\ n=1,\\ 0\ ;\ n>1,\end{cases}$ (свойство ортогональности)

где суммирование ведётся по всем положительным целым делителям числа n.

3. Вычислите функцию

$$\mu_k(n)=(-1)^r C_k^{\alpha_1}\cdot C_k^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot C_k^{\alpha_r};\ k=2,3,\cdots;n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}.$$

Примечание. Классическая функция Мебиуса определяется несколько иначе. По этому поводу можно обратиться, например, к известным учебникам по теории чисел [3; 4]. Определение (**) предложенное здесь выгодно по многим причинам. Во – первых, функция определена одной формулой, во – вторых, легко определяются различные обобщения (речь идёт о функциях

$$\mu_k(n)=\sum_{d^k\backslash n}\mu(d),$$

которая равна 0 или 1, смотря по тому, делится или не делится число n на $k-$ тую степень числа $d,\ k\ge1$, а также других арифметических функций, связанные с функцией Мебиуса). Подробные сведения о функции Мебиуса и её свойства можно найти в учебниках по теории чисел [3; 4].

Читателям интересующихся более обстоятельно этими вопросами, рекомендуем обратиться к фундаментальным источникам по аналитической теории чисел [5-7].

Рассмотрим ещё одну тематику, обобщающую понятие размещения.

Размещения данного состава. Полиномиальная формула.

Начнём со следующей простой задачи

1^0. **Состав строки**. **Размещение данного состава.** Рассмотрим наборы (строки) $(a,\,b,\,a,\,a,\,b,b)$ и $(a,\,a,b,b,\,a,b)$. Очевидно, что они различны, но имеют один и тот же «***состав***» - в каждую из них входят три буквы a и две буквы b. Далее, уточним понятие ***состава строки.*** Пусть $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ некоторое $n-$членное множество, $\alpha -$ строка длиной m, составленная из элементов множества M. Тогда каждому номеру j из совокупности $1, 2, \cdots, n$ будет соответствовать число m_j указывающее, на количество участия элементов a_j в строке α. Выписывая по порядку эти числа, получаем новую строку $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$, которую и называют составом строки α.

Например, если $X = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $\alpha = (a_1, a_3, a_1, a_4, a_3, a_1)$, то строка α имеет следующий состав $(3, 0, 2, 1)$. Следовательно, в строке α элемент a_1 участвует три раза, элемент a_2 не участвует, элемент a_3 участвует два раза, элемент a_4 участвует один раз. Две строки, имеющие один и тот же состав, могут отличаться друг от друга лишь порядков элементов. Их называют *размещениями с повторениями данного состава*.

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу*: **найти число размещений, имеющий данный состав*** $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$.

Приведём основное утверждение о числе составов

Теорема 3. *Количество* $A_{m_1, m_2, \cdots, m_n}$ *- различных последовательностей* (*составов*), *составленных из элементов* $a_1, a_2, \cdots, a_n$, *в которых каждый элемент* a_j *встречается* m_j *раз* $(j = 1, 2, \cdots, n)$ *равно*

(4) $$A_{m_1, m_2, \cdots, m_n} = \frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!}.$$

Доказательство. Обозначим количество составов указанных в формулировке теоремы 1 буквой S_n. А так же, положим $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. Введём в рассмотрение m произвольных различных элементов: $a_{11}, a_{12} \cdots, a_{1m_1}; a_{21}, a_{22} \cdots, a_{2m_2}; \cdots;$ $a_{n1}, a_{n2} \cdots, a_{nm_n}$. Для любой исходной последовательности $a_1, a_2, \cdots, a_n$ строим различные перестановки из указанных m элементов, заменяя элементы по следующему правилу. На тех местах исходной последовательности, где стояло одно и то же a_j (этот элемент встречался m_j раз), записываем какой-нибудь перестановку из m_j элементов $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jm_j}$. Согласно равенству (2) такое действие для одного a_j можно осуществлять в точности $m_j!$ различными способами. Проделав такое действие для каждого a_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$, мы получим некоторую перестановку из m из указанных выше элементов. На основании формулы умножения (см. пункт 2^0) для любой последовательности строки получим всего указанным способом $m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!$ различных перестановок из m элементов. Для различных исходных последовательностей вышеуказанным способом мы, естественно, получаем различные перестановки из взятых m элементов. При этом любая из выбранных m элементов может быть получена этим способом, если в качестве начальной последовательности выбрать ту строку, которая образуется в результате замены всех элементов $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jm_j}$ во взятой перестановке одним элементом a_j для каждого $j = 1, 2, \cdots, n$. Таким образом, с учётом равенства (2) получаем: $S \cdot m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n! = m!$, следовательно,

$$S = \frac{m!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!},$$

И с учётом нашего обозначения $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$, теорема доказана.

Пример 1. Количество различных 6 - значных натуральных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1,2,3 так, чтобы каждая цифра встречалась в записи по два раза, равно:

$$S = \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 90.$$

Пример 2. В наличии имеются книги трёх наименований, причём имеется три экземпляра книг одного наименования, пять экземпляров другого и два экземпляра третьего. Количество различных размещений этих книг на одной полке составляет:

$$S = \frac{(3+5+2)!}{3!\cdot 5!\cdot 2!} = 2520.$$

Если в наличии имеются книги n различных наименований, причём по m экземпляров книг каждого наименования, то все nm экземпляров книг могут быть размещены на полке

$$S = \frac{(nm)!}{(m!)^n}$$

способами.

Пример 3. В одном ряду шахматной доски располагаются: 1 король, 1 ферзь, 2 слона, 2 коня, 2 ладьи. Количество всевозможных расположения этих фигур в одном ряду равно:

$$\frac{8!}{1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 5040.$$

2^0**. Полиномиальная формула.** Обобщением формулы Бинома Ньютона является так называемая полиномиальная формула, которую приведём без доказательства.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – любые числа (или произвольные коммутативные объекты). Имеет место следующее утверждение

Теорема 4. *Справедлива полиномиальная формула*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_S=n} \left(\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\ldots m_S!} a_1^{m_1}\cdot a_2^{m_2}\cdots a_S^{m_S} \right), \tag{4}$$

где суммирование распространяется на всевозможные целые числа $m_j = 0,1,2,\cdots,$ *для которых*

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_S = n\,.$$

Следствие.

1) Для случая $s = 3;\ m_1 + m_2 + m_3 = n$, получаем формулу

$$(a_1 + a_2 + a_3)^n = \sum_{m_1+m_2+m_3=n} \left(\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot m_3!} a_1^{m_1}\cdot a_2^{m_2}\cdot a_3^{m_3} \right) \tag{5}$$

2) Для случая $s = 2$ имеет место равенство

$$(a+b)^n = \sum_{m+k=n} \frac{n!}{m!\cdot k!} a^m b^k = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} b^{n-m} a^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m b^{n-m} a^m$$

Задания: 1. На основании равенство (5) проверьте тождество

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2) + 6xyz\,.$$

2. Пусть $x > -1; x \neq 0$, тогда при целом $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Это известное неравенство Бернулли.

Указание. Используйте метод математической индукции.

В завершении этого раздела сформулируем известную формулу Стирлинга без доказательства.

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot(n\cdot e^{-1})^n\cdot\left(1+\alpha_n\cdot n^{-1}\right),$$

где $|\alpha_n| \leq 1/12$; $e \approx 2{,}71828182845..$ – основание натурального логарифма. Эта формула обычно применяется при больших значениях n. В частности, из неё вытекает, что $\ln(n!)$ с точностью до $1/(12n)$ приближается выражением

$n\ln(n\cdot e^{-1})+(\ln\sqrt{2\pi n})$.

Другими словами, справедливо (с учётом свойства логарифмической функции) неравенство

$$\left|\sum_{m=1}^{n}\ln m-\left\{n\cdot\ln(n\cdot e^{-1})+\ln\sqrt{2\pi n}\right\}\right|<\frac{|\theta|}{2n};\ |\theta|<1.$$

Тема 3. Определение вероятности, относительная частота, аксиоматическое определение вероятности

Существует простой способ определения вероятности события, основанный на случаях равновозможности любого из конечного числа исходов данного испытания (опыта в широком смысле слова). Пусть проводится некоторый опыт с n исходами, которые можно представить в виде *полной группы несовместных равновозможных* событий.

Такие исходы называют *случаями, шансами, элементарными событиями, одним словом* опыт – *классическим.* Обычно про такой опыт говорят, что он сводится к ***схеме случаев*** или ***схеме урн,*** потому, что в таких опытах вероятностную задачу, как правило, можно заменить эквивалентной ей задачей с урнами, содержащими шары разных цветов.

Случай ω, который приводит к наступлению событие A, называется благоприятным (или благоприятствующим) событию. A, т.е. случай ω влечёт за собой событие A: $\omega\subseteq A$.

1. Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события А называют неотрицательное рациональное число $p=P(A)$ ***равное отношению количества*** m ***- исходов элементарных событий, благоприятствующих событию А, к общему числу*** n ***всех равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу событий в данном опыте.***

Обозначается это число $P(A)=\dfrac{m}{n}$, или также принято использовать обозначение

$$p=P(A)=\frac{m}{n}.$$

Для величины $P(A)$ выполняются следующие свойства:

1. Вероятность любого события A заключена между нулём и единицей, т.е.

$$0\le p(A)\le 1.$$

2. Вероятность *невозможного* события равна нулю, т.е.

$$P(\varnothing)=0.$$

3. Вероятность *достоверного* события равна единице, т.е. $P(\Omega)=1$.

4. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если $A\cdot B=\varnothing$, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Пример относится к классическому определению вероятности. Обозначим через А событие – «*набрана нужная цифра*». Абонент мог набрать любую цифру из 10 (т.е. из 0,1,2,…,9) цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. *Эти исходы несовместны, равновозможные и образуют полную группу.* Благоприятствует событию *А* лишь один исход (*нужная цифра лишь одна*).

Искомая вероятность равна $p(A)=1/10$.

Пример 2. Из пяти букв разрезанной азбуки составлено слово «**книга**». Котёнок случайно разбросал буквы. Какова вероятность того, что пятилетний Пётр, не умеющий читать, вновь соберёт слово «**книга**» (событие А)?

В данном примере мы имеем с числом перестановок из пяти букв. Следовательно,

$$P_5 = 5! = 120.$$

Значит, вероятность этого события равна

$$P(A) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}.$$

Пример 3. Из целых чисел от 1 до 20 включительно наугад выбрали одно число. Пусть событие A выражает все числа, кратные 2; событие B выражает все числа, кратные 3; событие C выражает все числа, кратные 5; событие D выражает все числа, кратные 2, но среди которых нет чисел, кратных 3 или 5; событие E выражает все числа, кратные 3, но среди которых нет чисел, кратных 2 или 5; событие F выражает все числа, кратные 5, но среди которых нет чисел, кратных 2 или 3; событие G выражает все числа, некратные 2 , 3 и 5. Найти вероятности каждого события.

Решение. Выпишем для каждого событие благоприятствующие элементарные им события, затем находим их вероятности.

1) $A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$; $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$; ;

2) $B = \{3,6,9,12,15,18\}$; $P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$;

3) $C = \{5,10,15,20\}$; $P(C) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$;

4) $D = \{2,4,8,14,16\}$; $P(D) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$;

5) $E = \{3,9\}$; $P(E) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$;

6) $F = \{5\}$; $P(F) = \frac{1}{20}$; ;

7) $G = \{1,7,11,13,17,19\}$; $P(G) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Для любого множества M символом $card\, M$ (кардинальное число множества M) будем обозначать количество элементов этого множества. Например, в «*классической схеме*» имеем:

$$card\ \Omega = n,\ p(\omega_j) = \frac{1}{card\,\Omega} = p \cdot card\ A = \frac{cardA}{card\,\Omega};\ j = 1,2,\cdots,n;$$

$$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} P(\omega_j) = \ p \cdot card\ A = \frac{cardA}{card\,\Omega}.$$

Рассмотрим классическую задачу шарами.

Задача. В ящике имеются k белых и l черных шаров. Шары тщательно перемешаны. Наудачу извлекаются сразу два шара. Какова вероятность того, что выбранные шары белые?

Задачу решаем с использованием элементов комбинаторики с последующим применением классического определения вероятности.

Решение. Шары можно для удобства пронумеровать от 1 до $r = (k + l) -$ общее число шаров. Поскольку для нас неважен порядок нумерации (какой шар первый, а какой второй, и т.д.), то возможными исходами опыта будут различные сочетания из r чисел по два. Тогда общее число $n = card\,\Omega = C_{k+l}^{2}$. По условию задачи событию A(оба шара белые) отвечают лишь сочетания из k чисел по два, т.е. $m = cardA = C_k^2$. Следовательно, для искомой вероятности на основании классической формулы вероятности получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_k^2}{C_{r+l}^2} = \frac{k(k-1)}{(k+l)(k+l-1)}.$$

Классическое определение вероятности применимо только для очень узкого класса задач, где все возможные исходы опыта можно свести к ***схем***е случаев, при этом $n < +\infty$, и все события *равновозможны*. В большинстве реальных задач эта схема неприменима. В таких ситуациях требуется определить вероятность события иным образом.

2. Статистическое определение вероятности

Для этой цели введем вначале понятие *относительной частоты W(A)* события *A,* как *отношения числа опытов, в которых наблюдалось событие А, к общему количеству проведенных испытаний:*

$$W(A) = \frac{n_A}{n},$$

где n *– общее число опытов,* n_A *– число появлений события* A *в данном испытании.*

Многочисленные эксперименты показали, что, как правило, если опыты проводятся в одинаковых условиях, то для большого количества испытаний относительная частота изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа. Это число можно принять за вероятность рассматриваемого события.

Относительная частота обладает ещё одним важным свойством, называемым ***свойством статистической устойчивости***, т.е. с увеличением числа опытов она принимает значение, близкое к некоторому постоянному числу (говорят: «*частота стабилизируется*, приближаясь к некоторому числу», «*частота колеблется* около некоторого числа» или «*её значения группируются* около некоторого числа»).

Так, например, в опыте подбрасывания монеты (однородной, симметричной, и т.д.) относительная частота появления герба при 4040 раз бросаниях (Ж. Бюффон) оказалось равной 0,5069, а в опыте с 12000 и 24000 раз бросаниями (К. Пирсом), частоты оказались равными, соответственно 0,5015 и 0,5005, то есть их численные значения приближается к числу 1/2= 0,5000.

Статистика разных стран показывает, что частота рождения мальчика, колеблется около числа 0,515. Отметим, что теория вероятностей изучает те массовые случайные явления с неопределённым исходом, для которых предполагается наличие устойчивости относительной частоты.

<u>Статистической вероятностью</u> события A называют число, около которого колеблется относительная частота *W(A)* события A при достаточном числе испытаний (опытов, наблюдений).

Вероятность события обозначается символом $p = P(A)$. Согласно данному определению

$$P(A) \approx W(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Заметим, что число *W(A)*, удовлетворяет всем трём условиям, классического определения вероятности

1. Вероятность любого события A заключена между нулём и единицей, т.е.

$$0 \le W(A) \le 1.$$

2. Вероятность *невозможного* события равна нулю, т.е.

$$W(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Вероятность *достоверного* события равна единице, т.е.

$$W(\Omega)=\frac{n}{n}=1.$$

Статистический способ определения вероятности, опирающийся на реальный опыт, достаточно полно выявляет содержание этого понятия (как численная мера наступления событие в данном испытании). Многие учёные считают, что эмпирическое определение вероятности

$$p=\lim_{n\to\infty}W(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n},$$

следует считать основным определением вероятности. Преимуществом этого определения заключается в том, что:

во - первых не обязательно, чтобы события были *равновозможные*, практически не возможно проследит за этим явлением,

во - вторых, в отличие от классического определения $n-$общее число проводимых опытов может быть *неограниченно большим.*

Недостатком статистического определения является неоднозначность статической вероятности, имеется в виду неоднозначности результата эксперимента. Так, в примере с подбрасыванием монеты в качестве вероятности можно принять 0,5 или 0,49 или 0,51 (например, в опыте, проведённом К. Пирсоном, при 24000 бросаниях монеты выпало: 12012 раз герб, а 11988 раз - решётка). Как видно частота появления событий A и $\overline{A}$ примерно мало отличаются от истинной вероятности $P(A)=P(\overline{A})=0{,}5000\ldots$. Для надёжного определения вероятности необходимо проделать большое число испытаний (это подтверждается историей науки и многими крупными достижениями в разных отраслях человеческой деятельности, но не всегда ***просто и дешево!***).

Пример 4. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей утеряна 1 деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной.

Найти вероятность того, какая деталь была утеряна:

1. Стандартная деталь,
2. Нестандартная деталь.

Решение:

1. Извлеченная из ящика стандартная деталь, очевидно, не могла быть утеряна; могла быть утеряна одна из остальных 30 деталей $21+10-1=30$, причем среди них было 20 стандартных 21-1 = 20. Вероятность того, что была утеряна стандартная деталь p =20/30=2/3.

2. Среди 30 деталей, каждая из которых могла быть утеряна, было 10 нестандартных. Вероятность того, что утеряна нестандартная деталь p=10/30=1/3.

Рассмотрим третий вид определения вероятности – геометрическое определение. Геометрическое определение вероятности применяется в случаях, когда исходы опыта равновозможные, а пространства элементарных событий есть ***бесконечное несчётное множество.***

3. Геометрическое определение вероятности

Рассмотрим на плоскости некоторую область Ω, имеющую площадь S_Ω, и внутри области Ω подобласть D с площадью S_D (см. рисунок 5)

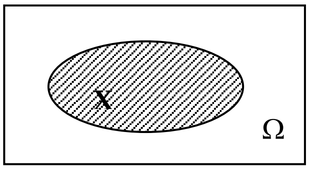


Рисунок 5

В области Ω случайно выбирается точка *X*. Этот выбор можно интерпретировать как *бросание* точки X в область Ω, при этом попадание точки в область Ω достоверное событие, а в подобласти D - случайное событие. Предполагается все точки области Ω равноправны (все элементарные события равновозможные) и брошенная точка может попасть в любую точку из области Ω, и вероятность попадания в область D пропорциональна площади этой области при этом, не зависит от её расположения и формы. Пусть событие $A = \{X \in D\}$, т.е. брошенная точка, попадёт в область D.

Геометрической вероятностью события A называется отношение площади области D к площади области Ω, т.е.

$$P(A) = \frac{S_D}{S_\Omega}.$$

Геометрическое определение вероятности события применимо и в случаях, когда области Ω и D линейные или объёмные. Тогда соответствующие вероятности определяются равенствами:

$$P(A) = \frac{l_D}{L_\Omega} \quad ; \qquad P(A) = \frac{V_D}{V_\Omega}.$$

где $l-$ длина, $V-$ объём области. Объединяя все три формулы можно сформулировать следующее общее определение.

Геометрической вероятностью события *A* называется отношение меры области (g), благоприятствующих, появлению события *A* к мере всей рассматриваемой области (G), т.е.

$$p(A) = \frac{mes\,(g)}{mes\,(G)}.$$

Заметим, что это определение, удовлетворяет всем трём условиям, классического определения вероятности (**проверьте самостоятельно!**).

Пример 5. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых соответственно 5 и 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга.

Решение. Площадь кольца (фигуры g): $S_g = \pi\left(10^2 - 5^2\right) = 75\pi$.

Площадь большого круга (фигуры G): $S_G = \pi 10^2 = 100\pi$.

Искомая вероятность равна $p = 0.75$.

Пример 5. (**Задача о встрече**) Два человека договорились о встрече между 12 и 13 часов дня. Условились, что тот, который придёт первым, ждёт второго в течение 15 мин, после чего уходит (если не встретились). Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода.

Решение. Пусть x время прихода первого человека, а y время прихода второго человека. Возможные значения x и y: $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$ (в качестве единиц масштаба возьмём минуты), которые на плоскости Oxy определяют квадрат со стороной, равной 60. Точки этого квадрата изображают время встречи людей, (см. рисунок 6).

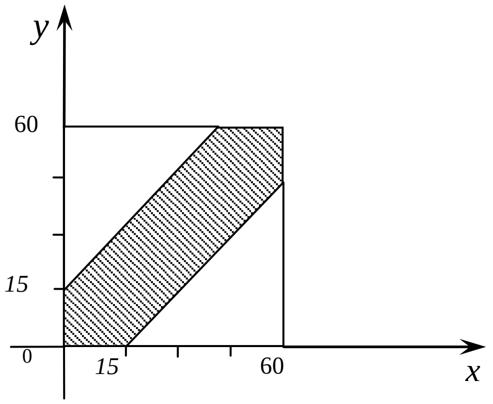


Рисунок 6

Тогда вероятное пространство выражается областью: $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x; y \le 60\}$ все исходы в Ω - равновозможные, так как лица приходят наудачу. Обозначим через А событие, когда встреча лиц произойдёт, если разность между моментами их прихода будет не более 15 мин по абсолютной величине, следовательно, $A = \{(x, y) : |x - y| \le 15\}$. Неравенство

$$|x - y| \le 15 \Leftrightarrow x - 15 \le y \le x + 15$$

определяет область точек (на чертеже -заштрихованная область (g)), которая благоприятствуют исходам встрече двух лиц.

Таким образом, искомая вероятность определяет геометрическую вероятность и определяется формулой

$$p(A) = \frac{mes\,(g)}{mes\,(G)},$$

где соответственно площадь, области (g), $S_g = 60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45 = 1575$, а площадь области (G), равна $S_G = 60^2 = 3600$. Следовательно

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{1575}{3600} = 0{,}4375.$$

Задание. Эту же задачу решите самостоятельно в предположениях:

1. 10 минутного время ожидания первого лица пришедшего на встречу.
2. 45 минутного время ожидания первого лица пришедшего на встречу.
3. Сравните полученные результаты (вероятности)!
4. Если вероятностное пространство $\Omega = \{(x, y) \in [0, T] \times [0, T]\}$, и

$A = \{(x, y) \in \Omega; |x - y| \le t \le T\}$, то верна формула

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = 1 - (1 - \frac{t}{T})^2.$$

В качестве следующего примера для геометрической вероятности рассмотрим задачу.

Задача 1. Стержень длиною l произвольным образом ломают на три части. Какова вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник (событие A)?

Решение. Обозначим через x и y длины концевых частей стержня l (рисунок 7); длина третьей части будет равна $z = l - (x + y)$.

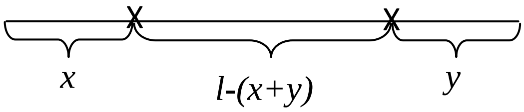


Рисунок 7

Возможные значения x и y связаны условиями:

(1) $$\Omega: \begin{cases} 0 \le x \le l, \\ 0 \le y \le l, \\ x + y \le l. \end{cases}$$

Данная система неравенств определяет на координатной плоскости XOY область Ω Для того чтобы из трёх частей стержня можно было сложить треугольник, необходимо и достаточно выполнение условий: каждая сторона треугольника должно быть меньше чем суммы двух других сторон треугольника, т.е. выполняются неравенства

(2) $$(g): \begin{cases} x < l - x \\ y < l - y \\ l - (x + y) < (x + y) \end{cases}$$

Система неравенств (2) выделяют из области Ω подобласть (g), где записано условие, что каждая сторона треугольника должна быть меньше суммы двух других (см. рисунок 8).

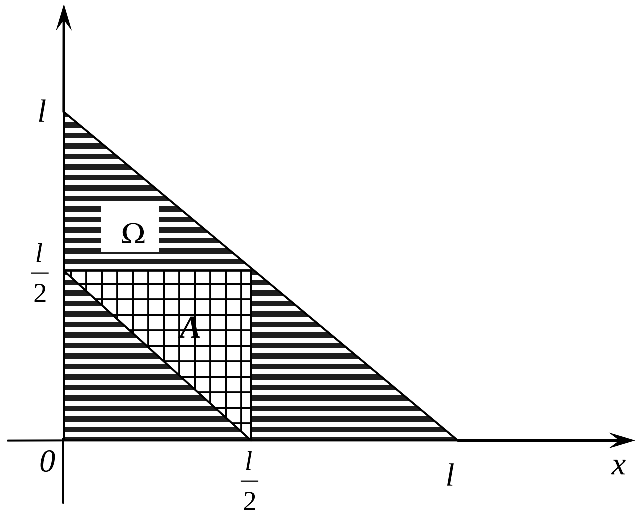


Рисунок 8

Согласно нашему способу разбиения (оно произвольное) легко заметить, что площадь области (g) равна четвёртой части площади области (Ω). Область Ω состоит из четырёх равных частей (треугольников). Следовательно, по формуле геометрической вероятности (основанием для этого служит «произвольность» разлома стержня) получим:

$$P(A) = \frac{Площадь\,(g)}{Площадь\,(\Omega)} = \frac{(пл.(g))}{4 \cdot (пл.(g))} = \frac{1}{4}$$

Задача 2. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, при этом поступление каждого из сигналов, равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t $(t < T)$.

Найти вероятность того, что сигнализатор сработает за время T (событие A), если каждое устройство пошлёт по одному сигналу.

Решение. Обозначим моменты поступления сигналов первого и второго устройства через x и y. В силу условия задачи должны выполнятся двойные неравенства:

(3) $$\{0 \le x \le T;\ 0 \le y \le T\}.$$

Рассмотрим прямоугольную систему координат XOY. В этой системе двойное неравенство (3) выделяет область (квадрат): $(G) = T \times T$, координаты точек которой, представляют возможные значения элементов поступления сигналов первого и второго устройства

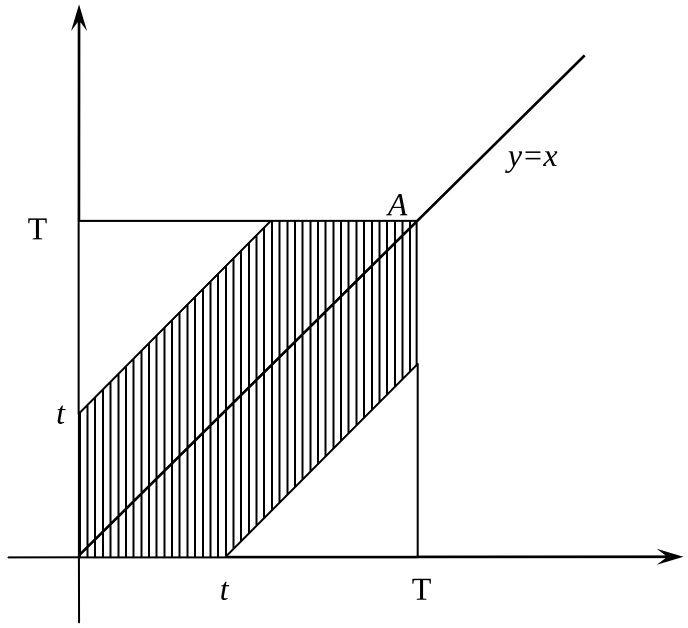


Рисунок 9

Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t, т.е.,

(4) $$\begin{cases} x - y < t,\ \text{при}\ x > y; \\ y - x < t, \text{при}\ x < y; \end{cases}$$

Система неравенств (4) указывают на область (g), куда попадают сигналы. Эта область указана на рисунке 8 и все точки, координаты которых удовлетворяют системе неравенств (4) принадлежать заштрихованному шестиграннику. Следовательно, этот шестигранник можно рассматривать как фигуру, координаты точек которой являются благоприятствующими моментами времени x и y.

Искомая вероятность определяется равенством

$$P(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)} = \frac{Пл.(g)}{Пл.(G)} = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = \frac{t \cdot (2T - t)}{T^2}.$$

Теперь мы можем рассмотреть аксиоматическое определение вероятности.

4. Аксиоматическое определение вероятности

В начале 30-х годов прошлого века аксиоматическое построение теории вероятностей создано академиком А.Н. Колмогоровым. Аксиомы теории вероятностей вводятся таким образом, чтобы вероятность события обладало основными свойствами статистической вероятности, характеризующей её практический смысл. В этом случае теория хорошо согласуется с практикой.

Пусть Ω – множество всевозможных исходов некоторого опыта (эксперимента). S – алгебра событий. Напомним, что совокупность S подмножества множества Ω называется *алгеброй* (*сигма алгеброй*), если выполнены следующие условия:

1. Множество S содержит невозможное и достоверное событие.

2. Если события $A_1, A_2, A_3, \cdots$(конечное или счётное множество) принадлежат S, то множеству S принадлежит их сумма, произведение и дополнение (то есть, противоположное событие для каждого из событий до всего пространства Ω) этих событий.

<u>Вероятностью</u> *называется числовая функция, $P(A)$ определённая на алгебре событий S, принимающая действительные значения и удовлетворяющая следующим трём аксиомам:*

А1. Аксиома неотрицательности: *вероятность любого события $A \in S$ неотрицательна, то есть*

$$P(A) \geq 0.$$

А2. Аксиома нормированности: *вероятность достоверного события равна единице, т.е.*

$$P(\Omega) = 1.$$

А3. Аксиома аддитивности: *вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е., если $A_i \cdot A_j \neq \varnothing$ $(\mathrm{i} \neq \mathrm{j})$, то*

$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k).$$

Совокупность объектов $\{\Omega; S; P\}$, где Ω - пространство элементарных событий, S – алгебра событий, P – числовая функция, удовлетворяющая аксиомам ***А1. – А3.,*** *называется* ***вероятностным пространством*** *случайного эксперимента.*

Вероятностное пространство служит математической моделью любого случайного явления. Заданием этого пространства является аксиоматика теории вероятностей.

<u>Свойства вероятностей</u>. *Перечислим ряд свойств вероятности, являющихся непосредственным следствием аксиом Колмогорова.*

С 1. *Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.*

$$P(\varnothing) = 0.$$

С 2. *Вероятность достоверного события равна единице, т.е.*

$$P(\Omega) = 1.$$

С 3. *Вероятность любого события не превосходит единицы, т.е.*

$$P(A) \leq 1.$$

С 4. *Если событие A влечёт за собой событие B, т.е. $A \subseteq B$, то верно неравенство*

$$P(A) \leq P(B).$$

С 5. *Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образуют полную группу несовместных событий, т.е.*

$$\sum_{k=1}^{n} A_n = \Omega \ \ и \ \ A_i \cdot A_j \neq \Theta; \ \ (\mathrm{i} \neq \mathrm{j}),$$

тогда

$$\sum_k P(A_k) = 1.$$

Свойства **1-3** легко проверяются. Проверим свойства 4 и 5.

Поскольку $B=(B-A)+A$, при выполнении условия $A\subseteq B$, и следовательно $(B-A)\cdot A=\varnothing$ то согласно аксиоме **А3** получим, что $P(B)=P(B-A)+P(A)$. Но по аксиоме **А1** $P(B-A)\geq 0,$ поэтому при отбрасывании этой неотрицательной величины имеем неравенство

$$P(B)=P(B-A)+P(A)\geq P(A),$$

Следовательно **С4** доказано.

Докажем свойство **5.** Поскольку $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$ то, согласно аксиомам **А2** и **А3,** получим

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=P(\Omega)=1.$$

Замечание. В общем случае из того, что $P(A\ )=0$, не следует $A=\varnothing$.

Пример. Из колоды, содержащей **36** карт, наудачу извлекают три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один «**король**». Этот пример решим двумя способами.

Решение (первый способ). Пусть A – интересующее нас событие, B – появление одного короля, C – появление двух королей, D – появление трёх королей. Тогда $A=B+C+D$, причём события $B,\ C,\ D$ несовместные. Поэтому $P(A)=P(B)+P(C)+P(D)$. Найдём число всевозможных случаев выбора трёх карт из **36,** оно равно C_{36}^3. Число случаев благоприятных событиям $B,\ C,\ D$, соответственно равно $m_1=C_4^1\cdot C_{32}^2;\ \ m_2=C_4^2\cdot C_{32}^1;\ m_3=C_4^3\cdot C_{32}^0$. Таким образом,

$$P(A)=\frac{C_4^1\cdot C_{32}^2+C_4^2\cdot C_{32}^1+C_4^3\cdot C_{32}^0}{C_{36}^3}\approx 0{,}31.$$

Второй способ. Воспользуемся свойством **С2.** Находим $P(\overline{A})$, где $\overline{A}$ - противоположное событие к событию A (т.е. среди извлечённых карт наудачу нет ни одного короля). Их число равно C_{32}^3, Следовательно $P(\overline{A})=\dfrac{C_{32}^3}{C_{36}^3}\approx 0{,}69$. Значит

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}69=0{,}31.$$

5. Конечное вероятностное пространство

Пусть производится некоторый опыт (испытание), который имеет конечное число исходов $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$. В этом случае пространство элементарных событий $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ - конечное пространство, $S-$алгебра событий, состоящая из всех 2^n подмножеств множества Ω.

Каждому элементарному событию $\omega_j\in\Omega$ ставим в соответствие число $P(\omega_j)$, которое называется «*вероятностью элементарного события* ω_j», другими словами зададим на Ω числовую функцию $P(\omega)\in[0,1]\subset R;\ \forall\,\omega\in\Omega$, удовлетворяющую двум условиям:

1. Условие неотрицательности: $P(\omega_j)\geq 0$ для любого $\omega_j\in\Omega$

2. Условие нормированности: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}P(\omega_j)=1.$

Вероятность $P(A)$ для любого подмножества $A\in S$ определим

$$(*)\qquad\qquad P(A)=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i),$$

т.е. вероятностью. $P(A)$ события A назовём сумму вероятностей элементарных событий, составляющих событие A. Введённая таким образом вероятность удовлетворяет аксиомам Колмогорова (**А1-А3)**

$$P(A)\geq 0,\quad P(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)=\sum_{i=1}^{n}P(\omega_i)=1,\ P(A+B)=$$
$$=\sum_{\omega_i\in A+B}P(\omega_i)=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i)+\sum_{\omega_i\in B}P(\omega_i)=P(A)+P(B),$$

если, $A\cdot B=\varnothing,$ т.е. A и B два несовместных события.

Таким способом определённая тройка $\{\Omega,S,P\}$ - есть *конечное вероятностное пространство*, называемое «*дискретным вероятностным пространством*».

Частным случаем определения вероятности $(*)$ является *классическое определение вероятности*, когда все исходы опыта равновозможные

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n},$$

согласно условию *нормированности*

$$\sum_{j=1}^{n}P(\omega_j)=1.$$

Тогда равенство $(*)$ примет вид:

$$P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\omega)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{m}{n},$$

где здесь m – число случаев, благоприятствующих появлению события A, т.е. в равенстве $P(A)$

$$P(\omega)=\begin{cases}1/n, & \text{если } \omega\in A,\\ 0, & \text{если } \omega\notin A\end{cases}$$

Тема 4. Теорема суммы вероятностей, формула полной системы событий, условная вероятность, теорема умножения вероятностей

1. Теорема суммы вероятностей

Как уже было отмечено неоднократно, вероятность суммы двух несовместных событий определяется аксиомой **А3,** поэтому выводится следующее утверждение.

Теорема 1. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доказательство. Пусть n – общее число возможных элементарных исходов испытания; m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A; m_1 – число исходов, благоприятствующих событию B. Ввиду независимости рассматриваемых событий общее число благоприятствующих исходов равно сумме этих событий, т.е. m_1+m_2. Следовательно,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

Утверждение доказано.

Следствие 1. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого из них, равна сумме вероятностей этих событий:*

(1) $$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Доказательство. Обозначим буквой U событие: $U = A_2 + \cdots + A_n$. По условию событие A_1 и U являются несовместными. Тогда по теореме 1 получим: $P(A_1 + U) = P(A_1) + P(U)$. Далее, проводя аналогичные рассуждения, для величины $P(U)$ после $(n-1)$ последовательных шагов рассуждения, получим полное доказательство равенства (1).

Следствие 2. *Сумма вероятностей событий* $A_1, A_2, \cdots, A_n$, *образующих полную группу событий, равна единице, т.е.*

(2) $$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Доказательство. Так как для полной группы событий выполняется равенство $\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega$, следовательно $P(\Omega) = 1$, тогда применяя равенство (1) с учётом свойства аддитивности вероятности получим непосредственно справедливость равенства (2).

Следствие 3. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице*

(3) $$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Доказательство формулы (3) непосредственно вытекает из того, что противоположные события образуют полную группу событий, т.е. $A + \overline{A} = \Omega$.

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена числом p, то вероятность другого события обозначают числом q. Следовательно, в силу теоремы 1 получим равенство

$$p + q = 1.$$

Замечание 2. При решении задач на нахождения вероятности события A часто выгодно сначала вычислить вероятность противоположного события $\overline{A}$, затем найти искомую вероятность по формуле

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих, 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение: Появление цветного шара означает появление красного или синего.

Пусть A выражает появление красного шара, B – появление синего шара. Тогда $P(A) = 10/30 = 1/3$, $P(B) = 5/30 = 1/6$, т.к. события A и B несовместны, то теорема сложения вероятностей применима, и искомая вероятность равна:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

Пример 2. Стрелок стреляет по мишени разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую равна 0,35. Найти вероятность того, что стрелок попадает либо в первую, либо во вторую область.

Решение: События A - стрелок попал в первую область, событие B - стрелок попал во вторую область, эти события несовместимы (т.к. попадание в одну область исключает попадание в другую, при одном испытании), следовательно теорема сложения в данном случае применима. Искомая вероятность равна: $P\ (A+B)$ = 0,45+0,35=0,8.

Пример 3. На Павлодарском заводе выпущены 65% всех имеющихся в крестьянском хозяйстве области тракторов. Требуется найти вероятность того, что выбранный трактор окажется произведенным не на Павлодарском заводе.

Решение: Вероятность противоположного события $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$, поэтому

$$p(\overline{A}) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35.$$

Пример 4. В ящике имеется n деталей, из которых m стандартных. Найти вероятность того, что среди k наудачу извлечённых деталей (событые A) есть хотя бы одна стандартная.

Решение. События «среди извлечённых деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди извлечённых деталей нет ни одной стандартной» являются противоположными.

Следовательно,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Найдём вероятность противоположного события $q = P(\overline{A})$. Общее число способов, которыми можно извлечь k деталей среди n деталей, равно C_n^k. Число нестандартных деталей равно $n - m$; из этого числа можно C_{n-m}^k способами извлечь k нестандартных деталей. В связи с этим вероятность того, что среди извлечённых k деталей нет ни одной стандартной, равна

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

Теорема 2 (совместность двух событий). *Вероятность появления хотя бы одного из двух событий равна сумме вероятностей этих событий, без вероятности их совместного появления, т.е.*

(4) $$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство. Так как сумму любых двух событий можно представить в виде двух несовместных событий, то представим сумму $A+B$ и B в виде суммы двух несовместных событий равенствами: $A + B = A + B\cdot\overline{A}$; $B = AB + B\overline{A}$. Тогда $P(A+B) = P(A) + P(B\cdot\overline{A})$; $P(B) = P(A\cdot B) + P(B\cdot\overline{A})$. Отсюда легко следует наше утверждение. См схему (рис.10)

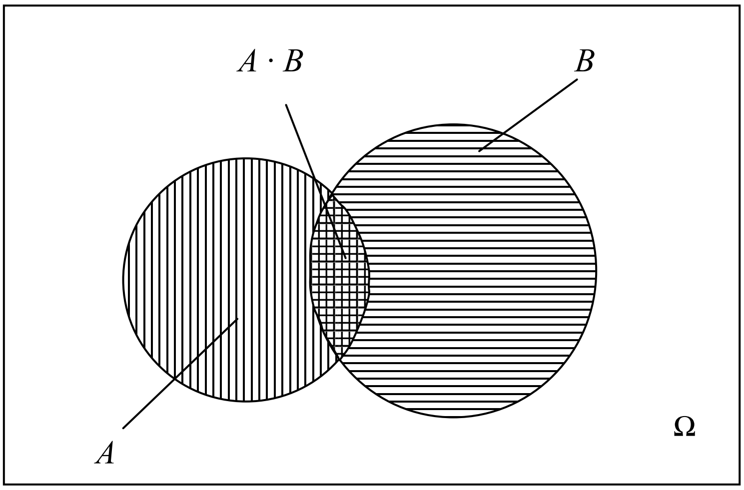


Рисунок 10

Аналогичные формулы можно выписать для суммы трёх и более числа произвольных событий. Приведём формулу для трёх событий:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cdot B) - P(A\cdot C) - P(B\cdot C) + P(A\cdot B\cdot C).$$

Справедливость последнего равенства более наглядно поясняется схемой Эйлера-Венна.

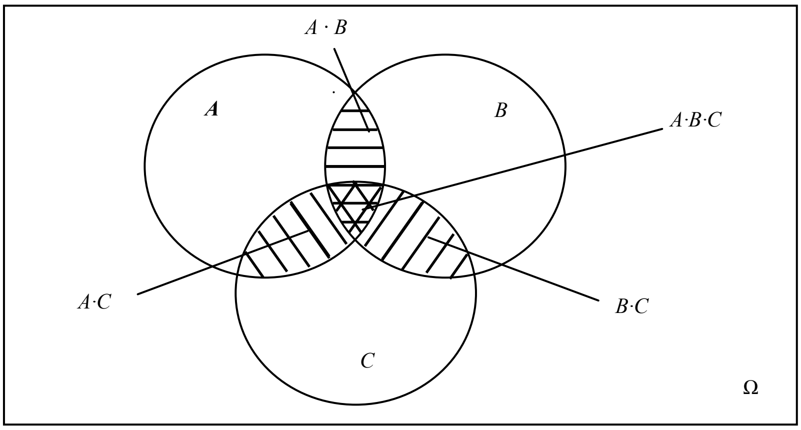


Рисунок 11

Замечание. Можно проще определить вероятность суммы нескольких совместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Пусть $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$, тогда $P(A) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$, используем равенство $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, где согласно закону де Моргана (см. свойства операций над событиями) событие $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$ – противоположно событию A.

Пример 5. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность появления хотя бы одной пятёрки?

Решение. Пусть A обозначает событие - «появление хотя бы одной пятёрки на первой кости», B - «появление хотя бы одной пятерки на второй кости». Тогда событие $A + B$ обозначает событие - «появление хотя бы одной пятёрки при бросании костей». События A и B совместные. По формуле (4) находим

$$P(A+B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}.$$

Предложим ещё один способ решения этой задачи. По закону де Моргана $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$. Находим величину $P(\overline{A+B}) = P(\overline{A} \cdot \overline{B})$, где $\overline{A+B}$ – противоположно к событию $A + B$. Следовательно,

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{A+B}) = 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

2. Теорема умножения вероятностей

Наступление одного события (скажем B) может повлиять на возможность наступления другого события A. Для характеристики *зависимости одних событий от других* вводится понятие ***условной (относительной) вероятности.***

Определение. *Вероятность события* A, *вычисленная при условии, что уже произошло событие* B, *называется* ***условной вероятностью*** *события* A *и обозначается*

(5) $$P(A \mid B) \text{ или } P_B(A).$$

Замечание. Вероятность каждого события A в данном испытании связана с наличием заданного комплекса условий. При определении условной вероятности предполагается, что в этот комплекс условий обязательно входит и событие B. Таким образом, мы фактически имеем другой комплекс условий, соответствующий испытанию в новой обстановке. Вероятность $P_B(A)$ появления события A при этих новых условиях называется его условной вероятностью, в отличие от вероятности $P(A)$, которая может быть названа безусловной вероятностью события A.

Аналогично, определяется условная вероятность с*обытия* B, *вычисленная при условии, что произошло событие* A, *называется условной вероятностью события* B *и обозначается:*

(6) $$P(B\,|\,A) \text{ или } P_A(B).$$

Например. В урне имеются 7 белых и 3 цветных шара. Какова вероятность появления:

1) извлечение белого шара из урны (событие A)
2) извлечение цветного шара из урны (событие B)
3) извлечение цветного шара из урны после удаления белого шара (событие B_1)
4) извлечение белого шара из урны после удаления белого шара (событие A_1)
5) извлечение цветного шара из урны после удаления цветного шара (событие B_2)
6) извлечение белого шара из урны после удаления цветного шара (событие A_2)

Решение. В урне имеются 7 белых и 3 цветных шара.

Вероятность появления белого шара при одной выборке $P(A)=\frac{7}{10}$, а цветного $P(B)=\frac{3}{10}$.

Пусть выбранный шар (событие A) оказался белым. Тогда после первого произведенного испытания вероятность появления цветного шара (событие B_1) условная вероятность события B_1 равна

$$P_A(B_1)=\frac{3}{10-1}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},$$

т.е. условная вероятность наступления события B_1 *увеличилась.*
Аналогично вычисляются вероятности остальных событий. (Вычислите самостоятельно)

На практике часто бывает увеличение условной вероятности наступления события, а также уменьшение условной вероятности. В нашем примере, если бы первоначально выбранный шар оказался цветным, то вероятность наступления событие B_2 имело бы условную вероятность $P_B(B_2)=\frac{2}{10-1}=\frac{2}{9}$, т.е. условная вероятность наступления события B_2 *уменьшилась.*

Следует заметить, что условная вероятность удовлетворяет аксиомам Колмогорова:

$$P(B\,|\,A)\ge 0;\ P(\Omega/A)=\frac{P(\Omega\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1;\ P((B+C)/A)=P(B/A)+P(C/A),$$

если $B\cdot C=\varnothing$. Поэтому для условной вероятности справедливы все следствия (свойства) из аксиом, полученные ранее в пункте 3.

Вероятность произведения событий, независимость событий.

Теорема умножения вероятностей. *Вероятность произведения (совмещения) двух событий* A *и* B *равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило. Эти формулы записываются в форме равенств*

(7) $$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

или имеют место равносильные равенства

$$P_B(A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)},\quad P(B)\ne 0;\qquad P_A(B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)},\quad P(A)\ne 0.$$

Доказательство. Проведём для одного из случаев, другое рассматривается также. Пусть событию A благоприятствуют m равновозможных элементарных исходов, а событию AB благоприятствуют k равновозможных элементарных исходов из общего количества n. Тогда

(8) $$P(A)=\frac{m}{n};\quad P(AB)=\frac{k}{n}.$$

Но если событие A произошло, то в этой ситуации возможны лишь те m элементарных исходов, которые благоприятствовали появлению событии A, причём, k из них, очевидно, благоприятствуют событию B. Следовательно, согласно определению

$$P_A(B)=\frac{k}{m}$$

Отсюда на основании (8) и определении условной вероятности (см. формулу (5)), $P_A(B)=P(A\cdot B)/P(A)$ имеем

$$P(A\cdot B)=\frac{k}{n}=\frac{k}{m}\cdot\frac{m}{n}=P(A)P_A(B).$$

Так как $AB=BA$, то равенства (7) доказаны.

Равенства (7) *называются правилом* или *теоремой умножения вероятностей.* Это правило обобщается на случай n событий

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\dots\cdot A_n)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot\dots\cdot P(A_n/A_1\cdot A_2\cdot\dots\cdot A_{n-1})$$

В частности, для трёх событий формула имеет вид

(9) $$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot$$

Пример 1. В урне находится 4 белых, 3синих и 2 чёрных шара. Наудачу последовательно вынимают три шара. Какова вероятность того, что 1-й шар белый, 2-й синий, 3-й – чёрный.

Решение. Введём следующие события: интересующее событие $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$. Согласно правилам умножения вероятностей A_1 – первым извлекли белый шар, A_2 – вторым – синий,
A_3 – третьим будет чёрный шар. Тогда

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot$$

Но

$$P(A_1)=\frac{4}{9};\ P(A_1/A_2)=\frac{3}{8};\ P(A_1/A_2\cdot A_3)=\frac{2}{7}.$$

Следовательно, перемножая полученных значений, имеем $P(A)=\dfrac{1}{21}\approx 0{,}05$.

Событие A и B называется ***взаимно- независимыми,*** *если появление события A, не зависит от события B, то и появление события B не зависит от события A.*

Тогда имеют место равенства $P_A(B)=P(B)$ *и* $P_B(A)=P(A)$.

Равенства (7) *для независимых событий принимает вид*

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

Несколько событий называют независимыми в совокупности (или просто *независимы*), если независимы каждое два из них и независимы каждое событие и всевозможные произведения остальных. Например, если события A,B,C независимы в совокупности, то независимы события A и B; A и C; B и C; A и BC; B и AC; C и AB. Из сказанного следует, что если события независимы в совокупности, то условная вероятность появления любого события из них, вычисленная в предположении, того что наступили какие – либо другие события из числа остальных, равна его безусловной вероятности.

Таким образом, вытекает из попарной независимости n событий $A_1,A_2,\cdots,A_n;n\ge 2$ (любые два из них взаимно - независимы) не следует их независимость в совокупности (обратное верно!), т.е. требование ***независимости событий в совокупности сильнее,***

чем требование их попарной независимости. Для пояснения сказанного рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Производится выбор (наудачу) флага из 4-х, имеющихся цветов в наличии:
красного, голубого, белого и трёхцветного (красно-бело- голубого). Исследовать на независимость события, если соответственно обозначим события:

К - выбранный флаг имеет красный цвет;

Г - выбранный флаг имеет голубой цвет;

Б - выбранный флаг имеет белый цвет;

$К \cdot Г \cdot Б$ - красно-бело-голубого цвета.

Возможных исходов выбора всего 4; из них событию К благоприятствуют два исхода (красный цвет имеется у двух флагов). Поэтому $P(К) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Аналогично находим, что $P(Г) = P(Б) = 0{,}5$. Событиям: $К \cdot Г$; $К \cdot Б$ и $Г \cdot Б$ благоприятствуют всего по одному исходу. Поэтому $P(К \cdot Г) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(К) \cdot P(Г)$, то события К и Г независимы. Аналогично убеждаемся в независимости событий К и Б; Б . Следовательно, события К, Г, Б попарно независимы. По условию задачи с одной стороны

$$P(К \cdot Г \cdot Б) = \frac{1}{4}.$$

(из четырёх возможных случаев только один флаг благоприятствует).

С другой стороны на основании теоремы умножения имеем:

$$P(К \cdot Г \cdot Б) = P(К) \cdot P_К(Г) \cdot P_{КГ}(Б) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, полученные разные значения (противоречие) показывает, что события К , Г и Б не являются независимыми в совокупности.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

(10) $$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример 3. В двух ящиках имеются по 12 деталей. В одном ящике 8, а в другом 9 стандартных деталей. Из каждого ящика вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что: а) вынутые детали будут стандартными; б) что одна деталь стандартная, а другая – нет.

Решение: A – событие, что деталь из первого ящика стандартная, В – событие, что деталь из второго ящика стандартная. Тогда

а) $$P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},\ P(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Так как события A и B независимые, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

б) C – событие, что одна деталь стандартная, а другая – нет, то

$$C = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

и

$$P(C) = P(A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B) = P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Пример 4. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором – черный, и при третьем – синий.

Решение: Пусть событие A - появление белого шара, B - появление черного шара, C - появление синего шара. Тогда $P(A)=5/12$. Вероятность появления черного шара во втором испытании, при условии, что в первом испытании выпал белый шар, т.е. условная вероятность равна: $P_A(B)=4/11$. Вероятность появления синего шара в третьем испытании, при условии, что в первом испытании выпал белый шар, а во втором черный, т.е. условная вероятность равна: $P_{AB}(C)=3/10$. Таким образом, искомая вероятность равна:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)= (5/12)\cdot(4/11)\cdot(3/10)=1/22.$$

(из четырёх возможных случаев только один флаг благоприятствует).

Приведём одну классическую задачу на применении теорем сложения и умножения вероятностей.

Задача о разорении игрока. Рассмотрим игру в «*орлянку*», когда игрок выбирает «*герб*» или «*решетку*», после чего бросается монета. Если выпадёт сторона монеты, названная игроком, то он выигрывает, получая 1 руб., в противном случае столько же он проигрывает. Предполагается, что начальный капитал игрока составляет x руб. и игрок ставил себе целью довести свой капитал до y руб., $x<y$. Игра продолжается до тех пор, пока, либо игрок наберёт заранее определённую сумму y, которую он наметил, либо разорится, проиграв весь имеющийся у него капитал. Какова вероятность того, что игрок разорится**?**

Решение. Введём обозначения событий $H_1=\{$игрок выиграл на первом шаге$\}$, $H_2=\{$игрок проиграл на первом шаге$\}$, $A=\{$игрок разорится, имея начальный капитал x руб.$\}$. Обозначим через $p_x=P(A)$ искомую вероятность, очевидно, эта вероятность определена для любого $x,\ 0\le x\le y$, а также $p_0=1,\ p_y=0$. Поскольку монета симметрична, то $P(H_1)=P(H_2)=0{,}5$. Если наступает событие H_1, то капитал игрока стал $x+1$, а если наступает событие H_2, то капитал игрока стал $x-1$. После этого можно считать, что игра начинается снова и согласно принятому обозначению $P(A/H_1)=p_{x+1};\ P(A/H_2)=p_{x-1};$ где x- любое число, $1\le x\le y-1$. Поскольку $A=A\Omega=A(H_1+H_2)=AH_1+AH_2$ и события H_1 и H_2 несовместны, то по формуле сложения вероятностей (с учётом равенства $HA=AH$) получим

$$P(A)=P(AH_1)+P(AH_2).$$

Применяя формулу умножения вероятностей, получим

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)$$

Это в силу принятых обозначений даёт следующее рекуррентное уравнение для вероятностей $p_x=P(A)$:

$$p_x=\frac{1}{2}p_{x+1}+\frac{1}{2}p_{x-1},\ 1\le x\le y-1.$$

Известно, что решением этого уравнения является только линейная функция $p_x=c_1+c_2x,$ где $c_1;\ c_2$ - произвольные коэффициенты. Эти коэффициенты можно определить, пользуясь граничными условиями $p_0=1;\ p_y=0$, подставляя их в выражение для p_x значения $x=0$ и $x=y$. Имеем $c_1=1,\ c_1+c_2y=0$. Откуда следует, что $c_1=1,\ c_2=-y^{-1}$ и значит,

$$p_x=1-\frac{x}{y},\qquad 0\le x\le y.$$

В частности, если игрок желает увеличить свой вклад до $y=\alpha\cdot x$ $(\alpha>0)$, то вероятность такого пожелания игрока равна $p_x=1-\dfrac{1}{\alpha}$.

Задача (Де Мере). Ещё в XVII веке Шевалье Де Мере задался вопросом: какая сумма очков имеет больше шансов выпасть при бросании двух игральных костей. Число 11 (событие A) или 12 (событие B)? Сумму 11 могут составить лишь два числа; 5 и 6, а сумму 12 тоже два числа, 6 и 6. На первый взгляд шансы у этих событий равны. Так ли это?

Решение. Будем считать игральные кости различные. Пусть (мысленно) одна будет красной, а другая – жёлтой. Согласно правилу комбинаторики, различные комбинаций очков на разноцветных костях всего возможно $6\cdot6=36$. Из них для наступления первого события A благоприятствует два элементарных события $\{(5{,}6);(6{,}5)\}$, а для наступления события B всего одно элементарное событие $\{6;6)\}$. Таким образом, вероятность $P(A)=\dfrac{2}{36}$; $P(B)=\dfrac{1}{36}$. Поэтому, $P(A)=2\cdot P(B)$, т.е. шансов наступления событие A в два раза больше по сравнению с шансов наступления событие B.

В завершении этого раздела остановимся несколько подробно о практической невозможности маловероятных событий.

3. Применение комбинаторики к подсчёту вероятностей

Многие задачи на предмет подсчёта вероятностей можно свести к так называемой *схеме случайного выбора.* Здесь, мы рассматриваем два основных варианта этой схемы: *выбор с возвращением и выбор без возвращения*.

1. **Выбор с возвращением.** Пусть $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ - некоторое множество элементов. Представим себе, в некотором ящике собрано n различных предметов, которые обозначены элементами $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Из ящика наугад извлекается один из предметов, регистрируется, затем возвращается обратно в ящик. Если осуществить m раз таких действий, то получим некоторую *строку* длиною m, составленную из элементов множества $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Полученная строка называется *выборкой объёма* m из множества M. Количество различных выборок объёма m в соответствии с правилом произведения рано n^m (см. раздел 3^0, комбинаторика…).

Описанную процедуру принято называть «*случайным выбором с возвращением*». Здесь, слово «случайный» означает нечто большее, нежели просто тот факт, что состав выборки заранее предсказать невозможно. Мы условимся вкладывать в это слово следующий смысл: **все** n^m **выборок равновероятны.** Другими словами, вероятность появления любой конкретной выборки (как случайное событие) равна $P(A)=\dfrac{1}{n^m}$.

К схеме случайного выбора можно свести большое количество опытов (испытаний). Например, подбрасывание монеты можно представить как случайный выбор одного элемента из двухэлементного множества $X=\{\text{герб},\ \text{цифра}\}$. Вместо двукратного бросания игральной кости можно рассматривать случайный выбор с возвращением двух элементов из множества $X=\{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$. Выяснение дней рождения m случайных прохожих можно заменить случайным выбором с возвращением m элементов из множества $X=\{1,2,3,\ldots,365\}$ и так далее.

2. **Выбор без возвращения.** В этом случае выбранный предмет из ящика не возвращается обратно в ящик, и следующее извлечение производится из оставшегося числа (меньшего числа) предметов. После m раз извлечений получаем строку длиною m

без повторений. Количество таких строк, как было показано (см. раздел 4^0, комбинаторика, теорема 1), равно

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Случайный характер выбора строки понимается, как и выше, в том смысле, что все выборки данной длины (как случайное событие) имеют одну и ту же вероятность равную

$$P(A) = \frac{1}{A_n^m} = \frac{(n-m)!}{n!}.$$

Пример 1. Пусть из совокупности n предметов извлекаются с возвращением m предметов.

Найти вероятность того, что все предметы, составляющие выборку (событие *A),* окажутся различными.

Решение. В данном случае количество всех элементарных исходов опыта равно n^m, а число исходов, благоприятных для события A, равно A_n^m. Следовательно,

(1) $$P(A) = \frac{A_n^m}{n^m} = \prod_{k=1}^{m-1}(1-\frac{k}{n}).$$

Пример 2. (Задача о днях рождения). В некотором месте (например, в каком-нибудь театре, в студенческой аудитории и т.д.) случайно собралось m человек.

Какова вероятность того, что хотя бы у двух из них совпадают дни рождения ?

Решение. Как уже было отмечено (см. пункт 1.) выяснения дней рождения у m случайно собравшихся лиц можно заменить случайным выбором с возвращением m элементов из множества $X = \{1, 2, 3, ..., 365\}$. Нам необходимо найти вероятность события $B-$ совпадения дней рождения у каких- либо двух лиц собравшихся. Здесь, удобно воспользоваться равенством $P(B) = 1 - P(\overline{B})$, где $\overline{B}-$ противоположное событие к событию B, заключающее в том, что в том, что все дни рождения различны. По формуле (1) для $n = 365$ получим:

(2) $$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \prod_{k=1}^{m-1}(1-\frac{k}{365}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-(m-1))}{365^m}.$$

Найденная формула естественно, является функцией натурального аргумента m- число собравшихся людей в указанном месте. Подсчитаем для нескольких значений m :

m	5	10	22	23	30	60
$P(B)$	0,027	0,117	0,476	0,507	0,706	0,994

Расчеты проведены до третьего знака после запятой. Из таблицы видно, что если число собравшихся всего лишь 23 человека, то уже и тогда имеется более 50% шансов на то, что по крайней мере, у двоих из дни рождения совпадут!

Пример 3. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом грани 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадут соответственно 2, 3, 1, 1, 1, 2 раза (событие A)?

Решение. Число всех *строк* длиною 10 из элементов множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ равно 6^{10}. Благоприятными случаями для события A будут строки, в которых элементы 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются соответственно 2, 3, 1, 1, 1. 2 раза, т.е. строки, имеющие состав (2, 3, 1, 1, 1, 2).

Количество таких строк, по теоремы 3, пункта 6^*, раздела 1^0, темы «комбинаторика», равно:

$$\frac{(2+3+1+1+1+2)!}{2!\,3!\,1!\,1!\,1!\,2!} = \frac{10!}{24} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

Следовательно, $P(A)=\dfrac{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{6^{10}}=\dfrac{700}{6^{7}}=0{,}002\cdots.$

Пример 4. Слово «**карета**», составленное из шести «букв - кубиков», рассыпалось на отдельные буквы, которые затем собраны и положены в коробку. Из коробки наугад извлекают буквы одну за другой и расставляют их друг за другом (слево на право). Какова вероятность получения при таком действии слово «**ракета**»?

Решение. В этом примере отсутствует схема случайного выбора в прежнем понимании, так как буквы, сложенные в коробке, не все различны (две одинаковых буквы «а»). Представим себе, что одинаковые буквы (в данном случае «а, а») индивидуализированы с помощью знаков 1, 2 (превратились в a_1, a_2). Тогда число всевозможных выборок без возвращения будет $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=6!$. Среди них благоприятными для слова «ракета» будет 2! выборок (число перестановок букв a_1, a_2).

Следовательно,

$$P(A)=\frac{2!}{6!}=\frac{2}{720}=\frac{1}{360}\approx0{,}00278.$$

Если исходную задачу решить непосредственно по смыслу, например, для случая слово «ракета», то достаточно ограничиться перестановками трёх первых букв . Число перестановок всего будет 3! = 6. Таким образом, вероятность достижения цели будет равна $\dfrac{1}{6}$. Этот пример показывает, что наши умственные (наглядные) возможности повышают наш «шанс» для решения задач.

4. Теоретические задачи.

Задача 1. (О расчёте надёжности электрических цепей). Пусть дана некоторая цепь элементов, которые соединены между собой последовательно или параллельно. К примеру, рассмотрим цепь вида:

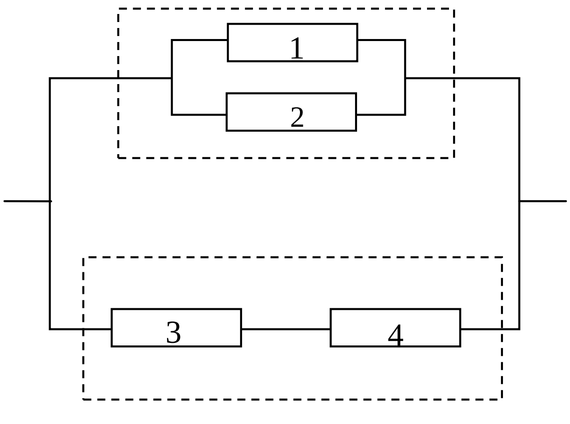
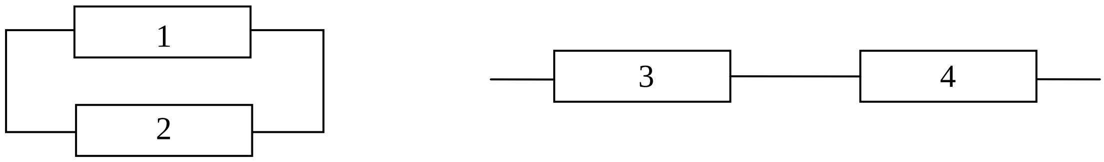


Рисунок 12

Из чертежа видно элементы $\{1;2\}$ соединены параллельно, а элементы $\{3;4\}$ соединены последовательно. Предположим, что все элементы выходят из строя независимо друг от друга. Какова вероятность того, что вся цепь выйдет из строя, т.е. через неё не пойдет ток?

Решение. Сначала нужно рассчитать вероятности отказа элементарных цепей $\{1;2\}$ и $\{3;4\}$.



1) 2)

Рисунок 13

Обозначим события $A_k = \{$выход из строя элемента k; k=1,2,3,4$\}$. Тогда $P(A_k) = p_k$. Элементарная цепь (1) выходит из строя, когда события A_1 и A_2 наступают одновременно. Следовательно, вероятность события $p' = P$ (цепь $\{1,2\}$выходит из строя) с учётом теоремы умножения, равна

$$p' = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_1) = p_1 p_2.$$

Элементарная цепь вида (2) выходит из строя, когда наступает либо событие A_3 либо A_4. Следовательно, вероятность этого события $p'' = P($ цепь $\{3,4\}$ выходит из строя) с учётом теоремы сложения равна

$$p'' = P(A_3 + A_4) = P(A_3) + P(A_4) - P(A_3A_4) = p_3 + p_4 - p_3 p_4.$$

Далее, нашу сложную цепь можно упростить с помощью, так называемого способа «укрупнения». Элементарные цепи рассматриваем как новые элементы (в рис.3 они выделены пунктирными линиями), вероятности отказа которых мы уже знаем: это числа p' и p''. Но упрощенная цепь будет снова вида $\{1,2\}$, т.е. параллельное соединение как в (1) , см. рисунок 4, и вероятность её отказа будет равна:

$$p'p'' = p_1 p_2 (p_3 + p_4 - p_3 p_4).$$

В последней формуле задавая значения вероятностей можно получать различные выводы (при соответствующих задачах и условий для цепей), в том числе вероятность стабильного функционирования электрической цепи.

Замечание. Методом «*последовательного укрупнения схем*» можно рассматривать вероятности отказа любых цепей, если вероятности отказов элементов известны.

Задача 2**.** В ящике имеются k белых и l чёрных шаров. Шары тщательно перемешаны.
Из ящика наудачу извлекаются сразу два шара. Какова вероятность того, оба шара белые (событие С)?

Эта задача была решена в разделе классического определения вероятностей (задача о шарах). Тогда была применён комбинаторный подход с последующим применением классического определения вероятности. Здесь, при решении этой задачи применяем формулу произведения вероятностей.

Решение. Взять наудачу два шара сразу или сначала взять один шар, а потом другой - это одно и то же, ведь руку можно не вынимать из ящика, когда берётся один шар, а затем берётся другой. События $\{$оба шара белые$\}$ и $\{$1-й шар белый и второй шар белый$\}$ совпадают. Поэтому достаточно вычислить вероятности второго события, которое представимо в виде произведения событий $A = \{$1-й шар белый$\}$, $B = \{$2-й шар белый$\}$. Легко видеть, что

$$P(A) = \frac{k}{k+m}.$$

Кроме того,

$$P_A(B) = \frac{k-1}{k+l-1},$$

потому, что событие A уже произошло и в ящике остался $k+l-1$ шар, среди которых $m-1$ белых, вероятность снова извлечь белый шар будет равна $\frac{k-1}{k+l-1}$.

Теперь воспользуемся формулой произведения вероятностей:

$$P(C) = P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{k(k-1)}{(k+l)(k+l-1)}.$$

Выбирая параметры k и l или, меняя соответствующим образом условия задачи, мы можем рассматривать много различных частных случаев этой задачи, встречающие в других практических вопросах.

5. Принцип практической невозможности маловероятных событий

При решении многих практических задач приходится иметь дело с событиями, вероятность которых весьма мала, т.е. близка к нулю. Можно ли считать, что маловероятное событие A в единичном испытании не произойдёт? Такого заключения сделать нельзя, так как не исключено, хотя и маловероятно, что событие A наступит.

Казалось бы, появление или не появление маловероятного события в единичном испытании предсказать невозможно. Однако, длительный опыт человеческой жизни показывает, что маловероятное событие в единичном испытании в подавляющем большинстве случаев не наступает. На основании этого факта принимают следующий «принцип практической невозможности маловероятных событий».

Если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит.

Возникает естественный вопрос: ***насколько малой должна быть вероятность события, чтобы можно было считать невозможным его появление в одном испытании?*** На этот вопрос нельзя ответить однозначно.

Для задач, различных по существу, ответы разные. Например, если вероятность того, что парашют при прыжке не раскроется, равна 0,01, то было бы недопустимым применять такие парашюты. В тоже время, если поезд дальнего следования прибудет с опозданием с вероятностью равной 0,01, то практически можно быть уверенным, что поезд прибудет вовремя, или решение, какое - либо математической проблемы представлено с вероятностью 0,9, то нельзя считать проблему решённой.

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной определённой задаче) событие можно считать практически невозможным, *называют уровнем значимости*.

На практике обычно в ряде задач принимают уровни значимости, заключенные между вероятностями 0,01 и 0,05. Уровень значимости, равный 0,01, называют однопроцентным, а в случаях, когда уровень значимости равный 0,02, называют двухпроцентными, и т.д.

Следует подчеркнуть, что рассмотренный здесь принцип позволяет делать предсказания не только о событиях, имеющих малую вероятность, но и о событиях, вероятность которых близка к единице. Действительно, если некоторое событие A имеет вероятность, близкую к нулю, то вероятность противоположного события $\overline{A}$ близка к единице. С другой стороны, не появление событие A означает наступление противоположного события $\overline{A}$. Таким образом, из принципа невозможности маловероятностных событий вытекает следующее важное для приложений следствие.

Если случайное событие имеет вероятность, очень близкую к единице, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие наступит.

Разумеется, и здесь ответ на вопрос о том, что какую вероятность считать близкой к единице, зависит от цели и постановки задачи. Многие обнадёживающие выводы исследования в одну так и в другую сторону более обстоятельно разрабатываются в разделе «Математической статистике».

Жизненный опыт и практическая деятельность человечества за многие века свидетельствует о том, что *нестопроцентная уверенность* (*или нестопроцентная гарантия*) *приводила к непредсказуемым результатам* (*явлениям, ситуациям, последствиям*).

<u>Тема 5.</u> Формула полной вероятности, вероятности гипотез, повторение испытания, наиболее вероятностное и среднее число «успехов»

Важным следствием совместного применения теоремы сложения и умножения вероятностей являются выводы формулы полной вероятности и теоремы Байеса. Напомним, что события $A_1, A_2, \cdots, A_n$ – образуют полную группу событий, если выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega; \;\; A_i \cdot A_j \neq \Theta \,.$$

Систему таких событий называют также ***разбиением***. Сформулируем основное утверждение, относительно полной вероятности любого события.

1. Формула полной вероятности (ФПВ)

Теорема 1. *Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – образуют полную группу событий. Вероятность появления события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А относительно каждого из них, т.е.*

(1) $$p(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\,(A/H_i)\,.$$

Доказательство. Поскольку $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega;$ то на основании свойств операций над событиями получим $A = A \cdot \Omega = A \cdot (H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n$. Из того, что $H_i \cdot H_j = \varnothing;$ i ≠ j следует, что $(AH_i) \cdot (AH_j) = \varnothing$, т.е. события (AH_i), (AH_j) также несовместны. Тогда по теореме сложения вероятностей получим

$$P(A) = P(A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n) =$$
$$= P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \cdots + P(A \cdot H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cdot H_i) \cdot$$

На основании теоремы умножения вероятностей были доказаны равенства $P(H_i \cdot A \cdot) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$, для всех $i = 1,2,\cdots,n$. Следовательно, формула (1) доказана.

Формулу (1) называют ***<u>формулой полной вероятности</u>***. Отметим, что в равенстве (1) события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ обычно называют ***<u>гипотезами</u>*** поскольку заранее не известно, какое из событий наступит; они исчерпывают все возможные предположения (гипотезы) относительно исходов как бы первого этапа опыта, после наступления гипотезы событие *А - один из возможных* исходов.

Пример 1. В первой урне 3 белых и 5 красных шара, во второй 6 белых и 4 красных. Из второй урны в первую наудачу перекладывают 2 шара. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из первой урны, будет белым.

Решение: А – событие, что шар будет белым. Составим гипотезу (полную группу возможных событий) относительно двух шаров, переложенных наудачу из второй урны в первую.

H_1 – событие, что оба шара белые;

H_2 – событие, что оба шара красные;

H_3 – событие, что один шар белый и один красный.

Других вариантов гипотез быть не может, а одно из этих событий обязательно наступит, поэтому H_1, H_2, H_3 – составляют полную группу событий. Тогда применима формула полной вероятности. Найдем вероятности гипотез

$$P(H_1) = P(BC) = P(B)\cdot p(C/B),$$

где B – событие, что первый шар белый, С – событие, что второй шар белый.

$$P(H_1) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{3}, \quad p(A/H_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};$$

$$P(H_2) = P(\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{B})\cdot P(\overline{C}/\overline{B}) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{2}{15};\ P(A/H_2) = \frac{3}{10}.$$

$$P(H_3) = P(B\overline{C} + \overline{B}C) = P(B\overline{C}) + P(\overline{B}C) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} + \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{8}{15},\ P(A/H_3) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Подставляя в формулу, получим

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{15}\cdot\frac{3}{10} + \frac{8}{15}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{25} + \frac{16}{75} = \frac{21}{50} = 0{,}42.$$

2. Вероятность гипотез (формулы Байеса).

Одним из важным следствием формулы (1) является формулы Байеса.

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \cdots, H_n$, образующих полную группу событий гипотез. Вероятность появления события A определяется по формуле полной вероятности. Допустим, что произведено испытание, в результате которого наступило событие A. Ставим задачу: определить, как изменились (в связи с тем, что событие A уже наступило) вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности $\{P(H_i/A);\ i = 1,\ 2, 3, \cdots, n\}$ после наступления события A в данном эксперименте. Имеет место, следующее утверждение.

Теорема 2. *Справедливы формулы вероятностей гипотез*

(2) $$p_A(H_i) = p(H_i/A) = \frac{p(H_i)p(A/H_i)}{p(A)};\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Эти формулы называются ***формулами Байеса*** (или формулами гипотез) - по имени английского математика, который их вывел и опубликовал в 1764г.

Доказательство. Равенства (2) непосредственно выводятся на основании формулы умножения

$$P(A\cdot H_i) = P(A)\cdot P_A(H_i) \text{ и } P(H_i\cdot A) = P(H_i)\cdot P_{H_i}(A).$$

Так как левые части этих формул равны, приравнивая правые части, получим равенство (2).

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известен результат испытания, вследствие, которого наступило событие A.

Такой анализ имеет большое практическое значение с точки зрения «*эффективности проведённого опыта*». Таким образом, можно непосредственно увидеть какая гипотеза (или какие гипотезы) больше способствовали наступлению события A, а это в свою очередь прямо указывает на ***главные факторы (гипотезы)***, из-за которых достигается тот или иной практический результат.

Пример 2. Мимо заправки проезжают в 4 раза больше легковых машин, чем грузовых. При этом заправляются каждая вторая грузовая машина и каждая пятая легковая. Найти вероятности того, что заправившаяся машина – легковая.

Решение: Составим гипотезу: H_1 – событие, что заправилась легковая машина, H_2 – событие, что заправилась грузовая. А – событие, что машина заправилась. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2).$$

найдем эти вероятности $P(H_1)=\dfrac{4}{5}$ и $P(H_2)=\dfrac{1}{5}$, так как по условию легковых в 4 раза больше грузовых $P(A\setminus H_1)=\dfrac{1}{5}$ и $P(A\setminus H_2)=\dfrac{1}{2}$, так как по условию задачи из легковых машин заправляется каждая пятая, а из грузовых – каждая вторая. Тогда $P(A)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{13}{50}$. Теперь по формуле Байеса найдем

$$P(H_1/A)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\Big/\frac{13}{50}=\frac{8}{13},\quad P(H_1/A)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\Big/\frac{13}{50}=\frac{5}{13}\ .$$

Пример 3. В отборочный цех завода поступает 40 % деталей из 1 цеха и 60 % процентов из второго цеха. В первом цехе производится 90 % стандартных деталей, а во втором 95 % стандартных деталей. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется

1. Стандартной.
2. Найти вероятность того, что эта стандартная деталь изготовлена вторым цехом

Решение. Выбор детали можно разбить на два этапа. Первый – это выбор цеха. Имеется две гипотезы: H_1 – деталь изготовлена первым цехом, H_2 – деталь изготовлена вторым цехом. Второй этап выбор детали. Событие A- извлечённая наудачу деталь оказалась стандартной. Понятно, что события H_1 и H_2 образуют полную группу, $P(H_1)=0{,}4$ $P(H_2)=0{,}6$. Числа 0, 90 и 0, 95 являются условными вероятностями события A при условии гипотез H_1 и H_2 соответственно, т.е. $P(A\setminus H_1)=0{,}90;$ $P(A\setminus H_2)=0{,}95.$ По формуле полной вероятности (1) вычисляем

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)P(A/H_i)=0{,}4\cdot 0{,}90+0{,}6\cdot 0{,}95=0{,}93\,.$$

Следовательно, наудачу взятая сборщиком деталь с вероятностью 0,93 будет *стандартной.*

Теперь найдём вероятности того, что эта стандартная деталь изготовлена вторым цехом.

Определим вероятность гипотезы H_2, способствующего данному результату (т.е. событие A *уже произошло*). Применим формулы (2), получим

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}96}{0{,}93}=\frac{19}{31}\approx 0{,}613\,.$$

Задания

1. Найдите $P(H_1/A)$, и сравните полученные результаты.

2. Покажите, что если $P(A)\neq 0$, то $\sum_{i=1}^{n}P(H_i/A)=1$, т.е. система событий

$$\{H_1/A;\ H_2/A;\cdots;H_n/A\}$$

образует полную группу событий.

Среди гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ гипотезу H_m с номером m - будем называть наиболее подходящей гипотезой для наступления события А, если $P(H_m / A) = \max\limits_{1 \le i \le n}\{P(H_i / A)\}$.

Легко заметить, что здесь возможны равенства: $P(H_i / A) = P(H_j / A)$, при всех номерах $i, j = 1, 2, \cdots, k;\ \ 1 \le k \le n$, при этом, если $k = 1$, то систему гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ будем называть ***унимодальной*** и если же $k \ge 2$, то систему гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ будем называть ***полимодальной*** системой.

Указанные свойства системы гипотез особенно важны для исследования так называемых «***чёрных ящиков».***

3. Повторные испытания, схема Бернулли

С понятием «*повторных испытаний событий*» связано понятие «*независимых испытаний* (*опытов*)»**.** Несколько опытов называются *независимыми*, если их исходы представляют собой независимые события (независимые в совокупности). Другими словами, если проводится несколько испытаний, то есть опыт выполняется многократно при заданном комплексе условий (такой процесс называется «*последовательностью испытаний»*), причём вероятность исходов в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний называются *независимыми*.

Примерами независимых испытаний могут служить: многократное подбрасывание монеты; многократная стрельба по мишени без поправок на ранее допущенную ошибку при очередном выстреле; некоторое число раз извлечений из урны одинаковых занумерованных шаров, если шары каждый раз (после просмотра) возвращаются назад в урну; и т.д. При практическом применении теории вероятностей часто используется стандартная схема, называемая *схемой Бернулли* или «*схемой повторных независимых испытаний»*.

Последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A с вероятностью $P(A) = p$ (его называют *успехом*) или противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = q = 1 - p$ (его называют *неудачей*), называется *схемой Бернулли*.

Например, при стрельбе по мишени: событие A - попадание (успех), событие $\overline{A}$ - промах (неудача); при обследовании n изделий на предмет годности: событие $\overline{A}$ - деталь годная (успех), событие $\overline{A}$ - деталь бракованная (неудача), и т.д.

В каждом таком опыте пространство элементарных событий состоит только из двух элементарных событий, то есть $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, где ω_0 - неудача, ω_1 - успех, при этом $A = \omega_1; \overline{A} = \omega_0$. Вероятности этих событий обозначают через p и q соответственно, причём выполняется равенство $p + q = 1$. Множество элементарных исходов для n опытов состоит из 2^n элементов. Например, для $n = 3$, т.е. один и тот же опыт повторяется три раза. Все возможные события будут следующими:

$$\Omega = \{\omega_0 = (\overline{A}, \overline{A}, \overline{A});\ \omega_1 = (A, A, \overline{A});\ \omega_2 = (A, \overline{A}, A);\ \omega_3 = (\overline{A}, A, A);\ \omega_4 =$$
$$= (A, \overline{A}, \overline{A}); \omega_5 = (\overline{A}, A, \overline{A});\ \omega_6 = (\overline{A}, \overline{A}, A); \omega_7 = (A, A, A)\}.$$

Вероятность каждого элементарного события определяется однозначно. По теореме умножения вероятность события скажем, $\omega_6 = \{\overline{A}, \overline{A}, A)$ равна $q \cdot q \cdot p = q^2 \cdot p;$ а вероятность события $\omega_3 = \{\overline{A}, A, A)$ равна $q \cdot p \cdot p = q \cdot p^2$; Часто успеху сопоставляют число 1, неудаче – число 0. Элементарным событием для n опытов будет соответствовать последовательность из n нулей и единиц. К примеру, тройка чисел (0,0,0) означает, что во всех трёх опытах событие A не наступило; тройка чисел (0,1,0) означает, что событие A наступило во втором опыте, а в первом и третьем – не наступило, и т.д.

Постановка задачи.

Простейшая задача, относящая схеме Бернулли, состоит в определении вероятности того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз $(0 \le m \le n)$. Обозначается искомая вероятность $P_n(m, A)$ или $P_n(m)$.

Например, при подбрасывании игральной кости 3 раза $P_3(2)-$ означает вероятность того, что в 3-х опытах событие A (A- выпадение, к примеру, цифры 6) произойдёт 2 раза. Найдём эту вероятность. Очевидно, что все возможные случаи таковы

$$E_1 = (A, A, \overline{A});\ E_2 = (A, \overline{A}, A);\ E_3 = (\overline{A}, A, A).$$

Вероятности каждого из этих событий соответственно вычисляются по формулам

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = p \cdot p \cdot q = p \cdot q \cdot p = q \cdot p \cdot p = p^2 \cdot q\,.$$

Следовательно, их сумма $P_3(2) = 3p^2 \cdot q = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72} = 0{,}069\,.$

Рассмотрим серию из n испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью p, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Подобная постановка задачи называется ***схемой повторения независимых испытаний***. Найдем вероятность того, что в такой серии событие A произойдет ровно m раз (неважно, в какой последовательности). Интересующее нас событие представляет собой сумму равновероятных несовместных событий, заключающихся в том, что A произошло в некоторых m испытаниях и не произошло в остальных $n - m$ испытаниях. Число таких событий равно числу сочетаний из n по m, то есть числу C_n^m, а вероятность каждого из этих событий равна $p^m q^{n-m}$, где $q = 1 - p$ – вероятность того, что в данном опыте A не произошло. Применяя теорему сложения для несовместных событий, получим *формулу Бернулли*:

$$p_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \,..$$

или

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

где $q = p(\overline{A})$: $\quad q + p = 1$.

В общем случае полученный результат сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна $p(A) = p,\ 0 < p < 1$, а вероятность его непоявления: $q = 1 - p$ независимо от номера испытаний, то вероятность того, что событие A произойдёт m раз определяется* ***формулой Бернулли***.

(3) $$P_n(m) = P_n(m;\ A) = C_n^m\, p^m q^{n-m}\,.$$

Это и есть схема Бернулли.

Для каждого испытания имеется 2 исхода: 1 – «***успех***» - *наступление A*, 2 – «***неудача***» - *наступление противоположного события* $\overline{A}$.

В приложениях теории вероятностей часто приходится иметь дело со стандартной схемой испытания или ***схемой Бернулли.*** Якоб Бернулли один из основоположников теории вероятностей, теории дифференциального и интегрального исчисления. Основным вкладом Бернулли является в теории вероятностей теорема «*О законе больших чисел*».

Далее, определим вероятность того, что событие A наступит:

а) менее m раз б) более m раз в) не менее m раз г) не более m раз.

Их вероятности вычисляются соответственно следующими формулами:

а) $P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(m-1);$

б) $P_n(m+1)+P_n(m+2)+...+P_n(n);$

в) $P_n(m)+P_n(m+1)+...+P_n(n);$

г) $P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(m).$

Вероятность суммы всех возможных событий вычисляем с учётом формулы бинома Ньютона.

(4) $$P_n(0)+P_n(1)+\cdots+P_n(n)=\sum_{m=0}^{n}P_n(m)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^{n-m}q^m=(p+q)^n=1$$

Совокупность *вероятностей* $P_n(m)$ называют *биномиальными* .

Отсюда следуют соответственно для любого натурального числа $r = 1,2,\ldots,m$-1 справедливы вычислительные равенства:

(5) а) $$\sum_{k=0}^{m-r}P_n(k)=1-\sum_{k=m-r+1}^{n}P_n(k);$$ или б) $$\sum_{k=m-r+1}^{n}P_n(k)=1-\sum_{k=0}^{m-r}P_n(k);$$

В приложениях часто приходится иметь дело с так называемыми ***«интегральными задачами»***, где требуется найти вероятности наступления события A не менее $0<m_1$ раз и не более $m_2<n$ раз. Другими словами возникает задача подсчёта арифметических сумм вида:

$$P_n(m_1;m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2}P_n(m) = \sum_{m_1\le m\le m_2}C_n^m p^{n-m}q^m.$$

Пример 4. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет:

а) один раз - (событие A);

б) не менее двух раз - (событие B).

Решение: а) По формуле Бернулли, где $n=5$, $m=1$, $p=0{,}5$, получим

(6) $$P_5(1)=\frac{5!}{1!\cdot 4!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^4=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}.$$

б) Аналогично, находим

(7) $$P_5(0)=\frac{5!}{0!\cdot 5!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}.$$

События A и B образуют полную группу, поэтому $P_5(0)+P_5(1)+P_5(B)=1$.
Следовательно,

$$P_5(B)=1-\frac{5}{32}-\frac{1}{32}=\frac{13}{16}.$$

4. Наиболее вероятностное число успехов

Для числовой последовательности $\{P_n(m);\ m=0,1,2,\cdots,n\}$ целое $m_0\in[0;\ n]$ называется ***наиболее вероятностным числом успехов*** (***или <u>модой</u>***), если

(8) $$P_n(m_0)=\max_{0\le m\le n}\{P_n(m)\};$$

Справедливо утверждение.

Теорема 3 . *Пусть* $\alpha_n=np-q$*, тогда наиболее вероятностное число* m_0 *равно*

(9) $$m_0=\begin{cases} np-q\ \ и\ \ np+p,\ \ если\ \alpha_n-целое\ число;\\ [\alpha_m]+1,\ если\ \alpha_n-нецелое\ число,\end{cases}$$

где знак $[u]$ *обозначает целую часть вещественного числа* u.

Доказательство. По формуле Бернулли при всех $m=1,2,\cdots,n$ имеем

$$\frac{P_n(m-1)}{P_n(m)}=\frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1}p^{m-1}q^{n-m+1}}=\frac{n!(m-1)!(n-m+1)!\,p}{n!(n-m)!m!\,q}=\frac{(n+1-m)p}{m(1-p)}.$$

Следовательно, вероятность $P_n(m)$ будет больше, равна или меньше вероятности $P_n(m-1)$ в зависимости от того, какое из следующих трёх соотношений будет выполняться

$$\frac{(n+1-m)p}{m(1-p)}>1\Leftrightarrow(n+1)>m;\quad \frac{(n+1-m)p}{m(1-p)}=1\Leftrightarrow(n+1)=m;\quad \frac{(n+1-m)p}{m(1-p)}\Leftrightarrow(n+1)<p,$$

тогда мы приходим к выводу, что

(10) $\qquad P_n(m)>P(m-1)$, если $m<(n+1)p$,

(11) $\qquad P_n(m)=P(m-1)$, если $m=(n+1)p$,

(12) $\qquad P_n(m)<P(m-1)$, если $m>(n+1)p$.

Следовательно, вероятность $P_n(m)$ сначала возрастает, когда $m<(n+1)p$, а затем убывает, когда $m>(n+1)p$.

В случае, когда $(n+1)p$, не является целым числом, тогда для наивероятнейшего числа наступлений события A должно выполняться неравенство $P_n(m_0+1)<P_0(m_0)$, что согласно (9) возможно при $m_0+1>(n+1\}p$, а также должно выполняться и другое неравенство $P_n(m_0-1)<P_0(m_0)$, что в силу (10) возможно при $m_0<np+p$.

Таким образом, $np-q<m_0<np+p$. Далее, разность между $np+p$ и $np-q$ равна единице значит, число $m_0=[\alpha_n]+1=[np-q]+1$ определяется единственным образом.

В случае, когда $np+p$ является целым, то $m_0=(n+1)p$ будет наивероятностным числом наступлений события A, однако $m_0-1=np-q$ тоже будет целым числом, поскольку в силу формулы (11), $P_n(m_0)=\ P_n(m_0-1)$. Поэтому таких чисел будут два, а именно $m_0^{(1)}=np-q$ и $m_0^{(2)}=np+p$. Утверждение полностью доказано.

Следствие. *Пусть в схеме Бернулли вероятность событие A удовлетворяет условию, что $P(A)=P(\overline{A})$. Тогда для наивероятностного числа события A справедливы равенства:*

если $n=2k$; то $m_0=k$, если же $n=2k+1$, тогда $m_0^{(1)}=k$ и $m_0^{(2)}=k+1$.

Пример 5. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из лука равна $1/3$. Производится шесть выстрелов. Причём выстрелы не зависят друг от друга.

а) Какова вероятность ровно двух попаданий?

в) Какова вероятность не менее двух попаданий?

с) Каково наивероятнейшее число попаданий?

Решение. Обозначим через A событие «попадание при одном выстреле», $P(A)=p=1/3$, $q=P(\overline{A})=2/3.$ Число выстрелов $n=6.$ Ответ на первый вопрос вычисляем по формуле Бернулли

$$P_6(2)=C_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{15\cdot16}{3^6}=\frac{80}{243}\approx\frac{1}{3}.$$

Ответим на второй вопрос. Воспользуемся равенствами (4) и (5). Получим

$$P_6(2;6)=1-C_6^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6-C_6^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=1-\frac{2^6}{3^6}-\frac{6\cdot2^5}{3^6}=\frac{473}{729}\approx\frac{2}{3}.$$

Наивероятнейшее число попаданий лежит в пределах от $6\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$ до $6\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, т.е. $m_0=\left[\frac{4}{3}\right]+1=2$.

Пример 6. Пусть игральную кость бросают 20 раз, каково наибольшее вероятностное число выпадения грани 5.

Решение.

$$n=20;\ p=1/6;\quad q=5/6;\quad \alpha_n=np-q=20\cdot\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=2{,}5\Rightarrow m_0=[2{,}5]+1=3.$$

Задание. Вычислите численное значение $P_{20}(3)$ по формуле Бернулли и убедитесь, как на практике при достаточно больших значениях чисел n и m применение этой формулы становиться технически трудоемкой.

Завершим этот раздел классическим примером - *задачей С. Банаха* при решении, которой применяется формула Бернулли.

Задача Стефана Банаха. Некий курящий человек носит с собой 2 коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что, когда этот человек вынет в первый раз пустую коробку (он не заметил последний раз, что в коробке закончились спички), в другой коробке окажется r спичек, $0<r\le m,$ где $m-$число спичек, бывших первоначально в каждой из коробок.

Решение. Пусть $A-$событие, которое состоит в том, что вынимается спичка из коробки, которая в конце оказалась пустой. Если выбранная коробка пуста, а другая коробка содержит r спичек, то это означает, что спички брались всего $n=2m-r$ раз.

При этом, событие A наступило ровно m раз, так как коробка стала пустой. Поскольку каждый раз коробка выбирается наугад, то вероятность $P(A)=1/2$.

Следовательно, по формуле Бернулли событие A наступает m раз в $2m-r$ испытаниях с вероятностью

$$p_{2m-r}(m)=C_{2m-r}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-r}=\frac{(2m-r)!}{m!(m-r)!\cdot 2^{2m-r}}=\frac{n!}{m!(m-r)!\cdot 2^{n}}.$$

Возможно и следующие виды испытаний (опытов), если в серии из n независимых опытов, в каждом из которых может произойти одно и только одно из k событий $A_1,A_2,\cdots,A_k$ с соответствующими вероятностями $p_1,p_2,\cdots,p_k$, *то вероятность того*, что в этих опытах событие A_1 появится m_1 раз, событие A_2 появится m_2 раз, и т.д., событие A_k появится m_k раз, *равна*

$$(13)\qquad P_n(m_1,m_2,\ldots,m_k)=\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k},$$

где $m_1+m_2+\cdots+m_k=n.$ Вероятности (13) называются *полиномиальным распределением,* и является коэффициентом при $x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\cdots x_k^{m_k}$ в разложении полинома $(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k)^n$ по степеням $x_1,x_2,\cdots,x_k$. Полиномиальные распределения вероятности (13) находят применения в естествознании, экономических и технических задачах.

<u>Тема 6.</u> Предельные теоремы в схеме Бернулли, формула Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

В предыдущем разделе мы видели, что формулой Бернулли, пользоваться при больших значениях n и m достаточно трудоёмко, поскольку требуется выполнения действий над громоздкими числами. Так, в примере, где общее число испытаний $n = 500$, число наступления некоторого события A в этом испытании равно $m = 117$, при этом каждый раз с вероятностью $p = 0{,}73$, тогда формула Бернулли принимает вид

$$P_{500}(117) = C_{500}^{117}(0{,}73)^{117}(0{,}27)^{383}.$$

Подсчитать этот результат практически невозможно. Или в другом примере возникает аналогичная ситуация, где весьма проблематично применение точной формулы Бернулли.

Пример 1. Предположим, что в некотором химическом складе имеется два сосуда A и B, каждый объёмом в $1\ дм^3$ и в каждом из них содержится по $2{,}7 \cdot 10^{22}$ молекул газа. Сосуды приведены в соприкосновение так, что между ними происходит свободный обмен молекулами, но отсутствует общения с внешней средой.

Найти вероятность того, что по истечению некоторого времени в одном из сосудов число молекул будет отличаться от числа молекул в другом как минимум на одну десятимиллиардную часть?

Решение. Заметим, что общее число молекул в сосудах равно $n = 5{,}4 \cdot 10^{22}$. Для каждой молекулы вероятности того, что оказаться в одном из определённом сосуде одинаково, поэтому она равна $0{,}5$.

Таким образом, как бы производится $n = 5{,}4 \cdot 10^{22}$ испытаний, в каждом из которых вероятность попасть в сосуд A равна $0{,}5$. Обозначим через $q-$ число молекул, попавших в сосуд A, следовательно, $k = (5{,}4 \cdot 10^{22} - q)-$ число молекул, попавших в сосуд B.

Нам нужно найти вероятность того, что

$$|q - k| = |q - (5{,}4 \cdot 10^{22} - q)| \geq 5{,}4 \cdot 10^{22} / 10^{10} = 5{,}4 \cdot 10^{12}.$$

Другими словами, нужно найти вероятность

$$p = P\{|q - 2{,}7 \cdot 10^{22}| \geq 2{,}7 \cdot 10^{12}\}.$$

Согласно теореме сложения $p = \sum_{m} P_n(m)$, где сумма распространена на те значения m, для которых $|m - 2{,}7 \cdot 10^{22}| \geq 2{,}7 \cdot 10^{12}$.

Рассмотренные примеры показывают, что при решении конкретных задач возникают задачи, требующие приближенного вычисления величин $P_n(m)$ или $\sum_{m_1 \leq m \leq m_2} P_n(m)$.

Вычисление $P_n(m)$ вызывает также затруднения при малых значениях p и $q = 1 - p$. Возникает необходимость в отыскании приближенных формул для подсчета величины $P_n(m)$, обеспечивающих необходимую точность. Такие формулы дают нам предельные теоремы. Они содержат так называемые *асимптотические формулы*, которые при больших количествах испытаний дают сколь угодно малую относительную погрешность. Именно, одной из таких формул является предельная формула Пуассона.

1. Предельная теорема Пуассона

Пусть производится по схеме Бернулли серия из n *испытаний. Вероятность появления события A, в каждом испытании* $p(A) = p_n$; $0 < p_n < 1$; *причём когда* $n \to \infty$; $p_n \to 0$, p_n*–зависит от номера испытания. Такая последовательность* *называется* ***последовательностью редких событий****. При этом, если число испытаний неограниченно увеличивается* ($n \to \infty$) *и вероятность* p *наступления события* A *в каждом испытании неограниченно уменьшается* ($p \to 0$)*, но так, что их произведение* np *является постоянной величиной* ($np = \lambda = const$).

Тогда вероятность $P_n(m)$ *удовлетворяет предельному равенству*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \qquad (1)$$

Выражение (1) *называется асимптотической формулой Пуассона.*

Доказательство. Преобразуем формулу Бернулли с учётом того, что $p = \dfrac{\lambda}{n}$ и

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!},$$

имеем

$$P_n(m) = C_n^m \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{\lambda^n}{m!} \cdot \prod_{k=0}^{m-1} \frac{(n-k)}{n} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = \frac{\lambda^n}{m!} \cdot \prod_{k=0}^{m-1} \left(1-\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

В обеих частях последнего выражения устремим $n \to \infty$, и с учётом равенства

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \text{ (второй замечательный предел),}$$

а также принимая во внимание того, что m фиксировано, следовательно, выполняется предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = 1,$$

то в итоге получим

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-m}}{m!}. \qquad (2)$$

Из предельного равенства (2) для достаточно больших значений n и малых p вытекает, что справедлива приближённая формула

$$P_n(m) \approx P(m;\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \qquad (3)$$

Формула Пуассона часто применяется в теории массового обслуживания. Нас интересует оценка вероятности того или иного события числа успехов, когда оно само по себе является *редким событием*. Примерами таких событий могут служить: рождение близнецов, опечатки в книгах, достижение столетнего возраста, рождение великого учёного, выдающего целителя (например, Абу Али Ибн Сино), появление великого писателя, крупного спортивного достижения и т.д.

Замечание. Для полноты изложения докажем, что *сумма вероятностей числа появления события в независимых испытаниях, вычисленных по закону Пуассона, равна единице.*

Предполагается, испытание проводится бесконечное количество раз.

Действительно. На основании формулы Пуассона (3) имеем

$$P(m;\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

$$=\frac{\lambda^n}{m!}\cdot\prod_{k=0}^{m-1}\frac{(n-k)}{n}\cdot\frac{\lambda^m}{n^m}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=\frac{\lambda^n}{m!}\cdot\prod_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{\lambda^m}{n^m}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

В обеих частях последнего выражения устремим $n\to\infty$, и с учётом равенства

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$$ (второй замечательный предел),

а также принимая во внимание того, что m фиксировано, следовательно, выполняется предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=1,$$

то в итоге получим

(2) $$\lim_{n\to\infty}P_n(m)=\frac{\lambda^m\cdot e^{-m}}{m!}.$$

Из предельного равенства (2) для достаточно больших значений n и малых p вытекает, что справедлива приближённая формула

(3) $$P_n(m)\approx P(m;\lambda)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Формула Пуассона часто применяется в теории массового обслуживания. Нас интересует оценка вероятности того или иного события числа успехов, когда оно само по себе является *редким событием*. Примерами таких событий могут служить: рождение близнецов, опечатки в книгах, достижение столетнего возраста, рождение великого учёного, выдающего целителя (например, Абу Али Ибн Сино), появление великого писателя, крупного спортивного достижения и т.д.

Замечание. Для полноты изложения докажем, что *сумма вероятностей числа появления события в независимых испытаниях, вычисленных по закону Пуассона, равна единице.*

Предполагается, испытание проводится бесконечное количество раз.

Действительно. На основании формулы Пуассона (3) имеем

$$P(m;\lambda)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Используем известное разложение функции e^x в ряд Тейлора-Маклорейна

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots;\ -\infty<x<+\infty;$$

Поскольку, этот ряд сходится при любом значении x, поэтому, положив $x=\lambda$ получим

$$e^\lambda=1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}.$$

Найдём искомую сумму вероятностей $\sum_{m=1}^{\infty}P_n(m)$, учитывая, что $e^{-\lambda}$ не зависит от m и можно вынести за знак суммы:

$$\sum_{m=1}^{\infty}P_n(m)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\frac{e^{-\lambda}}{m!}=e^{-\lambda}\sum_{m=o}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1.$$

Распределение Пуассона является важным примером, когда испытание проводится бесконечное (но счётное) количество раз, образует полную группу событий.

Рассмотрим несколько примеров на применение формулы Пуассона.

Пример 2. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 непригодных изделия для использования.

Решение. По условиям задачи

$$n = 5000;\ p = 0{,}0002;\ m = 3;\ \lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$$

Следовательно, по формуле Пуассона имеем

$$\mathrm{P}_{5000}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} \approx 0{,}0617.$$

Пример 3. Некоторая фирма в г. Астану отправила некую свою готовую продукцию (компьютера) в количестве 1500 единиц. Вероятность того, что одна единица этой продукции в пути приходит в негодность, равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути приходит в негодность не более 4-х отправленной продукции.

Решение. Искомая вероятность равна

$$P_{1500}(0 \le m \le 4) = \sum_{m=0}^{4} P_{1500}(m) = P_{1500}(0) + P_{1500}(1) + P_{1500}(2) + P_{1500}(3). + P_{1500}(4).$$

Так как $n = 1500;\ p = 0{,}002$, то $\lambda = np = 3$. Тогда вероятность события A согласно формуле Пуассона равна

$$P(A) = \sum_{m=0}^{4} P_{1500}(m) = \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 \cdot e^{-3}}{3!} + \frac{3^4 \cdot e^{-3}}{4!} \approx 0{,}815.$$

Пример 4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна p = 0,01. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью P не меньшей, чем 0,95?

Решение. По условию вероятность выигрыша мала, а число билетов, которое нужно купить, очевидно, что должно быть велико. Поэтому случайное число выигрышных билетов имеет приближённо распределение Пуассона. Воспользуемся, тем что события «ни один билет из купленных билетов не является выигрышным» и «хотя бы один билет - выигрышный» являются противоположными. Поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$P_n(0) + P = 1 \Leftrightarrow P = 1 - P_n(0)$$

В формуле Пуассона $m = 0$ получим, $P_n(0) = e^{-\lambda}$. Следовательно, $P = 1 - e^{-\lambda}$. По условию, $P \ge 0{,}95$, или

(4) $$1 - e^{-\lambda} \ge 0{,}95 \Rightarrow e^{-\lambda} \le 0{,}05.$$

По таблице значений функции e^{-x} находим $e^{-3} \approx 0{,}05$. Учитывая, что функция e^{-x} при $x \ge 0$ убывающая функция, заключаем, что неравенство (4) выполняется при $\lambda = np \ge 3$. Следовательно, при $n \ge 3/p = 3/0{,}01 = 300$. Таким образом, надо купить не менее 300 билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них.

Формулу Пуассона можно считать математической моделью простейшего потока событий.

1. (Дни рождения). Какова вероятность p_m того, что в ВУЗе из 500 студентов ровно m из них родились 1 сентября?

Если эти 500 человек выбраны случайно, то можно применить схему из 500 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = \dfrac{1}{365}$. Для пуассоновского приближения положим $\lambda = \dfrac{500}{365} = 1{,}3699...$ Теоретически биномиальные вероятности и их пуассоновские приближения имеют вид:

m:	0	1	2	3	4	5	6
Берн. вер. $P_n(m) = C_{500}^m p^m q^{500-m}$:	0,2537;	0,3484;	0,2388;	0,1089;	0,0372;	0,0101`;	0,0023
Пуасс. вер. $P\,(m;\lambda) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$:	0,2541;	0,3881;	0,2385;	0,1089;	0,0373;	0,0102;	0,0023

2. Если n равно среднему число вызовов обонентов, поступающих за один час на данную телефонную станцию, то число вызовов, поступающих за одну минуту, приближенно распределится по закону Пуассона, при этом $\lambda = \dfrac{n}{60}$.

Из предельной теоремы Пуассона вытекают следующие приближённые формулы

$$P_n(m) \approx P(m;\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$
$$\sum_{m=m_1}^{m=m_2} P_n(m) \approx \sum_{m=m_1}^{m=m_2} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Исследование вопроса о точности этих приближенных формул показывают, что (которые сформулируем без доказательства) имеет место неравенство

$$\left| \sum_{m\in M} P_n\,(m) - \sum_{m\in M} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \right| < np^2, \tag{4}$$

где M – любое подмножество: $M \subseteq \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

В частности, для одноэлементного множества (т.е. если состоит из одного числа m), то

$$\left| P_n\,(m) - \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \right| < np^2. \tag{5}$$

Обратим на замечательное свойство предельной формулы (2), чтобы найти вероятность того, или иного числа успехов, вовсе не требуется знать ни n, ни p. Все определяется в конечном счёте числом $\lambda = np$, *как средним число успехов*. Для выражения $\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, рассмариваемая как функция двух переменных m и λ, составлена таблица значений, она приведена в конце книги в приложение.

2•. Простейший поток событий

Рассмотрим события, которые наступают в случайные моменты времени.

Потоком событий называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени (например, поток посетителей в универсальный торговый центр, поток посетителей в исторические места, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов элементов в некотором устройстве, поток обслуженных абонентов и т.п.).

Среди свойств, которыми могут обладать потоки, выделяются свойства ***стационарности, ординарности*** и ***отсутствия последействия.***

Свойство ***стационарности*** характеризуется тем, что вероятность появления n событий на любом промежутке времени зависит только от числа m и от длительности промежутка времени t, и не зависит от начала его отсчёта при этом различные промежутки времени предполагаются непересекающимися. Следовательно, *среднее число событий, появляющихся в единице времени,* так называемая *интенсивность* потока, есть постоянная $\lambda(t)=\lambda$.

Свойство ***ординарности*** означает, что события появляется не группами, а поодиночке. Другими словами, вероятность появления более одного события на малом участке времени Δt пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью появления только одного события (например, поток катеров, приходящих к причалу).

Свойство ***отсутствия после действия*** означает, что вероятность появления m событий на любом участке времени длины t не зависит от того, сколько событий появилось на любом другом непересекающемся с ним участке (говорят, что «*будущее потока не зависит от прошлого*»), например, поток людей, входящих в супермаркет.

Итак:

- *если поток обладает свойством* <u>*стационарности*</u>*, то вероятность появления* m *событий за промежуток времени длительности* t *есть функция, зависящая только от числа* m *и времени* t*;*

- *если поток обладает свойством* <u>*ординарности*</u>*, то за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события;*

- *если поток обладает свойством* <u>*отсутствия после действия*</u>*, то имеет место взаимная независимость появлений того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени.*

Поток событий, обладающий свойствами *стационарности, ординарности* и *отсутствия последействия* называется *простейшим* (*пуассоновским) потоком.*

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Можно доказать, что если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления m событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой Пуассона (доказательство см. 16.2)

(5) $$P_t(m)=\frac{(\lambda\cdot t)^m\cdot e^{-\lambda t}}{m!}.$$

Эта формула отражает все свойства простейшего потока. Действительно, из формулы видно, что вероятность появления m событий за время t при заданной интенсивности является функцией m и t, что характеризует свойство *стационарности*.

Убедимся, что формула отражает свойство *ординарности*. Положим, $m=0$ и $m=1$ соответственно выражают вероятности появления событий и появления одного события:

$$P_t(0)=e^{-\lambda t};\quad P_t(1)=\lambda t\cdot e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, вероятность появления более одного события равна

$$P_t(m>1)=1-[P_t(0)+P_t(1)]=1-[e^{-\lambda t}-\lambda t\cdot e^{-\lambda t}].$$

На основании известной формулы

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots;\ -\infty<x<+\infty;$$

после некоторых элементарных преобразований получим

$$P_t(m>1)=\frac{(\lambda t)^2}{2}+\cdots$$

Теперь, сравнивая $P_t(1)$ и $P_t(m>1)$, делаем вывод, что при малых значениях t вероятность появления более одного события очень мала по сравнению с вероятностью наступления одного события, что характеризует свойство *ординарности.*

Наконец, формула (5) не использует информации о появлении событий до начала рассматриваемого промежутка, что характеризует свойство *отсутствия после действия*. К этому очень важному вопросу мы ещё вернёмся в разделах 9.2. и в теме 15.

Пример 5. Среднее число вызовов, поступающих на автоматическую телефонную станцию в одну минуту равно 2. Найти вероятность того, что за 5 минуты поступит:

а) два вызова;

б) менее двух вызовов;

в) не менее двух вызовов.

Поток вызовов предполагается простейшим.

Решение: Будем пользоваться теоремой Пуассона. Здесь, по условию $\lambda = 2$; $t = 5$; $m = 2$

а) Искомая вероятность того, что за 5 мин. поступить 2 вызова, равна

$$P_5(2) \approx \frac{(2\cdot 5)^2 e^{-6}}{2!} = \frac{100\cdot 0{,}000045}{2} \approx 0{,}00225;$$

Это событие практически невозможно

б) События «не поступило ни одного вызова» и «поступил один вызов» несовместны,

поэтому на основании теоремы сложения искомая вероятность того, что за 5 минут поступить менее двух вызовов, равна

$$P_5(k<2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + \frac{(10\cdot e^{-10})}{1!} = 0{,}00495;$$

Это событие практически невозможно.

в) События не «поступило менее двух вызовов» и «поступило один вызов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 5 минут поступит не менее 2 вызовов, равна

$$P_5(k\ge 2) = 1 - P_5(k<2) = 1 - 0{,}000495 = 0{,}999505$$

Это событие практически достоверно.

Пример 6. Телефонная станция обслуживает 20000 абонентов. Вероятность позвонить любому абоненту в течение одного часа равна $p = 0{,}0003$. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

Решение. Применим формулу (5), здесь $\lambda\cdot t = 20000\cdot 0{,}0003 = 6$. Поэтому должно быть,

$$P_t(5) = \frac{6^5\cdot e^{-6}}{5!} \approx 0{,}13.$$

Пример 7. Некоторая техническая аппаратура состоит из 2000 элементов. Вероятность отказа одного элемента равна 0, 001. Определить вероятность:

1. Отказа двух элементов за год?

2. Отказа не менее двух элементов за год?

Решение. Работу каждого элемента технической аппаратуры рассматриваем как отдельное испытание.

Пусть событие A обозначает отказ любого элемента технической аппаратуры за год, тогда $p = P(A) = 0{,}001$; $\lambda = np = 2000\cdot 0{,}001 = 2.$

По формуле Пуассона для первого пункта

$$P_{200}(2) \approx \frac{2^2}{2!}\cdot e^{-2} = 2e^{-2} \approx 0{,}2707.$$

Решение второго вопроса, представляется равенством:

$$P_{2000}(2;2000) = 1 - P_{2000}(0) - P_{2000}(1) \approx$$

$$\approx 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - 1 - \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 1 - 3e^{-2} \approx 0{,}594.$$

Далее, рассмотрим некоторые известные приближённые формулы к формуле Бернулли, которые наиболее часто встречаются на практике.

3. Формула для геометрического распределения вероятности

Рассмотрим следующий опыт: пусть производятся независимые испытания по схеме Бернулли, в каждом из которых вероятность наступления события A равна p $(0 < p < 1)$ и, следовательно, вероятность его непоявления равна $q = 1 - p$. Испытания завершается, как только появится первый раз событие A. Таким образом, если событие A появиться в $m-$м испытании, то оно в предшествующих $m-1$ испытаниях не появилось.

Вероятность этого «***сложного события***» по теореме умножения вероятностей независимых событий, определяется по так называемой ***формулой геометрического вероятности***

(6) $$p_m = P(A;m) = q^{m-1} \cdot p.$$

Полагая в равенстве (6) $m = 1, 2, 3, \cdots$ получаем последовательность чисел, образующих убывающую геометрическую прогрессию с начальным членом p и знаменателем $q = 1 - p$.

(7) $$p,\ qp,\ q^2 p, \cdots, q^{m-1} p, \cdots$$

Поэтому, равенство (6), называется ***формулой геометрического распределения вероятности*** случайного события A.

Очевидно, что числовая последовательность (7) как числовой ряд сходится и сумма его равна единице:

(8) $$\sum_{m=1}^{\infty} p \cdot q^{m-1} = \frac{p}{1-q} = 1, \text{ (т.к.} 1 - q = p\text{)}.$$

т.е. последовательность событий:

(9) $$\{A\},\ \{\overline{A}\,A\},\ \{\overline{A}\,\overline{A}\,A\}, \cdots, \{\underbrace{\overline{A}\overline{A}\cdots\overline{A}}_{\{(m-1)-раз\}}\,A\}, \cdots$$

образуют полную группу событий. Этим обстоятельством (т.е. предельным равенством (8)) мы будем пользоваться в последующих разделах.

Пример 8. Из орудия проводится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания расчёта в цель равна 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена при третьем выстреле.

Решение. По условию $p = 0{,}6;\ q = 0{,}4;\ m = 3$. Искомая вероятность согласно формуле геометрического распределения равна

$$P(A;3) = (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6) = 0{,}096.$$

Замечание. Отметить, что формула геометрического распределения вероятности является частным случаем так называемого *распределения Паскаля,* которое задаётся формулой

(10) $$P\{A;m\} = C_{m+r-1}^{r-1} p^r \cdot q^{m-1};$$

где $m = 1, 2, 3, \cdots;\ r > 0$ – целое число, Для случая $r=1$ последнее равенство совпадает с геометрическим распределением, а при $r>1$ - совпадает с распределением суммы независимых случайных величин, каждый из которых, имеют геометрическое распределение. При этом оно описывает число опытов в схеме Бернулли, необходимых для того, чтобы получить значение единицы ровно r раз.

Распределение Паскаля имеет приложение к статистике повторных нежелательных случаев: неудачи в опыте, заболеваний, несчастных случаев и т.д.

Следует кратко напомнить ещё об одной формуле вероятности закона для случайных событий.

4. Формула для гипергеометрического распределения вероятности

Рассмотрим следующую задачу: в урне N шаров, из них M; белых $(M<N)$, а остальные цветные. Из урны извлекается n шаров, (каждый шар может быть извлечен с одинаковой вероятностью), причём отобранные шары перед следующим отбором не возвращается в урну, поэтому формула Бернулли здесь неприменима. Обозначим через A событие, выражающее того, что «среди извлечённых n шаров m из них окажутся белыми».

Требуется найти вероятность того, что среди извлечённых шаров будет равно m белых, остальные цветные (событие A).

Очевидно, что возможные значения величины m; $\{0,1,2,\cdots,L=\min(M;n)\}$.

Найдём искомую вероятность. Для этого используем классическое определение вероятности. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлеч n шаров среди N шаров, т.е. рано

$$C_N^n = N!/n!(N-n)!$$

Найдём число исходов, благоприятствующих событию A (среди извлечённых n шаров ровно m окажутся белыми); в тоже время возможность извлечения m белых шаров среди M белых шаров возможно $Q=C_M^m$ способами; при этом остальные $n-m$ шары должны быть цветными. В свою очередь, извлекать же $n-m$ цветных шаров из $N-m$ цветных шаров возможно ровно C_{N-M}^{n-m} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов событию A (по правилу умножения вероятностей) равно $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$.

Таким образом, искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию A, к обшему числу всех элементарных исходов

$$p_m = P_Q(A;m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n};\ m=0,1,2,\cdots,L;\ m \le n;\ \ n \le N. \tag{11}$$

Говорят, что случайное событие событые A *имеет гипергеометрическое распределение вероятностей* $P(A)=P_Q(A;m)=p_m$, *если оно наступает при целочисленных номерах испытания* $0,1,2,\cdots,m,\cdots,L; L=\min(n;M)$; *с вероятностями* (11) *где* n, M, N *– натуральные числа.*

Формула (11) определяет гипергеометрическое распределение вероятностей, случайного события.

Следует заметить, что если n значительно меньше чем N (практически если $n<0{,}1\cdot N$) то гипергеометрическое распределение даёт вероятности, близкие к вероятностям, найденнным по биномиальной формуле.

Для иллюстрации такого гипергеомерического распределения вероятностей рассмотрим следующие примеры.

Пример 9. В коробке находятся 12 белых и 8 чёрных шаров. Найти вероятность того, что среди наугад вынутых 5 шаров 3 из них окажутся чёрными?

Решение. Выбрать 5 шаров из 20 можно C_{20}^{5} различными способами (все выборки – неупорядоченные подмножества, состоящее из 5 элементов), определим число случаев, благоприятствующих событию $A-$(среди 5 извлечённых шаров 3 из них окажется черными). Число способов выбрать 3 черных шара из 8, находящихся в урне, равно C_{8}^{3}. Каждому такому выбору соответствует C_{12}^{2} способов выбора 2-х белых шаров из 12 белых шаров в урне. Следовательно, имеем $C_{8}^{3}\cdot C_{12}^{2}=3696;\ C_{20}^{5}=1550$.

Согласно формуле (11) $m=3;\ n=5;\ n-m=2;\ N=20;\ M=8;\ N-M=12$, получим

$$P(A)=\frac{C_{8}^{3}\cdot C_{12}^{2}}{C_{20}^{5}}=\frac{3696}{15504}=0{,}23839\,.$$

Пример 10. Пусть в партии из 50 изделий имеется 20 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлечённых 5 изделий окажется ровно три стандартных иэделий.

Решение. По условию примера $N=50;\ M=20;\ n=5;\ m=3.$

Искомая вероятность равна

$$P(A)=\frac{C_{20}^{3}\cdot C_{30}^{2}}{C_{50}^{5}}=0{,}234.$$

5. Локальная теорема Муавра-Лапласа

В случаях, когда число испытаний n достаточно велико, а вероятность удовлетворяет $0<p<1$, для вычисления биномиальных вероятностей используют приближенные теоремы Муавра – Лапласа.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. *Если вероятность* p *наступления события* A *в каждом испытании постоянна и удовлетворяет условиям* $0<p<1$, *а число независимых испытаний* n *достаточно велико, то вероятность* $P_n(m)$ *может бить вычислена по следующей приближённой формуле*

$$(12)\qquad \sqrt{npq}\cdot P_n(m)\approx\varphi_0(x_n),\qquad x_n=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

дает асимптотическую формулу (оно тем точнее, чем больше n*), позволяющую найти приближенное значение* $P_n(m)$ *при достаточно больших значениях* n, *где функция*

$$(13)\qquad \varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ \text{(Ф.Г.)}$$

называется функцией Гаусса, а её график представляет кривой вероятностей.

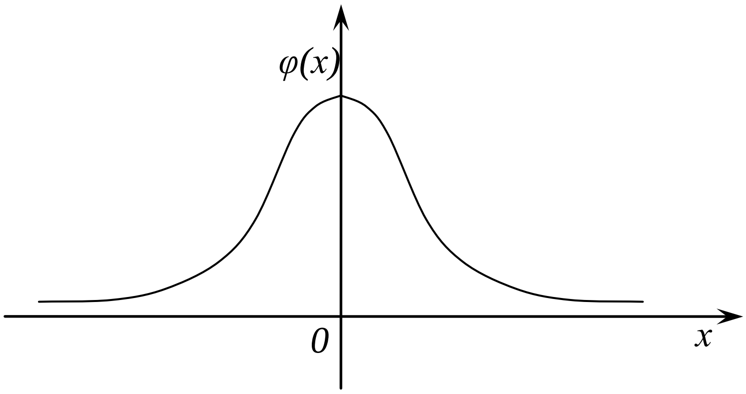


Рисунок 14

Кратко остановимся на схеме доказательства этой теоремы. Имеют место равенства

(14) $$m = np + \sqrt{npq}\,;\quad n - m = n - np - x_n\sqrt{npq} = nq - x_n\sqrt{npq}\,.$$

В силу ограниченности величин x_n разность $(n-m)$ стремится к ∞ вместе с n и m. Воспользуемся формулой Стрилинга $k! \approx \sqrt{2\pi k}\cdot(k\cdot e^{-1})$, для $k=n;\ k=m;\ k=n-m.$ Тогда с учетом формулы Бернулли после некоторых преобразований получим

$$\sqrt{npq}\cdot P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{np}{m}\right)^{m+0,5}\cdot\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m+0,5}.$$

Из равенств (14) следует, что

(15) $$\frac{m}{np} = 1 + x_n\cdot\sqrt{\frac{q}{np}} \approx 1;\quad \frac{n-m}{nq} = 1 - x_n\cdot\sqrt{\frac{p}{nq}} \approx 1;$$

Следовательно, при достаточно большом n получим

$$\sqrt{npq}\cdot P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 + x_n\cdot\sqrt{\frac{q}{np}}\right\}^{-m}\left\{1 - x_n\cdot\sqrt{\frac{p}{nq}}\right\}^{-(n-m)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-m\ln\left(1 + x_n\cdot\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n-m)\ln\left(1 - x_n\cdot\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right\}.$$

Далее воспользуемся (на основании представления логарифма в степенной ряд) асимптотическим представлением $\ln(1+z) = z - 0{,}5z^2(1+o(1))$ *при* $z \to 0$. Тогда получим

(16) $$\sqrt{npq}\cdot P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-m\left(x_n\cdot\sqrt{\frac{q}{np}} - x_n^2\frac{q}{2np}(1+o(1))\right) - (n-m)\left(x_n\cdot\sqrt{\frac{p}{nq}} - x_n^2\frac{p}{2nq}(1+o(1))\right)\right\}.$$

На основании равенств (14) и с учётом $(p+q=1)$, будем иметь

$$x_n\left\{(n-m)\sqrt{\frac{p}{nq}}-m\sqrt{\frac{q}{np}}\right\}=$$

$$=\frac{x_n}{\sqrt{npq}}(npq-x_n\sqrt{npq}\cdot p-npq-x_n\sqrt{npq}\cdot q)=-x_n^2.$$

Применяя асимптотические равенства (15), после некоторых упрощений получим, что

$$\frac{x_n^2}{2}\left\{\frac{(n-m)p}{nq}(1+o(1))+\frac{mq}{np}(1+o(1))\right\}\approx$$

$$\approx\frac{x_n^2}{2}\{p(1+o(1))+q(1+o(1))\}\approx\frac{x_n^2}{2}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (16), имеем

$$\sqrt{npq}\cdot P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-x_n^2+\frac{x_n^2}{2}(1+o(1))\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_n^2}{2}\right).$$

Теорема доказана. В частности, справедливо асимптотическое равенство

$$\sqrt{npq}\cdot P_n(m)\approx\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\ \text{при}\ x_n\to x.$$

Кроме того, для функции $\varphi_0(x)$ приведена таблица значений (см. приложение?).

Свойства функции $\varphi_0(x)$:

1. функция $\varphi_0(x)$ чётная, т.е. $\varphi_0(-x)=\varphi_0(x)$;
2. при $|x|\to\infty$, $\varphi_0(x)\to 0$; и для $|x|\geq 4$ можно считать, $\varphi_0(x)=0$;
3. $\max\limits_{0\leq x\leq\infty}\varphi_0(x)=\varphi_0(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}4$;

Функция Гаусса в дальнейшем будет встречаться и в разделе «Нормальный закон распределения». Из равенства (12) следует, что

$$\sqrt{npq}\cdot P_n(m)\approx\varphi_0\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Пример 11. Монету бросают 100 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет 40 раз.

Решение: Применим формулу (12). Поскольку $n=100$, по условию задачи $p=0{,}5;\ q=1-0{,}5=0{,}5$ и $\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}=5;\ \ m=40$, то $x=\frac{40-100\cdot 0{,}5}{5}=-2.$ Тогда на основании таблицы значений функции $\varphi_0(x)$ получим $\varphi_0(-2)=\varphi_0(2)=0.054$. По формуле (12) получим

$$P_{100}(40)\approx\frac{1}{5}\cdot 0{,}054=0{,}011.$$

Легко заметить, что величину $P_{100}(40)$ с помощью формулы Бернулли очень трудно сосчитать.

Пример 12. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появится этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение: По условию $n=400; m=80; p=0{,}2;\ q=0{,}8.;\sqrt{npq}=\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}$, тогда

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0;$$

Согласно таблице значений, $\varphi_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}3989$. По локальной формуле Лапласа

$$P_{400}(80) = \frac{\varphi_0(0)}{8} = 0{,}04986$$

В приближенных формулах Лапласа по мере приближения одного из чисел p и q к нулю точность понижается, т.е. точность в общем случае улучшается с ростом npq. Если $p \to 0$, то $q \to 1$, и если $q \to 0$, то $p \to 1$, потому, что $p+q = 1$.

Обычно для произведения npq берут число не менее 10., отсюда следует, что *если p или q близко к нулю, тем больше нужно брать n.*

В задачах, где требуется вычислять вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0<p<1)$, событие наступит не менее $0 \le m_1 -$ раз и не более m_2 раз, $m_2 \le n$, равна

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n(m_1; m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m).$$

И используют интегральную теорему Муавра- Лапласа (ее приведём без доказательства, можно прочитать, например, в учебнике [1]).

В основе доказательства естественно лежит локальная теорема Муавра-Лапласса.

6. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и удовлетворяет двойному неравенству $0 < p < 1$, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ может быть вычислена по следующей приближённой формуле

(14) $$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n(m_1; m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx,$$

где пределы интеграла определяются равенствами

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

Формула (14) тем точнее, чем больше число испытаний в данном эксперименте.
На основании равенство (13) формулу (14) можно переписать в виде

(15) $$P_n(m_1; m_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi_0(x) dx.$$

Далее, введём понятие ***нормированной функции Лапласа:***

(16) $$\Phi_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad \text{(Н.Ф.Л)}$$

Отметим простейшие свойства функции $\Phi_0(x)$:

1. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.
2. $\Phi_0(0) = 0$; $\Phi_0(+\infty) = 0{,}5$
3. $\Phi_0(x) \ge 0$; $\Phi_0'(x) = \varphi_0(x) \ge 0$; $x \ge 0$;

График функции (Н.Ф.Л) приведён на рисунке 15

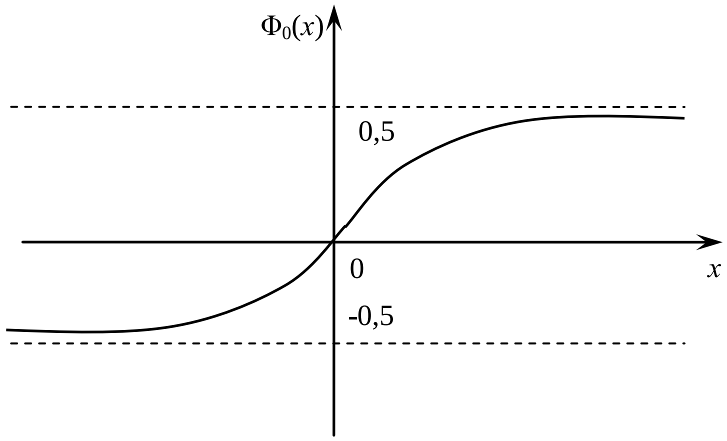


Рисунок 15

Последнее свойство связано со свойствами функции Гаусса $\varphi_0(t)$.

Функция $\Phi_0(x)$ нечётна. Действительно, после замены переменных $t=-u$

$$\Phi_0(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=[t=-u]=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=-\Phi_0(x);$$

Отсюда следует, что $\Phi(-\infty)=-\Phi(+\infty)=-0{,}5$.

Для проверки второго свойства достаточно сделать чертёж. Аналитически она связана с так называемым несобственным интегралом Пуассона.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}dt=1$$

Отсюда прямо следует, что для всех чисел $x\geq 5$ можно полагать что, $|\Phi_0(x)|=0{,}5$ следовательно, все значения этой функции расположены в отрезке [-0,5; 0,5], при этом наименьшим является $\Phi_0(-\infty)=-0{,}5$, затем функция медленно растёт и обращается в нуль, т.е. $\Phi_0(0)=0$, а затем возрастает до $\Phi_0(+\infty)=0{,}5$. Следовательно, на всей числовой прямой является строго возрастающей функцией, т.е. если $x_1<x_2$, то $\Phi_0(x_1)\leq\Phi_0(x_2)$.

Замечание. При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Муавра-Лапласа пользуются специальными таблицами. В таблице даны значения для положительных аргументов x и $x=0$ и $x<0$ следует воспользоваться той же таблицей с учётом равенства $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$.

Далее, для того, чтобы воспользоваться таблицей функции $\Phi_0(x)$, преобразуем равенство (15), так:

$$P_n(m_1;m_2)\approx\int_{x_1}^{x_2}\varphi_0(x)dx=\int_{x_1}^{0}\varphi_0(x)dx+\int_{0}^{x_2}\varphi_0(x)dx;$$

И на основании свойства 2 (нечётности $\Phi_0(x)$), с учётом чётности подынтегральной функции получим

$$P_n(m_1;m_2)\approx\int_{x_1}^{x_2}\varphi_0(x)dx=-\int_{0}^{x}\varphi_0(x)dx+\int_{0_1}^{x_2}\varphi_0(x)dx=\Phi_0(x_2)-\Phi_0(x_1)$$

Таким образом, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях не менее m_1 раз и не более m_2 раз, вычисляется формулой:

(17) $$P_n(m_1;m_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)\,; \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

Пример 12. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 300 выстрелах мишень будет поражена не менее 150 и не более 250 раз.

Решение: Здесь $n = 300$, $m_1 = 150$, $m_2 = 250$, $P = 0{,}75$, $q = 0{,}25$. Вычисляем

$$x_1 = \frac{150 - 300\cdot 0{,}75}{\sqrt{300\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} = \frac{-75}{30\cdot 0{,}25} = -10\,,\; x_2 = \frac{25}{30\cdot 0{,}25} = \frac{10}{3} = 3{,}3333\cdots,$$

$$\Phi_0(-10) = -0{,}5,\;\; \Phi_0(3{,}33) = 0{,}4995.$$

Подставляя в интегральную формулу Лапласа, получим

$$P_{300}(150, 250) \approx 0{,}4995 - (-0{,}5) = 0{,}9995.$$

На практике наряду с равенством (16) часто используют и другую формулу называемую «***интегралом вероятности*» *или функцией Лапласа*** (см. более подробно в гл. 2., Т. 9.).

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \quad \text{(И.В. или Ф.Л.)}$$

Для этой функции справедливы равенства:

(18) $$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1; \qquad \Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x).$$

Следовательно, она связана с табулированной функцией $\Phi_0(x)$ и поэтому имеется также её таблица приближённых значений.

Отметим следующие свойства этой функции, непосредственно вытекающие из определения и равенств (18) (с учётом свойства функции $\Phi_0(x)$):

$\Phi(-\infty) = 0$; $\Phi(+\infty) = 1$; $\Phi(0) = 0{,}5$; $\quad 0 \le \Phi(x) \le 1$; $\quad$ 3. Если $x_1 < x_2$ то $\Phi(x_1) \le \Phi(x_2)$

График функции $\Phi(x)$ приведён на рис.16.

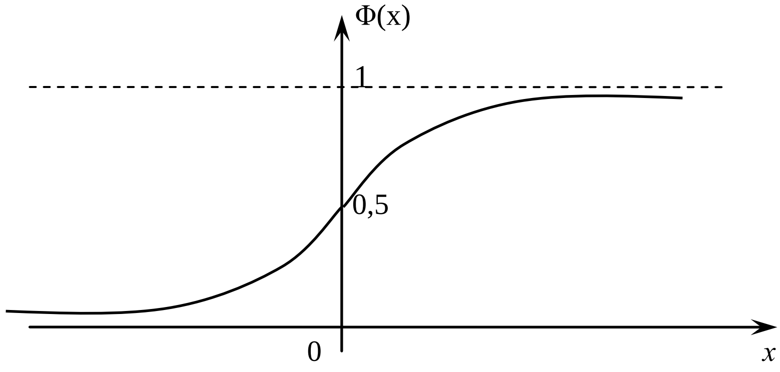


Рисунок 16

Пример 13. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 300 выстрелах мишень будет поражена не менее 150 и не более 250 раз.

Решение: Здесь $n = 300$, $m_1 = 150$, $m_2 = 250$, $P = 0{,}75$, $q = 0{,}25$. Вычисляем

$$x_1 = \frac{150 - 300\cdot 0{,}75}{\sqrt{300\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} = \frac{-75}{30\cdot 0{,}25} = -10\,,\; x_2 = \frac{25}{30\cdot 0{,}25} = \frac{10}{3} = 3{,}3333\cdots,$$

$$\Phi_0(-10) = -0{,}5\,,\;\; \Phi(3{,}33) = 0{,}4995.$$

Подставляя в интегральную формулу Лапласа, получим

$$P_{300}(150,250)\approx 0{,}4995-(-0{,}5)=0{,}9995.$$

Пример 14. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей непроверенных деталей окажется от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию задачи $n=400$, $p=0{,}2$, $q=0{,}8$. $m_1=70$, $m_2=100$. Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_{400}(70;100)\approx \Phi_0(x_2)-\Phi_0(x_1),$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=-1{,}25;\ x_2=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=2{,}25;$$

Следовательно, с учётом табличных значений функции $\Phi_0(x)$; $\Phi_0(2{,}25)=0{,}4938$; $\Phi_0(-1{,}25)=-0{,}3944$; получим искомую вероятность

$$P_{400}(70;100)\approx \Phi_0(x_2)-\Phi_0(x_1)=0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882\,.$$

Приближённую формулу (17) (с учётом (18)) можно переписать в виде:

$$P_n(m_1;m_2)\approx\ 0{,}5+\Phi_0(x_2)-(\Phi_0(x_1)+0{,}5)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)\,;$$

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}};\ \ x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}};$$

Теперь у нас есть возможность в качестве приложения рассмотренных предельных теорем доказать известную теорему **«*закон больших чисел в форме Бернулли*»**

7. Закон больших чисел (ЗБЧ в форме Бернулли)

Первым исторически самым простым законом больших чисел является теорема Я. Бернулли. Теорема Бернулли выражает наиболее простую форму проявлния закона больших чисел. Она обосновывает теоретическую возможность приближенного вычисления вероятности события с помощью его относительной частоты, т.е. обосновывает свойство устойчивости относительной частоты.

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна, p ($0<p<1$), а относительная частота в каждой серии испытания равна $W_n(m)=\dfrac{m}{n}$; $0\le m\le n$;

Рассмотрим задачу: *в условиях испытания по схеме Бернулли и при достаточно большом числе независимых испытаний* n *найти вероятность отклонение относительной частоты* $W(A)=m/n$ *от постоянной вероятности* p *появления события* A *по абсолютной величине не превышает заданного числа* $\varepsilon>0$. *Другими словами, найти вероятность:* $P(|\,p-m/n\,|<\varepsilon)$ *при достаточно большом числе независимых испытаний.*

Теорема (ЗБЧ Я. Бернулли 1713 г.) *При вышеприведённых условиях при любом* n, *как бы ни было мало* $\varepsilon>0$, *имеет место предельное равенство*

(19) $$\lim_{n\to\infty}P\left(|\,\frac{m}{n}-p\,|\le\varepsilon\right)\to 1\ .$$

Доказательство. Проведём доказательство этого важного утверждения на основании интегральной теоремы Муавра – Лапласа. По определению относительная частота равна

$$W_n(m) = \frac{m}{n};\ 0 \le m \le n.$$

А $p = P(A)$ – вероятность наступления событие A в одном испытании. Сначала установим следующее равенство при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом n:

(20) $$P(|\,p - m/n\,| \le \varepsilon) = 2\ \Phi_0\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Действительно, в соответствии условием $\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon$ легко заметить, что имеет место двойное неравенство $-n\varepsilon \le m - np \le n\varepsilon$. Обозначим

(21) $$t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}};\quad t_1 = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Тогда, будем иметь неравенства

$$-\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}} \quad \Leftrightarrow \quad -t_1 \le t \le t_1.$$

Следовательно, для искомой вероятности $P(|\,p - m/n\,| \le \varepsilon) = P(-t_1 \le t \le t_1)$. Теперь, для случаев $x_1 = -t_1;\ x_2 = t_1$ воспользуемся равенством (17)

$$P\ (x_1 \le x \le x_2) \approx\ \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1);\quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},\ \ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

и с учётом нечётности $\Phi_0(x)$ получим

$$P(|\,p - m/n\,| < \varepsilon) = P(-t_1 \le t \le t_1) = \Phi_0(t_1) - \Phi_0(-t_1) = 2\Phi_0(t_1) = 2\,\Phi_0\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Равенство (20) получено.

Из формулы (20) непосредственно следует, что при $n \to \infty$ (с учётом $\Phi_0(+\infty) = 0{,}5$; где $\varepsilon;\ pq$ – *постоянные*), получим предельное равенство (20).

Пример 15. Вероятность того, что деталь нестандартна, равна $p = 0{,}1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. Согласно условиям задачи $n = 400;\ \ p = 0{,}1;\ \ q = 0{,}9;\ \varepsilon = 0{,}03$, требуется найти

$$P\left(\left|\ \frac{m}{400} - 0{,}1\ \right| \le 0{,}03\right) = ?$$

По формуле (3) имеем

$$P\left(\left|\ \frac{m}{400} - 0{,}1\ \right| \le 0{,}03\right) = 2\ \Phi_0\left(0{,}03 \cdot \sqrt{\frac{400}{0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) = 2\,\Phi_0(2).$$

С учётом табличного значения функции $\Phi_0(2) = 0{,}4772$ получим

$$P\left(\left|\ \frac{m}{400} - 0{,}1\ \right| \le 0{,}03\right) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб $n = 400$ деталей, то в каждой пробе примерно происходит отклонение относительной «частоты» на 95,44 % и величина $W_{400}(m)$ этих проб от вероятности $p = 0{,}1$, по модулю не превышающей 0,03.

Рассмотрим другой пример, где требуется найти число $n=?$.

Пример 16. Вероятность того, что деталь нестандартна, равна $p=0{,}1$. Сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью 0,9999 можно было бы утверждать, что относительная частота нестандартных деталей (среди отобранных), отклоняется от p по модулю не более, чем на 0,03. Найти это количество $n=?$

Решение. Здесь, по условию $p=0{,}1;\ q=0{,}9;\ \varepsilon=0{,}03;\ P\left(\left|\dfrac{m}{n}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)=0{,}9999$.

Требуется определить n. По формуле (13) имеем

$$P(|\,p-m/n\,|<\varepsilon)\approx 2\ \Phi_0\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Поскольку,

$$2\cdot\Phi_0\left(0{,}03\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=2\cdot\Phi_0\left(0{,}1\cdot\sqrt{n}\right)=0{,}9999\Rightarrow\Phi_0\left(0{,}1\cdot\sqrt{n}\right)=0{,}4999.$$

По таблице находим, что данное значение соответствует для аргумента $x=0{,}1\cdot\sqrt{n}=3{,}8$. Отсюда, $n=38^2=1444$. Смысл этого результата таков: относительная частота будет заключена между числами $0{,}1-0{,}03<W_n(m)<0{,}1+0{,}03\Leftrightarrow\ 0{,}07<W_n(m)<0{,}13$.

Таким образом, число нестандартных деталей в 99,99 % проб будет заключено между числами 101,72 (7 % от числа 1444) и 187,72 (13 % от числа 1444).

Если взять лишь одну пробу 1444 деталей, то с большой уверенностью можно ожидать, что число нестандартных деталей будет не менее101и не более 188, в тоже время маловероятно, что их окажется меньше 101 или больше 188.

Следует заметить, что теорема Бернулли также устанавливает: *при неограниченном увеличении числа испытаний частота случайного события A сходится по вероятности к истинной вероятности этого же события, т.е. справедлива оценка снизу*

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)>1-\delta;\quad 0<\delta<\frac{pq}{n\cdot\varepsilon^2}, \tag{22}$$

при условии, что вероятность события A от испытания к испытанию остается неизменным и равным p, при этом $p+q=1$.

Неравенство (22) является прямым следствием известного неравенства Чебышева (см. далее тему «Предельные теоремы теории вероятностей» «Теорема Чебышева»). Мы позже ещё раз вернёмся к этому ЗБЧ. Оно удобно для получения оценок вероятностей снизу и двухстороннею оценку для необходимого числа наступления события, так чтобы вероятность от модуля разности относительной частоты и истинной вероятности, заданному ограничению рассматриваемого события удовлетворяло.

Пример 17. Монету подбрасывают 1000 раз. Оценить снизу вероятность отклонения частоты появления «герба» от вероятности его появления меньше чем на 0,1.

Решение. По условию здесь $n=1000;\ p=q=0{,}5;\ \varepsilon=0{,}1;$

$$\delta<\frac{pq}{n\cdot\varepsilon^2}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{1000\cdot 0{,}01}=\frac{1}{40};$$

На основании неравенство (4) получим

$$P\left(\left|\frac{m}{1000}-\frac{1}{2}\right|<0{,}1\right)>1-\frac{1}{40}=\frac{39}{40}.$$

Следовательно, неравенство $\left|\frac{m}{100}-\frac{1}{2}\right|<0{,}1$ равносильно двойному неравенству $400<m<600$;

Поэтому можно заключить, что вероятность числа попаданий «герба» в интервал (400; 600) больше чем $\frac{39}{40}$.

Пример 18. В урне 1000 белых и 2000 чёрных шаров. Извлекли (с возвращением) 300 шаров. Оценить снизу вероятность того, число извлечённых шаров *m* (при этом они должны быть белыми) удовлетворяет двойному неравенству 80<*m* <120.

Решение. Двойное неравенство для величины *m* перепишем в виде:

$$-20<m-100<20 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{15}<\frac{m}{300}-\frac{1}{3}<\frac{1}{15}.$$

Таким образом, требуется оценить вероятность выполнении неравенства

$$\left|\frac{m}{300}-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{15} \qquad \Rightarrow \quad \varepsilon=\frac{1}{15}.$$

Следовательно,

$$P\left(\left|\frac{m}{300}-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{15}\right)>1-\frac{(1/3)\cdot(2/3)}{300\cdot 1/225}=\frac{5}{6}.$$

Математическая истина
остаётся на
вечные времена
«Числа правят
Миром!»

ГЛАВА II

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Тема 7. Случайные величины, законы распределения случайной величины

1. Понятие случайной величины

Одним из основных понятий дисциплины теории вероятностей (наряду со случайным событием и понятием вероятности) является понятие случайной величины (коротко с.в.).

Уже в первой части нашего курса лекции (случайные события) приводились примеры события, когда при испытаниях появлялись те или иные числа.

Например, при бросании игральной косточки, могло появиться любое из чисел: $1, 2, 3,.4, 5, 6.$ Заранее до проведения эксперимента угадать число выпавших очков нельзя, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которых полностью предусмотреть невозможно.

Число космических частиц, попадающих на определённый участок земной поверхности в течение определённой промежутка времени, подвержено значительным колебаниям в зависимости от многих случайных обстоятельств, скорость молекулы газа не остаётся неизменной, а меняется в зависимости от столкновения с другими молекулами и т.д.

Среди решаемых задач встречаются много таких в которых исходы опыта выражаются некоторым числовым множеством *X*. В этом смысле, например, число очков в множестве $X = \{1, 2, 3,.4, 5, 6\}$ при бросании игральной косточки - есть величина случайная и выражает всевозможные значения случайной величины в данном эксперименте. Приведём ряд примеров.

1. Число родившихся мальчиков среди 100 новорождённых – есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения $X=\{0, 1, 2, \ldots, 99, 100\}$.

2. Измерение температуры больных в некотором лечебном учреждении (примерно в пределах от $35^0,\ldots$до $40^0,\ldots$) – есть случайная величина.

3. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия – есть случайная величина Потому, что оно зависит от силы и направления ветра, температуры воздуха, мощности оружия, угла направления полёта и т.д.

Величина называется случайной, если она принимает свои значения в зависимости от исхода некоторого испытания (опыта), причём для каждого элементарного исхода она имеет единственное значение.

Примеры:

- число выстрелов до первого попадания в цель;

- время безотказной работы некоторого механического прибора;
- изменения роста человека по времени;
- изменение курса валюты некоторого государства за определённый период;
- количество бракованных деталей в некоторой совокупности, изготовленной изделии;
- изменение температуры воздуха в течение дня и т.д.

2. Дискретные и непрерывные случайные величины

Случайная величина X может принять то или иное значение из некоторого числового множества, однако заранее неизвестно, какое именно. В дальнейшем будем обозначать случайные величины прописными буквами: X, Y, Z или их индексациями: $X_i, Y_j, Z_k, \cdots$, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами $x, y, z, \cdots, x_i, y_j, z_k, \cdots$. К примеру, если покупается n лотерейных билетов и X - число выигрышей, то $X = \{0, 1, 2..., n\}$.

*Если значения, которые может принимать данная случайная величина X, образует дискретный ряд чисел $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ (конечный или бесконечный, но счетный**!**), то случайная величина X называется дискретной (сокращённо* д.с.в.). *То есть* д.с.в. *принимает отдельные изолированные друг от друга значения с определёнными вероятностями.*

Если же значения, которые может принимать данная случайная величина X, заполняет конечный или бесконечный промежуток $(a,b) \subseteq R = (-\infty, +\infty)$ числовой оси OX, то случайная величина называется непрерывной (сокращённо н.с.в.)

*Каждому значению случайной величины **дискретного типа** x_n отвечает определённая вероятность $p_n = P(X = x_n)$; каждому промежутку (a,b) из области значений случайной величины **непрерывного типа,** также отвечает определённая вероятность $P(a < X < b)$ того, что значение, принятое случайной величиной, попадёт в этот промежуток.*

Таким образом, случайной величиной является некоторая числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий (коротко ПЭС) Ω, которая каждому элементарному событию $\omega \in \Omega$ ставит в соответствие число $X = X(\omega) \Leftrightarrow X = f(\omega)$.

Пример 1. Пусть подбрасывается монета 2 раза. Пространством элементарных событий будет $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, где $\omega_1 =$ Г Г**,** $\omega_2 =$ Г Р**,** $\omega_3 =$ Р Г, $\omega_4 =$ Р Р**,** можно рассматривать как случайную величину X - число появлений герба. Случайная величина X является функцией от элементарного события $\omega_i : X(\omega_1) = 2;\ X(\omega_2) = X(\omega_3) = 1;\ X(\omega_4) = 0;$

Следовательно, $X-$есть случайная величина со значениями: $X = \{2; 1; 0\}$.

Следует запомнить, что если множество ПЭС Ω конечное или счётное, то с.в. является любая функция, определённая на всем Ω. В общем случае функция $X(\omega)$ должна быть такова, чтобы для любого $x \in R$ событие $A = \{\omega : X(\omega) < x\}$ принадлежало $\sigma-$алгебре множества S , а следовательно, для любого такого события определена числовая функция $P(A) = P(X < x)$ называемая - вероятностью наступления событие $A = \{\omega : X(\omega) < x\}$.

Для дальнейшего следует помнить, что для полного описания с.в. недостаточно лишь знания ее возможных значений; необходимо ещё знать вероятности этих значений, причём, сумма всех вероятностей должна равняться единице.

Любое правило (таблица, функция, график), позволяющее находить вероятности произвольных событий $A \subseteq S$, где S - алгебра множеств (событий) пространства Ω, в том числе, указывающих вероятности отдельных значений с.в. или множества этих значений называется ***законом распределения случайной величины*** *(или просто:* ***распределением****).* Относительно с.в. X говорят, что «*она подчиняется данному закону распределения*».

3. Законы распределения дискретной случайной величины, таблица распределения

Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется ***законом распределения случайной величины.***

Сначала дадим определение закона распределения дискретной случайной величины. Закон дискретной случайной величины, обычно задается в виде таблицы: в первой строке выписывается значения случайной величины, а во второй строке их соответствующие вероятности $p_n = p(X = x_n)$.

Таблица распределения *дискретной случайной величины* в общем случае имеет вид:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

$$\textbf{Контроль - } \sum_{k \in M} p_k = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n + \cdots = 1;\ M \subseteq Z_+,$$

где Z_+ – множество всех положительных целых чисел.

Эта таблица называется законом распределения данной дискретной случайной величины *X*, при этом должно выполняться обязательное условие: $\sum p_i = 1$ - ***контроль***.

Таким образом, контроль означает, что множество значений, принимаемых случайной величиной, *образует полную группу событий.*

Пример 2. Подбрасывание монеты: $X = \{1;\ 0\}$. Если выпадет герб (событие *A*), то $X = 1$; если выпадет решетка (событие $\overline{A}$), то $X = 0$. Здесь $p = q = 0{,}5$. Составим закон распределения данной случайной величины

X	1	0
P	0,5	0,5

$$\text{Контроль } \sum_{i=1}^{2} p_i = 0{,}5 + 0{,}5 = 1.$$

Пример 3. (Бросание игральной косточки). При данном эксперименте множество значений дискретной случайной величины определяется $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, и а множество соответствующих вероятностей равенствами: $P(X = m) = 1/6$; $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Следовательно, имеем таблицу распределения д.с.в. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ в виде:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\text{Контроль } \sum_{i=1}^{6} p_i = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1.$$

Закон распределения случайной величины можно задать графическим способом, при этом на оси абсциссы откладывают возможные значения случайной величины, а на оси ординат откладывают вероятности этих величин.

Ломанную, соединяющую последовательно точки $(x_k, p_k; k = 1, 2, \cdots)$ *называют многоугольником (или полигоном) распределения*

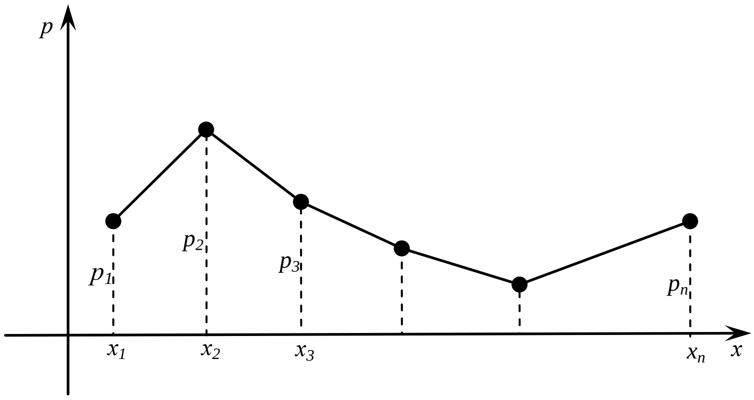


Рисунок 17

Продолжим рассмотрение примеров.

Пример 4. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 1000 у.е., 10 выигрышей – по 100 у.е., 100 выигрышей по 10 у.е. и 1000 выигрышей по 1 у.е. при общем количестве билетов 10000. Выписать закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного билета.

Решение. Составим множество значений д.с.в. X . Имеем

$$X = \{1000;100;10;0\};\ p_1 = P(X = 1000) = 0{,}0001;\ p_2 = P(X = 100) = 0{,}001;$$

$$p_3 = P(X = 10) = 0{,}01;\ p_4 = P(X = 1) = 0{,}1;\ p_5 = P(X = 0) =$$

$$= 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0{,}8889;$$

ибо 10000-(1+10+100+1000)=8889 – количество безвыигрышных лотерей. Составим закон распределения данной случайной величины.

X	1000	100	10	1	0
P	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,8889

$$\text{Контроль } \sum_{i=1}^{5} p_i = 0{,}0001 + 0{,}001 + 0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}8889 = 1.$$

Пример 5. Дан ряд распределения случайной величины X , после проведения опыта:

X	10	20	30	40	50
P	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

$$\text{Контроль } \sum_{i=1}^{5} p_i = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}35 + 0{,}1 + 0{,}05 = 1..$$

Пример 6. При некотором эксперименте даны вероятности значений дискретной случайной величины значение 11 имеет вероятность 0,03; значение 13- вероятность 0,2; значение 17 - вероятность 0,15; значение 19 - вероятность 0,15; значение 23- вероятность 0,25; значение 29 - вероятность 0,07;

Следовательно, имеем таблицу распределения д.с.в. $X = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ в виде:

X	11	13	17	19	23	29
P	0,03	0,2	0,3	0,15	0,25	0,07

Контроль $\sum_{i=1}^{6} p_i = 0{,}03 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}07 = 1$

4. Функция распределения случайной величины, функция распределения дискретной случайной величины.

Начнём с того, что ряд распределения закона случайной величины (таблица) может быть построен только для дискретных случайных величин, а для непрерывных случайных величин, этого сделать невозможно, более того, невозможно даже перечислить все ее возможные значения. К тому же, как увидим далее ***вероятность каждого отдельно взятого значения н.с.в. равна нулю!*** Представим себе вероятность того, что рост человека – н.с.в. равна $\sqrt{3} = 1{,}7320506...$ метров; купленная нами батарея - н.с.в. проработает ровно 1000 часов; и т.д.

Интереснейший факт: *событие возможное, имеет нулевую вероятность*.

В целях лучшего понимания поведения н.с.в. целесообразно использовать вероятность события $\{X < x\}$, но не $\{X = x\}$, где $x-$некоторое действительное число, расположенное на числовой оси $\Re$. С точки зрения практики, как правило, нас мало интересует событие, состоящее, например, в том, что батарея проработает ровно 1000 часов, т.е. $X = 1000$ часов. Скорее всего, более важным является событие вида $\{X < 1000\}$ (или $\{X > 1000\}$). Такое событие имеет ненулевую вероятность: при изменении правого конца интервала x вероятность событие $\{X < x\}$ в общем случае будет меняться (может оставаться неизменным). Следовательно, вероятность $P\{X < x\}$ является функцией величины X.

Наиболее общий способ задания закона распределения вероятностей считается приемлемым, как для д.с.в., так и для н.с.в.. Функция распределения случайной величины X задаётся в виде некоторой числовой функции, обозначаемая $\Phi_X(x)$ или просто $\Phi(x)$ без индекса, если из текста ясно, о какой с.в. идёт речь.

Функцией распределения с.в. X *называется функция* $\Phi(x)$, *которая для любого* $x \in \Re$ *равна вероятности события* $A = \{X < x\}$. Другими словами, по определению

(1) $$\Phi(x) = P(A) = P\{X < x\}, \text{ т.е. } \Phi(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\}.$$

Функцию $\Phi(x)$ называется также *интегральной функцией распределения.*

Геометрически равенство (1) удобно истолковать в следующем виде: $\Phi(x)$- есть вероятность того, что с.в. X примет значение, которое изображается на числовой оси точками, лежащие левее точки (x) координата которой является число x, т.е. случайное значение с.в X попадает в интервал $(-\infty < X < x)$, а соответствующие значения $\Phi(x)$ откладываются на оси ординаты.

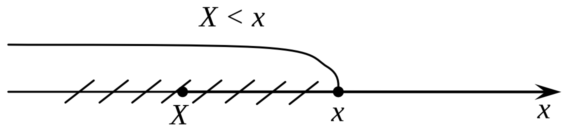


Рисунок 18

Отметим основные свойства функции распределения $\Phi(x)$.

С.1. $\Phi(x)$ ограничена, $0 \le \Phi(x) \le 1$.

С.2. $\Phi(x)$ – неубывающая функция на множестве $\Re$, т.е. если $x_1 < x_2$, то $\Phi(x_1) \le \Phi(x_2)$.

С.3. Справедливы равенства: $\Phi(-\infty) = 0$ и $\Phi(+\infty) = 1$.

С.4. *Вероятность попадание значения с.в. X в промежутке $[a,b)$ равна приращению её функции распределения на этом промежутке, т.е. имеет место формула*

(2) $$P(a \le X < b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

С.5. Функция $\Phi(x)$ – непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \Phi(x) = \Phi(x_0)$, т.е. функция распределения д.с.в. X есть разрывная, со скачками p_j в точках x_j, «*непрерывная слева*» (т.е. при подходе к точке разрыва слева функция $\Phi(x)$ сохраняет своё значение), т.е. график функции распределения д.с.в. X имеет ступенчатый вид (см. ниже рис. 20).

Проверка свойства.

Первое свойство легко следует из определения функции распределения из равенства (1). Второе свойство следует из того, что при увеличении правого конца отрезки $(-\infty, x)$ вероятность с.в. X либо не меняется, либо может только увеличиться. Третье свойство вытекает из того, что множество $\{X < -\infty\} = \varnothing$, а множество $\{X < +\infty\} = \Omega$. Следовательно,

$$P(\{X < -\infty\} = P(\varnothing) = 0; P(\{X < +\infty\} = P(\Omega) = 1 .$$

Поскольку $a < b$, то событие $\{X < b\} = \{X < a\} + \{a \le X < b\}$ (это хорошо видно на рисунке 19),

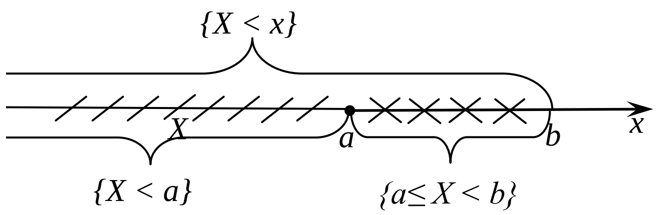


Рисунок 19

Поскольку, слагаемые в правой части суммы событий – *несовместные*, то по теореме сложения вероятностей получим: $P\{X < b\} = P\{X < a\} + P\{a \le X < b\}$. Отсюда следует равенство (2)

$$P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} \Leftrightarrow \Phi(b) - \Phi(a).$$

С.5. иллюстрируем на следующем примере:

Пример 7. В урне 8 шаров, из которых 5 белых, остальные шары чёрные. Из нее вынимают на удачу 3 шара.

1. Найти закон распределения числа белых шаров.

2. Найти функцию распределения $\Phi(x)$

3. Построить график функции $\Phi(x)$.

Решение. Возможные значения с.в X - числа белых шаров в выборке будут: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2;;x_4 = 3.$ Соответствующие их вероятности будут

$$p_1 = P\{X = 0\} = \frac{C_5^0 \cdot C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56};\ p_2 = P\{X = 1\} = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56};$$

$$p_3 = P\{X = 2\} = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56};\ p_4 = P\{X = 3\} = \frac{C_5^3 \cdot C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56};$$

1. Закон распределения запишем в виде таблицы.

X	0	1	2	3
P	1/56	15/56	30/56	10/56

Контроль - $\sum_{i=0}^{3} p_i = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} + \frac{10}{56} = 1.$

2. Зададим различные значения x и находим (с учетом таблицы):

а) $x \le 0,\ \Phi(x) = P\{X < 0\} = 0;$

б) $0 < x \le 1\ ;\Phi(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{56};$

б) $1 < x \le 2\ \ \Phi(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{16}{56};$

г) $2 < x \le 3;\ \Phi(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{46}{56};$

д) $3 < x \le 4;\ \Phi(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{46}{56} + \frac{10}{56} = 1.$

Таким образом, функция распределения с.в. X будет ступенчатой функцией вида:

(3)
$$\Phi(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0, \\ 1/56; & 0 < x \le 1, \\ 16/56; & 1 < x \le 2, \\ 46/56; & 2 < x \le 3, \\ 1; & 3 < x. \end{cases}$$

Наконец, построим график функции $\Phi(x) = \Phi_X(x)$.

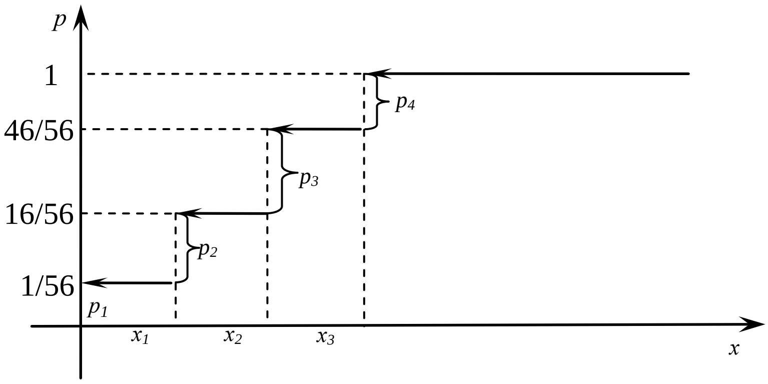


Рисунок 20

Таким образом, *всякая функция* $\Phi(x)$, *обладающая свойствами* **1-3** *и* **5**, *может быть функцией распределения некоторой дискретной случайной величины*.

Следует отметить, что формула (2) (свойство **С.4.**) справедлива так же и для н.с.в.

С помощью функции распределения с.в. X вычисляется вероятность противоположного события $\{X \geq x\}$. Именно, справедлива формула:

(4) $$P\{X \geq x\} = \overline{\Phi}_X(x) = 1 - \Phi_X(x).$$

Для функции распределения д.с.в. X всегда справедлива формула

(5) $$\Phi_X(x) = \sum_{x_j < x} p_j ,$$

где суммирование ведется по таким, j для которых $x_j \in X$; $x_j < x$. Равенство (5) непосредственно выводится из формулы (1). Пользуясь, этой формулой для функции распределения нашего примера можно было сразу написать равенства по значениям из таблицы:

(6) $$\Phi(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0, \\ 1/56; & 0 < x \leq 1, \\ 1/56 + 15/56 = 16/56; & 1 < x \leq 2, \\ 1/56 + 15/56 + 30/56 = 46/56; & 2 < x \leq 3 \\ 1/56 + 15/56 + 30/56 + 10/56 = 1; & 3 < x. \end{cases}$$

Задание.

1. Найти по таблице заданной д.с.в. X

X	2	6	10
P	0, 3	0,1	0,6

Явный вид функции распределения и построить её график.

2. По таблице заданной д. с. в. X

X	1	4	13
P	0, 3	0,2	0,5

найти явный вид функции распределения и построить её график.

Далее рассмотрим определение непрерывной случайной величины, в соответствии её заданной функции распределения.

Случайную величину X *называют непрерывной, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, за исключением, может быть отдельных точек.*

На основании свойство **С.4.** покажем, что «***вероятность, того, что н.с.в.*** X ***примет заранее указанное определённое значение*** a, ***равна нулю».***

Действительно, применим формулу (2) к промежутку $[a, x)$: имеет место равенство $P\{a \le t < x\} = \Phi(x) - \Phi(a)$. Далее, будем неограниченно приближать точку x к a**,** и с учетом непрерывности $\Phi(x)$ в точке a**,** получим: $\lim\limits_{x \to a} \Phi(x) = \Phi(a)$. Следовательно, $P\{X = a\} = \lim\limits_{x \to a} \Phi(x) - \Phi(a) = \Phi(a) - \Phi(a) = 0$. Если функция всюду непрерывна, то вероятность каждого отдельного значения с.в. равна нулю.

Таким образом, для каждой н.с.в. X справедливы равенства:

$$P\{a \le X < b\} = P\{a < X < b\} = P\{a \le X \le b\} = P\{X \in (a, b]\}.$$

Действительно, покажем справедливости первой части нашего равенства. Имеем

$$P\{a \le X < b\} = P\{X = a\} + P\{a < X < b\} = P\{a < X < b\}.$$

Аналогично проверяются остальные равенства.

5. Производящая функция дискретной случайной величины

Кратко остановимся на понятие производящей функции конечных дискретных случайных величин.

Функцию, определённую равенством $f_n(x) = (p + qx)^n$, $n < +\infty$, где x некоторый параметр называют ***производящей функцией*** для последовательности повторных независимых опытов. Очевидно, что при $x = 1$ имеет место равенство

$$f_n(1) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1,$$

для любого натурального числа $n < \infty$.

Пусть производится n испытаний, причём в первом испытании вероятность появления события A равна p_1, во втором равна $p_2, \cdots,$ в $n-$м испытании равна p_n и вероятности *непоявления* события A соответственно равны $q_1, q_2, \cdots, q_n$. За $P_n(m)$ обозначим вероятность появления события A в n испытаниях ровно m раз.

Производящей функцией вероятностей $P_n(m)$ *называют функцию, определяемую равенством*

$$(*) \qquad f_n(x) = (q_1 + p_1 x) \cdot (q_2 + p_2 x) \cdots (q_n + p_n x) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k x).$$

Таким образом, вероятность $P_n(m)$ равна коэффициенту при $m-$й степени многочлена $f_n(x)$, определённой равенством $(*)$, т.е. равна коэффициенту при x^m в разложении производящей функции по степеням x.

Замечание. Отметим, что при $x = 1$ должно выполняться равенство (обычно называется контроль).

$$(**) \qquad f_n(1) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k) = \sum_{k=1}^{n} P_n(k) = 1.$$

При $n = 2$ имеем равенство

$$f_n(x) = (q_1 + p_1 x) \cdot (q_2 + p_2 x) = p_1 p_2 x^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1) x + q_1 q_2.$$

Следовательно, коэффициент при x^2 равно p_1p_2, при x равно $(p_1q_2+p_2q_1)$ и при x^0 равно q_1q_2.

Следует заметить, что если в различных испытаниях появляются различные события (в первом испытании событие A_1, во втором событие A_2 и т.д.), то изменяется лишь истолкование коэффициентов при различных степенях x. Например, в равенстве $(**)$ коэффициент p_1p_2 определяет вероятность появления двух событий A_1 и A_2.

Пример 8. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятности безотказной работы элементов (за время t) соответственно равны $p_1=0{,}7;\, p_2=0{,}8;\, p_3=0{,}9.$ Найти вероятности того, что за время t будут работать безотказно:

а) все три элемента;

б) два элемента;

в) один элемент;

г) ни один из элементов не будет работать.

Решение. Вероятности безотказной работы элементов соответственно равны $p_1=0{,}7;\, p_2=0{,}8;\, p_3=0{,}9.$ Следовательно, вероятности того, что элементы откажут, соответственно равны $q_1=0{,}3;\, q_2=0{,}2;\, q_3=0{,}1.$

Составим производящую функцию:

$$f_3(x)=\left(q_1+p_1x\right)\left(q_2+p_2x\right)\left(q_3+p_3x\right)=$$
$$=\left(0{,}3+0{,}7x\right)\left(0{,}2+0{,}8x\right)\left(0{,}1+0{,}9x\right)=$$
$$=0{,}504x^3+0{,}398x^2+0{,}092x+0{,}006.$$

а) Вероятность того, что три элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при x^3; $P_3(3)=0{,}504.$

б) Вероятность того, что два элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при x^2; $P_3(2)=0{,}398.$

в) Вероятность того, что один элемент будет работать безотказно, равна коэффициенту при x; $P_3(1)=0{,}092.$

г) Вероятность того, что ни один из элементов не будет работать безотказно, равна свободному члену: $P_3(0)=0{,}006.$

Легко видеть, что выполняется контроль:

$$f_3(1)=(q_1+p_1)(q_2+p_2)(q_3+p_3)=$$
$$=\sum_{k=1}^{3}P_3(k)=0{,}504+0{,}398+0{,}092+0{,}006=1.$$

Задания. Покажите, что

1. $f_n^{(k)}(x)=p^k\cdot n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))\cdot f_{n-k}(x);\, k=0,1,2,\cdots,n,$ где $(k)-$ *штрих* означает $k-$ю производную функции $f_n(x)$ по параметру x, причём

$$f_n^{(0)}(x)=f_n(x).$$

2. $f_n^{(k)}(1)=p^k\cdot n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)),\; k=1,2,\cdots,n.$

3. $f_n^{(k)}(1)=p^k\cdot A_n^k=p^k\cdot\dfrac{n!}{(n-k)!},$

где A_n^k-число размещений из n элементов по k.

Заметим, что вероятности $P_n(m)$, $m=0,1,2,\cdots,n$ являются коэффициентами при степени x^m в разложении

$$(q+px)^n=\sum_{m=0}^{n}P_n(m)x^m=\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}x^m=$$
$$=q^n+C_n^1q^{n-1}px+C_n^2q^{n-2}(px)^2+\cdots+C_n^mq^{n-m}(px)^m+\cdots+(px)^n.$$

6. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Важнейшей характеристикой непрерывной случайной величины (кроме функции распределения) является так называемая *функция плотности распределения.* Напомним, что «*случайную величину* X *называют непрерывной, если ее функция распределения* $\Phi\ (x)$ *непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, за исключением, может быть отдельных точек».*

Плотностью распределения вероятностей непрерывной *случайной величины* X *называют некоторую функцию* $\varphi(x)-$ *первую производную от функции распределения* $\Phi(x)$:

(7) $$\varphi(x)=\Phi'(x).$$

Из этого определения следует, что функция распределения является ***первообразной функцией*** для функции плотности распределения.

Функцию $\varphi(x)$ называют также ***дифференциальной функцией распределения***: она выражает одну из форм закона распределения случайной величины, относящихся только к непрерывным случайным величинам.

Следует заметить, что для описания распределения вероятностей д.с.в. X *понятие плотность распределения неприменима.*

Рассмотрим вероятностный смысл плотности распределения. По определению производной функции имеем

$$\varphi(x)=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}.$$

Далее, согласно формуле (2), выполняется равенство

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=P\{x\le X<x+\Delta x\}.$$

Отношение $\dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}$ представляет собой «среднюю вероятность», которая приходится на единицу длины участка $[x,x+\Delta x)$. Тогда получим

(8) $$\varphi(x)=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{P\{x\le X<x+\Delta x\}}{\Delta x},$$

т.е. плотность распределения $\varphi(x)$ н.с.в. X равна пределу отношения вероятности попадания н.с.в. X в промежуток $[x,x+\Delta x)$ к длине Δx этого промежутка, когда величина Δx стремиться к нулю. Из равенства (8) следует, что $P\{x\le X<x+\Delta x\}\approx\varphi(x)\cdot\Delta x$.

Тем самым, установлено, что плотность вероятности н.с.в. X определяется как функция $\varphi(x)$ удовлетворяющая, условию $P\{x\le X<x+\Delta x\}\approx\varphi(x)\cdot dx$. Выражение $\varphi(x)\cdot dx$ называется ***элементом вероятности***.

Следует отметить, что понятие функции плотности распределения вероятности $\varphi(x)$, аналогично таким понятиям, как плотность распределения масс на оси абсцисс или плотность распределения электрического тока в теории электричества в физике и т.д.

Теперь, рассмотрим свойства функции плотности распределения.

С.1. $\varphi(x)\ge 0$. $\varphi(x)$- неотрицательная функция на всей числовой оси.

С.2. Вероятность попадания н.с.в. X в промежуток $[a,b]$ равна определенному интегралу от ее функции плотности в пределах от a до b, т.е. верно равенство

(9) $$P\{a \le X \le b\} = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

С.3. Если $\Phi(x)$ функция распределения н.с.в. X и $\varphi(x)$ - функция плотности, то имеет место равенство

(10) $$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt.$$

С.4. Интеграл от функции плотности вероятности н.с.в. X в бесконечных пределах равен единице (***условие нормировки - контроль***), т.е. если $\varphi(x)$ плотность распределения некоторой н.с.в. X, тогда

(11) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1.$$

Условие нормировки для н.с.в. напоминает аналог условия **«контроля»** для случая д.с.в..

1. Функция плотности распределения $\varphi(x)$- неотрицательная функция потому, что по определению $\Phi(x)-$ неубывающая и монотонна, а следовательно $\Phi'(x) \ge 0$. Это означает, что график функция плотности, называемый ***кривой распределения***, расположен не ниже оси абсцисс, также следует отметить, что функция плотности может принимать сколь угодно большие значения.

2. Поскольку $\Phi(x)$ есть *первообразная* функцией для функции $\varphi(x)$, тогда в соответствии с формулой Ньютона-Лейбница справедливо равенство

(12) $$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b d(\Phi(x)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Отсюда, согласно определению функции $\Phi(x)$ получим

(13) $$P(a \le X \le b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Геометрический смысл этого равенства следующий: интеграл от ***элемента вероятности*** есть площадь фигуры (S), ограниченный сверху кривой распределения $\varphi(x)$ и опирающейся на отрезок [a; b]

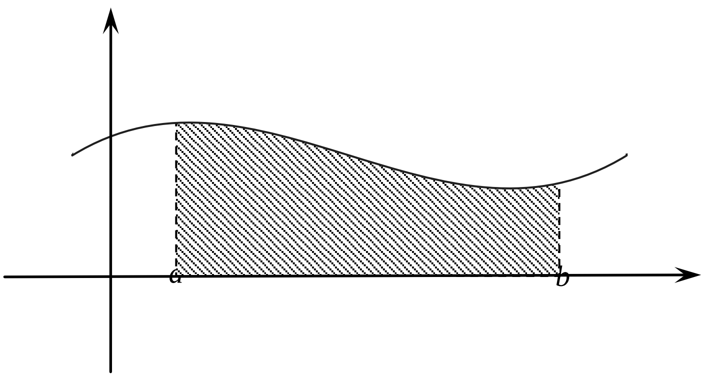


Рисунок 21

3. На основании свойства **С.2**. и то, что $\Phi(-\infty)=0,$ получим:

(14) $$\Phi(x)=P\{-\infty < X < x\}=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt\,.$$

4. Подставляя в формуле (13) соответственно $a=-\infty;\ b=+\infty$, получаем достоверное событие $X\in(-\infty;+\infty)$, т.е.

(15) $$\Phi(+\infty)-\Phi(-\infty)=P\{-\infty < X < +\infty\}=P(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt=1\,.$$

Геометрическая трактовка свойство **С.4.** (свойство нормировки) означает, что площадь фигуры (S) ограниченной функцией $\varphi(x)$ и числовой осью абсцисс $(-\infty;+\infty)$, равна единице.

Теперь, мы можем дать определение непрерывной с.в. в связи с функцией распределения плотности $\varphi(x)$: *случайная величина* X *называется* ***непрерывной,*** *если существует неотрицательная функция* $\varphi(x)$ *такая, что при любом* x *её функция распределения* $\Phi(x)$ *можно представить в виде*

$$\Phi(x)=P\{-\infty < X < x\}=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt\,;$$

отсюда получим равенство $\varphi(x)=\Phi'(x)$- *дифференциальное равенство (дифференциальный закон распределения).*

Следовательно, функций $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ являются равноправными (эквивалентными) характеристиками случайной величины X. Отметим, что на основании формулы (13) непосредственно следует равенство

$$P\{X=c\}=\int_{c}^{c}\varphi(x)dx=P(c\le X\le c)=0\,.$$

Отсюда, также следуют равенства:

$$P\{X\in[a;b)\}=P\{X\in[a;b]\}=P\{X\in(a;b)\}\,.$$

Пример 9. Пусть плотность распределения н.с.в. X задана функцией $\varphi(x)=\dfrac{C}{1+x^2}$.

1. Найти значение параметра C, при котором $\varphi(x)$ будет функцией плотности,
2. Выписать функцию распределения $\Phi(x)$.

Решение. На основании **С.4.** должно выполняться равенство (см.(11))

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{1+x^2}dx=1\,.$$

Применяя метод подсчёта несобственных интегралов, при этом воспользуюсь табличным интегралом для функции арктангенса с последующим применением формулы Ньютона – Лейбница получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{1+x^2}dx=C\cdot\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{1+x^2}=C\cdot\lim_{A\to\infty}(arctgA-arctg(-A))=$$

$$=C\cdot\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=c\cdot\pi=1\,.$$

Следовательно, $C = 1/\pi$. Далее, выпишем функцию распределения н.с.в. X плотность распределения которой равна $\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Проведя, стандартные рассуждения на основании формулы (14) получим

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{arctgx}{\pi}.$$

Такое распределение *называют распределением Коши.*

Задание. Проверьте справедливость дифференциального закона распределения и убедитесь, что $\Phi(x)$ является первообразной функцией $\varphi(x)$.

Пример 9. Пусть плотность распределения с.в. X задана функцией, $\varphi(x) = \dfrac{C}{e^{-x} + e^{x}}$.

1. Найти значение параметра C, при котором $\varphi(x)$ будет функцией плотности,
2. Выписать функцию распределения $\Phi(x)$.

Решение. Аналогично как в примере 1 пользуясь равенством (11) получим

$$C = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}} \right)^{-1} = \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{2}{\pi\left(e^{-x} + e^{x}\right)};$$

Следовательно,

$$\Phi(x) = \frac{2 \cdot arctg\, e^x}{\pi}.$$

Задание. 1. Проверьте справедливость дифференциального закона распределения и убедитесь, что $\Phi(x)$ является первообразной функцией для $\varphi(x)$.

2. Пусть $0 < \lambda \in R$ и плотность распределения н.с.в. X задана функцией

$$\varphi(\lambda; x) = \frac{C}{e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}}.$$

Найти значение параметра С, выписать явный вид функции распределения и проверить выполнение дифференциального закона.

Пример 10. Однородная проволока длиной 1 м. растягивается за концы и при этом разрывается. Пусть $X -$ случайная величина, равная расстоянию от точки разрыва до левого конца проволоки. Используя геометрические вероятности, найдём, что

$$P(a \le X < b) = \frac{mes(a,b)}{mes(0,1)} = (b-a) \le 1.$$

для любых $0 \le a < b \le 1$. Следовательно, функция распределения и плотность распределения этой случайной величины имеют вид:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, \text{ } при \quad x \le a, \\ x, \text{ } при \text{ } a \le x \le b, \\ 1, \text{ } при \quad 1 \le x. \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ } для \text{ } x \le 0, \\ 1, \text{ } для \text{ } 0 \le x \le 1, \\ 0, \text{ } для \text{ } x \ge 1. \end{cases}$$

Задание. Проверьте выполнения дифференциального закона.

Тема 8. Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения с.в. достаточно полно характеризует случайную величину. Тем не менее, при решении многих практических задач часто закон распределения не известен (особенно в статистическом анализе процессов) и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда достаточно знать лишь некоторые из них (некоторые *числовые* *параметры*), характеризующие *основные свойства закона распределения, которые в совокупности описывают случайную величину.* Такие числовые величины называются ***<u>числовыми характеристиками</u>*** случайных величин.

К числу важнейших числовых характеристик с.в. относятся: *математическое ожидание* (*центр или среднее значение распределения с.в.*), *мода, медиана, фактор рассеивания* - *дисперсия* (*отклонение значений с.в. от её центра*), *среднее квадратичное отклонение* - «*стандарт*».

1. Математическое ожидание случайной величины

При рассмотрении числовых характеристик следует всюду различать **д.с.в**. и **н.с.в**.
Пусть задан закон распределения д.с.в. X

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

$$\textbf{Контроль - } \sum_{k \in M} p_k = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n + \cdots = 1;\ M \subseteq Z_+ ,$$

Математическим ожиданием (*или средним значением*) д.с.в. X с заданным законом распределения $p_i = P\{X = x_i\}; i = 1,2,3,\cdots,n,\cdots$ называется ***<u>число</u>,*** равное сумме произведений всех её значений на соответствующие им вероятности.

Математическим ожиданием с.в. X (сокращенно м.о.) на протяжении всей книги обозначается посредством величин: $M(X)$ или $M[X]$; $m_X = MX$; (кратко просто a или x_0).

Таким образом, согласно определению

$$m_X = MX = \sum_k x_k \cdot p_k = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k; & n < +\infty, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k; & n = \infty; \end{cases} \tag{1}$$

где суммирование в равенстве (1) ведётся по всем натуральным числам, при этом, если с.в. принимает конечное значение, то будем указывать это число, если же число элементов с.в. равно бесконечности (это количество должно быть счётным!), тогда в верней части суммы будем писать знак «∞». Причем ряд, в этом случае должен быть сходящимися (в противном случае с.в. X не имеет м.о.), т.е.

$$| m_X | = | MX | = | \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k | < +\infty . \tag{2}$$

Пример 1. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 1000 у.е. , 10 выигрышей – по 100 у.е., 100 выигрышей – по 10 у.е. и 1000 выигрышей – по 1 у.е. при общем количестве билетов 10000.

1. Выписать закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного билета.

2. Найти математическое ожидание выигрышного билета.

Решение. Как было показано ранее (см. тема 7, пункт 3), множество значений дискретной случайной величины X имеет вид $X = \{1000; 100; 10; 0\}$; соответственно их вероятностей равны:

$$p_1 = P(X = 1000) = 0{,}0001;\ p_2 = P(X = 100) = 0{,}001;$$

$$p_3 = P(X = 10) = 0{,}01;\ p_4 = P(X = 1) = 0{,}1;\ p_5 = P(X = 0) =$$
$$= 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0{,}8889;$$

т.к. 10000 - (1+10+100+1000)=8889 – количество безвыигрышных лотерей. Закон распределения данной случайной величины имеет следующий вид

X	1000	100	10	1	0
P	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,8889

$$\text{Контроль } \sum_{i=1}^{5} p_i = 0{,}0001 + 0{,}001 + 0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}8889 = 1.$$

Первая задача решена.

Найдём математическое ожидание одного выигрышного лотерейного билета.

$$MX = 1000 \cdot 0{,}0001 + 100 \cdot 0{,}001 + 10 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}8889 = 0{,}4$$

Следовательно, справедливая цена одного лотерейного билета должно быть 0,4 уч. ед.

Пример 2. Найти закон распределения с.в. $X = \{1;\ 0\}$ в одном испытании. Если наступает событие A, то $X = 1$; в противном случае (т.е. событие $\overline{A}$), то $X = 0$. Здесь $p = P\{X = 1\}$; $q = 1 - p$. Составить закон распределения данной случайной величины и найти математическое ожидание наступления событие A. .Составим закон распределения данной случайной величины

X	1	0
P	p	q

$$\text{Контроль } \sum_{i=1}^{2} p_i = p + q = 1.$$

Найдём математического ожидания с.в. X.

$$MX = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Замечание. Если наш эксперимент состоял бы, например, из подбрасывания монеты один раз, то

$$MX = 1 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 0{,}5.$$

То есть в данном случае значение м.о. совпадает со значением вероятности наступления (или не наступления) события A.

Пример 3. Пусть наш эксперимент состоит из подбрасывания игральной косточки (шестигранный кубик). При данном эксперименте множество значений дискретной случайной величины X равно: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а их вероятности $P(X = m) = 1/6$; для всех $m = 1, 2, \cdots, 6$.

Следовательно, имеем таблицу распределения д. с. в. X в виде:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\text{Контроль: } \sum_{i=1}^{6} p_i = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1.$$

Найдём математического ожидания с.в. X.

$$MX = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5\,.$$

Этот пример показывает, что если с.в. принимает свои значения с одинаковыми вероятностями, то м.о. равно сумме значений с.в., помноженное на их вероятности, а это значит:

$$MX = \overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что оно выражает среднее значение случайной величины. А именно, т. к. $\sum_k p_k = 1$, то

(3) $$MX = \frac{\sum_k x_k \cdot p_k}{\sum_k p_k} = \sum_k x_k \cdot p_k = X_{\text{среднее}} = X_c$$

Из последнего равенства заключаем, что математическое ожидание есть число, выражающее центр тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а их массы равны значению их вероятности.

Для случая, когда проводится n; $(n < +\infty)$ испытаний с.в. X принимает значение x_1 с частотою m_1 раз, значение x_2 с частотою m_2 раз, и т.д. значение x_k с частотою m_k раз, причем $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. Тогда сумма всех значений, принятых X равна,

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k\,.$$

Найдем так называемую «***среднюю арифметическую сумму*** - $\overline{X}$ всех значений, принимаемых случайной величиной, разделенную на общее число испытаний:

(4) $$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k}{n} = x_1\left(\frac{m_1}{n}\right) + x_2\left(\frac{m_2}{n}\right) + \cdots + x_k\left(\frac{m_k}{n}\right).$$

Отсюда, легко заметить, что $w_i = \frac{m_i}{n};\ i = 1,2,\cdots,k$, выражают относительные частоты элементов x_i, входящие в X. Поэтому отношение (4) запишем в виде

(5) $$\overline{X} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_k w_k;\quad .$$

В предположении, что число испытаний достаточно большое, тогда относительная частота приближенно равна (на основании теоремы Бернулли) вероятности появления события. После замены в равенстве (5) относительных частот на соответствующие их вероятности $w_i \approx p_i$ получим

$$\overline{X} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_k p_k = MX$$

Следовательно, в общем случае

(6) $$\overline{X} \approx MX\,.$$

Как было отмечено, в примере 3, может быть и случаи точного равенства.

Вероятностный смысл полученного результата следующий:

Математическое ожидание приближённо равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Пусть число $x_{\min}$ – наименьшее из всех значений с.в. X, а число $x_{\max}$ – наибольшее значение из всех возможных значений с. в. X.

Тогда, справедливо двойное неравенство: $x_{\min} \le MX \le x_{\max}$.

Это значить, что на числовой оси возможные значения с.в. X расположены слева и справа от математического ожидания.

Теперь переходим к рассмотрению м.о. непрерывных случайных величин.

Пусть н.с.в. X задана с плотностью вероятности $\varphi(x)$. Допустим, что все возможные значения X принадлежат отрезку $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n отрезков длиною соответственно $\Delta x_1,\ \Delta x_2, \cdots,\ \Delta x_n$, и выберем в каждом из них произвольную точку $x_i;\ \ i=1,2,\cdots,n$.

Нам нужно определить математическое ожидание непрерывной с.в. X. По аналогии с определением дискретной случайной величины, составим сумму произведений всевозможных значений x_i на вероятности попадания их в интервал Δx_i.

С учетом того, что $\varphi(x)\cdot\Delta x \approx P\{x \le X < x+\Delta x\}$, имеем сумму

$$\sum x_i\varphi(x_i).$$

Переходя к пределу, когда $\max|\Delta x_i| \to 0$ получим определённый интеграл

$\int_a^b x\varphi(x)dx$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины, X возможные значения которой принадлежит отрезку $[a,b]$, называют определенный интеграл

(7) $$MX = \int_a^b x\varphi(x)dx.$$

В случаях, когда возможные значения с.в. X принадлежит всей числовой оси OX (т.е. отрезке $((-\infty,+\infty))$, тогда

(8) $$m_X = MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx.$$

Интеграл в правой части равенства (7) предполагается ***абсолютно сходящимся***, т.е.

(9) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\cdot\varphi(x)dx < +\infty,$$

(в противном случае н.с.в. X не имеет м.о.).

Равенство (7) представляет собой интегральный аналог формулы (1).

Для дальнейшего, необходимо напомнить алгебраические операции над дискретными случайными величинами как числовых множества.

Суммою (*разностью, произведением*) дискретной случайной величины X, принимающей значения x_i с вероятностью $p_i = P\{X = x_i\}, i=1,2,3,\cdots,n$ и д.с.в. Y, принимающей значения y_j с вероятностями $p_j = P\{Y = y_j\}, j=1,2,3,\cdots,m,$ называется дискретная случайная величина $Z = X+Y$;$(Z = X-Y;\ Z = X\cdot Y)$, принимающей значения $z_{ij} = x_i + y_j$; $(z_{ij} = x_i - y_j; z_{ij} = x_i\cdot y_j)$ с вероятностями $p_{ij} = P\{X = x_i;\ Y = y_j\}$ для всех указанных значений i и j.

В случае совпадения некоторых выражений: $x_i + y_j$; $x_i - y_j$; $x_i\cdot y_j$ соответствующие вероятности складываются.

Произведение д.с.в. на число c называется д.с.в. cX, принимающая значения cx_i с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$.

Две д.с.в. X и Y называются *независимыми,* если события $A_i = \{X = x_i\}$ и $B_j = \{Y = y_j\}$

являются независимыми для любых $i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$, т.е.

$$P\{X = x_i; Y = y_j\} = P\{X = x_i\}\cdot P\{Y = y_j\}.$$

В противном случае с.в. называются *зависимыми*. Несколько с.в. называются *взаимно независимыми*, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Свойства математического ожидания.

С.1. Математическое ожидание постоянной величины c равно самой этой постоянной, т.е. $M\,c = c$.

С.2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания, т.е.

$$M(c\cdot X) = c\cdot M(X).$$

(свойство однородности первого порядка).

Как следствие **С.1.- С.2.** отметим, что имеет место равенство (свойство линейности). Для любых действительных чисел a и b верно равенство

$$M\left(aX+b\right) = a\cdot MX + b.$$

С.3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин равно их сумме (разности) математического ожидания, т.е.

$$M\left(X+Y\right) = MX + MY; \quad M\left(X-Y\right) = MX - MY.$$

С.4. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю, т.е.

$$M(X - m_X) = 0.$$

С.5. Математическое ожидание произведения ***независимых случайных величин*** равно

произведению их математических ожиданий

$$M(X\cdot Y) = M(X)\cdot M(Y).$$

Действительно, **С.1**. следует из того, что д.с.в. X принимает лишь одно значение c вероятностью равной 1. Поэтому $Mc = c\cdot\sum\limits_k p_k = c\cdot 1 = c.$

2. Поскольку, д.с.в. X принимает значения $c\cdot x_i;\ i = 1,2,\cdots$ с вероятностями p_i, то

$$M(cX) = \sum_i c\cdot x_i\cdot p_i = c\cdot\sum_i x_i\cdot p_i = c\cdot MX.$$

3. Поскольку, д.с.в. $Z = X+Y$ принимает значения $z_{ij} = x_i + y_j$ с вероятностями $p_{ij} = P\{X = x_i; Y = y_j\}\}$, здесь область изменения переменных суммирования, $i; j$ вообще говоря, может быть неодинакова,

$$M\left(X+Y\right) = \sum_i\sum_j (x_i + y_j)\cdot p_{ij} = \sum_i\sum_j x_i\cdot p_{ij} + \sum_i\sum_j y_j\cdot p_{ij} =$$

$$= \sum_i x_i\sum_j p_{ij} + \sum_j y_j\sum_i p_{ij} = \sum_i x_i\cdot p_i + \sum_j y_j\cdot p_j = MX + MY.$$

При выводе формулы, мы также воспользовались равенствами:

$$\sum_j p_{ij} = p_i\ ;\ \sum_i p_{ij} = p_j.$$

Проверим первую из них. Так как

$$\sum_j\left\{X = x_i; Y = y_j\right\} = \left\{X = x_i\right\}\sum_j\left\{Y = y_j\right\} = \left\{X = x_i\right\}\cdot\Omega = \left\{X = x_i\right\}, \text{то}$$

$$p_i = P\left\{X = x_i\right\} = P\left(\sum_j\left\{X = x_i; Y = y_j\right\}\right) = \sum_j P\left\{X = x_i; Y = y_j\right\} = \sum_j p_{ij}.$$

Аналогично проверяется и второе равенство.

Свойство **С.3**. распространяется на произвольное конечное число слагаемых.

4. На основании **С.1.- С.3.,** получим: $M\left(X - MX\right) = MX - M\left(MX\right) = MX - MX = 0.$

Разность $\breve{X} = X - MX = X - m_X$ - называется ***отклонением*** *с. в.* X от её м.о. $m_X = MX$ *, с.в.* $\breve{X}$ называется ***центрированной случайной величиной*** для *с. в.* X .

5. По условию $X;Y$ являются, независимыми с.в., поэтому имеет место равенство

$$p_{ij} = P\{X = x_i; Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot p_j .$$

Следовательно, $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ и тогда

$$M(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j P\{X = x_i; Y = y_j\} = \sum_i \sum_j x_i y_j \cdot p_{ij} =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \cdot p_i \cdot p_j = \left(\sum_i x_i p_i\right) \cdot \left(\sum_j y_j p_j\right) = MX \cdot MY.$$

Свойства, математического ожидания, доказанные для дискретных с.в. остаются справедливыми и для непрерывных с.в. Только здесь все рассуждения проводятся согласно равенств: (7) или (8) с учетом неравенства (9). Проверим, к примеру, **С.2.**

$$M(c \cdot X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (c \cdot x)\varphi(x) dx = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\, dx = c \cdot MX .$$

Рассмотрим следующую известную задачу.

<u>**Задача о сборе коллекции.**</u> Некий покупатель с каждой единицей купленного товара приобретает наудачу некоторое количество элементов «коллекции», состоящей из n различных элементов (наудачу означает, что при каждой покупке покупатель равновероятностно получает любой из этих n элементов, независимо от предыдущих приобретений). Какое среднее число покупок надо сделать, чтобы собрать полную коллекцию?

Решение. Пусть случайная величина X - число покупок, из которого надо собрать полную коллекцию. Величина Y_s, $s = 2, 3, ..., n$ - количество (оно случайное) покупок, до приобретения нового элемента после того, как уже собран $s-1$ элемент коллекции. Легко заметить, что $X = 1 + \sum_{s=2}^{n} Y_s$. Отсюда следует, что $MX = 1 + \sum_{s=2}^{n} MY_s$. Тем самым, событие распадается в произведение r событий, где $r-$число необходимых покупок до приобретения нового элемента после того как уже собран $s-1$ элемент.

Каждое из первых $r-1$ событий состоит в том, что приобретается уже имеющийся элемент из числа купленных. Вероятность такого события равна $(s-1)/n$. Последнее событие состоит в том, что приобретается новый элемент, и его вероятность равна $(n-s+1)/n$.

Используя формулу произведения вероятностей для независимых событий, получаем:

$$P(Y_s = r) = \frac{(s-1)^{r-1} \cdot (n-s+1)}{n^r}, \; r = 1, 2, 3, \cdots$$

Таким образом, получим

$$MY_s = (n-s+1) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r(s-1)^{r-1}}{n^r} = (n-s+1) \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(s-1)^{r-1}}{n^r} \right)'_s .$$

Далее, суммируя бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, получаем:

$$(n-s+1)\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(s-1)^{r-1}}{n^r}\right)'_s=(n-s+1)\left(\frac{(s-1)}{n(1-(s-1)/n)}\right)'_s=(n-s+1)\left(\frac{1}{1-(s-1/n)}-1\right)'_s.$$

Наконец, применяя формулу

$$\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

для $x=\dfrac{s-1}{n}$ имеем

$$(n-s+1)\left(\frac{1}{1-(s-1/n)}-1\right)'_s=\frac{(n-s+1)}{n\left(1-\dfrac{s-1}{n}\right)^2}=\frac{n}{(n-s+1)}.$$

Следовательно,

$$MX=1+\sum_{s=2}^{n}MY_s=1+\sum_{s=2}^{n}\frac{n}{(n-s+1)}=1+n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Итак, для того, чтобы собрать полную коллекцию в среднем надо сделать $n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ покупок.

Известно, что (см. например [11]) при любом $Q\to\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{k=1}^{Q}\frac{1}{k}=\ln Q+\gamma_0+O\left(\frac{1}{Q}\right)\approx\ln Q+\gamma_0.$$

Следовательно, окончательно получаем:

(!) $$MX=n\ln n+n\gamma_0+O(1).$$

Значит при больших, n чтобы собрать полную коллекцию в среднем надо сделать приблизительно $n\ln n$ покупок.

Замечание. Если дискретная случайная величина X, принимающая n различных значений, и $g(x)$ некоторая взаимно однозначная функция, то с.в. $g(X)$ принимает значения $g(x_k)$ с вероятностями $p_k=P(X=x_k),\ k=1,2,\cdots,n$ (для д.с.в. X, величина $Y=g(X)$ тоже является д.с.в. со значениями $y_k=g(x_k)$ с той же вероятностью p_k). Поэтому, справедливо равенство

$$M[g(X)]=\sum_{k=1}^{n}g(x_k)\cdot p_k.$$

Отметим важный случай. Определим для множества A функцию:

$$E_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

Функция $E_A(x)$ называется *индикатором* множества A. Для д.с.в. X приведём следующий результат: *пусть* A *- счётное множество,* $g(x)=E_A(x)$. *Тогда справедливо соотношение*

$$M[E_A(X)]=\sum_{k=1}^{n}E_A(x_k)\cdot p_k=\sum_{x_k\in A}p_k=P(X\in A).$$

Если н.с.в. X задана с плотностью распределения $\varphi(x)$ и $g(x)$ - некоторая непрерывная функция, то математическое ожидание случайной величины $g(X)$ вычисляется по формуле

$$M[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx\,.$$

Если $g(x)=E_A(x)$, где $A=[a,b)$ - интервал или объединение интервалов такого вида, справедливо соотношение

$$M[E_A(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} E_A(x)\,\varphi(x)dx=\int_{(A)}\varphi(x)dx=P(X\in A).$$

Где функция $E_A(x)$ является *индикатором* множества $A=[a,b)$, т.е.

$$E_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\notin X.\end{cases}$$

Неравенство Коши-Буняковского для математического ожидания. Для любых с.в. X и Y справедливо неравенство

$$M(|\,XY\,|)\le \left(M(X^2)\right)^{1/2}\cdot\left(M(Y^2)\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Для любых вещественных чисел α,β и $t\ne 0$ справедлива эквивалентность

$$0\le (t^{-1}\alpha-t\beta)^2 \Leftrightarrow \alpha\beta\le\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{t^2}+t^2\beta^2\right).$$

На основании этого неравенства и свойства м.о. получим

$$M(|\,XY\,|)\le M\left(\frac{1}{2}\left((X/t)^2+(tY)^2\right)\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}M(X^2)+t^2M(Y^2)\right).$$

Полагая в этом равенстве $t^2=[M(X^2)]^{1/2}/[M(Y^2)]^{1/2}$, получаем наше утверждение. В частности, для $Y=1$, имеем: *для любой случайной величины* X *справедливо неравенство*

$$M(|\,X\,|)\le\left(M(X^2)\right)^{1/2}.$$

2. Дисперсия случайной величины

Этот пункт начнём с рассмотрения, следующих примеров. Пусть д.с.в. $X;Y$, заданные следующими законами распределения:

$$X:\ 0{,}01;\ -0{,}01;\qquad Y: 100;\ -100;$$

$$P:\ 0{,}5;\quad 0{,}5\,;\qquad P:\ 0{,}5;\quad 0{,}5;$$

Найдём математические ожидания случайных величин $X;Y$

$$m_X=MX=0{,}01\cdot 0{,}5-0{,}01\cdot 0{,}5=0$$

$$m_Y=MY=100\cdot 0{,}5-100\cdot 0{,}5=0$$

В этих примерах математическое ожидание обеих случайных величин одинаковы, а возможные их значения различны, причём с.в. X принимает относительно близкие значения к м.о., а Y – далёкие значения от своего м.о.

Следовательно, зная только математическое ожидание случайной величины, ещё нельзя судить ни о том, какие возможные значения она может принимать, тем более ни о том, как они распределены (рассеяны) в окрестности математического ожидания.

Это явление показывает, что математическое ожидание в общем случае случайную величину не может достаточно полно охарактеризовать.

По этой причине, наряду с понятием математического ожидания в теории вероятностей рассматривают и другие числовые характеристики: ***дисперсию*** (*мера рассеяние с.в. от м.о.) и* ***понятие среднее квадратичное отклонение.*** Понятие дисперсия тесно связана с понятием квадратичного отклонения значения с.в. от своего м.о. В предыдущем пункте мы отметили важное свойство м.о. **С.4**. $M\left(X - MX\right) = M\left(\breve{X}\right) = 0$. Это равенство показывает, что одни возможные отклонения положительны, а другие – отрицательны: в результате их взаимного погашения (происходит «*интерференция*») *среднее значение отклонения* окажется равным нулю. Поэтому, целесообразно заменить эти возможные отклонения их абсолютными значениями или их квадратами.

Следует заметить, что на практике удобно и в основном пользуются ***квадратом отклонения***, так как функция квадратичного отклонения $(X - MX)^2$ является значительно «***гладкой функцией***» по сравнению с функцией абсолютного значения $|X - MX|$.

Дисперсией (рассеянием) дискретной с.в. *X называется математическое ожидание квадрата её отклонения от своего математического ожидания.*

Это число обозначается DX; $D(X)$; $D[X]$; D_X или D, если ясно о чем идет речь. Таким образом, по определению

(10) $DX = M[(X - MX)]^2$ или $DX = M\tilde{X}^2$. или $DX = M\left(X - m_X\right)^2$

Из определения дисперсии следует, что она характеризует разброс значений с.в. X относительно ее математического ожидания, и имеет место следующие равенства:

(11) $DX = \sum\limits_i \left(x_i - MX\right)^2 \cdot p_i$, если X дискретная с.в.;

(12) $DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \cdot \varphi(x)\, dx,$ если X непрерывная с.в..

На практике для нахождения дисперсии удобно пользоваться следующей формулой.

Теорема 8.1. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата с.в. X и квадратом ее математического ожидания:*

(13) $DX = MX^2 - (m_X)^2$.

Доказательство. Математическое ожидание с.в. X есть постоянное число, следовательно, величины $2MX$ и $(MX)^2$ есть также постоянные величины. На основании свойства м.о. имеем

$$DX = M\left[X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2\right] = MX^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Утверждение доказано.

Равенство (13) позволяет переписать равенства (11) и (12) в виде:

(14) $DX = \sum\limits_i x_i^{\,2} \cdot p_i - (MX)^2$, если X дискретная с.в.;

(15) $DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \varphi(x)\, dx - \left(MX\right)^2$,если X непрерывная с.в.

Очевидно, что ввиду $DX \geq 0$ непосредственно следуют неравенства:

$MX \leq \left[\sum\limits_k x_k^2 \cdot p_k\right]^{1/2}$ – если с.в. X дискретна;

$MX \leq \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx\right]^{1/2}$ – если с.в. X непрерывна

Свойства дисперсии случайных величин.

С.1. Дисперсия постоянной величины равна нулю, т.е.

$$Dc = 0.$$

С.2. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии, возведя его в квадрат, т.е.

$$D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X).$$

С.3. Дисперсия суммы независимых с.в. равна сумме их дисперсий, т.е.

$$D(X \pm Y) = DX + DY.$$

С.4. Дисперсия с.в. остается неизменным, если к этой с.в. прибавить постоянную величину, т.е. (с учётом **С.2.**) имеет место равенства

$$D(X + c) = DX \Rightarrow D(aX + b) = a^2 D(X);\ \forall a \in R.$$

С.5. Если с.в. $X;Y$ - независимы, то справедливо равенство

$$D(X \cdot Y) = MX^2 \cdot MY^2 - (MX)^2 \cdot (MY)^2,$$

Проверим свойства дисперсии.

1. $Dc = M\left[(c - Mc)^2\right] = M\left[(c - c)^2\right] = M0 = 0.$

2. $D(cX) = M\left[(cX - (M(cX))^2\right] = M\left[c^2(X - (MX)^2)\right] = c^2 \cdot \left[M(X - MX)^2\right] = c^2 \cdot DX$

__**Замечание.**__ Следует отметить, что при $|c| > 1$ случайная величина cX имеет возможные значения (по абсолютной величине), большие, чем случайная величина X. Отсюда следует, что эти значения рассеяны вокруг м.о. $M(cX)$ больше, чем возможные значения X вокруг $M(X)$, т.е. $D(cX) > D(X)$. Напротив, если $0 < |c| < 1$, то $D(cX) < D(X)$.

3. На основании равенства (13) и свойства м.о. получим:

$$D(X \pm Y) = M(X \pm Y)^2 - \left[M(X \pm Y)\right]^2 =$$
$$= M(X^2 \pm 2XY + Y^2) - (MX)^2 \pm 2MX \cdot MY - (MY)^2 =$$
$$= MX^2 - (MX)^2 + MY^2 - (MY)^2 + 2[M(XY) - MX \cdot MY] = DX + DY,$$

Аналогично выводится и другая формула

$$D(X - Y) = MX^2 - (MX)^2 + MY^2 - (MY)^2 - 2[M(XY) - MX \cdot MY] = DX + DY$$

потому, что для *независимых* с.в. X и Y имеет место равенство
$M(XY) - MX \cdot MY = 0,$

С.4. выводится непосредственно из **С.3.** и **С.1.** Свойство **С.5.** так же является следствием равенства (13). Достаточно использовать замену $Z = XY$, а затем воспользоваться свойствами математического ожидания.

Заметим, что для нахождения значения дисперсии удобно пользоваться для д.с.в. X равенством (14) и для н.с.в. X равенством (15).

3. Среднее квадратичное отклонение

Замечание к пункту **С.2.** показывает, что мера рассеивания значения с.в. вокруг его среднего значения кроме дисперсии служат и другие характеристики. К ним относится так называемое «*среднее квадратичное отклонение*» (кратко с.к.о.) Здесь имеется ввиду то обстоятельство, что дисперсия имеет *квадратичную меру*, а с.в. имеет *линейную меру*, следовательно, на практике удобно использовать такую же меру рассеивания, как для с.в. X, которая является *линейной* (т.е линеаризованным средним рассеиванием).

Средним квадратическим отклонением случайной величины X или «*стандартом*» называют квадратный корень из её дисперсии, обозначают числом $\sigma(X)$ или (σ_X, $\sigma[X]$, σ).

Таким образом, по определению

(16) $$\sigma(X) = \sqrt{DX}.$$

Из свойства дисперсии непосредственно выводится соответствующие свойства с.к.о.:

(17) $$\sigma(c) = 0;\quad \sigma(cX) = |c| \cdot \sigma(X);\quad \sigma(c + X) = \sigma(X)..$$

__**Задание.**__ Проверить свойства с.к.о. (17).

При изучении свойств случайных явлений, независящих от выбора масштаба измерения и положения центра группирования, с.в. X приводят к некоторому стандартному виду: например, ее *централизируют*, т.е. получают новую с.в. $\breve{X} = X - MX$, перенося предварительно начало координат в точку с абсциссой, равной MX.

Затем, эту величину делят на с.к.о. $\sigma(X)$ и получают новую, случайную величину

(18) $$\breve{X}_H = \frac{X - MX}{\sigma(X)} = \breve{X}/\sigma$$

Обычно случайную величину $\breve{X}_H$ принято называть *нормированной* (*стандартной*) случайной величиной. Имеет место утверждение.

Теорема 8.2. *Математическое ожидание нормированной случайной величины* $\breve{X}_H$ *равно* ***нулю***, *а её дисперсия и среднее квадратичное отклонение равны* ***единице***.

Доказательство. Из равенство (18) и в соответствии со свойствами м.о. и дисперсии имеем:

$$M\breve{X}_H = M(\frac{X - MX}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma} \cdot [M(X) - M(X)] = 0$$

$$D\breve{X}_H = D(\frac{X - MX}{\sigma_X}) = \frac{1}{\sigma_X^2} \cdot [D(X) + D(a)] = \frac{DX}{\sigma_X^2} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1.$$

Таким образом, для стандартной случайной величины $\breve{X}_H$

(19) $$M\breve{X}_H = 0; \quad D\breve{X}_H = 1.$$

Следствие. $M\breve{X} = 0$; $D\breve{X} = DX = \sigma_X^2$.

Пример 4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

$$\text{Контроль } \sum_{i=1}^{4} p_i = 0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,4 = 1.$$

Найти: **1.** MX; DX; σ_X .

2. Составить закон распределения с.в. $\breve{X}$ и вычислить $M\breve{X}_H$; $D\breve{X}_H$.

Решение. На основании формул (1), (13), (19), (21) и (22) соответственно получим:

$$MX = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 0,9;$$

$$M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 = 2,10$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 2,10 - 0,81 = 1,29; \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{1,29} \approx 1,14.$$

Составим закон распределения стандартной случайной величины $\breve{X}$

$\breve{X}$	- 1,9	- 0,9	0,1	1,1
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Здесь, очевидно, что контроль выполняется. Найдём $M\breve{X} = M(X - MX)$ и покажем, что оно равно нулю. Действительно, согласно таблице имеем

$$M\breve{X} = -1{,}9\cdot 0{,}2 - 0{,}9\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}4 = -0{,}47 + 047 = 0; \Rightarrow M\breve{X}_H = 0;$$

Далее, поскольку $D\breve{X} = DX = 1{,}29,$ то согласно **С.2.**

$$D\left(\frac{(X - MX)}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X^2}\cdot D\left(\breve{X}\right) = \frac{1{,}29}{1{,}29.} = 1.$$

Задание. Построить таблицу распределения случайной величины $\breve{X}_H = \dfrac{\breve{X}}{\sigma_X}$.

4. Среднее квадратичное отклонение суммы взаимно независимых случайных величин

Пусть n взаимно независимые случайные величины. $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Обозначим через X их сумму $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Далее, пусть известны среднее квадратичные отклонения каждого из них: $\sigma(X_j), j = 1,2,\cdots,n$. Рассмотрим задачу**: как найти среднее квадратичное отклонение суммы рассматриваемых величин?** Ответом на эту задачу даёт следующая теорема.

Теорема 8.3. *Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратичных отклонений этих величин*, т.е.

$$\sigma(X) = \sigma\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k)}$$

Доказательство. Дисперсия нескольких взаимно независимых с.в. равна сумме дисперсий слагаемых (**С. 3.**), поэтому с учётом определения с.к.о. ($DX = \sigma_X^2$) имеем:

$$DX = \sigma_X = \sum_{k=1}^{n} DX_k = \sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k) \Leftrightarrow \sigma_X = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k)}.$$

Теорема доказана.

5. Одинаково распределённые взаимно независимые случайные величины

Пусть n взаимно независимые случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n$, которые имеют одинаковые распределения (т.е. одинаковые числовые характеристики: м.о., дисперсия и т.д.). Обозначим через $\overline{X}$ их среднее арифметическое

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}..$$

Сформулируем ниже три результата, *устанавливающие связь между числовыми характеристиками величины* $\overline{X}$ *и соответствующими числовыми характеристиками каждой отдельной величины.*

I. *Математическое ожидание среднего арифметического*

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин, равно математическому ожиданию $m_{X_i} = a$ каждой из величин, т.е.

(20) $$M\overline{X}_n = MX_i = a.$$

Доказательство. На основании свойства м.о. и то, что $m_{X_i} = MX = a$ получим

$$M\overline{X}_n = \frac{1}{n}\cdot M\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = a.$$

II. *Дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в n раз меньше дисперсии D каждой из величин, т.е.*

(21) $$D\overline{X}_n = D/n.$$

Доказательство. На основании свойства дисперсии и то, что постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведённый в квадрат, и с учётом того, что дисперсия суммы независимых величин равна сумме дисперсий слагаемых, имеем

$$D\overline{X}_n = \frac{1}{n^2}\cdot D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k = \frac{D}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{D}{n}$$

III. *Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратичного отклонения σ каждой из величин, т.е.*

(22) $$\sigma\left(\overline{X}_n\right) = \sigma/\sqrt{n}.$$

Доказательство непосредственно выводится из определения с.к.о. и формулы (22). Имеем:

$$\sigma\left(\overline{X}_n\right) = \sqrt{D(\overline{X}_n)} = \sqrt{D/n} = \sqrt{D}/\sqrt{n} = \sigma/\sqrt{n}.$$

Следствие. Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ - n взаимно независимые ***нормированные*** случайные величины, а $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, тогда

$$m_{\overline{X}_n} = 0;\ \ D_{\overline{X}_n} = \frac{1}{n};\ \ \sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, в этом случае при достаточно большом n мера рассеивания с.в. $\overline{X}_n$ стремится к нулю. Для пояснения полученных выводов рассмотрим следующий пример.

Пример 5. Для измерения некоторой физической величины производят несколько измерений, а затем находят среднее арифметическое полученных чисел, и его принимают за приближенное значение измеряемой величины.

В предположении, что измерения производятся при одинаковых условиях, следует доказать:

1. Среднее арифметическое полученных чисел даёт более надёжный результат, чем отдельные измерения;

2. По мере увеличения число измерений надёжность подобного результата возрастает.

Решение 1. Как правило, отдельные измерения дают неодинаковые значения измеряемой величины, при этом результат каждого измерения зависит от многих случайных причин (изменение температуры, колебания прибора и т.д.), которые заранее не могут быть полностью учтены.

Поэтому, возможные результаты n проведенных измерений можно рассматривать как случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n$ (индексы указывают на номер измерения). Эти величины имеют одинаковое распределение вероятностей (т.е. измерение проводится по одной и той же методике и теми же приборами, а также при одинаковых комплексе условий).

Следовательно, их числовые характеристики – одинаковы. Кроме того, они взаимно независимы (т.е. результат каждого измерения не зависит от остальных).

Нам уже известно, что среднее арифметическое значение таких величин имеет «меньшее рассеивание», чем каждая отдельно взятая величина. Другими словами, среднее арифметическое значение оказывается более близким к истинному значению измеряемой величины, чем результат отдельного измерения. Это и означает, что среднее арифметическое нескольких измерений даёт более надёжный результат, по сравнению с отдельным измерением.

2. Мы поняли, что при возрастании общего числа случайных величин, рассеивание (разброс) среднего арифметического убывает. Следовательно, с увеличением числа измерений среднее арифметическое нескольких измерений окажется всё ближе к истинному значению измеряемой величины. Таким образом, увеличивая число измерений, получают более надёжный результат.

Например, если среднее квадратическое отклонение отдельного измерения (скажем некоторого расстояния) $\sigma = q$, а всего произведено $n = q^2$ измерений, то среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих измерений равно лишь 1.

Действительно,

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{q\text{м}}{q} = 1\text{м}$$, при любом целом положительном $q = 1, 2, \cdots$.

Если же $X_1, X_2, \cdots, X_n$. n взаимно независимые ***нормированные*** случайные величины с $\sigma = 1$ *м*, и число измерений равно $n = q^2$, а $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, то

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1\text{м}}{\sqrt{q^2}} = \frac{1}{q}\text{м}.$$

В этом примере мы видим, что среднее арифметическое нескольких измерений, как и следовало, ожидать, оказалось значительно близким к истинному значению измеряемой величины, чем результат отдельного измерения.

Отметим, что для любой случайной величины X верна оценка $|M(X)| \leq M(|X|)$.

Действительно, легко заметить, что если $X \geq 0$, то $MX \geq 0$, а так же, если $X \leq Y$ и имеют одинаково распределённые вероятности, то $MX \leq MY$. Поскольку $X \leq |X|; -X \leq |X|$, то $M(X) \leq M(|X|)$ и $M(-X) \leq M(|X|)$. Что и требовалось доказать.

6. Мода и медиана, моменты случайных величин

Рассмотрим дискретную случайную величину X. Пусть $x_i, \quad x_{i+1}, \quad x_{i+2}; \ i = 1, 2, \cdots -$ тройка последовательных значений, принимаемых с.в. X. Обозначим через $p_M = \max\limits_{i \leq k \leq i+2} \{p(X = x_k)\}$ – наибольшую вероятность по сравнению двумя соседними значениями. Это значение с.в. будем обозначать величиной $M_0 X = m_0$.

Модой дискретной случайной величины X называется её значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями, расположенными с двух сторон, обозначается $M_0 X = m_0$.

Для непрерывной случайной величины X мода $M_0 X = m_0$ обозначает точку локального максимума её функции плотности $\varphi(x)$.

Если мода единственна, то распределение с.в. X называется *унимодальным,* в противном случае она называется *полимодальным*.

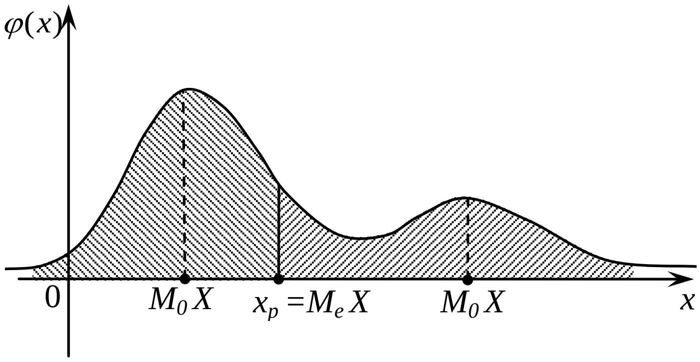


Рисунок 22

Медианой непрерывной случайной величины X называется такое её значение $X = x_p$, для которого выполняется двойное равенство

(23) $$\Phi(x_p) = P\{X < x_p\} = P\{X > x_p\} = \frac{1}{2},$$

и обозначается $m_e = M_e X$. Другими словами в близи этой точки функция распределения имеет одинаковые вероятности, не зависимо от того, что окажется с.в. X меньше x_p или больше x_p (см. рис.23). Для д.с.в. понятие медиана не определяется.

Замечание. Равенство (23) можно переписать в виде

(24) $$\Phi(m_e) = 1 - \Phi(m_e) \Leftrightarrow \Phi(m_e) = \frac{1}{2}.$$

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями более общих понятий так называемых – *моментов случайной величины.*

Начальным моментом порядка k; $k = 1, 2, \cdots$ *случайной величины X называется математическое ожидание $k-$ой степени этой величины, обозначается числом ν_k. Таким образом, по определению*

(25) $$\nu_k = M(X^K) = \sum_i x_i^k \cdot p_i, \text{ если } X - \text{д.с.в.}$$

т.е. для д.с.в. *начальный момент выражается суммой, (равенством* (25))*, а для* н.с.в. - *интегралом*

(26) $$\nu_k = M(X^K) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot \varphi(x)dx, \text{ если } X - \text{н.с.в.}$$

В частности, $\nu_1 = MX$, $\nu_2 = M(X^2)$.

Пользуясь определением и последними равенствами вычислительной формулы для дисперсии (см. равенство (13)) можно переписать в виде

(26) $$DX = \nu_2 - \nu_1^2.$$

Кроме начальных моментов с.в. X целесообразно рассматривать моменты $k-$*ой степени* отклонения $\breve{X} = X - MX$.

Абсолютным моментом порядка k случайной величины X называется число

$$\delta_k = M(|X|^k) = \sum_i |x_i|^k \cdot p_i, \text{ если } X - \text{д.с.в.},$$

$$\delta_k = M(|X|^K) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \cdot \varphi(x)dx, \text{ если } X - \text{н.с.в.}$$

<u>Центральным моментом порядка</u> $k;\ k=1,2,\cdots$ *случайной величины* X *называется математическое ожидание величины,* $\breve{X}^k=(X-MX)^k$, *обозначаемое числом* μ_k. То есть по определению

(27) $\mu_k=M\left[(X-MX)^k\right]=\sum_i (x_i-MX)^k\cdot p$, если $X-$*д.с.в.*

(28) $\mu_k=M\left[(X-MX)^k\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_i-MX)^k\cdot\varphi(x)dx,$ если $X-$*н.с.в.*

В частности,

(29) $\mu_1=M\breve{X}=M(X-MX)=0;\ \mu_2=M[(X-MX)^2]=DX$.

Легко выводятся равенства (***проверить самостоятельно***):

$$1.\ \mu_2=\nu_2-\nu_1^2;\quad 2.\ \mu_3=\nu_3-3\nu_2\cdot\nu_1+2\nu_1^3;$$

$$3.\ \mu_4=\nu_4-4\nu_3\cdot\nu_1+6\nu_2\cdot\nu_1^2-3\nu_1^4.\ \text{и т.д.}$$

Отметим, что если с.в. $X;Y$ *зависимые* с.в., то для суммы их дисперсии выполняется равенство

(30) $$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2K(X,Y),$$

где

(31) $$K(X,Y)=K_{XY}=M\left[(X-MX)\cdot(Y-MY)\right]$$

называется ***корреляционным моментом* (*или ковариацией*)** с.в. $X;Y$.

В некоторых книгах принято и другое обозначение

$$K_{XY}=Cov(X,Y)=M\left[(X-MX)\cdot(Y-MY)\right].$$

Более подробно этот раздел будет рассмотрено несколько позже, т.к. оно связано с совместными распределениями системой случайных величин (с.м. Т.13. п.8).

Отметим, что моменты более высоких порядков применяются редко. Среди моментов высших порядков отдельное место занимают центральные моменты 3-го и 4-го порядков, называемых соответственно коэффициентами *асимметрии и эксцесса.*

7. Асимметрия и эксцесс, квантили

Коэффициентом асимметрии («***скошенности***») с.в. X называется величина A_X, которая определяется равенством

$$A_X=\frac{\mu_3}{\sigma_X^3}=\frac{M\left[(X-MX)^3\right]}{(DX)^{3/2}}$$

Величина A_X характеризуется следующим образом: если $A_X>0,$ то график кривой распределения с.в. X более полога справа от точки $M_0X=m_0$;

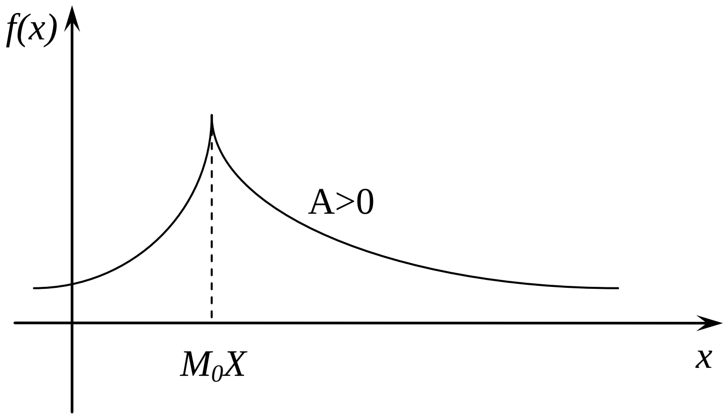


Рисунок 23

если $A_X < 0$, то график кривой распределения с.в. X более полога слева от точки $M_0X = m_0$

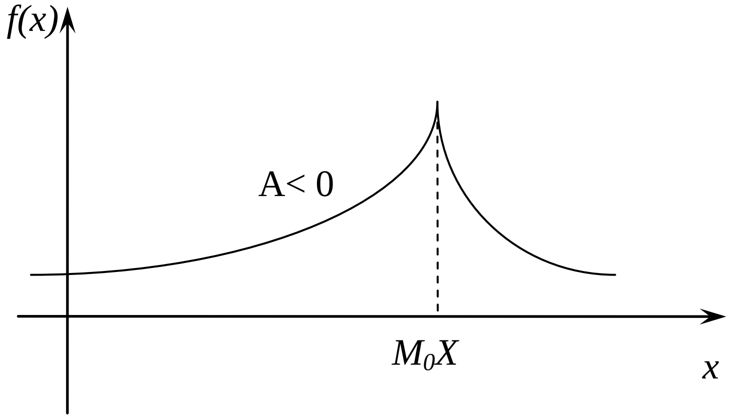


Рисунок 24

Коэффициентом эксцесса («***островершинность***») с.в. X называется величина $Э_X$, которая определяется равенством

$$Э_X = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{M\left[(X - MX)^4\right]}{(DX)^2} - 3,$$

Величина $Э_X$ характеризует *островершинность* или ***плосковершинность*** распределения случайной величины X.

Для нормального закона распределения $A_X = 0$; $Э_X = 0$; остальные распределения сравниваются с нормальным: если коэффициенты эксцесса (*островершинность*) $Э_X > 0$ с.в. X является более «островершинные», а в случаях, когда распределения «плосковершинные» то имеют $Э_X < 0$.

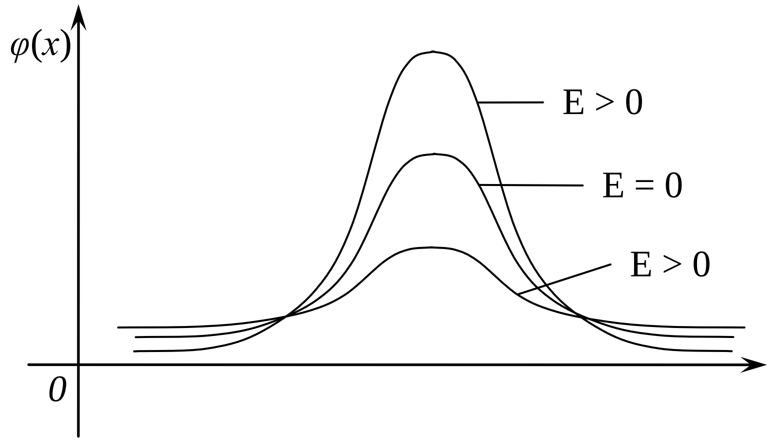


Рисунок 25

Кроме рассмотренных выше числовых характеристик с.в. X, в приложениях так же используются понятия так называемые «квантили».

Квантилю уровня α с.в. X называется решение уравнения

$$\Phi_X(x_\alpha) = \alpha,$$

где α -некоторое число, $0 < \alpha < 1$. В приложениях квантили $x_{0,25}$; $x_{0,5}$; $x_{0,75}$ имеют свои названия: *нижняя квантиль*, *медиана* (т.е. $MX_e = x_{0,5}$) и *верхняя квантиль* соответственно.

Они делят числовую прямую на четыре части, вероятности попадания в каждой части равны числу $0{,}25$.

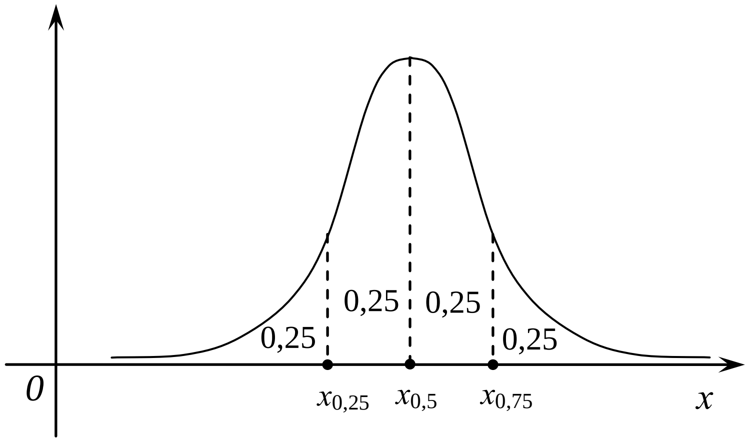


Рисунок 26

8. Производящая функция

Для вычисления важнейших числовых характеристик дискретных случайных величин с целыми неотрицательными значениями удобно пользоваться так называемыми производящими функциями (мы уже в теме 7, п. 5, упоминали кратко о частных случаях производящих функций, которых просто можно назвать «***многочленного вида»).*** Здесь они рассматриваются в виде степенных рядов, т.е это понятие обобщается для бесконечного числа слагаемых.

Рассмотрим д.с.в. X, которая принимает неотрицательные целые значения $0,1,2,\cdots,n,\cdots$ с соответствующими вероятностями $p_0, p_1, p_2,\cdots, p_j,\cdots,\ p_j = P(X = j)$.

Производящей функцией *неотрицательной целочисленной д.с.в. X называется функция, определённая равенством*

(36) $$f_X(z)=\sum_{j=0}^{\infty} p_j \cdot z^j = M[z^X] = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$$

где z *комплексное число,* $|z| \le 1$. *Следует отметить, что для всех* $|z| \le 1$ *ряд* (36)***,*** *определяющий производящую функцию, равномерно сходится.*

Действительно,

$$|f_X(z)| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} p_j \cdot |z|^j \le \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1.$$

Замечание. Производящая функция однозначно определяет распределение с.в. X, так как, эти коэффициенты воспроизводят данный степенной ряд, т.е.

(37) $$p_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n} f_X(z)\Big|_{z=0}.$$

Действительно, дифференцируя под знаком суммы (это действие законно в области абсолютной и равномерной сходимости функциональных рядов), получим

(38) $$\frac{d^n}{dz^n} f_X(z) = \sum_{j=n}^{\infty} [j(j-1)(j-2)\cdots j-(j-(n-1)]\cdot p_j \cdot z^{j-n} = .$$

$$= n!\sum_{j=n+1}^{\infty} C_j^n \cdot p_j \cdot z^{j-n} = n!\cdot p_n + (n+1)!\cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} C_j^{(n+1)} \cdot p_j \cdot z^{j-n}$$

где

$$C_j^n = \frac{j(j-1)\cdots(j-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}, \ n \le j.$$

Отсюда легко заметить, что при $z=0$ все слагаемые в правой части (38), кроме первого, обращаются нули. Первое же слагаемое равно $n!\cdot p_n$. Тем самым, равенство (37) получено.

Утверждение (о вычислении моментов). Пусть неотрицательная целочисленная случайная величина X имеет момент n – го порядка. Тогда справедливы равенства

(39) $$\frac{d^n}{dz^n} f_X(z)\Big|_{z=1} = M\{X(X-1)\cdots(X-(n-1))\}.$$

Доказательство леммы непосредственно выводится из формулы (38), если в ней положить $z=1$. Из этой леммы получим следующие равенства.

Следствие. *Справедливы равенства*

(40) $$f_X(1) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1; \ MX = f'_X(1);$$

$$DX = f''_X(1) + f'_X(1) - [f'_X(1)]^2,$$

где $f'(z)$; $f''(z)$ *соответственно первые и вторые производные от функции* $f(z)$.

Доказательство. Первая формула очевидна, т.к. согласно закону распределения д.с.в. X «***контроль***» всегда должен выполняться, т.е. множество рассматриваемых с.в формируется из полной группы событий, также отметим, что когда с.в. конечная, то множество её значений можно дополнить до бесконечности с соответствующими вероятностями равными нулю.

Далее, дифференцируя один раз ($n=1$), по z производящую функцию $f(z)$, имеем равенство

$$f'_X(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j\cdot p_j\cdot z^{j-1} = p_1 + 2\cdot p_2 z + \cdots + n\cdot p_2\cdot z^{n-1} + \cdots$$

Теперь, в этом равенстве положим $z=1$, тогда получим

$$f'_X(1) = \sum_{j=1}^{\infty} j\cdot p_j = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^1\cdot p_j = MX = \nu_1,$$

где

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\cdots(m-(k-1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k}$$

биномиальные коэффициенты. Следовательно,

$$f'_X(1) = MX = \nu_1.$$

Взяв вторую производную от функции $f(z)$ (т.е. $n=2$), а затем, положив в ней $z=1$ получим:

$$f''_X(z) = \sum_{j=2}^{\infty} j\cdot(j-1)\cdot p_j\cdot z^{j-2}; \ f''_X(1) = \sum_{j=2}^{\infty} j^2\cdot p_j - \sum_{j=2}^{\infty} j\cdot p_j = \nu_2 - \nu_1,$$

где $\nu_2 = MX^2$; $\nu_1 = MX$ – соответственно начальные моменты 2-го и 1-го порядков. Отсюда с учётом вычислительной формулы (35) , получим;

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \nu_2 - \nu_1^2 = (\nu_2 - \nu_1) + \nu_1 - \nu_1^2 = f''_X(1) + f'_X(1) - [f'_X(1)]^2,$$

Следовательно, $DX = f''_X(1) + f'_X(1) - [f'_X(1)]^2$. Утверждение полностью доказано.

Полученные формулы (40) используются для нахождения м.о., дисперсии случайных величин.

Свойства производящих функций.

1. $|f_X(z)| \le 1$ для всех $|z| \le 1$.

Действительно, так как д.с.в. X , неотрицательна, то по определению имеем

$$| f_X(z)| \le M[| z^X |] = M[| z |^X] \le 1.$$

2. Для произвольных вещественных чисел a и b выполняется равенство

$$f_{aX+b}(z) = z^b \cdot f_X(z^a).$$

Доказательство, на основании линейного свойства математического ожидания имеем

$$f_{aX+b}(z) = M[z^{(aX+b)}] = M[z^b \cdot (z^a)^X] = z^b \cdot M[(z^a)^X],$$

Отсюда, с учётом определения производящей функции, имеем

$$f_{aX+b}(z) = z^b \cdot f_X(z^a).$$

3. Если X и Y независимые случайные величины, то

$$f_{X+Y}(z) = f_X(z) \cdot f_X(z).$$

Доказательство, по свойству С.5. математического ожидания и определения производящей функции получим

$$f_{X+Y}(z) = M\left(z^{(X+Y)}\right) = M\left(z^X \cdot z^Y\right).$$

Поскольку, z^X и z^Y независимые случайные величины, то

$$M\left(z^X \cdot z^Y\right) = M\left(z^X\right) \cdot M\left(z^Y\right),$$

поэтому,

$$M\left(z^{X+Y}\right) = M\left(z^X\right) \cdot M\left(z^X\right) = f_X(z) \cdot f_X(z).$$

Свойство 3. доказано.

Задача. Найти закон распределения случайной величины X с заданной производящей функции $f_X(z) = \frac{1}{4}(1+z)^2.$

Решение. Имеем, $f_X(z) = \frac{1}{4}(1+z)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2,$ следовательно, сравнивая с определением функции $f_X(z) = \sum_{k=o}^{\infty} p_k \cdot z^k$, будем иметь:

$$p_0 = P(X = 0) = \frac{1}{4};\, p_1 = P(X = 1) = \frac{1}{2};\; p_2 = P(X = 2) = \frac{1}{4};$$

$$p_k = P(X = k) = 0;$$

при всех $k \ge 3$.

Пример 6. Производится три независимых выстрела по цели тремя расчётами:

1. Вероятности попадания по цели каждого расчёта одинаковы и равны $p = 0{,}9$. Найти:

а) с.в. X и закон её распределения;

б) Выписать производящую функцию д.с.в. X;

в) Найдите $MX; DX; \sigma X$

Решение.

1. Сначала составим закон распределения с.в. X . Найдём всевозможные случаи

$$E_1 = \{\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\}; E_2 = \{A\overline{A}\,\overline{A}\}; E_3 = \{\overline{A}\,A\overline{A}\}; E_4 = \{\overline{A}\,\overline{A}\,A\};$$

$$E_5 = \{AA\overline{A}\}; E_6 = \{A\;\overline{A}\,A\}; E_7 = \{\overline{A}\,AA\}; E_8 = \{AAA\}.$$

Тем самым, с. в. $X = 0,1,2,3$. Соответственно с вероятностями попадания в цель $p = 0{,}9$ и непопадания $q = 0{,}1$ и с учетом независимости событий, будем иметь:

$$r_1 = P(X = 0) = 0{,}001; r_2 = P(X = 1) = C_3^1 \cdot (0{,}9) \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}027;$$
$$r_3 = P(X = 2) = C_3^2 \cdot (0{,}9)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}243; r_4 = P(X = 3) = (0{,}9)^3 = 0{,}729.$$

Следовательно, закон распределения с.в. X имеет вид:

X	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729

Контроль: $0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0729 = 1$.

Выпишем производящую функцию случайной величины X

$$f(z) = 0{,}001 + 0{,}027 \cdot z + 0{,}243 \cdot z^2 + 0{,}729 \cdot z^3.$$

Вычислим первое и второе производных этой функции:

$$f'(z) = 0{,}027 + 2 \cdot 0{,}243 \cdot z \ + 3 \cdot 0{,}729 \cdot z^2 \Rightarrow f'(1) = MX = 2{,}7;$$
$$f''(z) = 2 \cdot 0{,}243 + 6 \cdot 0{,}729 \cdot z \Rightarrow f''(1) = 4{,}86;$$

Следовательно,

$$DX = 4{,}86 + 2{,}27 - (2{,}7)^2 = 0{,}27; \ \sigma(X) = \sqrt{0{,}27} = 0{,}5196152 \approx 0{,}52.$$

Задание. Решите аналогичную задачу**,** с вероятностью $p = 0{,}8$ и сравните полученные результаты рассеивания (значения дисперсий).

2. Пусть вероятность попадания расчётов соответственно равны: $p_1 = 0{,}7; p_2 = 0{,}8; p_3 = 0{,}9.$

а) Найдите множество значений с.в. X и закон её распределения;

б) Выпишите производящую функцию д.с.в. X;

в) Найдите MX; DX; σX

<u>Тема 9</u>. Основные законы распределения случайных величин

Среди общих законов д.с.в. X наиболее распространённым является биномиальный закон распределения, с которым мы уже встречались. Здесь рассмотрим более подробно этот и другие законы, их производящие функции и основные числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

1. Биномиальный закон распределения (Закон Бернулли)

Напомним, что если вероятность наступления случайного события A в каждом испытании равна p, $0 < p < 1$. Как было показано в первой части, при этих условиях вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится m раз, определяется формулой Бернулли

$$p_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} ..$$

или

$$P_n(m) = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} p^m q^{n-m}$$

где $q = p(\overline{A})$: $q + p = 1$.

Составим таблицу распределения биномиального закона:

X	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$	n
P	$C_n^0 p^0\ q^n$	$C_n^1 p\, q^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\cdots$	$C_n^n\ p^n q^0$

$$\textbf{Контроль -}\ \sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1.$$

Из биномиальной формулы

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n,$$

ввиду равенства $p + q = 1$, получим

$$\sum_{m=1}^{n} P_n(m) = 1; \qquad P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Биноминальным называется распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон называется «*биноминальным*» потому, что правую часть равенства $P_n\ (m) = C_n^m\ p^m q^{n-m}$, можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Таким образом, первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события A n раз в n – независимых испытаниях; второй член npq^{n-1} определяет вероятность наступления события A, $(n-1)$ раз, и т.д. последний член q^n определяет вероятность того, что события A не появится ни разу.

Функция распределения с.в. X, распределенная по биномиальному закону, имеет вид:

(1)
$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0; \\ \sum\limits_{m \le x} C_n^m\ p^m q^{n-m}; \ \ 0 < x \le n \\ 1, \quad n < x. \end{cases}$$

Выпишем производящую функцию биномиального распределения

(2) $$f_X\ (x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} x^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (px)^m q^{n-m} = (q + px)^n,$$

То есть $f_X\ (x) = (q + px)^n$. Очевидно,

$$f(1) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = (p+q)^n = 1.$$

Продифферецируя равенство (2) почленно относительно x, получим соответственно

(3) $$f_X'\ (x) = np \cdot (q + px)^{n-1}; \quad f_X''\ (x) = n(n-1) \cdot p^2 (q + pz)^{n-2}.$$

Следовательно, имеет место утверждение

Теорема 9.1. *Для числовых характеристик биномиального распределения имеют место равенства:*

(4) $$MX = np.; \ DX = npq; \ \sigma(x) = \sqrt{npq}.$$

Доказательство. На основании равенств (38) пункта 8 и равенства (3) настоящего раздела, также с учётом равенства $p+q=1$, получим

$$MX = f'(1) = np;\ DX = f''(1) + f'(1) - [f'(1)]^2 =$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq.$$

Утверждение доказано.

Пример 1. Монета брошена 3 раза. Найти закон распределения с.в. X - числа выпадения герба, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Сначала найдем закон распределения дискретной случайной величины $X=\{0, 1, 2, 3\}$, т.е. $n=3;\ p=q=0,5$.

Вычислим по формуле Бернулли величины $P_3(m)$, где $m=0;1;2;3.$ Имеем

$$P_3(0) = \frac{3!}{0!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},\quad P_3(1) = 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$P_3(2) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8},\quad P_3(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}.$$

Отсюда, получим следующий закон распределения:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Теперь найдем математическое ожидание

$$M(X) = \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot 1 + \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

$$D(X) = \frac{1}{8}\cdot 0^2 + \frac{3}{8}\cdot 1^2 + \frac{3}{8}\cdot 2^2 + \frac{1}{8}\cdot 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{24}{8} - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1,732}{2} = 0,866.$$

Заметим, что эти равенства легко определяются по теореме 1 (см. (4)). Действительно,

$$MX = 3\cdot 0,5 = 1,5;\ DX = 3\cdot 0,5\cdot 0,5 = 0,75;\ \sigma(x) = \sqrt{0,75} \approx 0,8660\ .$$

Пример 2 Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1.

1. Определить с.в. X и составить закон распределения количества отказавших элементов в одном опыте.

2. Найти числовые характеристики данной случайной величины.

Решение. Дискретная случайная величина X (число отказавших элементов в одном опыте) имеет следующие возможные значения: $x_1=0$ (ни один из элементов устройства не отказал), $x_2=1$ (отказал один элемент), $x_3=2$ (отказали два элемента) и $x_4=3$ (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что по условию $n=3;\quad p=0,1;\quad q=1-0,1=0,9$ получим:

$$P_3(0) = q^3 = 0.729;\quad P_3(1) = C_3^1pq^2 = 3\cdot 0,1\cdot 0,9^2 = 0.243;$$

$$P_3(2)=C_3^2\,p^2q^1=3\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9\ =0.027;\ P_3(3)=\ p^3\ =0{,}1^3\ =0.001.$$

Искомый биноминальный закон распределения случайной величины X будет иметь вид:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Контроль- $\sum_{k=0}^{3} P_3(k)=0{,}729+0{,}243+0{,}027+0{,}001=1$.

Найдём математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение по формулам (4) теоремы 1

$$MX\ =3\cdot 0{,}1=0{,}3;\ DX\ =3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}27;\ \sigma X\ =\sqrt{0{,}27}\approx 0{,}5196151$$

Пример 3. Игральный кубик брошен 4 раза. Написать закон распределения числа появлений тройки.

Решение. Случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Найдем их вероятности по формуле Бернулли для $p=1/6$ и $n=4$.

$$P_4(0)=\frac{4!}{0!\cdot 4!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296},\ P_4(1)=4\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{324}.$$

$$P_4(2)=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{216},$$

$$P_4(3)=4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{324},\ P_4(4)\ =\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{1296}.$$

Построим закон распределения рассмотренного примера

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

Контроль - $\sum_{k=0}^{4} P_k\ =\frac{625}{1296}+\frac{125}{324}+\frac{25}{216}+\frac{5}{324}+\frac{1}{1296}=1.$

Задание. Вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X двумя способами: по формулам (4) и по определению этих величин.

2. Распределение Пуассона

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу Пуассона

(5) $$P\ (m;\lambda)\approx\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где m – число появлений события в n независимых испытаниях, $\lambda=p\cdot n$ (среднее число появлений события в n испытаниях), и говорят, что случайная величина распределения по закону Пуассона.

Распределения дискретной случайной величины по закону Пуассона имеет вид:

X	0	1	...	n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

где $p_m;\ m = 0,1,2,\cdots, n,\cdots$ определяются равенствами (1). Ввиду известной формулы

(6) $$e^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}; \quad -\infty < t < +\infty,$$

Легко выводится равенство – **контроль**

$$e^{-\lambda} \cdot \sum_{im=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n + \cdots = 1.$$

Для более экономного подсчёта числовых характеристик распределения Пуассона докажем утверждение.

Теорема 9.2. *Для производящей функции и вычисления числовых характеристик случайных величин распределённых по закону Пуассона, справедливы следующие формулы*

(7) $$f_X(z) = e^{\lambda\cdot(z-1)}; \quad MX = DX = \lambda; \quad \sigma_X = \sqrt{\lambda},$$

где при $n \to \infty;\ p_n \to 0\ \ \lambda = np$ *– постоянное число.*

Доказательство. Производящей функцией распределения Пуассона будет иметь вид:

$$f_X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} \cdot z^m = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot z)^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot z} = e^{\lambda\cdot(z-1)}.$$

Следовательно,

(8) $$f_X(z) = e^{\lambda\cdot(z-1)}; \quad f'_X(z) = \lambda \cdot e^{\lambda\cdot(z-1)}; \ f''_X(z) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda\cdot(z-1)}$$

Тогда, из равенств (6) при $z = 1$ получим: $f_X(1) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = 1$ - контроль. А также

$$MX = f'_X(1) = \lambda; \ = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda; \ \sigma X = \sqrt{\lambda}$$

Теорема доказана. При решении конкретных примеров из доказанной теоремы следует, что нужно вычислить лишь один параметр $\lambda = n \cdot p$.

Этот параметр должен быть сравнительно небольшое постоянное число.

Замечание. Распределение Пуассона отличается от других тем, что числовые характеристики определяются одним и тем же параметром. Если на практике (на основании опытных данных) окажется математическое ожидание и дисперсии близки между собой, то *есть основание считать, что случайная величина распределена по закону Пуассона*.

Рассмотрим пример (модель) случайного процесса, в котором распределение вероятностей происходят по закону Пуассона.

Представим себе единичный интервал времени, разделённый на n интервалов длиной $1/n$. Заданную конечную совокупность точек в этом интервале можно рассматривать как результат случайного процесса, при котором каждый интервал имеет одну и ту же вероятность равный p_n того, что в нём одна или несколько точек совокупности.

Интервал является либо занятым, либо пустым, и из предположения о независимости неперекрывающихся интервалов времени вытекает, что мы имеем дело с испытанием Бернулли: вероятность получить ровно m занятых интервалов равна $P(m; n, p_n)$. Устремляя теперь n к бесконечности, мы делаем эту дискретную модель всё более и более точной. При этом вероятность того, что весь интервал вообще не содержит точек, должны стремиться к конечному пределу. Но весь интервал не содержит точек тогда и только тогда, когда ни один частичных интервалов не занят, а вероятность последнего события равна $(1-p_n)^n$.

Переходя к логарифмам, мы видим, что эта величина стремится к пределу одновременно с np_n. Случай $np_n \to \infty$ невозможен, так как он означал бы в сколь угодно малый интервал попадают бесконечно много точек совокупности. Поэтому для нашей модели неизбежно существует число λ, такое, что $np_n \to \lambda$. В этом случае вероятность события, имеющий ровно m занятых частичных интервалов стремиться к

$$P(m; \lambda) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Поскольку мы рассматриваем различные точки, то число занятых в ячейке точек в пределе соответствует числу точек совокупности, лежащих в нашем единичном интервале времени.

Можно эту модель применит и к другим возможным процессам см. том 1, [7].

В приложениях единичный интервал времени необходимо заменить интервалом произвольной длины t. Если опять разделить этот интервал на интервалы длины $1/n$, то вероятности p_n остаются неизменными, но число интервалов равно целому числу $[nt]$, ближайшему к nt. Переход к пределу будет таким же, только параметр λ заменяется на λt.

Это приводит нас к новой интерпретации величины

(9) $$P(m; \lambda t) = \frac{(\lambda t)^m \cdot e^{\lambda t}}{m!}, \qquad \text{(см. п. 6.2)},$$

эта формула как вероятностная формула означает: имеется ровно m точек в фиксированном интервале длины t.

В частности, вероятность того, что в интервале длины t не будет ни одной точки, равна

(10) $$P(0; \lambda t) = e^{-\lambda t},$$

и, следовательно, вероятность противоположного события (т.е. вероятность иметь одну или несколько точек) равна $1-e^{-\lambda t}$.

О параметре λ. Параметр λ – некая физическая постоянная, которая определяет плотность точек на оси t. Чем больше λ, тем меньше вероятность (10). Теперь предложим один из методов оценки числа λ. Предположим, что некоторый физический эксперимент повторяется N раз (N - достаточно большое), и каждый раз подсчитывается число событий, наступивших в интервале фиксированной длины t. Пусть N_m-количество экспериментов, в которых наблюдается ровно m событий. Тогда

(11) $$N_0 + N_1 + N_2 + \cdots = N.$$

Пусть общее число точек, наблюдаемых в N экспериментах, равно Т, а их среднее T/N.

При больших N мы ожидаем, что

(12) $$N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots = T \ ; \quad N_m \approx N \cdot P(m; \lambda t)$$

(Эти формулы лежат в основе всех применений понятия, вероятности и их обоснование даётся в десятой главе [7]). Следовательно, с учётом равенство (7) находим

$$T \approx N\{ p(1;\lambda t) + 2p(2;\lambda t) + 3p(3;\lambda t) + \cdots\} =$$

$$= N \cdot (\lambda t)e^{-\lambda t}\{1 + (\lambda t/1) + (\lambda t)^2/2! + \cdots\} = N \cdot (\lambda t),$$

и поэтому

(13) $$\lambda t \approx \frac{T}{N}.$$

Это соотношения даёт нам метод оценки λ по наблюдениям и способ сравнения выводов с результатами проведённых опытов. Основные требования (постулаты) к Пуассоновским процессы следующие:

1. При малых значениях t, вероятность того, что иметь более одной точки в области объёма t, мала по сравнению с величиной $\boldsymbol{t}$, т.е. вероятность того, за период времени продолжительностью t произойдёт, по меньшей мере, одно событие, равна

(14) $$P(h) = \lambda t + o(t);\ t \to 0$$

($\alpha_t = o(t)$, *при* $t \to 0$ *означает, что* $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\alpha_t}{t} = 0;\ \lambda > 0$).

Вероятность того, что за время t произойдёт два или более события, равна $o(t)$, т.е. согласно этому постулату, исключается возможности одновременного наступления события более чем одного раза.

Пространственные распределения Пуассона

Мы рассмотрели распределение случайных событий или точек на оси t, но те же самые рассуждения применимы к распределениям точек на плоскости или в пространстве. Только здесь вместо интервалов длины t будут области – площади или объёма t. Основное предположение состоит в том, что вероятность иметь m точек в любой определённой области зависит не от её формы, а лишь от её площади или объёма. При этом сохраняется основные предположения 1 и 2.

Для нахождения вероятности того, что в «области объёма t содержится ровно m случайных точек», разобьем эту область на n подобластей и в качестве приближения для искомой вероятности возьмём вероятность появления m успехов в m испытаниях. Это означает, что мы пренебрегаем возможностью найти более одной точки в одной и той же подобласти, однако из нашего предположения **1.** вытекает, что допускаемая погрешность стремиться к нулю при $n \to \infty$. Поэтому в пределе снова получается распределение Пуассона.

Примерами таких распределений: звёзды в космосе, изюминки в кексе, семена сорняков среди семян злака, дефекты в материалах, перестройка хромосом в клетках, расположение бактерий в клетке крови и т.д., распределены согласно закону Пуассона (см. ч. 1 [7]).

Следует отметить, что распределение Пуассона в теория вероятностей и математической статистике, особенно в теории случайных процессов (см. Гнеденко [1]), занимает важное место. Имеет многочисленные приложения в теории случайных процессов: физике, астрономии, химии, генетике, биологии и в др.

3. Геометрическое распределение

Ранее мы рассматривали таблицу геометрического распределения случайного события. Напомним, что мы рассматривали следующий опыт: пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность наступления события A равна $p; (0 < p < 1)$ и, следовательно, вероятность его не наступления равна $q = 1 - p$. Испытания завершается, как только появится первый раз событие A. Таким образом, если событие A появиться в $m-$м испытании, то оно в предшествующих $m-1$ испытаниях не появилось.

Пусть X – дискретная случайная величина, число испытаний, которое нужно провести до первого появления события A. Из контекста следует, что возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \cdots$. Предположим, что в первых $m-1$ испытаниях событие A не наступило, а в $m-$м испытании наступило. Вероятность этого «*сложного события*» по теореме умножения вероятностей независимых событий, определяется равенством

(15) $$p_m = P(X = m) = q^{m-1} \cdot p.$$

Полагая, в равенстве (5) $m = 1,2,3,\cdots$ получаем последовательность чисел, образующую убывающую геометрическую прогрессию с начальным членом p и знаменателем $q = 1-p$.

(16) $$p,\ qp,\ q^2 p,\cdots,q^{m-1}p,\cdots$$

Именно, по этой причине формула (15) называется *геометрическим распределением*.

Примерами реальных случайных величин, распределенных по геометрическому закону, являются: число выстрелов до первого попадания, число испытаний прибора до первого отказа, число бросаний монеты до первого выпадения «орла», и т.д.

Напомним, что таблица закона геометрического распределения имеет вид:

X	1	2	...	n	...
p_m	p_1	p_2	...	p_n	...

Очевидно, что числовая последовательность (16) как числовой ряд сходится и сумма его равна единице:

Контроль- $\sum_{m=1}^{\infty} p \cdot q^{m-1} = \dfrac{p}{1-q} = 1$, (т.к. $1-q = p$).

Теорема 9.3. *Для производящей функции и вычисления числовых характеристик случайных величин распределённых по закону геометрического распределения, справедливы следующие формулы*:

(17) $$f_X(z) = \frac{pz}{1-qz};\ MX = \frac{1}{p}; DX = \frac{q}{p^2};\ \sigma_X = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Доказательство. Вычислим производящей функцию и её первые и вторые производных с учётом равенства (17) имеем

$$f_X(z) = \sum_{m=1}^{\infty} p \cdot (q)^{m-1} z^m = pz \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (qz)^{m-1} = \frac{pz}{1-qz}.$$

Первая формула получена. Найдем производные функции $f'_X(z);\ f''_X(z)$.

$$f'_X(z) = \frac{p}{(1-qz)^2};\quad f''_X(z) = \frac{2pq}{(1-qz)^3}.$$

Следовательно, с учётом $p+q=1$, соответственно получим

$$MX = f'_X(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p};\qquad DX = f''_X(1) + f'_X(1) - [f'_X(1)]^2 =$$

$$= \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2};\ \sigma_X = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Утверждение доказано.

Пример 5. Из орудия проводится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания расчёта в цель равна 0,1.

1. Найти вероятность того, что цель будет поражена при третьем выстреле.

2. Найти числовые характеристики с.в. $X-$ числа выстрелов по цели до первого попадания.

Решение.

1. Мы имеем дело с геометрическим распределением и её вероятность равна

$$P(X=3)=(0{,}1)\ \cdot(0{,}9)^2=0{,}081.$$

2. По теореме 3 имеем (здесь $p=0{,}1;\ q=0{,}9$)

$$MX=\frac{1}{0{,}1}=10;\ DX=\frac{0{,}9}{(0{,}1)^2}=90;\ \sigma_X=3\sqrt{10}.$$

Следует кратко напомнить ещё об одном распределение дискретных случайных величин.

4. Гипергеометрическое распределения

Говорят, что дискретная с.в. X имеет *гипергеометрическое распределение,* если она принимает значения $0,\ 1,\ 2,\cdots,\ \ m,\cdots,\ \min(n,M)$ с вероятностями (сравни с равенством (11), Т. 6),

(18) $$p_m=P(X=m)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ M\le N,\ m\le n,\ n\le N;$$

где $n,M,N-$натуральные числа.

Гипергеометрическое распределение определяется тремя параметрами $n,\ M,\ N$. Если n мало по сравнению с N (практически $n<\dfrac{N}{10}$). Он приближается к биномиальному распределению с параметрами n и $p=M\cdot N^{-1}$ т.е.

$$\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\approx C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Здесь приведём (без доказательства) вычислительные формулы для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения (стандарта). Имеет место утверждение.

Теорема 9.4. *Для вычисления числовых характеристик случайных величин распределённых по закону гипергеометрического распределения, справедливы следующие формулы*:

(19) $$MX=n\cdot\frac{M}{N},\ \ DX=n\cdot\frac{M}{N-1}\cdot\frac{(N-M)(N-n)}{N^2};$$

$$\sigma=\sqrt{n\cdot\frac{M}{N-1}\cdot\frac{(N-M)(N-n)}{N^2}}.$$

Пример 6. В группе из 21 студентов 5 девушек. Из этой группы наудачу отбирается 3 студента.

1. Составить закон распределения д.с.в. $X-$числа девушек из отобранных студентов.

2. Найти MX;

Решение. Случайная величина X принимает значения 0,1,2,3. Вероятности этих величин

находим по формуле (10): в нашем случае $n=3;\ M=5;\ N=21.$

$$p_0 = P(X=0) = \frac{C_5^0 \cdot C_{16}^3}{C_{21}^3} \approx 0{,}4211; \; p_1 = P(X=1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{16}^2}{C_{21}^3} \approx 0{,}4511;$$

$$p_2 = P(X=2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{16}^1}{C_{21}^3} \approx 0{,}1203; \; p_3 = P(X=3) = \frac{C_5^3 \cdot C_{16}^0}{C_{21}^3} \approx 0{,}0075;$$

Построим таблицу распределения.

X	0	1	2	3
p_m	0,4211	0,4511	0,1203	0,0075

Контроль- $\sum_{m=0}^{3} P_m = 0{,}4211 + 0{,}4511 + 0{,}1203 + 0{,}0075 = 1.$

Найдем значение м.о. двумя способами: согласно определению и по формуле (11).

а) $MX = 0 \cdot 0{,}4211 + 1 \cdot 0{,}4511 + 2 \cdot 0{,}1203 + 3 \cdot 0{,}0075 = 0{,}7142$

б) $MX = 3 \cdot \frac{5}{21} = \frac{5}{7} = 0{,}7142.$

Задание. Вычислить на основании формул (19) величины дисперсии и стандарта данного распределения.

Далее, перейдём к рассмотрению законов *распределения непрерывных случайных величин*

Ниже рассмотрим часто используемые законы н.с.в.

5. Равномерный закон распределения

Пусть задана произвольная н.с.в. X **,** определённая на отрезке $[a;b]$. Го*ворят, что непрерывная с.в. X имеет равномерное распределение на отрезке $[a;b]$***,** *если плотность вероятности $\varphi(x)$ постоянна на всем отрезке, а вне его равна нулю*:

(20) $$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 0, & \text{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases}$$

т.е. $\varphi(x) = c = const,$ если $x \in [a;b],$ но (основное условие контроль) должно выполняться

(21) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

Отсюда, по свойству аддитивности интегралов легко видеть, что постоянное число $c = \frac{1}{b-a};$

Замечание.

1. В соответствии с формулой (12) (см. пункта 5, темы 7), вместо отрезка $[a;b]$ можно писать любой из интервалов: $< a;b >$ так как с.в. X – непрерывна.

2. Плотность обратно пропорциональна к длине интервала $< a;b >$ $(c \cdot (b-a) = 1)$, т.е. когда длина отрезки мала, то плотность распределения большая, а при большой длине отрезка, напротив, плотность распределения мала.

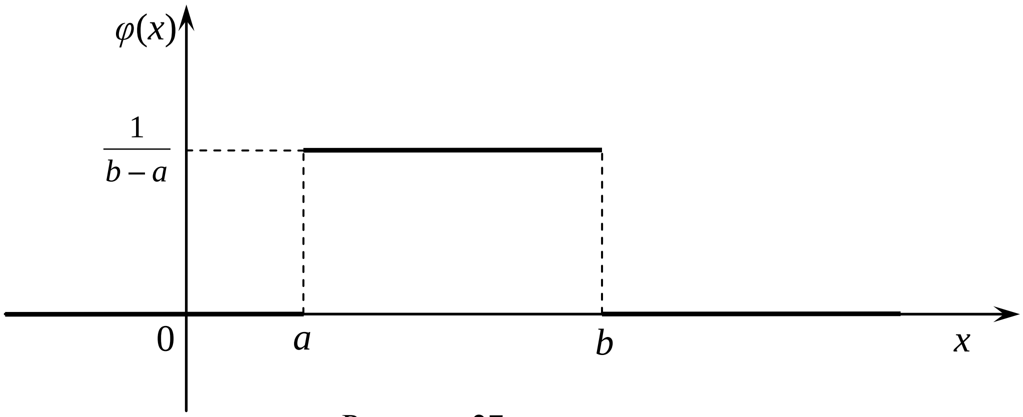


Рисунок 27

Равномерное распределение н.с.в. X на участке $<a;b>$ будем обозначать: $X \approx \Re_{<a;b>}$.

Найдем функцию распределения $\Phi(x)$ и основные числовые характеристики $X \approx \Re_{<a;b>}$.

Теорема 9.5. *Для непрерывной случайной величины* $X \approx \Re_{<a;b>}$ *справедливы равенства*:

1.
$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a < x \le b, \\ 1, & при \quad b < x. \end{cases}$$

2.
$$MX = \frac{a+b}{2}; \; DX = \frac{(b-a)^2}{12}; \; \sigma_X = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}} .$$

Доказательство. Вычислим функцию распределения. Воспользуемся формулой (10), п.5, тема 7, и определением функции плотности: при $x \le a$; $\Phi(x) = 0$. При $a < x \le x$ имеем

(22)
$$\Phi(x) = 0 + \int_a^x \varphi(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{t}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Наконец, при $b < x$ (с учётом равенство (20) и значения функции плотности при любом $y > b$) получим

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_a^b \varphi(t)dt + \int_b^y 0dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

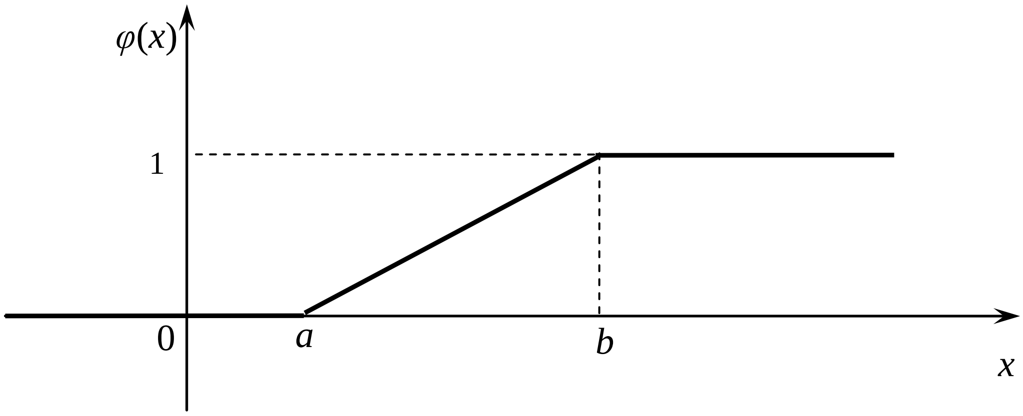


Рисунок 28

Определим числовые характеристики MX; DX; σ_X.

Согласно определению математического ожидания н.с.в. X (формула (7), пункта 1., Т. 8.), и с учётом определения функции плотности имеем:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{t}{b-a}dt + \int_{b}^{+\infty} 0dt = \frac{t^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{(b^2-a^2)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2};$$

Согласно определению дисперсии н.с.в. X (формула (12), пункт 2., Т. 8.) и с учётом определения функции плотности получим:

$$DX = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right) = \frac{(b-a)^2}{12};$$

Согласно определению с.к.о. (формула (16), Т. 8.) получим

$$\sigma_X = \sqrt{Dx} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Теорема доказана.

Отметим также выполнения дифференциального закона: $\Phi'(x) = \varphi(x)$.

Пример 7. Пусть с.в. $X \approx \Re_{<a,b>}$. Найдём вероятность попадания с.в. X в интервал (α,β), принадлежащей целиком интервалу (a,b).

Решение. Согласно формуле (п.5.,С.3., Т.7.) , имеем

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_\alpha^\beta \varphi(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dt = \frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

т.е. $P(X \in (\alpha,\beta)) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$. В частности, если $X \approx \Re_{<0,1>}; \alpha = 0{,}25; \beta = 0{,}5;$ то $P(X \in (\alpha,\beta)) = 0{,}25$.

Геометрически эта вероятность представляет собой площадь прямоугольника, заштрихованного на рис. 29.

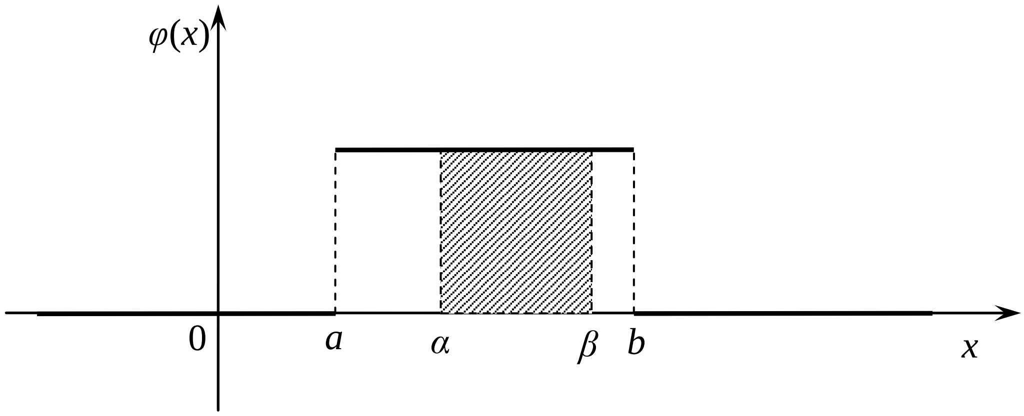


Рисунок 29

К случайным величинам, имеющим равномерное распределение, относятся все случайные величины о которых известно, что все их значения лежать внутри некоторого интервала, и все они имеют одинаковую вероятность (плотность). Например, ошибка округления любого числа до целого, равномерно распределена на отрезке $[-0{,}5; 0{,}5)$, поскольку для любого вещественного числа достоверно равенство $u = [u] + \{u\};\ 0 \le \{u\} < 1$, где [u] -обозначает целую часть, а $\{u\}$ - дробную часть этого числа, событие $X = \{u\} - 0{,}5$ является достоверным событием с плотностью $\varphi(u) = 1$ и все значения X принадлежат отрезке$[-0{,}5; 0{,}5)$. Другим типичным примером равномерного распределения является время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определённым интервалом времени, и т.д.

Дискретная случайная величина $X = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ имеет равномерное распределение, если она принимает свои значения с вероятностью $p_m = P(X = m) = \dfrac{1}{n};\ m = 1{,}2{,}3, \cdots, n.$ В этом случае $MX = \dfrac{1+n}{2};\ DX = \dfrac{n^2-1}{12};\ \sigma_X = \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$. Для $n = 5;\ MX = 3;\ DX = 2;\ \sigma_X = \sqrt{2}$. На рис. 30 представлен многоугольник распределения этого примера.

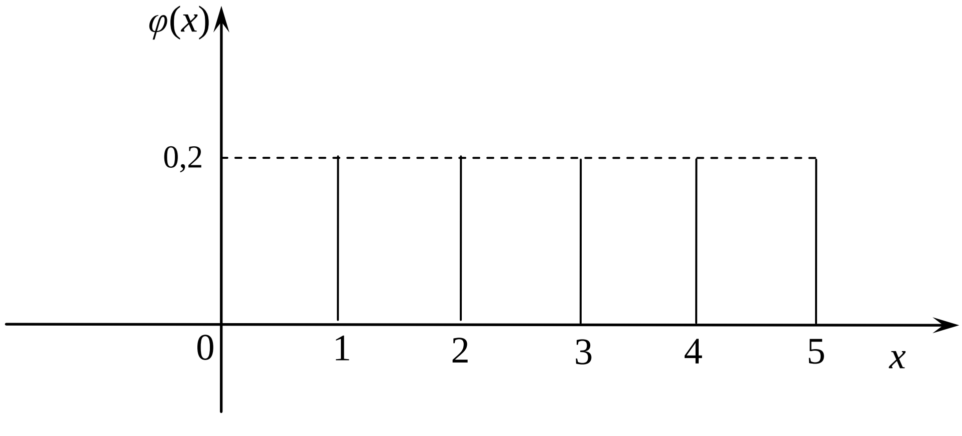


Рисунок 30

6. Показательный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *показательный* (*экспоненциальный*) закон распределения, если её плотность вероятности задаётся равенствами:

(23)
$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & при\ \ x \ge 0, \\ 0, & при\ \ x < 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

График функции плотности $\varphi(x)$ приведён на рисунке 31

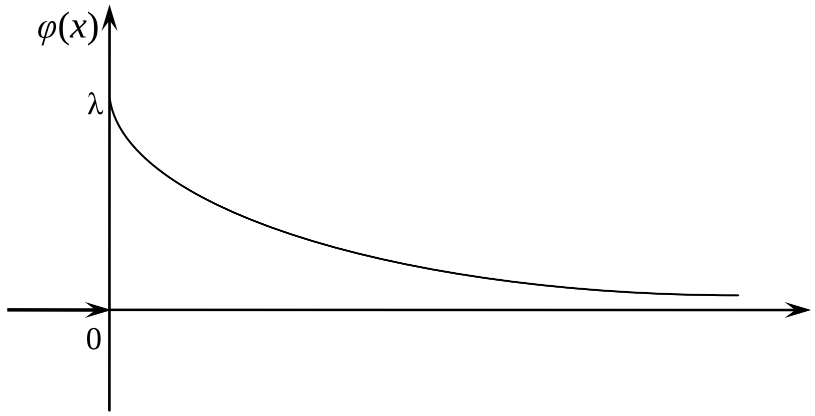


Рисунок 31

Теорема 9. 6. *Для показательного закона* непрерывной *случайной величины X имеют место формулы*:

1.
$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & при\ x \ge 0, \\ 0, & при\ x < 0, \end{cases}$$

2.
$$MX = \frac{1}{\lambda};\ DX = \frac{1}{\lambda^2};\ \sigma_X = \frac{1}{\lambda}.$$

Доказательство. Вычислим функцию распределения показательного закона. По определению имеем

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = -\int_{-\infty}^{x} d(e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda x},$$

Найдём числовые характеристики: MX; DX; σ_X.

Согласно определению математического ожидания н.с.в. X (формула (7), пункта 1., Т. 8.), и с учётом определения функции плотности имеем:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx = \lambda \lim_{Q\to\infty} \int_{b}^{Q} xe^{-\lambda x} dx.$$

Вычисляя интеграл по частям, получим

$$MX = \lambda \lim_{Q\to\infty} \int_{b}^{Q} xe^{-\lambda x} dx = \lim_{Q\to\infty}\left(-x \cdot e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \right)\Big|_{0}^{Q} = \frac{1}{\lambda}.$$

Вычислим дисперсию на основе формулы (15) (п.2., Т.8.). С учётом равенства $MX = \dfrac{1}{\lambda}$ имеем

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)dx - (MX)^2 = \lambda \lim_{Q\to\infty} \int_{0}^{Q} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

Дважды применяя интегрирование по частям, после несложных вычислений получим

$$DX = \lambda \lim_{Q\to\infty} \int_{0}^{Q} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \lambda\left(\lim_{Q\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda}\left(-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right)\right)\Big|_{0}^{Q} \right) -$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}=\lambda\cdot\left(0+\frac{2}{\lambda}\left(0-\frac{1}{\lambda^2}(0-1)\right)\right)-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Извлекая, квадратный корень из $DX=\frac{1}{\lambda^2}$ получим, $\sigma_X=\frac{1}{\lambda}$. Теорема доказана.

Отметим, также имеет место дифференциальный закон $\Phi'(x)=\varphi(x)$ (проверьте!).

Характерное свойство показательного распределения является определением одним единственным параметром λ, и все числовые характеристики также определены тем же параметром. Обычно, значения функции e^{-x} находят по таблице.

Следствие. *Вероятность попадания с.в. X, в интервале $<a,b>$, распределенной по показательному закону, вычисляется по формуле*

(24) $$P(a\le X\le b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Доказательство прямо выводится из формулы (13), п. 5., Т. 7., с учётом равенства **1**, теоремы 6. Действительно, имеем

$$P(a\le X\le b)=\Phi(b)-\Phi(a)=1-e^{-\lambda b}-(1-e^{-\lambda a})=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

График функции $\Phi(x)$ представлен на рисунке 32.

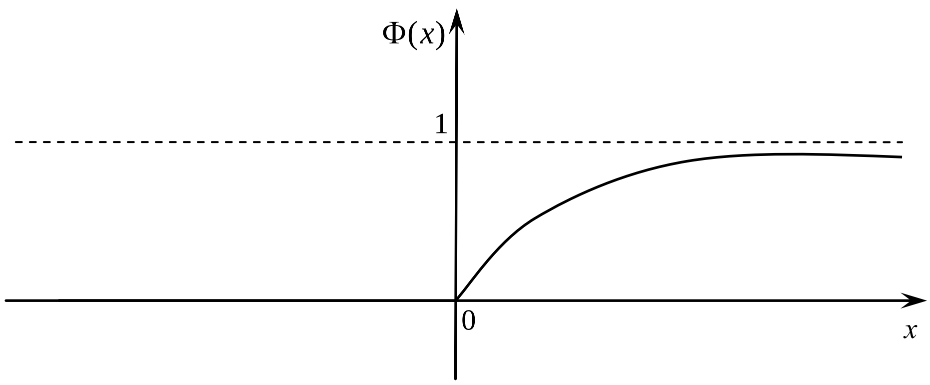


Рисунок 32

Пример 8. Пусть случайная величина T выражает время работы некоторого элемента микросхемы и имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что элемент микросхемы проработает не менее 800 часов, если среднее время работы элемента равна 400 часов (т.е. м.о. равно 400).

Решение. Так математическое ожидание равно 400, то $\lambda=1/400$. Следовательно, искомая вероятность $P\{T\ge 800.\}=1-P\{T<800\}=1-\Phi(800)=1-(1-e^{-800/400})=e^{-2}\approx 0{,}135.$

Пример 9. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с функцией плотности

$$\varphi(x)=2e^{-2x};\ \text{при}\ x\ge 0;\ \ \varphi(x)=0;\ \ \text{при}\ x<0.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания с.в. X попадает в интервал (0,3; 1).

Решение. По условию задачи $\lambda=2$. Тогда по формуле (24) имеем

$$P(0{,}3<X<1)=e^{-0{,}6}-e^{-2}=0{,}54881-0{,}13534=0{,}41347.$$

Задание. Выписать явный вид функции распределения, найти численные значения числовых характеристик: MX; DX; σ_X.

Замечаний: 1. На практике часто встречаются показательно распределённая случайная величина, где параметр λ неизвестен. Если математическое ожидание также неизвестно, то обычно находят его приближенное значение, в качестве которой принимают «выборочную среднюю $\overline{X}$». Тогда приближенное значение параметра λ находят с помощью равенства $\lambda^{\bullet} \approx (M\overline{X})^{-1}$.

2. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного закона равны между собой, поэтому в приложениях их оценки должны различаться незначительно. Если оценки окажутся близкими одна к другой, то данные наблюдений подтверждают гипотезу о показательном распределении исследуемой случайной величины; если же оценки различаются существенно, то гипотезу следует опровергнуть.

Показательное распределение широко применяется в приложениях теории вероятностей, особенно в теории массового обслуживания, в физике, а также используется для описания распределения случайной величины вида: длительность работы прибора до первого отказа, длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания и т.д. В частности в теории надёжности, где одним из основных понятий является функция надёжности.

7. Функция надёжности, показательный закон надёжности

В настоящем пункте условимся называть *элементом* некоторое устройство независимо оттого, что оно «*простое*» или «*сложное*». Пусть элемент начинает работать в момент времени, $t_0 = 0$, а по истечении времени длительностью t происходит отказ. Обозначим через T - непрерывную случайную величину «*длительность времени безотказной работы элемента за время* t». Если элемент проработал безотказно некоторое время (скажем τ), меньшее чем t, $(\tau < t)$, а затем перестал работать, тогда обязательно за время длительностью t наступит отказ работы элемента.

Таким образом, функция распределения $\Phi(t) = P(T < t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t. Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время длительностью t, (т.е. вероятностью противоположного события $T > t$) равна

(25) $$R(t) = P(T > t) = 1 - \Phi(t).$$

Функцию, $R(t)$ *определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью* t, *называют функцией надёжности:* $R(t) = P(T > t)$.

Далее, определим так называемый *показательный закон надёжности*. Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого (см. равенство **1.** п. 6., теорема 6) равна

(26) $$\Phi(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

где $0 < \lambda -$ интенсивность отказов, т.е. среднее число отказов за единицу времени.

Следовательно, в силу формул (25) и (26) для функции надёжности в случае показательного распределения вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t получим равенство

$$R(t) = P(T > t) = 1 - \Phi(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Показательным законом надёжности называют функцию надёжности, определённую равенством

(27) $$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

Как следует из формулы (27), если время безотказной работы элемента имеет показательное распределение, то эта формула позволяет найти вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t.

Пример 10. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону

$$\varphi(t) = 0{,}02 \cdot e^{-0{,}02t}, \ \ \textit{при } t \geq 0 \ \ (t - \textit{время}).$$

Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 часов.

Решение. По условию постоянная интенсивность отказов $\lambda = 0{,}02$. Воспользуемся равенством (27), тогда

$$R(100) = e^{-0{,}02 \cdot 100} = e^{-2} \approx 0{,}13534.$$

Искомая вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч., приближённо равна 0,14. Далее, также следует отметить о том, что функция надёжности связана с простейшим потоком события (см. Т. 6., п.3.) , где в распределении Пуассона, при $m = 0$

$$P(0; \lambda t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} = R(t),$$

Полученное равенство ещё раз подтверждает следующий факт: *если отказы элементов в случайные моменты времени образуют «простейший поток»*, то вероятность того, что за время длительностью t не наступит ни одного отказа.

Наконец, отметим, что имеет место и другое важное равенство $\lambda \cdot R(t) = \varphi(t) -$ плотность показательного распределения.

8. Характеристическое свойство показательного закона надёжности

Показательный закон надёжности весьма прост и удобен для решения практических задач. Как правило многие формулы теории надежности значительно упрощаются. Это объясняется тем, что данный закон является единственный из законов распределения, который обладает свойством «*отсутствия последействия*». А именно имеет место утверждение.

Теорема 9.7. *Вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью* t *не зависит от времени предшествующей работы элемента до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени* t *(при заданной интенсивности отказов* λ*).*

Доказательство. Введём обозначения событий: A - безотказная работа элемента на интервале $(0; t_0)$ длительностью t_0; B - безотказная работа элемента на интервале $(t_0; t_0 + 1)$ длительностью t. Тогда $AB -$ безотказная работа элемента на интервале $(t_0; t_0 + t)$ длительностью $t_0 + t$. Найдём вероятности этих событий по формуле (25):

(28) $$P(A) = e^{-\lambda t_0};\ P(B) = e^{-\lambda t};\ P(AB) = e^{-\lambda(t_0 + t)} = e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Далее, вычислим условную вероятность того, что элемент будет работать безотказно на интервале $(t_0; t_0 + t)$ при условии, что он уже проработал безотказно на предшествующем интервале $(0; t_0)$. Применяя, теорему умножения вероятностей получим

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda t}.$$

Как видим, полученная формула не содержит t_0, а содержит только t. Это и означает, что время работы элемента на предшествующем интервале не повлияет на величине вероятности безотказной работы элемента на последующем интервале, а зависит только от длины этого интервала, что и требовалась доказать.

Сравнив вероятности, полученные в формуле (28) *заключаем: условная вероятность безотказной работы элемента на интервале длительностью* t*, вычисленная в предположении, что элемент проработал безотказно на предшествующем интервале, равна безусловной вероятности.*

Замечание. Можно доказать, что рассматриваемым свойством обладает только показательное распределение. Таким образом, если на практике исследуемая с.в. X этим свойством обладает, то она распределена по показательному закону.

Например, при допущении факта, что метеориты распределены равномерно в пространстве и во времени, то вероятность столкновения их с космическим кораблём не зависит от того, попадали или не попадали они в корабль до начала рассматриваемого интервала времени. Следовательно, случайные моменты времени попадания метеоритов в космический корабль распределены по показательному закону.

Упражнение. Определить множество точек, для которых функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \;\; x < 0, \\ (q^2 + s^2) \cdot e^{-25x}, & \textit{если} \;\; x \geq 0, \end{cases}$$

является функцией плотности показательного закона, если q и s целые числа. Найти это множество точек на плоскости.

9. Нормальный закон распределения

Нормальный закон («закон Гаусса») играет исключительную роль в теории вероятностей и её приложениях. Главная особенность закона Гаусса состоит в том, он является *предельным законом,* к которому приближаются, при определённых условиях, другие законы распределения. Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике и, как правило, даёт необходимые результаты для приложения.

Говорят, что непрерывная с.в. X *распределена по нормальному закону с параметрами* $a > 0$ *и* $\sigma > 0$, *если её функция плотности распределения задаётся равенством*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \qquad \forall x \in R. \tag{29}$$

В дальнейшем, тот факт, что н. с. в. X имеет нормальное (или Гауссово) распределение с параметрами $m_X = a > 0$ и $\sigma > 0$, сокращенно обозначим: $X \approx \mathrm{N}_{\{m;\sigma\}}$. Поэтому, чтобы задать нормальное распределение, достаточно задать эти два параметра.

Убедимся, что $\varphi(x)$ – удовлетворяет условиям «*быть функцией плотности*».

Неравенство $\varphi(x) > 0$, непосредственно следует из определения (29). Проверим выполнение *условия нормировки* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$. Имеем (с учётом (29)) и элементарных преобразований и с последующим применением подстановки $u = \dfrac{x-a}{\sigma \cdot \sqrt{2}}$ и известного равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \qquad (\textit{интеграл Пуассона}), \tag{30}$$

получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma \cdot \sqrt{2}}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x-a}{\sigma \cdot \sqrt{2}}\right) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}=1.$$

Условие нормировки выполняется. Следовательно, функция является функцией плотности.

Из равенства (30) (в силу чётности подынтегральной функции) следуют равенства:

(31) $$\int_{0}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\int_{-\infty}^{0}e^{-u^2}du;\quad \int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Функция распределения с.в. $X\approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma\}}$ определяется равенством:

(32) $$\Phi(a;x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx$$ (*Функция распределения)*

Кратко (Ф.Р). С учётом (29) будем иметь

(33) $$\Phi(a;x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

В равенствах (29) и (33) полагая $a=0$ и $\sigma=1$, для нормального распределения с.в. $X\approx \mathrm{N}_{\{0;1\}}$ (с учётом (29)) получим

(34) $$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{\varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)}{\sigma},$$

(35) $$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ Функция Гаусса (Ф.Г.)

(36) $$\Phi(0;x)=\Phi\ (x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ (И.В. или Ф.Л);

Равенство (36) называется *«интегралом вероятности» или Функция Лапласа* (см. п. 5-7, Т. 6).

Нормальное распределение с такими параметрами называются «*нормированными* или *стандартными»* распределениями. Мы уже встречались с этими функциями, (см. пп. 5, 6, 7; Тема 6). Кроме того, нами было отмечено, что $\Phi(0;x)=\Phi(x)=0{,}5+\Phi_0(x)$, т.е. функция Лапласа $\Phi(x)$, (т.е. «*интеграл вероятности»*) *и нормированная функция Лапласа* (Н.Ф.Л)

(36) $$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ (Н.Ф.Л.);

удовлетворяют равенству

(37) $$\Phi(x)=0{,}5+\Phi_0(x).$$

Действительно, по формуле (36) имеем

$$\Phi(0;x)=\Phi\ (x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\};$$

Далее, на основании второго равенства (31) ($\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$) первое слагаемое равно 0,5, а второе слагаемое равно $\Phi_0(x)$. Равенство (37) получено. Поэтому в приложениях достаточно знать значения функции $\Phi_0(x)$, а эта функция табулирована (см. приложение 2). Для нахождения значений функции Лапласа пользуются и другой формулой $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) = 0{,}5 - \Phi_0(x)$, которая является прямым следствием равенства (37).

Найдём вероятности попадания с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma\}}$ на заданный участок числовой оси (α, β). Как ранее было показано, вероятность значений н.с.в. X распределённой на отрезке (α, β) числовой оси $\Re$ с плотностью имеет вид

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx .$$

В случае нормального распределения с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma\}}$, с учётом (37) имеем

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left(\frac{x-a}{\sigma} = t \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi_0(\frac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi_0(\frac{\alpha-a}{\sigma}) .$$

Следовательно,

(38) $$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \Phi_0(\frac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi_0(\frac{\alpha-a}{\sigma}) .$$

Через функцию Лапласа $\Phi_0(x)$ выражается и функция распределения $\Phi(a; x)$ с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma\}}$, т.е. через нормально распределённой случайной величины с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{0;1\}}$.

Теорема 9.8. *Для* $\Phi(a;x)$*- функции распределения с.в.* $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma\}}$ *справедливо равенство*

(39) $$\Phi(a;x) = P\{-\infty < X < x\} = \frac{1}{2} + \Phi_0(\frac{x-a}{\sigma})$$ (*вычислительная формула*).

Доказательство. По формуле (33) , определению вероятности и с учётом равенство (38) имеем

$$\Phi(a;\ x) = P(-\infty < X < x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi_0(\frac{x-a}{\sigma}) - \Phi_0(\frac{-\infty - a}{\sigma});$$

Далее, в силу нечётности функции $\Phi_0(x)$ и то, что $\Phi_0(-\infty) = -\Phi_0(+\infty)$ и второго равенства

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = -\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

из формулы (31) получим, что $\Phi_0(+\infty) = 0{,}5$, действительно

$$\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0{,}5.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Для* $\Phi(a;x)$*-функции распределения с.в.* $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma\}}$*, справедливы равенства*:

(40) $$\Phi(a;x) = P\{-\infty < X < x\} = \Phi(0;x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(\frac{x-a}{\sigma})$$ (Ф.Л.).

(41) $$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \Phi(\frac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}).$$

Действительно, по определению функции распределения (после замены $z = \dfrac{t-a}{\sigma}$ и с учётом того, что величины a и σ фиксированные числа), имеем

$$\Phi(a;\ x) = P(-\infty < X < x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} d(\sigma z + a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Равенство (41) прямо следует из (38) путём прибавления к правой части этого равенства число $\pm 0{,}5$ с последующим использованием (37).

Теорема 9.9. *Для вычисления математического ожидания и дисперсии нормального распределения с.в.* $X \approx \mathrm{N}_{\{a\,;\sigma\}}$, *справедливы равенства*:

(42) $\qquad MX = a;\ DX = \sigma^2.$

Доказательство. По определению м.о. с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{a\,;\sigma\}}$, имеем

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x)dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \{\textit{положим}\ \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma\sqrt{2} \cdot t + a)e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Первый интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция нечетная, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля, а второй интеграл согласно равенству (30) равен $\sqrt{\pi}$, следовательно, правая часть равна параметру a – математическому ожиданию. Тем самым первая формула (42) получена.

Вычислим дисперсию с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{a\,;\sigma\}}$. Снова сделаем подстановку $\dfrac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t$ и применим метод интегрирования по частям с последующим применением формулы Пуассона (30), тогда получим по определению дисперсии с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{a\,;\sigma\}}$,

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \varphi(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{matrix} (x-a)^2 = 2(\sigma t)^2; \\ dx = \sigma\sqrt{2} \cdot dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma^2 t^2 e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}\ dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \sigma^2.$$

Таким образом, $DX = \sigma^2$; σ – среднее квадратичное отклонение (или *стандарт*).

Теорема 9 полностью доказана.

Упражнения. Покажите, что для с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{a\,;\sigma\}}$ выполняются следующие равенства:

1. $M_0 X = MX = a$, где $M_0 X$ - точка максимума функции плотности $\varphi(x)$.

2. $M_eX = MX = a$. где M_eX - медиана с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma)}$ (см.Т.8., п.6 равенство (23)).

3. $A_X = \dfrac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \dfrac{M[(X-a)^3]}{(DX)^{3/2}} = 0$; $A_X -$ коэффициент асимметрии $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma)}$ (см. п. 7, Т.8).

Это означает, что ассиметрия положительна, если «длинная часть» кривой распределения расположена справа от математического ожидания; ассиметрия отрицательна, если «длинная часть» кривой распределения расположена слева от математического ожидания.

Практически знак асимметрии определяют по расположению кривой распределения относительно моды (точки максимума плотности распределения): если «**длинная часть**» кривой распределения расположена правее моды, то асимметрия положительна (рисунок 33 *а*), если левее моды, то асимметрия отрицательна (рисунок 33, б).

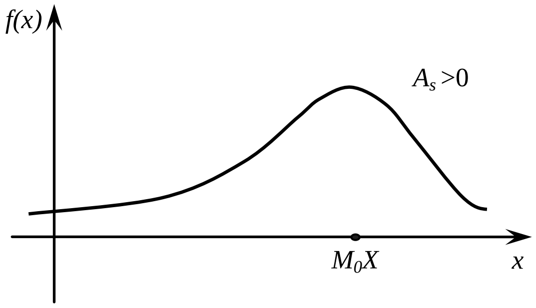


Рисунок 33, *а*

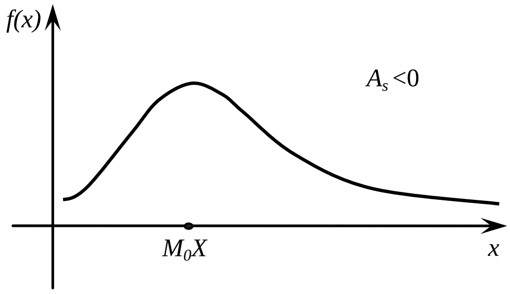


Рисунок 33, *б*

4. $Э_X = \dfrac{\mu_4}{\sigma_X^4} = \dfrac{M[(X-a)^4]}{(DX)^2} - 3 = 0$; $Э_X -$ коэффициент эксцесса $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma)}$ (см. п. 7.,Т. 8).

Для нормального распределения $\mu_4 / \sigma^4 = 3$, следовательно, эксцесс $Э_X = 0$. Поэтому, если эксцесс некоторого распределения отличен от нуля, то кривая этого распределения отличается от нормальной кривой, если эксцесс положительный, то кривая имеет более высокую и «острую» вершину, чем нормальная кривая (рисунок 34, *а*); если эксцесс отрицательный, то сравниваемая кривая имеет более низкую и «плоскую» вершину, чем нормальная кривая (рисунок 34, *б*). При этом предполагается, что нормальное и теоретическое распределения имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии.

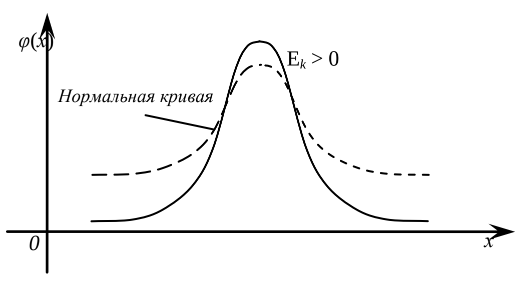


Рисунок 34, *а*

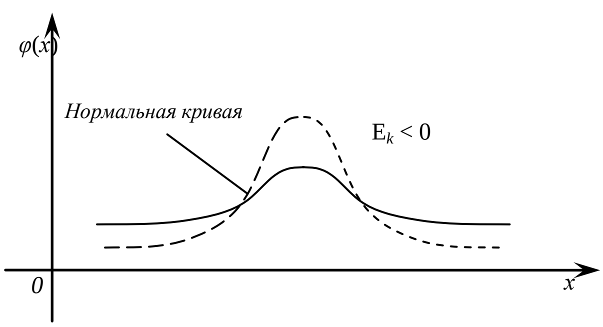


Рисунок 34, б

Исследование свойства функции Гаусса $\varphi(x)$.

1. Как уже было отмечено ранее, $\varphi(x) > 0$ для всех $x \in (-\infty;+\infty)$, график функции расположен выше оси *Ox*.

2. Ось *Ox* служит асимптотой графика функции $\varphi(x)$**,** так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$.

3. Функция $\varphi(x)$ имеет один единственный максимум в точке $x = a = MX$, равный $\varphi(a) = \left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-1}$. Действительно, $\varphi'(x) = -\frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Следовательно, $\varphi'(x) = 0$ при $x = a$ если $x < a$, то $\varphi'(x) > 0$, а если $x > a$, то $\varphi'(x) < 0$. Это и означает, что точка $x = a$ является точкой максимума нашей функции, т.е. $\varphi_{\max} = \varphi(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

4. График функции $\varphi(x)$ симметричен относительно прямой $x = a = MX$, $x = a$, так как аналитический вид функции $\varphi(x)$ содержит разность $x - a$ в квадрате.

5. Можно убедиться, что $M_1(a-\sigma;\ (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \cdot e^{-0,5})$ и $M_2(a+\sigma;\ (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \cdot e^{-0,5})$ являются точками перегиба графика функции $\varphi(x)$**.** Действительно, найдём вторую производную функции нормального распределения с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma)}$.

$$\varphi''(x) = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} [1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}].$$

Легко заметить, что $\varphi''(x+\sigma) = \varphi''(x-\sigma) = 0$, а при переходе через эти точки она меняет знак (в обеих этих точках значение функции равна $(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1})$.

Таким образом, точки $M_1(a-\sigma;\ (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \cdot e^{-0,5})$ и $M_2(a+\sigma;\ (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \cdot e^{-0,5})$ являются точками перегиба графика функции $\varphi(x)$**.**

На основании вышеуказанных свойств график функции Гаусса (или *нормальной кривой*) имеет вид:

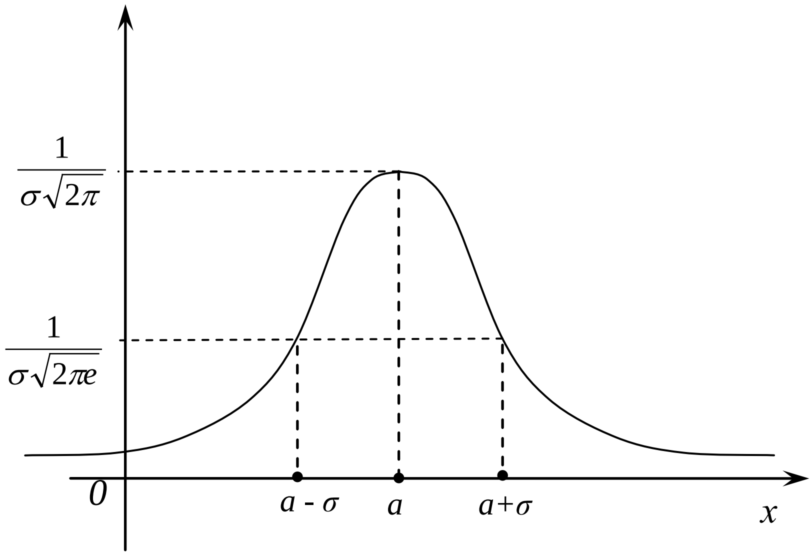


Рисунок 35

Рассмотрим, как изменяется график функции (кривая Гаусса) при изменении параметров $a; \sigma$? При изменении a график функции сохраняет свою форму, т.е. графики функции $\varphi(x)$ и $\varphi(x-a)$ имеют одинаковую форму; одна из них от другого получается путём переноса «центра» на величину a (если $a > 0$ в право, если же $a < 0$, то влево).

С изменением σ максимальная ордината точки кривой изменяется. Поскольку площадь, ограниченная кривой распределения, и осью Ox равна единице при любом значении σ, тогда *с возрастанием* σ *кривая Гаусса становится более «**пологой**», т.е. сжимается равномерно к оси* Ox; *а при убывании* σ *нормальная кривая становится более «**островершинной**» и растягивается в положительном направлении оси* Oy.

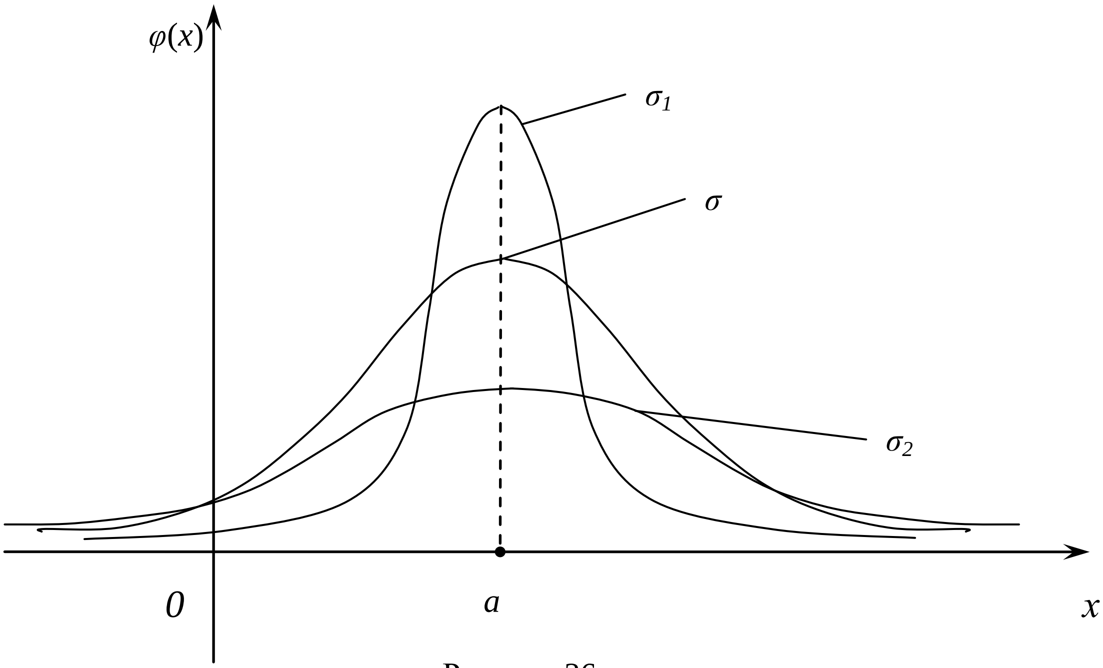


Рисунок 36

На рисунке 36 изображены нормальные кривые при различных значениях σ $(\sigma_1 < \sigma < \sigma_2)$ и некотором значении параметра $a > 0$ (одинаковом для всех трёх кривых).

Вычисление вероятности попадания с.в. $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma\}}$ ***в*** **интервал**.

Часто требуется вычислять вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал, симметричной, относительно центра разброса a. Пусть для любого положительного числа δ, этим интервалом будет $(a-\delta; a+\delta)$ длины 2δ, Другими словами, с.в. X удовлетворяет двойному неравенству: $-\delta < X - a < +\delta \Leftrightarrow a - \delta < X < a + \delta.$

Тогда по формуле (38) с учётом нечётности функции распределения имеем

$$P(a-\delta < X < a+\delta) = P(|X-a| < \delta) =$$
$$= \Phi_0\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Следовательно,

(43) $$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi_0(\delta/\sigma) = 2\Phi(\delta/\sigma) - 1.$$

На рис.37 наглядно показано, что если две случайные величины нормально распределены и $MX = a = 0,$ то вероятность принятия значение из интервала $(-\delta; +\delta)$, больше у той величины, у которой меньше значение с. к. о. $\sigma = \sqrt{DX}$. Этот факт полностью соответствует вероятностному смыслу параметра, σ которая характеризует разбросу с.в. вокруг ее математического ожидания.

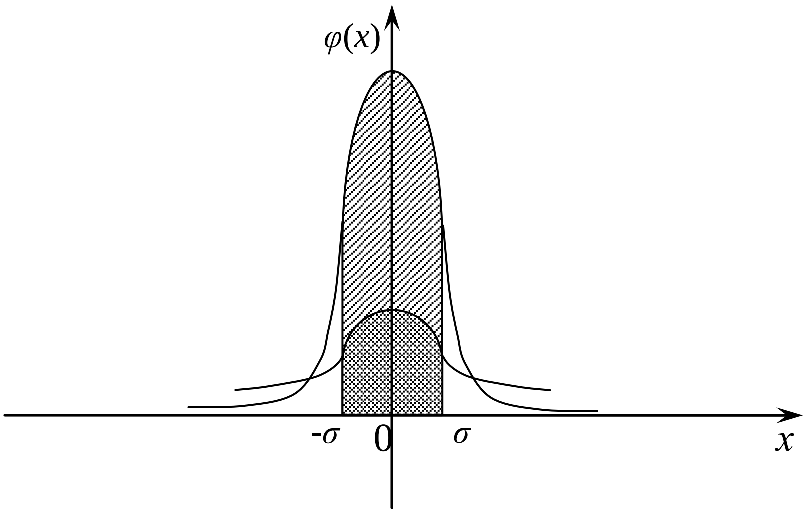


Рисунок 37

Пример 1. Пусть случайная величина распределена по нормальному закону $X \approx \mathrm{N}_{\{20;10)}$ с параметрами $MX = a = 20;\ \sigma = 10.$ Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше трёх.

Решение. На основании формулы (43) получим

$$P(|X-20|<3) = 2\Phi_0(3/10) = 2\Phi_0(0{,}3).$$

По таблице (приложение …) находим, $\Phi_0(0{,}3) = 0{,}1179,$ следовательно, $P(|X-20|<3) = 0{,}2358.$

Пример 2. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчинённые нормальному закону с параметром $\sigma = 10$мм. Производится три независимых измерения детали. Найти вероятность того, что ошибка хотя бы одного измерения не превосходит по модулю 2мм.

Решение. По формуле (43) находим: $P(|X-a|<2) = 2\Phi_0(2/10) = 2\cdot 0{,}07926 = 0{,}15852.$

Вероятность того, что эта ошибка (погрешность) превышает 2мм в одном опыте (измерении), равна $P(|X-a|>2) = 1 - P(|X-a|<2) = 1 - 0{,}15852 = 0{,}84148.$

По теореме умножения вероятность тог, что во всех трёх опытах ошибка измерения превышает 2мм, равна

$$\{P(|X-a|>2)\}^3 = (0{,}84148)^3 = 0{,}5958.$$

Следовательно, искомая вероятность равна $1 - 0{,}5958. = 0{,}4042.$

Правило «$q-$сигм». Положим в равенстве (43) $\delta = q\sigma$, получим

(44) $$P(|X-a|<q\sigma) = 2\Phi_0(q).$$

Если внимательно посмотреть на таблицу значений функции $\Phi_0(x)$ то мы увидим, что по мере роста величины $|x|\geq 3$ значении функции Лапласа фактически мало отличается от величины 0,5. По этой причине во многих практических задачах ограничиваются «***правилом трёх сигм***», т.е. мы приходим к очень важному утверждению:

Теорема 9.10. *Практически достоверно, что с.в.* $X \approx \mathrm{N}_{\{a;\sigma)}$ *принимает свои значения в промежутке* $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$. *Именно из равенство* (44) *в указанном интервале имеет место*

(45) $$P(|X-a|<3\sigma) = 2\Phi_0(3) \approx 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Другими словами: *если с.в. X распределена по нормальному закону, то абсолютная величина её отклонение от математического ожидания не превосходит от утроенного среднего квадратичного отклонения.*

Задание. Убедитесь самостоятельно (на основании равенства (44) и таблицы значения функции Лапласа) в нижеследующих вычислительных формулах:

1. $P(|X-a|<3{,}60\sigma)=2\Phi_0(3{,}60)\approx 2\cdot 0{,}499841=0{,}999682$.

2. $P(|X-a|<4\sigma)=2\Phi_0(4)\approx 2\cdot 0{,}499968=0{,}999936$.

3. $P(|X-a|<4{,}50\sigma)=2\Phi_0(4{,}50)\approx 2\cdot 0{,}499997=0{,}999994$.

4. $P(|X-a|<5\sigma)=2\Phi_0(5)\approx 2\cdot 0{,}499999=0{,}9999998$.

На практике «правило трёх сигм» применяется следующим образом: если распределение, изучаемой величины неизвестно, но условие, указанное в приведённом правиле выполняется, тогда есть основание предположить, что изучаемая с.в. распределена по нормальному закону; в противном случае она распределена не по нормальному закону.

Нормальному закону подчиняются ошибки измерений, величина износа деталей в различных механизмах, рост человека, ошибки стрельбы, величина шума, в радиоприёмном устройстве, колебания курса акции в финансовых сферах и т.д.

Тема 10. Предельные теоремы теории вероятностей

Рассмотрим несколько утверждений и теорем из большой группы, так называемых предельных теорем теории вероятностей, устанавливающих связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при достаточно большом числе испытаний над ними. Они составляют основу математической статистики. Предельные теоремы условно делят на две группы.

Первая группа теорем, называемая законом больших чисел (ЗБЧ), устанавливает устойчивость средних значений: при большом числе испытаний их средний результат перестаёт быть случайным и может быть предсказан с достаточной точностью. Одна из таких теорем (ЗБЧ в форме Я. Бернулли, Т. 6 п. 7) нами уже была рассмотрена в качестве применения интегральной формулы Муавра-Лапласса. Этот закон теоретически обосновывает свойство устойчивости относительной частоты появления некоторого события $m-$раз при n испытаниях по схеме Бернулли.

Вторая группа теорем, называемая центральной предельной теоремой (ЦПТ) устанавливает при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа с.в., где почти утрачивает случайный характер и становится закономерным, т.е. устанавливается условие, при которых закон распределения суммы большого числа случайных величин неограниченно приближается к нормальному закону.

Для практики важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие многих случайных причин приводят к результату, почти не зависящему от случая, и позволяет предвидеть ход событий. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Бернулли и Чебышева, Маркова и др.

Рассмотрим неравенство Чебышева, которое можно применять:

а) для грубой оценки вероятностей событий, связанных со случайными величинами, распределение которых неизвестно;

б) для доказательства теорем ЗБЧ.

1. Неравенство Чебышева и Маркова

Неравенство Чебышева справедливо для дискретных и непрерывных случайных величин.

1. Пусть X - дискретная случайная величина с заданной таблицей распределения

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Контроль - $\sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1;$

Поставим перед собой задачу: «*оценить вероятность того, что отклонение д.с.в. X от её м.о. MX по абсолютной величине не превышает положительного числа ε». Имеет место утверждение*

Теорема 10.1. (неравенство Чебышева д. с. в.). *Если дискретная случайная величина X имеет м.о. $MX = a$ и дисперсию $DX = \sigma^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

(1) $$P\{\,|X - MX| < \varepsilon\} \ge 1 - DX/\varepsilon^2 .$$

Доказательство. Поскольку события $|X - MX| < \varepsilon$ и $|X - MX| \ge \varepsilon$ противоположные, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.

(2) $$P\{|(X - MX|) < \varepsilon\} + P\{(|X - MX|) \ge \varepsilon\} = 1 .$$

Отсюда интересующая нас вероятность

(3) $$P\{|(X - MX|) < \varepsilon\} = 1 - P\{(|X - MX|) \ge \varepsilon\} ,$$

Следовательно, задача сводится к вычислению вероятности $P(|X - MX| \ge \varepsilon)$.

Далее, напишем выражение дисперсии для с.в. X : по определению для д.с.в.

$$DX = \sum_{k=1}^{n}[x_k - a]^2 \cdot p_k \ge 0.$$

В левой части этого выражения отбросим все слагаемые у которых $|x_k - a| < \varepsilon$ (для оставшихся слагаемых $|x_k - a| \ge \varepsilon$), в результате чего сумма только уменьшиться. Без ограничения общности этими слагаемыми можно выбрать первые m слагаемых в сумме.

Таким образом, $DX = \sum_{k=1}^{m}[x_k - a]^2 \cdot p_k + \sum_{k \ge m+1}[x_k - a]^2 \cdot p_k \ge \sum_{k=m+1}^{n}[x_k - a]^2 \cdot p_k$, т.е.

(4) $$DX \ge \sum_{k=m+1}^{n}[x_k - a]^2 \cdot p_k .$$

Заметим, что обе части неравенства $|x_k - a| \ge \varepsilon; (k = m+1; m+2; \cdots, n)$ – положительны, поэтому, возведя их в квадрат, получим равносильные неравенства $|x_k - a|^2 \ge \varepsilon^2;$ для всех $k = m+1; m+2; \cdots, n.$ Воспользуемся этим замечанием в правой части нашей суммы, получим

(5) $$DX \ge \sum_{k \ge m+1}\varepsilon^2 \cdot p_k = \varepsilon^2 (p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots + p_n).$$

По теореме сложения, сумма вероятностей $p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots + p_n$ - есть вероятность того, что с.в. X примет одно (безразлично какое) из значений $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$, а при любом из них отклонение удовлетворяет неравенству $|x_k - a| \ge \varepsilon.$ Отсюда следует, что сумма $p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots + p_n$ выражает вероятность $P(|X - a| \ge \varepsilon)$. Это соображение позволяет переписать неравенство (5) в виде:

$$DX \ge \varepsilon^2 (p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots) \ge \varepsilon^2 \cdot P(|X - a| \ge \varepsilon)$$

или

$$P(|X-a|\geq\varepsilon)\leq DX/\varepsilon^2 .$$

Следовательно, согласно равенствам (2) и (3) получим доказательство неравенство (1).

Замечание. Неравенство Чебышева (1) можно переписать в другом виде:

(6) $$P\{\,|X-MX\,|\geq\varepsilon\}\leq DX/\varepsilon^2 .$$

Отметим, что для практики неравенство Чебышева имеет ограниченное значение, поскольку часто даёт грубую, а иногда и тривиальную (не представляющую интереса) оценку. Например, если $DX/\varepsilon^2>1,$ то $1-DX/\varepsilon^2<0,$ этим самым неравенство Чебышева в этих случаях лишь подтверждает того, что любая вероятность выражается неотрицательным числом.

Неравенство Чебышева в частности, для случайной величины $X=m,$ имеющей биномиальное распределение с м.о. $MX=a=np$ и дисперсией $DX=npq$ (см. Т. 9, теорема 1) , принимает вид

(7) $$P\{|m-np|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{npq}{\varepsilon^2};$$

В том числе, для отклонения ***частоты*** $W_A=\dfrac{m}{n}$ события в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с вероятностью $p=M\,(m/n)=a$; и дисперсией $D(m/n)=\dfrac{D(m)}{n^2}=\dfrac{pq}{n}$, неравенство Чебышева имеет вид:

(8) $$P\left\{|\frac{m}{n}-p|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2};$$

Пример 1. Оценить с помощью неравенство (1) вероятность того, что отклонение д.с.в. X от своего математического ожидания будет меньше $3\sigma_X$.

Решение. Положим в формуле (1) $\varepsilon=3\sigma_X$ получим оценку снизу

$$P\{\,|X-MX\,|<3\sigma_X\,\}\geq 1-\sigma_X^2/(3\sigma_X\,)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\approx 0{,}8889.$$

Оценка сверху, как известно (п.9. формула (45)), называется «***правилом трёх сигм***» для с.в. $X\approx N_{(a,\sigma)}$ и эта вероятность была равна 0,9973. Как легко заметить, неравенство Чебышева даёт результат несколько слабее. В общем случае получаем неравенство

(9) $$P(|X-a|<q\,\sigma)\geq 1-\frac{1}{q^2}.$$

Пример 2. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,05. С помощью неравенство Чебышева оценить вероятности того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (м.о.) отказов за время t откажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Решение. а) Пусть X обозначает дискретную случайную величину, выражающую число отказавших элементов за время t. Тогда по закону Бернулли ($n=10;\ p=0{,}05;\ q=0{,}95$)

$$MX=np=10\cdot 0{,}05=0{,}5;\ \ DX=npq=10\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95=0{,}475.$$

По неравенству Чебышева имеем $P\{|X-0{,}5|<2\}\geq 1-0{,}475/4=0{,}88.$

б) События $| X - 0{,}5 |< 2$ и $| X - 0{,}5 |\geq 2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Следовательно, $P\{| X - 0{,}5 |\geq 2\} \geq 1 - 0{,}88 = 0{,}12$.

2. Пусть н.с.в. X задана со своей функцией распределения вероятности $\varphi_X(x)$. Тогда справедливо утверждение

Теорема 10.2. (неравенство Чебышева для н. с. в.). *Если непрерывная случайная величина X с плотностью $\varphi_X(x)$ имеет математическое ожидание $MX = a$ и дисперсию $DX = \sigma^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

(10) $$P\{\, | X - MX | \geq \varepsilon\} \leq DX/\varepsilon^2 .$$

Доказательство. Вероятность $P\{| X - a |\geq \varepsilon\}$ есть вероятность попадания н.с.в. X в область, лежащую вне промежутка $[a-\varepsilon;\ a+\varepsilon]$. Поэтому имеем

$$P(| X - a |\geq \varepsilon) = \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \varphi_X(t)dt + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} \varphi_X(t)dt = \int_{|x-a|\geq\varepsilon} 1\cdot\varphi_X(x)dx.$$

Заметим, что область интегрирования $|x - a|\geq \varepsilon$ можно записать в виде $(x-a)^2 \geq \varepsilon^2$, откуда следует, что $1 \leq (x-a)^2/\varepsilon^2$. Следовательно,

$$P(| X - a |\geq \varepsilon) = \int_{|x-a|\geq\varepsilon} 1\cdot\varphi_X(x)\,dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x-a|\geq\varepsilon} (x-a)^2\varphi_X(x)dx .$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то расширяя пределы интегрирования, получим неравенство

$$\int_{|x-a|\geq\varepsilon} (x-a)^2\varphi_X(x)dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2\varphi_X(x)dx = DX .$$

Таким образом, из двух последних формул получим

$$P(| X - a |\geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} .$$

Утверждение доказано.

Это же неравенство можно записать (в силу равенства $P(| X - a |\geq \varepsilon) + P(| X - a |< \varepsilon) = 1$) также и в другой форме:

(11) $$P(| X - a |< \varepsilon) \leq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Теперь объединяя обе теоремы, сформулируем неравенство Чебышева в общем виде.

Теорема 10.3. *Если случайная величина X имеет м.о. $MX = a$ и дисперсию, $DX = \sigma^2$ то для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства*

(12) $$P\{\, | X - MX | \geq \varepsilon\} \leq DX/\varepsilon^2 ;\ \ 2.\ P(| X - a |< \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} .$$

Замечание. Неравенство Чебышева имеет для практики ограниченное значение, поскольку часто даёт грубую оценку, а иногда тривиальную (не представляющего интереса) оценку. Например, если $D(X) > \varepsilon^2$ и, следовательно, $D(X)/\varepsilon^2 > 1$, то $1 - D(X)/\varepsilon^2 < 0$. Таким образом, в этом случае неравенство Чебышева указывает лишь на то, что вероятность отклонения есть неотрицательное число, а это и без того очевидно, так как любая вероятность выражается неотрицательным числом.

Рассмотрим ещё одно неравенство для неотрицательно определённых случайных величин X .

Теорема 10.4. (Неравенство Маркова). *Если неотрицательная случайная величина X имеет м.о. $MX = a$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

(13) $$P\{\, X \geq \varepsilon\} \leq MX/\varepsilon\ ,\quad 2.\ P\{\, X < \varepsilon\} \geq 1 - MX/\varepsilon\ .$$

Доказательство. Проверим справедливости неравенств (12) для н.с.в X с функцией плотностью $\varphi_X(x)$. Имеем

$$P\{X \geq \varepsilon\} = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi_X(x)dx \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x}{\varepsilon}\varphi_X(x)dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{+\infty} x\varphi_X(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{+\infty} x\varphi_X(x)dx = MX/\varepsilon.$$

Так как $P\{X \geq \varepsilon\} + P\{X < \varepsilon\} = 1$, то получим и второе неравенство.

2. Теорема Чебышева (ЗБЧ Чебышева)

Основное утверждение ЗБЧ содержится в теореме Чебышева. В ней и в других теоремах ЗБЧ используется понятие «*сходимости случайных величин по вероятности*». Определим это понятие:

Говорят, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ сходятся по вероятности к величине Q (случайной или неслучайной), если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность события $\{|X_n - Q| < \varepsilon\}$ для $n \to \infty$ стремиться к единице, т.е.

(14) $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - Q| < \varepsilon\} = 1$ (или $P\{|X_n - Q| < \varepsilon\} \to 1$).

Сходимость по вероятности символически обозначается:

(15) $$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{вер}{\Rightarrow}} Q.$$

Замечание. *Сходимость по вероятности* требует, чтобы неравенство $|X_n - Q| < \varepsilon$ выполнялось для подавляющего количества членов последовательности. В теории пределах это понятие вводится несколько по – другому: для всех номеров последовательности начиная с некоторого номера, $n > n_0$, все члены последовательности должны принадлежать в $\varepsilon -$ окрестность предельной величины Q, а здесь для $n \to \infty$ практически все члены последовательности должны попасть в $\varepsilon -$ окрестность величины Q.

Теорема 10. 5. (ЗБЧ в форме П.Л. Чебышева, 1886г). Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots -$ независимы и существует положительное постоянное число K, что

$DX_j \leq K;\ j = 1,2,\cdots,$ то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

(16) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

т.е. среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математического ожидания:

(17) $$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \underset{n\to\infty}{\overset{вер}{\Rightarrow}} a.$$

Доказательство. Так как $DX_j \leq K;\ j = 1,2,\cdots,$ то

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} DX_j \leq \frac{Kn}{n^2} = \frac{K}{n}.$$

Применяем неравенство (второе неравенство из (12)), Чебышева к с.в. $\overline{X} = (n)^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ имеем

(18) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\overline{X}}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{K}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ с учётом того, что вероятность любого события не превышает 1, получаем равенство (16). Утверждение доказано.

Следствие. Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и одинаково распределены, т.е. $MX_j = a$; $DX_j = \sigma^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j\right| < \varepsilon\right\} = 1, \tag{20}$$

т.е. среднее арифметическое с.в. сходится по вероятности к математическому ожиданию a:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \underset{n\to\infty}{\overset{вер}{\Rightarrow}} a.$$

Проверка равенства (20) легко выводится на основании свойства м.о. и равенства $MX_j = a$, а также с учётом того, что дисперсия с.в. X_j равны числу σ^2, т.е. ограничены. Поэтому можно применить ЗБЧ Чебышева.

Следствие (20) теоремы Чебышева обосновывает «*принцип осреднённой арифметической с.в.* X_j», часто используемый на практике.

Рассмотрим такой пример. Пусть произведено n независимых измерений некоторой величины, истинное значение которой равно a (оно неизвестно!). Результат каждого измерения есть с.в. X_j. Согласно следствию (20), и в качестве приближённого значения величины a можно взять среднее арифметическое результатов измерений:

$$a \approx \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j$$

Это равенство тем точнее, чем больше число измерений n.

На теореме Чебышева основан также широко применяемый в статистике *выборочный метод,* смысл которого заключается в том, что о качестве большого количества однородного материала можно судить при небольшом числе его пробе.

Теорема Чебышева подтверждает связь между случайностью и необходимостью среднего значения случайной величины $\overline{X}_n$.

Пример 3. Глубина моря измеряется прибором, не имеющим систематической ошибки. Среднее квадратичное отклонение измерения не превосходит 15м. Сколько нужно сделать независимых измерений, чтобы с вероятностью не меньшей 0,9, можно было бы утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличаются от a (глубины моря) по модулю меньше, чем на 5 м?

Решение. Обозначим через X_j результаты n независимых измерений глубины моря. Нужно найти число n, которое удовлетворяет неравенству (18)

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{K}{n\varepsilon^2}.$$ где $MX_j = a.$ Это означает отсутствие при измерениях систематической ошибки (измерение проводятся с одинаковой точностью). По условию, $\varepsilon = 5$; $K = 225$; так как $\sigma = \sqrt{DX} = 15$ м. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{225}{25n} \ge 0{,}9,$$

т.е. $0{,}1 \ge \frac{9}{n}$; $n \ge 90$. Следовательно, измерение следует провести не менее 90 раз.

Сущность теоремы Чебышева можно характеризовать так:

«*Среднее арифметическое достаточно большого количества независимых случайных величин (дисперсия которых равномерно ограничены) утрачивает характер случайности*»

Это объясняется тем, что отклонения каждой из величин от своих м.о., т.е. могут быть как положительными, так и отрицательными, а в среднем арифметическом они взаимно погашаются. Другими словами, происходит между ними некоторая «интерференция», что указывает на объективные связи между случайностью и необходимостью. Тем самым, подтверждается справедливость философского учения - диалектического материализма.

***Значение ЗБЧ Чебышева для практики коротко можно характеризовать в виде*:**

Приведём некоторые примеры применения ЗБЧ Чебышева к решению практических задач.

Традиционно на практике для измерения некоторой физической величины производят ряд измерений, составляют их среднее арифметическое и принимают его в качестве искомого размера измерения. Возникает естественный вопрос, «при каких условиях такой способ измерения можно считать правильным?» Ответ на такой вопрос даёт частный случай теорема Чебышева.

Действительно, рассмотрим результаты каждого измерения некоторого эксперимента как с.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$. К исследованию этих величин можно применить теорему Чебышева, если:

1) они попарно независимы;
2) имеют одно и тоже математическое ожидание;
3) дисперсия их равномерно ограничены.

Первое требование выполняется, если результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Второе требование выполняется, если измерения проведены без систематических ошибок (т.е. с точностью одного знака). В этом случае математические ожидания всех случайных величин одинаковы и равны истинному размеру $a = MX_j$. Третье требование выполняется, если измерительный прибор обеспечивает необходимую точность. Хотя при этом результаты отдельных измерений возможно различны, но мера разброса их ограниченна.

Если все указанные требования выполняются, мы вправе применять к результатам проведённого измерения теорему Чебышева, тогда при достаточно большом числе $n-$измерений вероятность неравенства

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a \right| < \varepsilon,$$

как угодно близко к единице. Другими словами, при достаточно большом числе измерений почти достоверно, что их среднее арифметическое сколь угодно мало отличается от истинного значения измеряемой величины.

Предостережение. Ошибочно думать, что увеличивая число измерений, всегда можно достичь результата сколь угодно большой точности. Дело в том, что сам прибор может дать показания с точностью некоторой величины $\pm\delta$; $(\delta > 0)$. Поэтому каждый из результатов измерений, следовательно, и их среднее арифметическое будут получены лишь с точностью, не превышающей точности прибора.

Как уже было отмечено ранее, на теореме Чебышева базируется широко применяемый в статистике «выборочный метод», суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой выборке делают заключение о всей совокупности (так называемый «генеральной совокупности») исследуемых объектов. Например, о качестве кипы хлопка заключают по небольшому пучку, состоящему из волокон, случайно отобранных из разных мест кипы. Хотя число волокон в пучке значительно меньше, чем в кипе, сам пучок содержит достаточно большое количество волокон, исчислимое сотнями. В качестве другого примера можно указать на процесс определения качества зерна по небольшой его пробе. И в этом случае объём случайно отобранных зёрен мал по сравнению со всей массой зерна, но само по себе оно достаточно велико.

Можно продолжить количество таких примеров, но уже из приведённых примеров можно заключить, что для практики теорема Чебышева имеет неоценимое значение.

3. Ещё раз о теореме Бернулли

В этом пункте ещё раз будем рассматривать ЗБЧ Бернулли. Теорема Бернулли исторически является первой и наиболее простой формой закона больших чисел. Она обосновывает теоретически возможность приближенного вычисления вероятности события с помощью его относительной частоты, т.е. обосновывает свойство устойчивости относительной частоты (которая приводит к статистическому определению вероятностей).

В Т. 6 пункте 7, мы рассматривали ЗБЧ Бернулли в качестве применения интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Здесь её выводим на основании теоремы Чебышева.

Напомним, что проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна, p ($0<p<1$), а относительная частота в каждой серии испытания равна $W_n(m)=\dfrac{m}{n}$; $0\le m\le n$;

Рассмотрим задачу: *в условиях испытания по схеме Бернулли и при достаточно большом числе независимых испытаний* n *найти вероятность отклонения относительной частоты* $W(A)=m/n$ *от истинной вероятности* p *события* A *по абсолютной величине не превышает заданного числа* $\varepsilon>0$. *Другими словами, найти вероятность:* $P(|\,p-m/n\,|<\varepsilon)=?$

Здесь, для решения этой задачи будем применять неравенство Чебышева.

Рассматривается независимые д.с.в. X_j, каждый из них обладают свойством: $X_j=1$, если в $j-$м номере испытании наступило событие A, а если в $j-$м испытании не наступило событие A, тогда, $X_j=0$, т.е. X_j является индикатором испытания на предмет появление или не появление события A.

Тогда $n_A=m$ (число успехов) события A представиться в виде

$$m=\sum_{j=1}^{n}X_j \Leftrightarrow W_n(m)=\frac{m}{n}$$

Составим закон распределения каждой независимой случайной величины $X_j=\{\,1;\,0\,\}$ и затем найдём математическое ожидание и дисперсию наступления событие A.

X_j	1	0
P	p	$1-p$

Контроль $\sum_{i=1}^{2}p_i=p+1-p=1.$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию с. в. $X_j=\{1;\,0\}$ при любом j; $j=1,2,\cdots,n.$ $MX_j=1\cdot p+0\cdot q=p;\ MX_j^{\,2}=1^2\cdot p+0^2\cdot q=p.$

$$DX_j = MX_j^{\,2} - (MX_j)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Неравенство Чебышева (12) для случайных величин X_j, число успехов которых равно

$$m = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

принимает вид:

$$(21) \qquad P(|X - a| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

где также отметим, что $M\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} M(m) = \frac{np}{n} = p;\ D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(m) = \frac{pq}{n}.$

Случайные величины X_j независимы, их дисперсия ограничены одним и тем же числом 0,25, так как

$$pq = p(1-p) = p - p^2 = 0{,}25 - (p - 0{,}5)^2 \le 0{,}25.$$

Поэтому к этим с.в. можно применить теорему Чебышева 10.4. Также воспользуемся легко выводимыми равенствами

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{m}{n} = W_n(m);\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j = p.$$

Следовательно, справедливо ЗБЧ в форме Бернулли

$$(22) \qquad \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j\right| < \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} P\{|W_n(m) - p| < \varepsilon\} = 1.$$

Итак, ЗБЧ Бернулли утверждает, что при $n \to \infty$ «*относительная частота*» сходится по вероятности к истинной вероятности события A, т.е. числу $p = P(A)$. Коротко теорему (ЗБЧ) Бернулли записывают в виде:

Теорема 10.6. *Справедлива следующая эквивалентность*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|W_n(m) - p| < \varepsilon\} = 1 = \frac{m}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{вер}{\Rightarrow}} p.$$

Как видим, теорема Бернулли объясняет, причину того что, почему относительная частота при достаточно большом количестве испытаний обладает свойством *устойчивости и тем самым оправдывает статистическое определение вероятности.*

Пример 4. Вероятность наличия опечатки на одной странице рукописи равна 0,2. Найти вероятность того, что в рукописи, содержащей 400 страниц, частность появления опечатки отличается от соответствующей вероятности по модулю меньше, чем 0,05.

Решение. Воспользуемся равенством (21). В нашем примере

$$p = 0{,}2;\ q = 0{,}8 n = 400;\ \varepsilon = 0{,}05.$$

Имеем

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0{,}2\right| < 0{,}05\right\} \ge \left(1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}\right) = 1 - \frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{400\cdot(0{,}05)^2} = 0{,}84,$$

т.е. $p \ge 0{,}84$.

4. Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова)

Центральная предельная теорема (ЦПТ) представляет собой вторую группу предельных теорем, которые устанавливают связь между законом распределения *суммы случайных величин* и его предельной формой – *нормальным законом распределения.*

До сих пор мы часто говорили об устойчивости средних характеристик большого числа испытаний, говоря точнее, об устойчивости сумм вида

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Однако следует обратить внимание, что величина $\overline{X}_n$ – случайная, а значит, она имеет некоторый закон распределения. Оказывается этот замечательный факт, составляет содержание другой группы теорем, объединяемых под общим названием *центральная предельная теорема*, что при достаточно общих условиях закон распределения $\overline{X}_n$ *близок к нормальному закону.*

Поскольку величина $\overline{X}_n$ отличается от суммы

$$S_n = n\overline{X}_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

лишь постоянным множителем n^{-1}, то в общих чертах содержание ЦПТ может быть сформулировано следующим образом.

Распределение суммы большого числа независимых случайных величин при весьма общих условиях близка к нормальному закону распределению.

Известно, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике (не только в теории вероятностей, но и в её многочисленных приложениях). Чем такое явление объясняется? Ответ на такой «феномен» впервые был дан выдающимся русским математиком А.М. Ляпуновым в 1901году: «Центральная предельная теорема Ляпунова». Ответ Ляпунова заключается в его условии, при которых справедливо ЦПТ.

В целях подготовки точной формулировки ЦПТ, поставим перед собой два вопроса:

1. *Какой точный смысл содержит в себе утверждение о том, что «закон распределения суммы S_n «близка» к нормальному закону?».*

2. *При каких условиях справедлива эта близость?*

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин: $X_1, X_2, \cdots$. Составим «частичные суммы» нашей последовательности с.в. $X_1, X_2, \cdots$.

(23) $$S_n = \sum_{j=1}^{q} X_j;\ (n = 1,2,\cdots).$$

От каждой случайных величин S_n перейдём к «нормированной» случайной величине

(24) $$\breve{S}_n = \frac{S_n - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}.$$

Нами было установлено (см.Т.8., п.3, равенства (19)), что $M(\breve{S}_n) = 0;\ D(\breve{S}_n) = 1$.

Ответ на первый вопрос теперь можно сформулировать в виде предельного равенства

(25) $$P\{\alpha \le \breve{S}_n \le \beta\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\quad (\alpha < \beta),$$

означающего, что закон распределения с.в. $\breve{S}_n$ с ростом n приближается к нормальному закону с $M(\breve{S}_n) = 0;\ D(\breve{S}_n) = 1$. Разумеется, из того факта, что величина

$\breve{S}_n$ имеет приближенно нормальное распределение, следует, что и величина S_n распределена приближенно нормально,

$$P\{\alpha \le S_n \le \beta\} = P\left\{\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right\} \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}}\right);\ \alpha < \beta,$$

или

(26) $$P\{\alpha \le S_n \le \beta\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

- формула для определения вероятности того, что сумма нескольких с.в. окажется в заданных пределах. Обычно ЦПТ используют при $n > 10$.

По поводу условий, которые следует наложить на величины $X_1, X_2, \cdots,$ можно высказать следующие соображения. Рассмотрим разность $\breve{S}_n = S_n - M(S_n)$. Получим отклонение с.в S_n от её математического ожидания. Общий смысл накладываемых условий, на величины $X_1, X_2, \cdots,$ заключается в том, что отдельные отклонения $\breve{X}_j = X_j - MX_j;\ j = \overline{1, n}.$ должны быть равномерно малы по сравнению с суммарным отклонением $\breve{S}_n = S_n - M(S_n)$. Точную формулировку этих условий, при которых справедливо предельное соотношение дал М.А. Ляпунов в 1901 году. Она заключается в следующем.

Пусть для каждой из величин $X_j;\ (j = 1, 2, \cdots)$ числа $D_j = M(\breve{X}_j^2); k_j = M\left(|\ \breve{X}_j\ |^3\right)$ конечны, (заметим, что D_j есть дисперсия с.в. X_j, k_j - «*центральный момент третьего порядка*»).

Если при $n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} k_j \Big/ \left(\sum\limits_{j=1}^{n} D_j\right)^{3/2} = 0$, то будем говорить, что последовательность $X_1, X_2, \cdots$

удовлетворяет ***условию Ляпунова.***

В частности, ЦПТ для случаев, когда в сумме случайных величин каждый слагаемый имеет одинаковое распределение, т.е. все $D_1 = D_2 = \cdots = D_n = D$ и $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = k,$ то условие Ляпунова при $n \to \infty$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} k_j \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} D_j\right)^{3/2} = \frac{nk}{(nD)^{3/2}} = \frac{k}{\sqrt{n} \cdot D^{3/2}} \to 0.$$

Именно, на практике такой случай ЦПТ чаще всего используется. Потому, что в математической статистике любая случайная выборка с.в. имеют одинаковые распределения, поскольку «выборки» получены из одной и той же генеральной совокупности.

Сформулируем этот случай как отдельное утверждение ЦПТ.

Теорема 10.7 (ЦПТ). *Пусть случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n$ независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание $MX_j = a$ и дисперсию $DX_j = \sigma^2;\quad j = \overline{1, n}.$*

Тогда функция распределения центрированной и нормированной суммы этих с.в. при $n \to \infty$ *стремится к функции распределения стандартной нормальной случайной величины:*

$$P\{S_n < x\} = \Phi_{S_n}(x) \underset{n\to\infty}{\overset{вер}{\Rightarrow}} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{27}$$

где $\breve{S}_n = \dfrac{S_n - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} = \dfrac{\breve{S}_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$;

На этом частном случае хорошо осмыслить, в чем находит своё проявление равномерная «малость» слагаемых, $\breve{X}_j = X_j - MX_j$; где величина $\sum k_j$ имеет порядок n, а величина $\sqrt{\left(\sum D_j\right)^3}$ – порядок $n^{3/2}$, тем самым отношение первой величины ко второй стремится, к 0.

Теперь мы в состоянии сформулировать центральную предельную теорему в форме А.М. Ляпунова.

Теорема 10.8. (Ляпунова). *Если последовательность* $X_1, X_2, \cdots$ *независимых случайных величин удовлетворяет условию Ляпунова, то справедливо предельное соотношение*

$$P\left\{\alpha \le \breve{S}_n \le \beta\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{28}$$

для любых α *и* β*, при этом* $(\alpha < \beta)$

Иными словами, в этом случае закон распределения нормированной суммы $\breve{S}_n$ сходится к нормальному закону с параметрами $M(\breve{S}_n) = a = 0;\ \sigma = 1.$

Следует отметить, что для доказательства ЦПТ А.М. Ляпунов разработал специальный метод, основанный на теорию так называемых характеристических функций. Этот метод оказался весьма полезным и в других разделах математики (см. доказательство ЦПТ например в кн. [6]). В этой книге мы, о производящих функциях будем давать краткую информацию и некоторые применения к подсчёту числовых характеристик случайных величин.

Краткие сведения об ошибке измерений. Известно, что при повторении измерений одного и того же объекта, одним и тем же измерительным прибором с одинаковой тщательностью (при одинаковых условиях) не всегда достигаются одинаковые результаты. Разброс результатов измерения вызван тем, что на процесс измерения влияют многочисленные факторы, которые не возможно и не целесообразно учитывать. В этой ситуации ошибку, возникающую при измерении интересующей нас величины часто можно рассматривать как сумму большого числа независимых между собой слагаемых, каждое из которых даёт лишь незначительный вклад в образование всей суммы. Но такие случаи приводят нас как раз к условиям применимости теоремы Ляпунова и можно ожидать, что распределение ошибки измеряемой величины мало отличается от нормального распределения.

В более общем случае, ошибка является функцией большого числа случайных аргументов, каждый из которых лишь немного отличается от своего математического ожидания. Линеаризуя эту функцию, то есть, заменяя её линейной, опять приходят к предыдущему случаю. Накопленный опыт по статистической обработке результатов измерений действительно подтверждает этот факт в большинстве практических случаев.

Аналогичные рассуждения объясняют появление нормального распределения в отклонениях параметров, определяющих выпущенную готовую продукцию (изделия), от нормативных значений при массовом производстве.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 5. Независимые случайные величины X_j распределены равномерно на отрезке [0,1]. Найти закон распределения с.в. $S=\sum_{j=1}^{100} X_j$, а также вероятность того, что $55 < S < 70$.

Решение. Условия ЦПТ соблюдается, поэтому с.в. S имеет приближенно плотность распределения

$$\varphi_S(y) \approx \frac{1}{\sigma_S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_S^2}}.$$

По известным формулам для м.о. и дисперсии в случае равномерного распределения находим: $MX_j = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$, $DX_j = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$; $\sigma X_j = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Тогда

$$m_S = MS = (\sum_{j=1}^{100} X_j) = \sum_{j=1}^{100} MX_j = \frac{1}{2}\cdot 100 = 50,$$

$$\sigma_S^2 = D(\sum_{j=1}^{100} X_j) = \sum_{j=1}^{100} DX_j = \frac{1}{12}\cdot 100 = \frac{25}{3};\ \sigma_S = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Поэтому

$$\varphi_S(y) \approx \frac{1}{5\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{3(y-50)^2}{50}}.$$

На основании формулы (26), находим (с учётом табличных значений функции Лапласа)

$$P\{55 < S < 70\} = \Phi\left(\frac{3\cdot(70-50)}{5\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{3\cdot(55-50)}{5\sqrt{3}}\right) = \Phi(4\sqrt{3}) - \Phi(\sqrt{3}) =$$

$$= \Phi(6{,}9282) - \Phi(1{,}73) \approx 0{,}04, \text{ т.е. } P\{55 < S < 70\} \approx 0{,}04.$$

Следствиями ЦПТ являются рассмотренные ранее локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласса.

5. Применение ЦПТ

1^0.Обоснование роли нормального закона. Предположим, что проводится измерение какой-либо физической величины. На результат измерения влияет огромное число случайных факторов, таких, как влияние атмосферных условий, физическое состояние экспериментатора, неустойчивое состояние измерительного прибора, и т.п. Каждый из этих факторов, взятый в отдельности, порождает незначительную погрешность X_j при измерении данной величины. Итоговая ошибка Δ будет, следовательно, суммой большого числа очень маленьких с.в. X_j и закон распределения каждой из этих величин заранее нам неизвестен. Тем не менее, можно с уверенностью заключить, что вся суммарная ошибка Δ будет иметь закон распределения, близкий к нормальному закону.

В полном соответствии со сказанным выше при математической обработке результатов измерений исходят из следующего постулата: *случайная ошибка измерения подчиняется нормальному закону распределения.* Поэтому, из параметров этого закона один из них, а именно м.о., равен нулю. Второй параметр – *среднее* *квадратичное отклонение*, которое характеризует в известном смысле стандартность измерения, равен 1.

Другой важный пример, иллюстрирующий роль нормального распределения в приложениях теории вероятностей, дает *массовое производство*, существующее во многих отраслях современных производственных процессов. В процессе массового производства изготовляются большие партии однотипных изделий. Все наиболее существенные характеристики выпускаемых изделий должны естественно соответствовать определенному стандарту, в какой бы стране они ни выпускались. Вот некоторые из них: все размеры одежды, электрические приборы, запасные части многих видов автомобилей, приборы различных видов и назначений, одним словом, все виды различных предметов массового потребления и т.д. Однако в реальности наблюдаются отклонения от стандарта, которые порождаются причинами случайного характера (следует учесть, что выпуск изделий связан, как правило, с большим числом операций, по этой причине некоторые из них не могут быть выполнены абсолютно точно). Каждая из этих причин сама по себе порождает лишь ничтожную ошибку X_i, но, складываясь, такие ошибки могут давать вполне ощутимые отклонения от стандарта. И здесь, так же как в случае ошибок измерений, имеются основания считать, что суммарное отклонение от стандарта следует нормальному распределению. Подобных примеров можно привести очень много из самых различных областей науки и техники. Они объясняют, почему нормальный закон так часто возникает в задачах прикладного характера.

2⁰. Связь с приближенной формулой Лапласа. Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых с одной и той же вероятностью p наступает событие A. Рассмотрим случайную величину S_n- число наступлений события A в n опытах. Очевидно, $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, где X_i обозначает число наступлений события A в i- м опыте ($i = 1,2,...,n$). Случайные величины X_i имеют один и тот же закон распределения, так что условия теоремы Ляпунова здесь налицо. Но тогда должна быть справедлива *интегральная предельная теорема Лапласа* (28), которая в данном случае принимает вид:

(29) $$\lim_{n\to\infty} P(\alpha \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(напомним, что $M(S_n) = np$, а $D(S_n) = npq$, где $q = 1 - p$. Покажем, что из этой теоремы следует *интегральная приближенная формула Лапласа* (формула (26) из п. 11.4). Событие

$$\alpha \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le \beta$$

равнозначно

$$np + \alpha\sqrt{npq} \le V_n \le np + \beta\sqrt{npq} .$$

Положим,

$$k_1 = np + \alpha\sqrt{npq} ,\ k_2 = np + \beta\sqrt{npq} ,$$

так что

$$\alpha = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} ,\ \beta = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} .$$

Теперь левая часть формулы (29) запишется:

(30) $$\lim_{n\to\infty} P(k_1 \le S_n \le k_2),$$

правую же часть, учитывая соотношение $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(b)-\Phi(a)$,

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, можно представить как

$$\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{31}$$

Приравнивая выражение, стоящее под знаком предела в (30) к выражению (31), получаем приближенное равенство

$$P(k_1 \le S_n \le k_2 \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

которое есть не что иное, как интегральная приближенная формула Лапласа.

3^0. Опыт Гальтона. Наглядной иллюстрацией центральной предельной теоремы служит эксперимент, предложенный английским статистиком Ф. Гальтоном (1822-1911).

Для эксперимента берется доска, в которую в шахматном порядке забиты гвоздики (рисунок 38). Доска устанавливается в наклонном положении. Вверху доски имеется воронка, куда можно сыпать шарики (например, ружейную дробь). Расстояние между любыми двумя соседними по горизонтали гвоздиками одно и то же. Это расстояние несколько больше диаметра шарика, так что шарик может свободно проскакивать между гвоздиками.

Выйдя из воронки, каждый шарик сталкивается с самым верхним из гвоздиков и отскакивает от него к одному из двух ближайших гвоздиков второго ряда, затем к одному из двух гвоздиков третьего ряда и т.д. У нижнего края доски сделаны бункеры, куда собираются шарики после всех столкновений с гвоздиками.

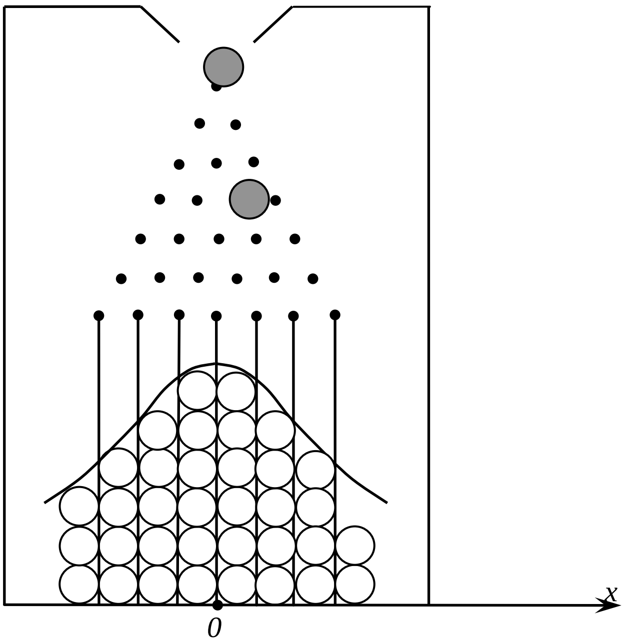


Рисунок 38

Направим ось Ox вдоль нижнего ребра доски, поместив начало в центре указанного ребра (за единицу масштаба примем расстояние между соседними гвоздиками).

Рассмотрим траекторию одного из шариков. Обозначим через X_1 смещение вдоль оси Ox, полученное шариком между первым и вторым столкновениями с гвоздиками, через X_2 - смещение, полученное между вторым и третьим столкновениями и т.д. Обозначим через X суммарное смещение, полученное после прохождения всех рядов гвоздиков. Следовательно, имеем:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

где n есть число горизонтальных рядов гвоздиков.

Каждая из величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ представляет собой случайную величину, принимающую только два значения, $+1$ и -1, с равными вероятностями $p = 0{,}5$. Математическое ожидание каждого X_j, $j = \overline{1,n}$. равно 0, а дисперсия 1.

Предполагая число n достаточно большим, получим на основании центральной предельной теоремы, примененной к сумме большого числа одинаково распределенных независимых случайных величин, что X имеет распределение, близкое к нормальному с центром в точке O и средним квадратичным отклонением $\sigma = \sqrt{n}$.

Если пропустить через воронку достаточно большое число N шариков, то количество шариков, проскочивших в x - й бункер (т.е. в бункер с абсциссой x) будет равно

$$N \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2n}}.$$

Иначе говоря, кривая, огибающая верхний ряд шариков, должна иметь приближенно уравнение вида

$$y = Ae^{-\lambda x^2}.$$

Проделав описанный эксперимент, можно убедиться, что кривая, составленная верхними шариками, действительно имеет указанную форму.

6. Примеры на применение нормального закона

Пример 1. Завод изготовляет шарики для подшипников. Каждый шарик должен иметь один и тот же диаметр d. Однако в силу ряда причин, неизбежных в условиях массового производства, фактический диаметр несколько отличается от величины d. Обозначим через X разность между фактическим диаметром и числом d.

По соображениям, изложенным в п. 1^0 предыдущего параграфа, можно принять, что величина X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 0 и некоторым средним квадратичным отклонением σ (характеризующим среднюю точность изготовления шариков).

Каждый шарик, сойдя с конвейера, проходит контроль. Последний состоит в том, что шарик пропускается через отверстия диаметром $d-\varepsilon$ и $d+\varepsilon$ (рисунок 39). Все шарики, которые свободно проходят через большое отверстие, но застревают в меньшее по диаметру отверстие, поступают в готовую продукцию; остальные шарики бракуются. Найти вероятность того, что случайно выбранный с конвейера шарик будет забракован.

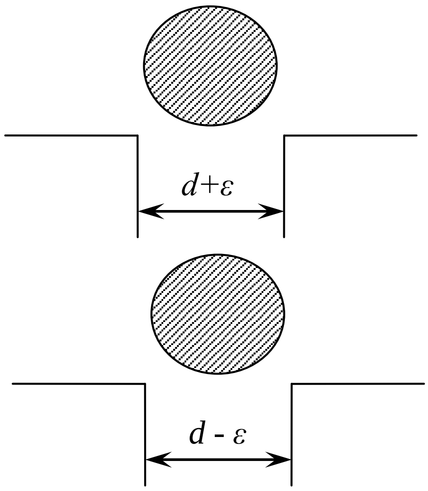


Рисунок 39

Решение. Условием успешного прохождения шарика через контроль является выполнение неравенств

$$-\varepsilon \le X \le \varepsilon .$$

Имеем (см. формулу (26)):

$$P(-\varepsilon \le X \le \varepsilon) = \Phi(\frac{\varepsilon - 0}{\sigma}) - \Phi(\frac{-\varepsilon - 0}{\sigma}) = 2\Phi(\varepsilon/\sigma) .$$

Поэтому вероятность того, что шарик окажется бракованным, равна $1 - 2\Phi(\varepsilon/\sigma)$.

Пример 2. Для определения точности измерительного прибора произведено сравнение его показаний с показаниями контрольного (высокоточного) прибора. Это сравнение показало, что 75 % всех ошибок данного прибора не превосходят по абсолютной величине 2 мк. Считая, что ошибка измерения подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 0, найти среднее квадратичное отклонение σ .

Решение. Обозначим ошибку при измерении на данном приборе через X . По условию X есть случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с плотностью

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} .$$

В произведенной серии измерений событие $-2 \le X \le 2$ имело частоту 0,75. Считая, что число проделанных измерений достаточно велико, и заменяя частоту вероятностью, запишем:

$$P(-2 \le X \le 2) = 0{,}75 .$$

Отсюда $\Phi(2/\sigma) - \Phi(-2/\sigma) = 0{,}75$, или $2\Phi(2/\sigma) = 0{,}75$. Решая уравнение $2\Phi(x) = 0{,}75$, затем, по таблице значений функции $\Phi(x)$ находим. $2/\sigma = 1{,}115$. Откуда $\sigma = 1{,}74$.

ГЛАВА III

Системы случайных величин

Тема 11. Системы случайных величин и законы совместного распределения

1. Понятие о системе нескольких случайных величин

При изучении случайных явлений, возможные значения которых определялись одним числом. Такие величины называются одномерными. Например, число очков, которое может выпасть при бросании игральной кости – дискретная одномерная случайная величина; расстояние от орудия до места падения снаряда – непрерывная одномерная случайная величина, измерения прибором некоторый процесс (температуры тела пациентов в лечебном учреждении, напряжение электрического тока, температуры воздуха и т.д.).

Кроме одномерных случайных явлений, нередко приходится иметь дело с двумя и более двумя случайными величинами. Такие величины принято называть – *многомерными* (соответственно двумерными, трехмерными, …, $n-$ мерными). Совместное рассмотрение нескольких с.в. приводят к системам случайных величин.

Примеры многомерных случайных величин:

- станок – автомат штампует стальные плитки. Если контролируемыми размерами являются длина X *см.* и ширина Y см., то имеем двумерную случайную величину $\{X;Y\}$;

- если же контролируется и высота Z, то имеем трехмерную с.в. $\{X, Y, Z\}$;

- успеваемость любого студента характеризуется системой случайных величин $\{X, Y, Z, \cdots\}-$ оценками, проставленными в зачётной книжке по предметам;

- качество выпущенного готового изделия некоторой фирмой зависит от многих случайных факторов: наличие качества и объёма сырья, укомплектованность специалистов, технического оснащения оборудованиями, ответственностью управленческого аппарата, уровня контроля качества выпущенной готовой продукции и ряда других;

- результат любого футбольного матча зависит: от уровня мастерства и игрового настроя каждого игрока, целенаправленной командной игры, качества игрового поля, погодные условия во время матча, объективность судейства, и многих других факторов.

Упорядоченный набор $\Re=\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ *случайных величин;* $X_j, (j=\overline{1,n})$ *заданных в одном и том же ПЭС* Ω, *называется* $n-$*мерной случайной величиной или системой* n *случайных величин.*

Каждая одномерная с.в. X_j называется *компонентами* или *составляющими* $n-$ мерной случайной величины $\Re$. Их удобно рассматривать как координаты случайной точки или случайного вектора $\Re$, в пространстве n измерений. На многомерные с.в. распространяются почти без изменений основные понятия и определения, относящиеся к одномерным случайным величинам, соответственно можно в «разумных» пределах развить теорию «многомерных линейных пространств» над множеством многомерных случайных величин со всеми отсюда вытекающими теоретическими и практическими выводами, но это выходит за рамки нашей книги. Здесь для простоты, в основном мы ограничимся изучением двумерных случайных величин. Читатель легко может заметить, что основные понятия, определений и утверждения могут быть обобщены на случаи большего числа компонент.

Упорядоченная пара (X,Y) *двух случайных величин* X *и* Y *заданных в одном и том же пространстве элементарных событий* Ω, *называется двумерной случайной величиной или системой двух одномерных случайных величин* X *и* Y.

Двумерную случайную величину (X, Y) геометрически можно истолковать либо как случайную точку $M(X;Y)$ на плоскости, т.е. как точку со случайными координатами либо как случайный вектор $\overline{OM}$.

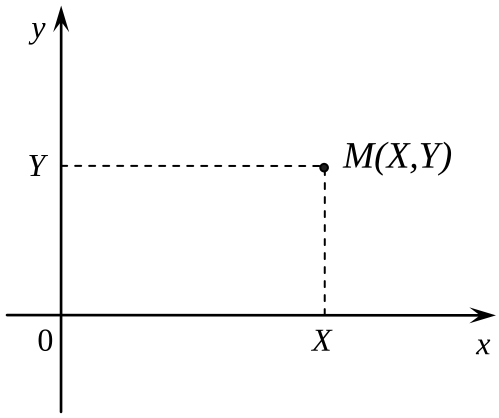


Рисунок 40

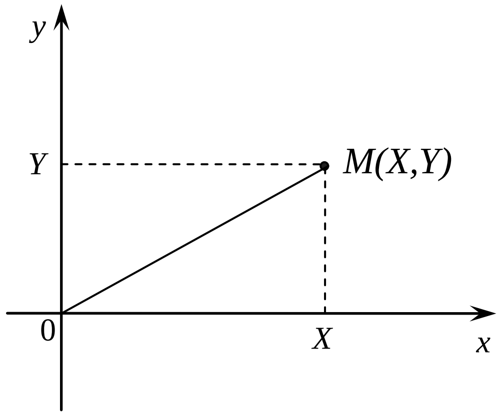


Рисунок 41

Целесообразно различать дискретные (составляющие этих величин дискретны) и непрерывные (составляющие этих величин непрерывны) многомерные случайные величины.

Пример 1. Бросаются две игральные кости. Пусть с.в. X – число выпавших очков на первой кости, с.в. Y – число выпавших очков на второй кости; ПЭС состоит из 36 элементов: $\Omega = \{(1;1),(1;2),\cdots,(1;6),(2;1),(2;2),\cdots,(2;6),\cdots,\cdots,(6;5),(6;6)\}$. Элементарному событию, например, $(1;6) = \omega_{1;6}$ соответствует пара чисел $x=1; y=6$. Совокупность этих значений и составляет множество элементов ПЭС Ω.

Системы с.в. могут быть *дискретными, непрерывными и смешанными* в зависимости от типа случайных величин, образующих систему. В первом случае обе компоненты этих с.в. дискретны, во втором обе компоненты непрерывны и в третьем разных типов (где указывается какое из них дискретное и какое – непрерывное).

Наиболее полной характеристикой системы случайная величина (X,Y) является ее закон распределения вероятностей, указывающий область возможных значений системы случайных величин и соответствующие вероятности появления этих событий. Как и для отдельных случайных величин, закон распределения системы может иметь разные формы (таблица, функция распределения, плотность, …).

2. Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины (т.е. пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $P(x_i, y_j)$ (i= 1, 2, ..., n; j= 1, 2, ..., m)). Обычно закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом.

X / Y	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}		p_{n1}
...	...	...	...	...	...	...
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{nj}
...	...	...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\cdots$	p_{im}	$\cdots$	p_{nm}

Первая строка таблицы содержит все возможные значения первой с.в. X, а первый столбец – все возможные значения второй с.в. Y. В клетке, стоящей на пересечении «столбца x_i» и «строки y_j», указана вероятность $p_{ij} = P(x_i, y_j) = \{X = x_i;\ Y = y_j\}$ того, что двумерная случайная величина примет данное значение (x_i, y_j).

Так как события $\{X = x_i, Y = y_j\}$, (i= 1, 2, ..., n; j= 1, 2, ..., m) с вероятностью $p_{ij} = P(X = x_i;\ Y = y_j)$ образуют полную группу, то сумма вероятностей, помещенных во всех клетках таблицы, равна единице, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1. \qquad (1)$$

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, можно найти законы распределения каждой из составляющих. Действительно, например события:

$$\{X = x_1, Y = y_1\};\ \{X = x_1, Y = y_2\};\ldots,\{X = x_1, Y = y_m\} -$$

несовместны, поэтому вероятность $P(x_1)$ того, что X примет значение x_1 по теореме сложения такова:

$$P(X = x_1) = \sum_{j=1}^{m} P(x_1, y_j).$$

Следовательно, вероятность того, что X примет значение x_1, равна сумме вероятностей «столбца x_1». В общем случае для того, чтобы найти вероятности столбца x_i, следует воспользоваться формулой

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j);\ i = \overline{1, n}. \qquad (2)$$

Аналогично сложив вероятности «строки y_j», получим вероятность

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j);\ j = \overline{1, m}. \qquad (3)$$

На рисунке 42 приведён примерный график распределения двумерной случайной величины $(X;Y)$

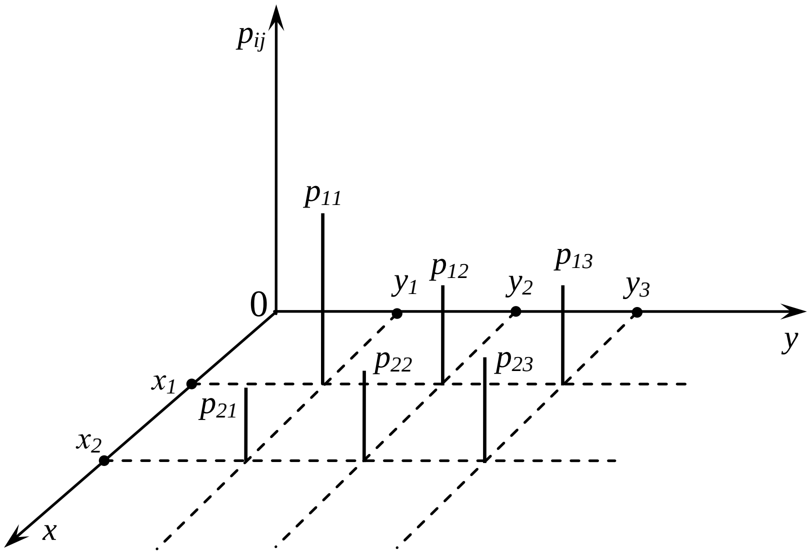


Рисунок 42

Пример 2. Найти законы распределения составляющих двумерной случайной величины, заданной таблицей распределения.

X / Y	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Решение. Сложив вероятности по столбцам, по формуле (2) получим вероятности возможных значений X;

$$p(x_1) = 0{,}16;\ p(x_2) = 0{,}48;\ p(x_3) = 0{,}36.$$

Напишем закон распределения составляющей *X*:

$X:$	x_1	x_2	x_3
$P:$	0,16	0,48	0,36

Контроль: 0,16+ 0,48+ 0,36=1.

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений Y;

$$p(y_1) = 0{,}60;\ p(y_2) = 0{,}40.$$

Напишем закон распределения составляющей *Y*:

	y_1	y_2
$p:$	0,60	0,40

Контроль: 0,60+ 0,40=1.

3. Интегральная функция распределения двумерной случайной величины и свойства

Рассмотрим двумерную случайную величину $(X;Y)$ (безразлично дискретную или непрерывную). Пусть $x \in X; y \in Y$; $x; y -$ пара действительных чисел. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньше x, и при этом Y примет значение, меньше y, обозначим через $\Phi(x,y)$. Если x и y принимают значения от своих множеств, то, вообще говоря, будет изменяться и $\Phi(x,y)$, т.е. выражение $\Phi(x,y)$ есть функция двух переменных x и y.

Интегральной функцией распределения двумерной случайной величины $Z = (X;Y)$ называют функцию $\Phi(x,y)$, определяющую для каждой пары чисел x, y вероятность того, что X примет значение, меньшее x и при этом Y примет значение, меньшее y:

(4) $$\Phi(x,y) = P(X < x;\ Y < y).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $\Phi(x,y)$ - есть вероятность того, что случайная точка $Z = (X;Y)$ попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины.

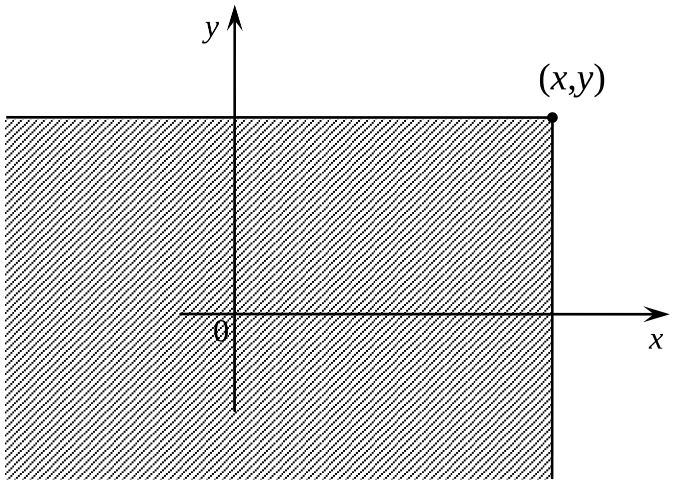


Рисунок 43

Пример 3. Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая X двумерной случайной величины $(X;Y)$ примет значение $X < a$ и при этом составляющая Y примет значение $Y < b$, где $a \cdot b \neq 0$, если известна интегральная функция системы

$$\Phi(x,y) = \left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{a} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{y}{b} + \frac{1}{2}\right)$$

Решение. По определению интегральной функции двумерной случайной величины, $\Phi(x,y) = P(X < x; Y < y)$, при указанных значениях координат: $x = a$ и $y = b$, получим:

$$P(X < a;\ Y < b) = \Phi(a;b) = \left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{a}{a} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{b}{b} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

Свойства интегральной функции двумерной случайной величины

Свойство 1. *Значения интегральной функции удовлетворяют двойному неравенству*

$$0 \le \Phi(x, y) \le 1.$$

Доказательство. Свойство вытекает из определения интегральной функции как функции вероятности: вероятность всегда неотрицательное число, не превышающее единицу.

Свойство 2. $\Phi(x, y)$ - *есть неубывающая функция по каждому из своих аргументов при фиксированном другом,* т.е.

$$\begin{cases} \Phi(x_1, y) \le \Phi(x_2, y); \text{ если } x_1 < x_2; \\ \Phi(x, y_1) \le \Phi(x, y_2); \text{ если } y_1 < y_2. \end{cases}; \quad (5)$$

Доказательство. Докажем, что $\Phi(x, y)$ - есть неубывающая функция по аргументу x. Событие, состоящее в том, что составляющая X примет значение, меньшее x_2, (при этом составляющая $Y < y$), можно подразделить на следующие два несовместных события:

1. Пусть $X < x_1$ и $Y < y$, тогда эти значения принимаются с вероятностью $P(X < x_1; Y < y)$.

2. X примет значения, удовлетворяющие условиям: $x_1 \le X \le x_2$, и $Y < y$ с вероятностью $P(x_1 \le X \le x_2;\ Y < y)$.

По теореме сложения имеем

$$P(X < x_2; Y < y) = P(X < x_1; Y < y) + P(x_1 \le X \le x_2;\ Y < y).$$

Отсюда $\Phi(x_2; y) - \Phi(x_1, y) = \Phi(x_1 \le X \le x_2, Y < y)$.

Так как любая вероятность есть число неотрицательное, то $\Phi(x_2, y) - \Phi(x_1, y) \ge 0$ или $\Phi(x_2, y) \ge \Phi(x_1, y)$.

Что и требовалось доказать.

Свойство становится наглядно ясным, если воспользоваться геометрическим истолкованием интегральной функции как вероятности попадания случайной точки в бесконечный квадрант с вершиной (x, y). При возрастании x правая граница этого квадранта сдвигается вправо; при этом вероятность попадания случайной точки в «новый» квадрант, очевидно, не может уменьшиться.

Аналогично доказывается, что $\Phi(x, y)$ есть неубывающая функция по аргументу y.

Свойство 3. *Если хотя бы один из аргументов обращается в* $-\infty$, *то функция распределения* $\Phi(x, y)$ *равна нулю*, и если оба аргумента обращаются в $+\infty$, *то функция распределения* $\Phi(x, y)$ *равна единице, т.е.*

$\Phi(x, -\infty) = 0,$ **2.** $\Phi(-\infty, y) = 0,$

$\Phi(-\infty, -\infty) = 0,$ **4.** $\Phi(+\infty, +\infty) = 1.$

Доказательство. 1. $\Phi(-\infty, y) = P(X < -\infty; Y < y)$ есть вероятность события $X < -\infty$ и $Y < y$; но такое событие невозможно (поскольку невозможно событие $X < -\infty$), поэтому вероятность этого события равна нулю. Аналогично проверяются свойства 2. и 3. Свойство 4. достоверно, так как не бывают случаи: $X > +\infty; Y > +\infty$.

Другими словами свойство становится наглядно ясным, если принять во внимание, что при $x \to \infty$ и $y \to \infty$ бесконечный квадрант превращается во всю плоскость XOY и, следовательно, попадание случайной точки (X, Y) в эту плоскость в результате испытания есть достоверное событие.

Свойство 4. а) Если $y \to \infty$*, то функция* $\Phi(x, y)$ *системы* (X, Y) *становится интегральной функцией одной лишь составляющей* X :

$$\Phi(x,+\infty) = \Phi_X(x) = P(X < x; Y = +\infty) = P_X(X < x),$$

б) *Если* $x \to \infty$ *функция* $\Phi(x, y)$, *то системы* (X, Y) *становится интегральной функцией одной лишь составляющей Y*:

$$\Phi(+\infty, Y < y) = \Phi_Y(y) = P(X = +\infty; Y < y) = P_Y(Y < y).$$

Доказательство. а) Так как событие $Y < +\infty$ достоверно, то $\Phi(x,+\infty)$ определяет вероятность события $X<x$, т.е. представляет собой интегральную функцию составляющей одной лишь с.в. X.

Свойство б) доказывается аналогично.

Свойство 5. $\Phi(x, y)$ является непрерывной слева по каждому из своих аргументов, т.е. $\lim\limits_{x \to h-0} \Phi(x, y) = \Phi(h, y)$; $\lim\limits_{x \to g-0} \Phi(x, y) = \Phi(x, g)$.

Следует, отметим что, зная совместное распределение двух случайных величин X и Y, можно найти одномерные распределения этих случайных величин, но обратное, вообще говоря, неверно.

С геометрической точки зрения $\Phi(x, y)$- есть некоторая поверхность (ступенчатая для двумерной д. с.в.), обладающая указанными свойствами.

С помощью функции $\Phi(x, y)$ легко можно найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в полуполосу и в прямоугольник.

4. Вероятность попадания случайной точки в полуполосу и в прямоугольник

Пользуясь интегральной функцией системы случайных величин X и Y, легко найти вероятность того, что в результате испытания случайная точка попадает в *полуполосу* $x_1 < X < x_2$ и $Y < y$,(рис.44, *а*) или в полуполосу $X < x$ и $y_1 < Y < y_2$ (рисунок 44, *б*).

Вычитая от вероятности попадания случайной точки в квадрант с вершиной (x_2, y) вероятность попадания точки в квадрант с вершиной (x_1, y) , получим

$$P(x_1 \le X \le x_2;\ Y < y) = \Phi(x_2, y) - \Phi(x_1, y).$$

Аналогично имеем

$$P(X \le x\ ; y_1 \le Y < y_2) = \Phi(x, y_2) - \Phi(x, y_1).$$

Таким образом, вероятность попадания случайной точки в полуполосу равна приращению интегральной функции по одному из аргументов.

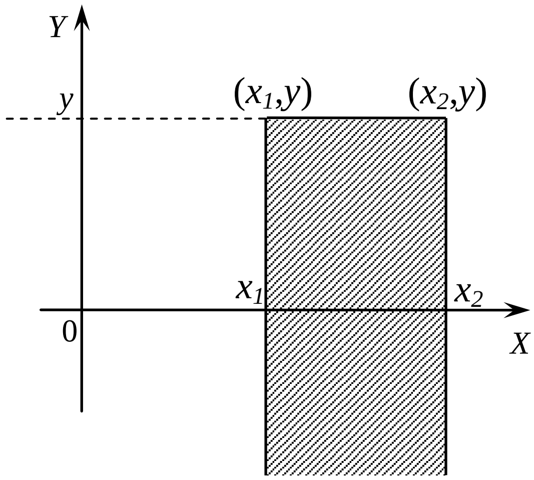


Рисунок 44, *а*

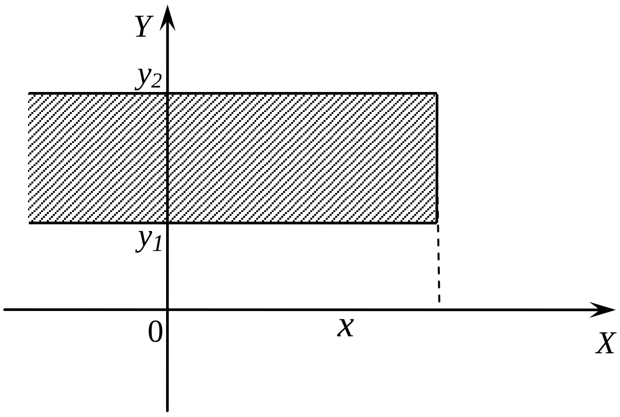


Рисунок 44, б

С помощью функции $\Phi(x, y)$ можно найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в заданный прямоугольник. Рассмотрим прямоугольник *ABCD* со сторонами, параллельными координатным осям. Пусть уравнения сторон таковы:

$$X = x_1, X = x_2; Y = y_1, Y = y_2.$$

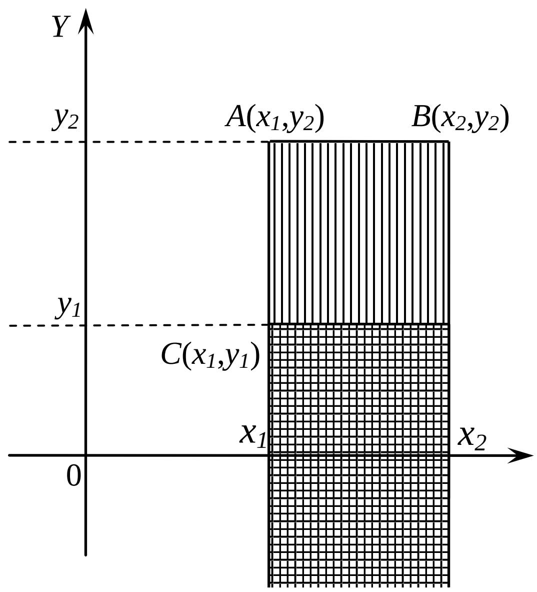


Рисунок 45

Найдем вероятность попадания случайной точки (X,Y) в этот прямоугольник. Эту вероятность можно найти, например, так: из вероятности попадания случайной точки в полуполосу *AB* с вертикальной штриховкой. Эта вероятность равна, $\Phi(x_2,y_2)-\Phi(x_1,y_2)$ вычесть вероятность попадания точки в полуполосу *CD* с горизонтальной штриховкой. Эта вероятность равна $\Phi(x_2,y_1)-\Phi(x_1,y_1))$. Следовательно, получим

(5) $$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) =$$
$$= [\Phi(x_2,y_2)-\Phi(x_1,y_2)]-[\Phi(x_2,y_1)-\Phi(x_1,y_1)].$$

Обозначим левую часть равенства (5) величиной P_{ABCD} = $P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2)$.

Применяя к правой части (5) теорему Лагранжа получим

$$P_{ABCD} = \Phi''(\xi,\eta)\Delta x\cdot\Delta y,$$

где $x_1 < \xi < x_2$, $\Delta x = x_2 - x_1$; $y_1 < \eta < y_2$, $\Delta y = y_2 - y_1$. Отсюда

(6) $$\Phi''_{xy}(\xi,\eta) = \frac{P_{ABCD}}{\Delta x\cdot\Delta y},$$ или введя новую функцию

(7) $$\varphi(x,y) = \frac{P_{ABCD}}{\Delta x\cdot\Delta y},$$ (более подробно см. о функции $\varphi(x,y)$ в следующем разделе).

Пример 4. Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми,

$$x = \pi/6;\ \ x = \pi/2;\ \ y = \pi/4;\ \ y_2 = \pi/3,$$

если известна функция распределения

$$\Phi(x,y) = \sin x\cdot\sin y;\ \ (0 \le x \le \pi/2; 0 \le y \le \pi/2).$$

Решение. Положив $x_1 = \pi/6;\ x_2 = \pi/2;\ y_1 = \pi/4;\ y_2 = \pi/3$, в формуле (5), получим:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right) = \left[\Phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)\right] - \left[\Phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right] - \left[\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right] =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} = 0{,}08.$$

Равномерное распределение в плоской области Ω.

Начнем с разбора следующей задачи. На отрезке длиной l выбирают наугад и независимо друг от друга две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними окажется не больше l (где $l < 1$)?

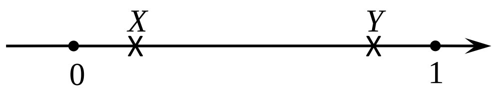


Рисунок 46

Считая, что данный отрезок есть отрезок $[0\,;1]$ числовой оси, обозначим через $X = x$ координату первой точки и через $Y = y$ – координату второй точки (рис. 45). Исходом опыта является пара чисел x, y, удовлетворяющих условиям:

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$$

Иначе говоря, исход опыта – случайная точка квадрата Ω, изображенного на рисунке 47

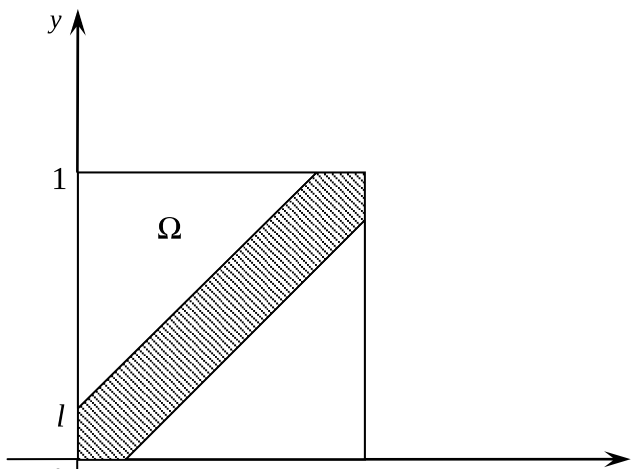


Рисунок 47

Рассмотрим отдельно случайную величину X. Ее закон распределения в условии задачи не оговорен; он будет зависеть от того, какой смысл мы придадим слову «наугад» в формулировке задачи. Наиболее естественное толкование этого слова заключается в том, что все значения величины X на отрезке $[0;1]$ *равноправны*, или, говоря точнее, величина X *равномерно распределена* на отрезке $[0;1]$. То же самое относится, конечно, и к Y. Итак, будем считать, что плотность вероятности для X и Y равны соответственно:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1, & для \quad 0\le x\le 1,\\ 0, & для \quad x\notin[0;1],\end{cases}$$

$$\varphi_2(y)=\begin{cases}1, & для \quad 0\le x\le 1,\\ 0, & для \quad y\notin[0;1].\end{cases}$$

В виду независимости с.в. X и Y плотность распределения для системы (X,Y) будет:

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y),$$

т.е.

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & для \quad 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1,\\ 0, & для всех \quad пар \ \{x,y\}\notin\Omega.\end{cases}$$

Для того, чтобы расстояние между точками не превышало l, нужно, чтобы выполнялось неравенство

(8) $$|x-y|\le l.$$

На рисунке 35 штриховкой отмечена область внутри квадрата Ω, которая отвечает неравенству (8). Обозначим эту область через G. Неравенство (8) эквивалентно условию $(X,Y)\in G$, следовательно, вероятность его осуществления

$$p((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)dxdy=\iint_G f(x,y)dxdy=S_G,$$

где S_G – площадь области G, равная $1-(1-l)^2$.

Отсюда искомая вероятность будет: $1-(1-l)^2$.

Задачу выбора двух точек на отрезке можно сформулировать как задачу о «встрече двух лиц». Представим себе, что два человека условились встретиться в определенном месте между двенадцатью и часом дня. При этом было условлено, что пришедший первым на место встречи будет ждать второго только в течение 20 минут.

Какова вероятность того, что встреча состоится, если каждый из них приходит, когда ему вздумается (но между двенадцатью и часом дня), не согласуя свои действия с другим. Легко понять, что логический смысл этой задачи в точности такое же, как в задаче о выборе двух точек на отрезке $[0;1]$; при этом задаваемый вопрос состоит в том, с какой вероятностью расстояние между точками окажется не больше, чем $\frac{1}{3}$.

Действительно, если обозначить через X время прихода одного из данных лиц и через Y – время прихода другого, то условие встречи запишется в виде: $|X-Y|\le\frac{1}{3}$, после чего аналогия с задачей о выборе точек становится очевидной. Полагая в выражение $1-(1-l)^2$, $l=\frac{1}{3}$ найдем, что искомая вероятность встречи будет $1-(1-\frac{1}{3})^2=\frac{5}{9}$.

Распределение, с которым мы столкнулись в только что разобранной задаче, относится к числу *равномерных распределений*. В двумерном случае равномерное распределение задается с помощью области Ω конечной площади; при этом плотность вероятности постоянна в Ω, а вне области Ω равна нулю:

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}c=const, & если \ (x,y)\in\Omega,\\ 0, & в \ остальных случаях.\end{cases}$$

Значение постоянного числа c можно определить из условия:

$$\iint_{\Omega} \varphi(x, y)dxdy = 1.$$

А это дает равенство $c \cdot S_{\Omega} = 1$ или $c = \frac{1}{S_{\Omega}}$, S_{Ω} обозначает площадь области Ω.

Если G – какая-либо часть области Ω (рис. 48), то вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область G равна интегралу по этой области от постоянной функции $\frac{1}{S_{\Omega}}$, следовательно,

$$p((X, Y) \in G) = \frac{S_G}{S_{\Omega}}.$$

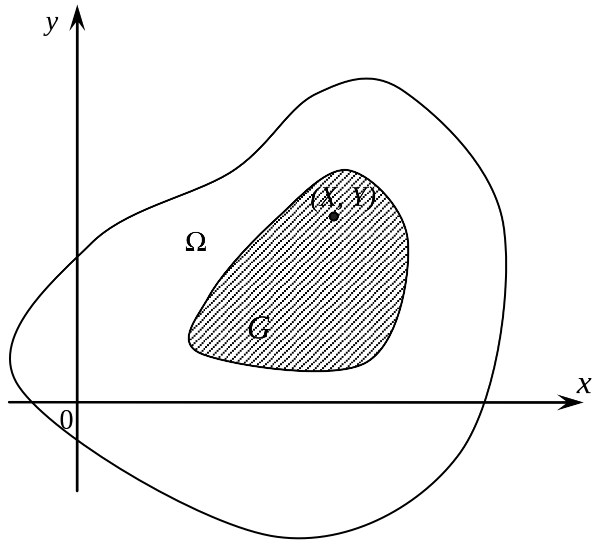


Рисунок 48

Заметим, что равномерное распределение можно рассматривать не только в двумерном случае, но и в случае пространства любого числа измерений. На этом ограничимся.

5. Плотность совместного распределения вероятностей двумерной непрерывной случайной величины

Основной характеристикой непрерывной двумерной случайной величины является её плотность вероятности. Мы задавали двумерную дискретную случайную величину при помощи интегральной функции. Непрерывную двумерную величину можно также задать, пользуясь дифференциальной функцией распределения. Здесь и далее мы будем предполагать, что интегральная функция $\Phi(x, y)$ всюду непрерывна и имеет всюду (за исключением, быть может, конечного числа кривых) непрерывную смешанную частную производную второго порядка.

Дифференциальной функцией распределения $\varphi(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) называют вторую смешанную частную производную от функции:

(9) $$\varphi(x, y) = \Phi''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Другими словами, плотностью распределения вероятностей (или совместной плотностью) непрерывной двумерной с.в. (X,Y) называется вторая смешанная производная её функции распределения. Плотность системы двух непрерывных случайных величин (X,Y) есть предел отношения вероятности попадания случайной точки (X,Y) в элементарный прямоугольник со сторонами Δx и Δy, примыкающий к площади этого прямоугольника, когда его размеры Δx и Δy стремятся к нулю

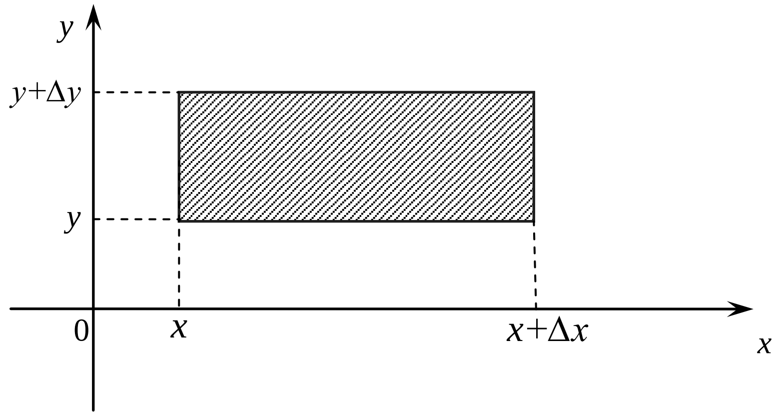


Рисунок 49

Действительно, используя равенства (5), получаем: средняя плотность вероятности в данном прямоугольнике равна

$$\varphi_{cp} = \frac{P\{x \le X < x+\Delta x;\ y \le Y < y+\Delta y\}}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$

$$= \frac{1}{\Delta y} \cdot \left\{ \frac{\Phi(x+\Delta x; y+\Delta y) - \Phi(x; y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{\Phi(x+\Delta x; y) - \Phi(x; y)}{\Delta x} \right\}.$$

Переходя к пределу в этом равенстве, при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0,$ получаем

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varphi_{cp} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Phi'(x, y+\Delta y) - \Phi'(x, y)}{\Delta y}.$$

Следовательно, равенство (9) получено

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varphi_{cp} = \varphi(x, y) = (\Phi'_x(x, y))'_y = \Phi''_{xy}(x, y).$$

Таким образом, по аналогии с плотностью вероятности одномерной непрерывной с.в., для двумерной случайной величины (X,Y) плотность вероятности определяется как функция, $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая условию:

(10) $$P\{x \le X < x+dx;\ y \le Y < y+dy\} \approx \varphi(x, y)dxdy.$$

Выражение $\varphi(x, y)dxdy$ называется *элементом вероятности* двумерной случайной величины (X,Y).

Пример 5. Найти дифференциальную функцию $\varphi(x, y)$ системы случайных величин (X,Y) по известной интегральной функции

$$\Phi(x, y) = \sin x \cdot \sin y \ \ (0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2).$$

Решение. По определению дифференциальной функции системы случайных величин найдем частную производную по x от интегральной функции $\Phi(x, y)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = Cosx \cdot Siny; \quad (0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2)$$

Берём от полученного результата частную производную по y, в итоге получим искомую дифференциальную функцию

$$\varphi(x,y) = \Phi''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x \, \partial y} = \cos x \cdot \cos y \,,$$

где $\left(0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2\right)$.

Геометрически эту функцию можно истолковать на в пространстве $(x, y, \varphi(x, y))$ как некоторую поверхность, которую называют *поверхностью распределения* вероятностей $\varphi(x, y)$ системы двух н.с.в. (X, Y).

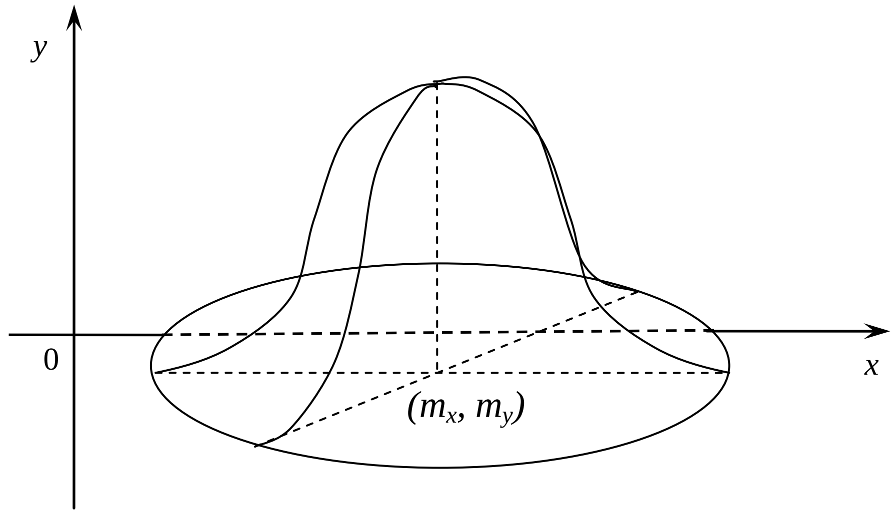


Рисунок 50

Свойства плотность распределения $\varphi(x, y)$ двумерной с.в. (X, Y)

1. Плотность распределения двумерной случайной величины неотрицательна, т.е.

$$\varphi(x, y) \ge 0 .$$

Это свойство следует из того, что $\Phi(x, y)$ является неубывающей функцией по каждому из аргументов.

2. Вероятность попадания двумерной с.в. (X, Y) в заданную область (D) равна двойному интегралу от плотности по области (D), т.е.

(11) $$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D \varphi(x, y) dxdy .$$

Действительно, элемент вероятности $\varphi(x, y)dxdy$ (см. (10)) представляет собой вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник со сторонами dx и dy (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка по сравнению с $dx \cdot dy$). Далее, разобьём область (D) на прямоугольники и применив к каждому из них равенство (10), по теореме сложения вероятностей, при стремлении к нулю площадей прямоугольников (т.е. $dx \to 0$ и $dy \to 0$), получаем формулу (11).

Геометрически эта вероятность изображается объёмом цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью распределения $\varphi(x, y)$ и опирающегося на область (D).

3. Функция распределения двумерной случайной величины может быть выражена через её плотность распределения по формуле

(12) $$\Phi(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \varphi_{X,Y}(u, v) dudv .$$

Используя формулу (8) (область D есть прямоугольник, ограниченный абциссами $-\infty, x$ и ординатами $-\infty, y$), выражаем функцию распределения $\Phi(x,y)$ системы случайных величин (X,Y) через плотность $\varphi(x,y)$

$$\Phi(x,y) = P\{X < x; Y < y\} = P\{-\infty < X < x; -\infty < Y < y\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \varphi_{X,Y}(u,v)dudv.$$

4. Двойной несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятностей двумерной случайной величины равен единице, т.е.

(13) $$\Phi(+\infty;+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{X,Y}(u,v)dudv = 1 \quad (\textit{условие нормировки}).$$

Положив в равенстве (9) $x = y = +\infty$ непосредственно получим (13). Геометрически свойство **4** означает, что «*объём тела, ограниченного поверхностью распределения и плоскостью* Oxy, *равен единице*».

5. Плотность распределения одномерных составляющих X и Y могут быть найдены по формулам:

(14) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)dy = \varphi_1(x) = \varphi_X(x); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)dx = \varphi_2(y) = \varphi_Y(y);$$

Действительно, найдём сначала функции распределения (зная совместную плотность распределения с.в. (X,Y)), составляющих X и Y:

(15) $$\Phi_X(x) = \Phi\ (x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\ (u,v)dudy\ = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\ (u,v)dy\right)du,$$

(16) $$\Phi_Y(y) = \Phi\ (+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} \varphi\ (u,v)dxdv = \int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\ (u,v)dx\right)dv.$$

Дифференцируя первое равенство (14) относительно, x а второе равенство (14) относительно y, получим соответственно плотности распределения с.в. X и Y:

(17) $$\varphi_X(x) = \varphi_1(x) = \Phi'_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)dy;$$

(18) $$\varphi_Y(y) = \varphi_2(y) = \Phi'_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)dx;$$

Итак, плотность распределения одной из составляющих равна несобственному интегралу с бесконечными пределами от плотности совместного распределения системы, при этом переменная интегрирования соответствует другой составляющей.

Пример 6. Двумерная случайная величина (X,Y) задана функцией плотности вероятности

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1/6\pi, & \textit{при} \quad (x^2/9) + (y^2/4) < 1, \\ 0, & \textit{при} \quad (x^2/9) + (y^2/4) \geq 1. \end{cases}$$

Найти дифференциальные функции составляющих X и Y.

Решение. Найдем дифференциальную функцию составляющей X по формуле (17)

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6\pi}dy = \frac{1}{6\pi}\int_{-2\sqrt{1-x^2/9}}^{2\sqrt{1-x^2/9}} dy = \frac{2}{6\pi}\int_{0}^{2\sqrt{1-x^2/9}} dy = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}(2/9\pi)\cdot\sqrt{9-x^2}, & при\ |x|<3,\\ 0, & при\ |x|\ge 3.\end{cases}$$

Аналогично, пользуясь формулой (18), найдем дифференциальную функцию составляющей Y:

$$\varphi_2(y)=\begin{cases}(1/2\pi)\cdot\sqrt{4-y^2}, & при\ |y|<2,\\ 0, & при\ |y|\ge 2.\end{cases}$$

(Убедитесь самостоятельно!)

Задание. Самостоятельно убедитесь в том, что найденные функции удовлетворяют соотношениям:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)dx=1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(y)dy=1.$$

Замечание. Отметим, что ***в общем случае решение обратной задачи***: «*восстановить закон распределения системы случайных величин (X,Y) по известным законам распределения составляющих системы $X;Y$* » ***невозможно***.

6. Интегральная функция распределения и связь с функцией плотности

Кратко рассмотрим, как между собой связаны функция плотности и функция распределения двумерной непрерывной случайной величины.

Зная дифференциальную функцию $\varphi(x,y)$ можно найти интегральную функцию $\Phi(x,y)$ по формуле (12)

$$\Phi(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)dxdy,$$

что непосредственно следует из определения плотности распределения двумерной непрерывной с.в. (X,Y) (свойство 3).

Пример 7. Найти интегральную функцию распределения двумерной случайной величины $\Phi(x,y)$ по данной плотности распределения вероятности совместного распределения $\varphi(x,y)=1/\pi^2(1+x^2)\cdot(1+y^2)$.

Решение. Воспользуемся формулой (9), с учётом $\varphi(x,y)=1/\pi^2(1+x^2)\cdot(1+y^2)$ имеем

$$\Phi(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{1+y^2}dy=\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctgy+\frac{1}{2}\right).$$

Далее, найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами K (1; 1), $L(\sqrt{3};1)$, $M(1; 0)$ и $N(\sqrt{3}; 0)$.

Решение. Искомая вероятность

$$P((X,Y)\subset D)=\iint_{(D)}\frac{dxdy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\left[\frac{1}{1+y^2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}\right]dy=\frac{1}{\pi^2}\cdot arctgx\Big|_1^{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot arctgy\Big|_0^1=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{48}.$$

7. Зависимость и независимость двух случайных величин

Зная законы распределения двух с.в. X и Y, входящих в систему (X,Y) можно найти закон распределения системы *лишь в случае, когда случайные величины X и Y являются независимы*.

С понятием независимых случайных величин мы уже встречались неоднократно: две с.в. называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие значения принимает вторая с.в. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*. Не приводя пока точных определений, рассмотрим несколько примеров. Они иллюстрируют разные степени зависимости между случайными величинами - от сильной почти функциональной зависимости до практической независимости.

- пусть $X-$рост наугад выбранного взрослого человека (в сантиметрах), а $Y-$ его вес (в килограммах). Зависимость между ростом и весом является весьма сильной, в начале её можно даже считать функциональной. Формула, приближённо выражающая эту зависимость, обычно пишется: $y_{кг}=x_{см}-100$.

- пусть $X-$высота выбранного наугад дерева в лесу, а $Y-$диаметр его основания. И здесь кажется зависимость сильной, хотя в реальности и в не такой степени, как в предыдущем примере.

- из груды камней нестандартной формы выбирают один камень. Пусть $X-$его масса, а $Y-$максимальная длина (скажем в диаметре). Зависимость между ними носит сугубо вероятностный характер.

- $X-$рост наугад выбранного взрослого человека (в сантиметрах), а $Y-$ его возраст. Проведенные опыты показывают, что эти величины практически независимы.

Таким образом, степень зависимости между двумя с.в. могут быть как угодно и каким угодно.

Сформулируем общее определение независимости случайных величин с помощью событий: пусть даны события $\{X<x\}$ и $\{Y<y\}$.

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если независимыми являются события: $\{X<x\}$ и $\{Y<y\}$ для любых действительных чисел x и y. В противном случае с.в. X и Y называются *зависимыми*.

Справедливо следующее условие независимости случайных величин.

Теорема 11.1. *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, функция распределения системы (X,Y) была равна произведению функций распределения её составляющих, т.е. выполнялось равенство*:

$$\Phi(x,y)=\Phi_X(x)\cdot\Phi_Y(y)\,. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть случайные величины X и Y независимы, тогда события $A=\{X<x\}$ и $B=\{Y<y\}$ независимы. Отсюда следует, что $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$, т.е.

$\Phi(x,y)=\Phi_X(x)\cdot\Phi_Y(y)$. Если же имеет место (16), то $P\{X<x;Y<y\}=P\{X<x\}\cdot P\{Y<y\}$. Значит с.в. X и Y независимы.

Сформулируем два утверждения относительно независимости двух случайных величин X и Y (д.с.в. и н.с. в. соответственно), образующих систему (X,Y).

Теорема 11.2. Необходимым *и достаточным условием независимости двух дискретных случайных величин* X *и* Y, *образующих систему* (X,Y), *является равенство*

(20) $$P\{X=x_i;Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}\Leftrightarrow p_{ij}=p_{x_i}\cdot p_{y_j}, \text{для любых } i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,m}.$$

На практике, как правило, легко проверять зависимость или независимость двух д.с.в. Здесь ограничимся рассмотрением примера.

Пример 8. В двух ящиках находятся по шесть шаров; в 1-м ящике один шар с номером 1, два шара с номером 2, три шара с номером 3. Во втором ящике два шара с номером 1, три шара с номером 2, один шар с номером 3. Пусть X – номер шара, случайно вынутого из первого ящика, Y – номер шара, случайно вынутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по одному шару. Составить таблицу закона распределения системы случайных величин (X,Y).

Решение.

Случайная точка (1;1) имеет кратность 1×2 =2;
Случайная точка (1;2) имеет кратность 1×3 =3;
Случайная точка (1;3) имеет кратность 1×1 =1;
Случайная точка (2;1) имеет кратность 2×2 =4;
Случайная точка (2;2) имеет кратность 2×3 =6;
Случайная точка (2;3) имеет кратность 2×1 =2;
Случайная точка (3;1) имеет кратность 3×2 =6;
Случайная точка (3;2) имеет кратность 3×3 =9;
Случайная точка (3;3) имеет кратность 3×1 =3;

Всего случайных точек 6×6=36 . Так как кратности точек отношение точки ко всему количеству точек равно вероятности появления этой точки, то таблица закона распределения системы с.в. имеет вид

Y \ X	1	2	3
1	$1/18$	$1/12$	$1/36$
2	$1/9$	$1/6$	$1/18$
3	$1/6$	$1/4$	$1/12$

Сумма всех вероятностей $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}p_{ij}$, указанных в таблице равна 1. **(Проверьте**!).

Случайные величины независимы. Поскольку выполняется равенство (17). Проще проверять по следующей таблице:

(21)
$X=x_i$: 1 2 3 ; $Y=y_j$: 1 2 3 ;
$p_i=P(x_i)$; $1/6$ $1/3$ $1/2$; $p_j=P(y_j)$; $1/3$ $1/2$ $1/6$;

Отсюда легко видеть, что $p_{ij}=p_i\cdot p_j$; $i=1,2,3$; $j=1,2,3$. Таким образом,

$$P\{X = x_i; Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}; \ i = 1,2,3; \ j = 1,2,3.$$

Пример 9. В урне 4 шара: 2- белых, 1- чёрный, 1- синий. Из них наудачу извлекают два шара. Пусть с.в. X – число чёрных шаров в выборке, с.в. Y – число синих шаров в выборке.

Составить закон распределения для системы (X, Y). Найти:

1) таблицу распределения системы (X, Y);
2) законы распределения X и Y;
3) выяснить зависимость или независимость X и Y.

Решение. Случайная величина $X = \{0;1\}$, с.в. $Y = \{0,1\}$. Вычислим соответствующие вероятности:

$$p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6} \ ; \ p_{12} = P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{6};$$

$$p_{21} = P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{6}; \quad p_{22} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, таблица распределения системы (X, Y) имеет вид

$Y \backslash X$	0	1
0	1/3	1/6
1	1/6	1/3

Отсюда следует:

$$P(X = 0) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}; P(X = 1) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

$$P(Y = 0) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}; P(Y = 1) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Законы распределения составляющих X и Y

X	0	1
p	0,5	0,5

и

Y	0	1
p	0,5	0,5

Теорема 11. 3. *Необходимым и достаточным условием независимости двух непрерывных случайных величин* X *и* Y, *образующих систему* (X, Y), *является равенство*

(22) $$\varphi(x, y) = \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y).$$

Доказательство. Если X и Y независимые непрерывные случайные величины, то имеет место равенство (19).

Дифференцируя равенство по x, а затем по y (с учётом равенства (9)) получим

$$\varphi(x, y) = \Phi''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \Phi_X}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi_Y}{\partial y} = \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y),$$

Следовательно, необходимость равенство (22) получено. Покажем, что оно и достаточно. Действительно, пусть выполняется равенство (22). Интегрируя по x и по y, получаем

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}\varphi_X(u)du\cdot\int_{-\infty}^{y}\varphi_Y(v)dv,$$

или $\Phi(x,y)=\Phi_X(x)\cdot\Phi_Y(y)$. Достаточность доказана.

Пример 10. Двумерная случайная величина (X,Y) задана с плотностью распределения вероятностей $\varphi(x,y)=C/(1+x^2)\cdot(1+y^2)$. Найти:

1) C - чтобы выполнялась условие нормированности;
2) $\Phi(x,y)=?$
3) $P\{X<1;Y<1\}=?$
4) $\varphi_X(x)=?,\ \ \varphi_Y(y)=?$
5) Убедитесь в выполнении условии нормировки для найденных функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_X(x)dx=1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_Y(y)dy=1.$$

1) Легко может быть показано, что величина $C=1/\pi^2$, для этой цели следует проверить условие нормировки (см. равенство (13)):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=C\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{dy}{1+y^2}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\cdot arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty}\cdot arctgy\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1\Rightarrow C=1/\pi^2.$$

Следовательно, $\varphi(x,y)=1/\pi^2\,(1+x^2)\cdot(1+y^2)$.

2) Используя свойство 3, (см. равенство (12)), находим

$$\Phi(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi^2}\frac{du}{(1+u^2)}\right)\frac{dv}{1+v^2}=\frac{1}{\pi^2}\left(arctgx+\frac{1}{2}\right)\cdot arctgv\Big|_{-\infty}^{y}=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctgy+\frac{1}{2}\right).$$

3) $$P\{X<1;Y<1\}=\Phi(1,1)=\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}.$$

4) По формуле (17) получаем

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2}\frac{du}{(1+x^2)(1+u^2)}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}arctgy\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Аналогично, по формуле (18) получаем

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2}\frac{dv}{(1+y^2)(1+v^2)}=\cdots=\frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Следовательно, $\varphi(x,y)=\varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y)$. Поэтому на основании равенство (20) (теорема 11.2), заключаем, что случайные величины X и Y независимы.

Теперь вернёмся к нашим примерам, рассмотренные в начале пункта (см. пример 1).

Пример 11. Пусть на основании некоторого опыта получены данные относительно человеческого роста и веса, которые представлены в виде следующей таблицы, и они могут быть описаны двумерной случайной величины (X,Y), где X обозначает рост, Y вес.

$Y \backslash X$	$x_1=160$	$x_2=170$	$x_3=180$
$y_1=70$	$p_{11}=0{,}18$	$p_{21}=0{,}22$	$p_{31}=0{,}16$
$y_2=80$	$p_{12}=0{,}08$	$p_{22}=0{,}16$	$p_{32}=0{,}20$

В этой таблице p_{ij} обозначает вероятность того, что человек, обладающим ростом x_i обладает весом y_j.

Требуется найти одномерные законы распределения каждой из случайных величин системы (X,Y).

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений веса Y:

$$P(X=x_1)=0{,}18+0{,}08=0{,}26;$$
$$P(X=x_2)=0{,}22+0{,}16=0{,}38;$$
$$P(X=x_3)=0{,}16+0{,}20=0{,}36.$$

Закон распределения составляющей X запишется так: **распределение вероятности роста**

X:	160	170	180
P:	0,26	0,38	0,36

Контроль: 0,26+ 0,38+0,36=1.

Закон распределения составляющей Y запишется так: **распределение вероятности веса**

Y:	70	80
P:	0,56	0,44

Контроль: 0,56+ 0,44=1.

Пример 12. Система случайных величин (X,Y) характеризует рост и вес человека в отклонениях от средних значений: рост $\overline{X}=170\,см$; вес $Y=66\,кг$ и имеет функцию распределения

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}1-(e^{-x}+e^{-y}-e^{-x-y}), & при\ x>0\, и\ y>0,\\ 0, & при\ x\le 0\ и\ y\le 0.\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей системы с.в. $\varphi(x,y)$.

Решение. На основании равенство (6) сначала берём частную производную по x, а затем по y получим:

$$\Phi'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=e^{-x}-e^{-x-y}, & при\ x>0, y>0,\\ 0, & при\ x\le 0,\ y\le 0.\end{cases}$$

$$\Phi''_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=e^{-x-y}, & при\ x>0, y>0,\\ 0, & при\ x\le 0,\ y\le 0.\end{cases}$$

Задания.

1. Найти функций плотностей одномерных распределений с.в. X и Y. Воспользуйтесь равенствами (14).

2. Система двух случайных величин (X, Y) подчинена равномерной плотности распределения внутри круга радиусом r. Написать выражение для плотности распределения системы с.в. (X, Y) и отдельных случайных величин X и Y.

Указание. Воспользуйтесь равенством:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi \cdot r^2}, \ \textit{при} \ \ x^2 + y^2 \le r^2, \\ 0, \quad \textit{вне круга}. \end{cases}$$

8. Условные законы распределения системы дискретных случайных величин

Если случайные величины X и Y образуют зависимую систему (X, Y) между собой, то для *характеристики уровня их зависимости* вводится понятие условных законов распределения случайных величин.

Ранее было установлено, что если события A и B *зависимы*, то условная вероятность события B отличается от его безусловной вероятности. В этом случае напомним, что имели место равенства:

(23) $$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{или} \quad P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогичное положение имеет место и для двумерных случайных величин.

Рассмотрим дискретную двумерную случайную величину (X, Y). Пусть возможные значения составляющих таковы

$$X = x_1, x_2, \cdots, x_n; \quad Y = y_1, y_2, \cdots, y_m.$$

Допустим, что в результате испытания другая величина Y приняла определённое значение $Y = y_j$ (или попала в определённый интервал числовой оси); при этом X примет одно из своих возможных значений $X = x_i;\ i = \overline{1, n};$. Обозначим условную вероятность того, что X примет, например значение x_1 при условии, что $Y = y_1$, через $p(x_1 \mid y_1)$. Эта вероятность, вообще говоря, не будет равна безусловной вероятности $p(x_1)$.

Условная вероятностью, что с.в. *X примет значение x_i при условии $Y = y_j$* (j имеет одно и то же значение при всех значениях X) определяется равенством

(24) $$P\{X = x_i \mid Y_j = y_j\} = p(x_i \mid y_j) = \frac{P\{X = x_i; Y_j = y_j\}}{P\{Y = y_j\}},$$

где (i=1, 2, ..., n; j=1, 2, ..., m), (или коротко: $p(x_i \mid y_j) = p_{ij} \big/ p_{y_j}$, $p_{y_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}$),

найденных в предположении, что событие $Y = y_j$ уже наступило. Совокупность вероятностей (20), т.е. совокупностью $p(x_1 \mid y_j), p(x_2 \mid y_j), \cdots, p(x_n \mid y_j)$, представляет собой «*условный закон распределения случайной величины X при условии $Y = y_j$*». Сумма условных вероятностей равна 1, действительно

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i \mid y_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{ij}}{p_{y_j}} = \frac{1}{p_{y_j}} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \frac{p_{y_j}}{p_{y_j}} = 1.$$

Аналогично определяется *условная вероятность, условный закон распределения случайной величины* Y *при условии, что* $X = x_i$ (*событие уже наступило*)

(25) $$P\{Y_j = y_j \mid X = x_i\} = p(y_j \mid x_i) = \frac{P\{Y = y_j; X = x_i\}}{P\{X = x_i\}},$$

где (i=1, 2, ..., n; j=1, 2, ..., m), (или коротко: $p(y_j \mid x_i) = p_{ji} \big/ p_{x_i}$, $p_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}$).

Также выполняется

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j \mid x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ji}}{p_{x_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} p_{ji} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} = 1.$$

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, пользуясь формулой (23), можно вычислить условные законы распределения составляющих. Например, условный закон распределения X, в предположении, что событие $Y = y_1$ уже произошло, может быть найден по формуле

$$p(x_i \mid y_1) = p_{i1} \big/ p_{y_1} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots, n).$$

В общем случае условные законы распределения составляющей X определяются соотношением

$$p(x_i \mid y_j) = p_{ji} \big/ p_{y_j}$$

Аналогично находят условные законы распределения составляющей Y:

$$p(y_j \mid x_i) = p_{ji} \big/ p_{x_i}$$

Пример 13. Двумерная случайная величина задана таблицей

Y / X	1	2	3
0,1	0,12	0,08	0,40
0,2	0,16	0,10	0,14

Найти: а) безусловные законы распределения случайных величин X и Y;
б) условный закон распределения случайной величины X при $Y = 2$.

Решение. а) Так как $p_{x_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ и $p_{y_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$, то

$$X: \quad 0{,}1 \quad 0{,}2; \qquad Y: \quad 1 \quad 2 \quad 3;$$
$$P: \quad 0{,}60 \quad 0{,}40; \qquad P: \quad 0{,}28 \quad 018 \quad 0{,}54.$$

б) С учетом формулы (20) имеем

$$p_{12} = p\{X = 0{,}1; Y = 2\} = P(0{,}1 \mid 2) = 0{,}8/0{,}18 = 4/9,$$
$$p_{22} = p\{X = 0{,}2; Y = 2\} = P(0{,}2 \mid 2) = 0{,}10/0{,}18 = 5/9.$$

Таким образом, условный закон распределения случайной величины X при $Y = 2$ таков:

$$X: \quad 0{,}1 \quad 0{,}2;$$
$$P_{Y=2}: \quad 4/9 \quad 5/9.$$

Контроль: $4/9 + 5/9 = 1$. В этом примере очевидно несовпадение условного и безусловного законов распределения случайной величины X. Следовательно, с.в. X и Y *зависимы.*

Задание. Найти условные законы вероятности с.в. при $Y = 1$ и $Y = 2$.

Записать эти законы распределения в каждом случае и проверить соответственно выполнения контроля.

9. Условные законы распределения системы непрерывных случайных величин

Пусть непрерывные случайные величины X и Y образуют непрерывную двумерную случайную величину зависимую систему (X,Y) с плотностью $\varphi(x,y)$, а $\varphi_X(x)$ и $\varphi_Y(y)$-плотности распределения соответственно случайных величин X и Y.

Условной дифференциальной функцией $\varphi(y\,|\,x)$ (*или условная вероятность*) составляющей Y при данном значении $X=x$ называют отношение дифференциальной функции $\varphi(x,y)$ системы к дифференциальной функции $\varphi_X(x)$ составляющей с.в. X:

(26) $$\varphi(y\,|\,x)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_X(x)},\qquad \varphi_X(x)\neq 0.$$

Если известна плотность распределения вероятности $\varphi(x,y)$ (дифференциальная функция), то по второй формуле (14) пункта 11.6. получим

(27) $$\varphi(y\,|\,x)=\varphi(x,y)\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy,\qquad \varphi_X(x)\neq 0,$$ при этом условная плотность обладает свойствами плотности распределения, так например: $\varphi(x\,|\,y)\geq 0$, или $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x\,|\,y)dy=1$, и т.д.

Подчеркнем, что отличие условной функции плотности $\varphi(y\,|\,x)$ от безусловной функции $\varphi_Y(y)$ состоит в том, что $\varphi(y\,|\,x)$ дает распределение Y при условии, что составляющая X приняла значение $X=x$; функция же $\varphi_Y(y)$ даёт распределение Y независимо от того, какие из возможных значений приняла составляющая X.

Аналогично определяется условная плотность распределения составляющей X при данном значении $Y=y$:

(28) $$\varphi(x\,|\,y)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_Y(y)},\qquad \varphi_Y(y)\neq 0.$$

(29) $$\varphi(x\,|\,y)=\varphi(x,y)\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dx,\qquad \varphi_Y(y)\neq 0,$$

Запишем формулы (26) и (28) в виде

(30) $$\varphi(x,y)=\varphi_Y(y)\cdot\varphi(x\,|\,y)=\varphi_X(x)\cdot\varphi(y\,|\,x)$$

Отсюда заключаем: умножая закон распределения одной из составляющих на условный закон распределения другой составляющей, найдем закон распределения системы случайных величин.

Равенство (30) называют правилом (теоремой) умножения плотностей распределений (она аналогична теореме умножения вероятностей для событий).

Пример 14. Двумерная случайная величина (X,Y) задана дифференциальной функцией

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & при\ x^2+y^2<r^2,\\ 0, & при\ \ x^2+y^2\geq r^2.\end{cases}$$

Найти условные дифференциальные законы распределения вероятностей с.в. X и Y.

Решение. Найдем условную дифференциальную функцию составляющей X при $0 \le |x| < \sqrt{r^2 - y^2}$, по формуле (23):

$$\varphi(x\,|\,y) = \varphi(x,y) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)dx = \frac{1}{\pi r^2} \Big/ \frac{1}{\pi r^2} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2}},$$

Так как $\varphi(x,y) = 0$ при $x^2 + y^2 \ge r^2$, то $\varphi(x\,|\,y) = 0$ при $|x| \ge \sqrt{r^2 - y^2}$.

Пользуясь формулой (25), аналогично найдем условную дифференциальную функцию составляющей Y:

$$\varphi(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}, & при\ |y| < \sqrt{r^2 - x^2}, \\ 0, & при\ \ |y| \ge \sqrt{r^2 - x^2}. \end{cases}$$

Задание. Самостоятельно убедитесь в том, что найденные функции удовлетворяют соотношениям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x\,|\,y)dy = 1 \quad и \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y\,|\,x)dx = 1.$$

Пример 15. Двумерная с.в. (X,Y) задана плотностью совместного распределения

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} Cxy, & при\ (x,y) \in D, \\ 0, & при\ (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где D – область на плоскости

$$\begin{cases} y > -x, \\ y < 2, \\ x < 0. \end{cases}$$

Найти безусловное и условное распределение составляющей X. Убедится, что случайные величины X и Y зависимы.

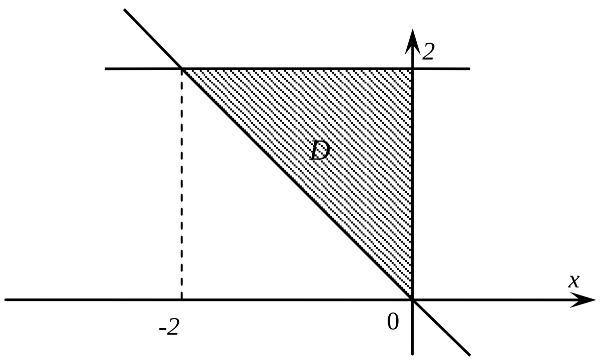


Рисунок 51

Решение. Сначала найдём коэффициент из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C \cdot xydxdy = C \int_{-2}^{0} x\,dx \int_{-x}^{2} ydy = C \int_{-2}^{0} x\,dx \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{-x}^{2} \right) = C \int_{-2}^{0} x \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$C \int_{-2}^{0} x \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = C \left(x^2 - \frac{x^4}{8} \right) \Big|_{-2}^{0} = -2C.$$

Следовательно, $-2C = 1 \Leftrightarrow C = -0{,}5$. Теперь находим

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy=\int_{-x}^{2}(-0{,}5xy)dy=$$

$$=-0{,}5x\cdot 0{,}5y^2\Big|_{-x}^{2}=-\frac{x}{4}(4-x^2)=\frac{x^3-4x}{4},$$

т.е. $\varphi_X(x)=\frac{1}{4}(x^3-4x),\ x\in(-2,0)$. Проверим контроль:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_X(x)dx=\int_{-2}^{0}\frac{1}{4}(x^3-4x)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}=\frac{1}{4}(-4+8)=1.$$

Для нахождения $\varphi(x\,|\,y)$ воспользуемся формулой (23) предварительно найдя $\varphi_Y(y)$:

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dx=\int_{-y}^{0}(-0{,}5xy)dy=$$

$$=-0{,}5y\cdot 0{,}5x^2\Big|_{-y}^{0}=\frac{y^3}{4},\ y\in(0,2).$$

Тогда

$$\varphi(x\,|\,y)=\left\{\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_Y(y)}\right\}=-\frac{xy}{2}:\frac{y^3}{4}=-\frac{2x}{y^2};\ (x,y)\in D,$$

Проверим контроль:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x\,|\,y)\,dx=\int_{-y}^{0}-\frac{2x}{y^2}dx=-\frac{x^2}{y^2}\Big|_{-y}^{0}=-\frac{1}{y^2}(0-y^2)=1.$$

Как видно, безусловный закон распределения с.в. X функция $\varphi_X(x)$ не совпадает с условным законом распределения случайной величины X с $\varphi(x\,|\,y)$. Значит случайные величины X и Y – зависимы.

Тема 12. Числовые характеристики двумерной случайной величины

1. Математическое ожидание и дисперсия

Для системы случайных величин также вводятся числовые характеристики по аналогии с одномерными случайными величинами (см. Тема 8). В качестве числовых характеристик системы (X,Y) обычно рассматривают моменты различных порядков (см. Тема 8, п. 8.6 - 8.8). На практике часто используются моменты I и II порядков, т.е. математическое ожидание (коротко м.о.), дисперсия и корреляционный момент двумерной случайной величины (X,Y).

М.о. и дисперсия двумерной с.в. служат соответственно средним значением и мерой рассеивания значений системы случайной величины. Корреляционный момент выражает меру взаимного влияния с.в., входящих в систему (X,Y).

Математическим ожиданием двумерной с.в. (X,Y) называется совокупность двух м.о. MX и MY, определяемых равенствами:

(1) $$MX=m_X=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij},\quad MY=m_Y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij},$$

если (X,Y) - дискретная система с.в., где $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$ и

(2) $$MX = m_X = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x,y)\,dxdy;\quad MY = m_Y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(x,y)\,dxdy,$$

если (X,Y) - непрерывная система с.в., где $\varphi(x,y)$ – плотность распределения системы.

Дисперсией двумерной системы с.в. (X,Y) называется совокупность двух дисперсий DX и DY, определяемых соответственно равенствами:

(3) $$DX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_X)^2 p_{ij},\quad DY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_i - m_Y)^2 p_{ij},$$

если (X,Y) - дискретная система с.в., и

(4) $$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_X)^2\varphi(x,y)\,dxdy;\quad DY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y - m_Y)^2\varphi(x,y)\,dxdy;$$

если (X,Y) - непрерывная система с.в., где $\varphi(x,y)$ – плотность распределения системы.

Дисперсия DX и DY указывают на меру рассеивания (разброса) с.в. точки (X,Y) в направлении осей координат Ox и Oy *в окрестности точки* (m_X, m_Y) – *центра разброса* на плоскости Oxy.

Математические ожидания m_x и m_y являются частными случаями начального момента $\nu_{k,s}$ (для одномерных с.в. см. Т. 8 п.8.6) совместного порядка $k+s$ системы с.в. (X,Y), определяемого равенством $\nu_{k,s} = M(X^kY^s)$, в частности, $m_X = M(X^1Y^0) = \nu_{1,0}$; $m_y = M(X^0Y^1) = \nu_{0,1}$.

Дисперсия DX и DY являются частными случаями центрального момента $\mu_{k,s}$ (для одномерных с.в. см. Т. 8 п.8.6) совместного порядка $k+s$ системы с.в. (X,Y), определяемого равенством $\mu_{k,s} = M((X - m_X)^k \cdot (Y - m_Y)^s)$, в частности, $DX = M((X - m_X)^2 = \mu_{2,0}$; $DY = (Y - m_Y)^2) = \mu_{0,2}$.

Математическое ожидание с.в. $f(X,Y)$, являющейся функцией компонент X и Y двумерной с.в. (X,Y) находится, (соответствующие д.с.в. и н.с.в.), по формулам:

(5) $$M[f(X,Y)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)p_{ij};\quad M[f(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)dxdy;$$

Начальный момент второго порядка $\nu_{1,1} = M(XY)$ часто встречается в приложениях,

Они вычисляются по формулам (соответствующие д.с.в. и н. с.в.)

(6) $$M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij};\quad M(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi(x,y)dxdy.$$

2. Корреляционный момент, коэффициент корреляции

Для описания системы двух случайных величин, кроме математических ожиданий и дисперсий составляющих пользуются и другими характеристиками, к числу которых относятся *корреляционный момент* и *коэффициент корреляции* (кратко было упомянуто в конце Т. 8. п. 8.6).

Корреляционным моментом K_{XY} (или *ковариацией*, или *моментом связи*) двух случайных величин X и Y называется м. о. произведения отклонений этих величин (см. равенство (5) п. 8.6) соответственно от их математического ожидания :

(7) $$K_{XY} = \mathrm{cov}(X,Y) = M[(X - m_X)] \cdot M[(Y - m_Y)] .$$

Следствие 1. Для корреляционного момента с.в. X и Y также справедливы равенства:

$$K_{XY} = M[\breve{X} \cdot \breve{Y}] = m_{\breve{X}\breve{Y}} ,$$

где $\breve{X} = X - m_X$; $\breve{Y} = Y - m_Y$ соответствующие централизованные с.в. X и Y (см. п.8.6.).

При этом: если (X,Y) - двумерная д.с.в., то ковариация вычисляется по формуле

(8) $$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_X)\cdot(y_j - m_Y)p_{ij} ;$$

если (X,Y) - двумерная н.с.в., то ковариация вычисляется по формуле

(9) $$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_X)\cdot(y - m_Y)\varphi(x,y)dxdy.$$

Формулы (8) и (9) получены на основании формул (6) п.12.1.

Имеет место вычислительная формула

(10) $$K_{XY} = M[XY] - MX \cdot MY,$$

которая выводится из определения (9) и на основании свойств м.о., действительно,

$$K_{XY} = M[(X - m_X)\cdot(X - m_X) = M[XY - Xm_y - Ym_X + m_X m_Y =$$
$$= M(XY) - m_X m_Y - m_Y m_X + m_X m_Y = M(XY) - MX \cdot MY .$$

Следовательно, формул (8) и (9) можно переписать в виде

(11) $$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij} - m_X m_Y ;\quad K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)dxdy - m_X m_Y .$$

Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами X и Y. Как будет показано ниже, корреляционный момент равен нулю, если X и Y являются независимыми;

Следовательно, если корреляционный момент не равен нулю, то X и Y – зависимые случайные величины.

Теорема12.1. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю, т.е. для независимых с.в. X и Y,* $K_{XY} = 0$.

Доказательство. Так как X и Y независимые случайные величины, то их отклонения

$$\breve{X} = X - MX ,$$
$$\breve{Y} = Y - MY$$

также независимы. Пользуясь свойствами математического ожидания (математическое ожидание произведения независимых с. в. равно произведению математических ожиданий сомножителей $M\breve{X} = 0$, $M\breve{Y} = 0$), поэтому

$$K_{XY} = M[\breve{X} \cdot \breve{Y}] = M\breve{X} \cdot M\breve{Y} = 0 \cdot 0 = 0 .$$

Замечание. Из этой теоремы следует, что если $K_{XY} \neq 0$, то с.в. X и Y зависимы и в таких случаях с.в. X и Y называют *коррелированными*. Однако из того, что $K_{XY} = 0$, не следует независимость с.в. X и Y.

В этом случае ($K_{XY} = 0$) с.в. X и Y называют *некоррелированными,* тем самым из независимости вытекает *некоррелированность*; обратное утверждение, вообще говоря, неверно (см. далее пример 2.)

Рассмотрим основные свойства корреляционного момента.

Свойства ковариации:

1. Ковариация симметрична, т.е. $K_{XY} = K_{YX}$ **.**

Это равенство непосредственно следует из формулы (11).

2. Имеют место равенства: $K_{XX} = DX$; $K_{YY} = DY$; т.е. дисперсия с.в. является ковариацией её с самой собой.

Эти равенства прямо следуют из определения дисперсии и равенство (11) соответственно при $X = Y$.

3. Справедливы равенства:

$$D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2K_{XY} = K_{XX} + K_{YY} \pm 2K_{XY}.$$

Эти равенства выводятся из определения дисперсии, ковариации с.в. X и Y, свойства 2.

По определению дисперсии с учётом централизации случайных величин $\breve{X};\breve{Y}$ имеем

$$D[X+Y] = M\left[[(X+Y) - M(X+Y)]^2\right] = M\left[[(X-m_X)+(Y-m_Y)]^2\right] =$$
$$= M[(\breve{X}+\breve{Y})^2] = M(\breve{X}^2) + 2M(\breve{X}\cdot\breve{Y}) + M(\breve{Y}^2),$$

теперь, на основании (11) и свойств 2 и 3, получим первое (со знаком плюс) свойство 3.

Аналогично, вторая часть свойства 3, выводится на основании равенства

$$D\left(X - Y\right) = M[(\breve{X}-\breve{Y})^2] = M(\breve{X}^2) - 2M(\breve{X}\cdot\breve{Y}) + M(\breve{Y}^2).$$

4. Пусть $\boldsymbol{\alpha, \beta, c}$ — постоянные числа, $X_\alpha = \alpha \cdot X; Y_\beta = \beta \cdot Y,$ тогда справедливы равенства:

$$K_{(\alpha X)(\beta Y)} = \operatorname{cov}(\alpha X, \beta Y) = (\alpha\beta)\cdot\operatorname{cov}(X,Y) = (\alpha\beta)K_{XY};$$
$$K_{(X+c)(Y+c)} = \operatorname{cov}(X+c, Y+c) = K_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y).$$

Обычно свойства 4 называются свойствами однородности первого порядка и периодичности по аргументам.

Докажем первое равенство, при этом будем пользоваться свойством $M(cU) = cM(U)$:

$$K_{(\alpha X)(\beta Y)} = M[((\alpha X - M(\alpha X))\cdot(\beta Y - M(\beta Y))] =$$
$$= (\alpha\beta)M[(X-m_X)\cdot(Y-m_Y)] = (\alpha\beta)K_{XY}.$$

Теорема 12.2. *Абсолютное значение корреляционного момента двух произвольных случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий: т.е.*

(12) $$0 \le |K_{XY}| \le \sqrt{DX\cdot DY} = \sigma_X \cdot \sigma_Y.$$

Доказательство. Заметим, что для независимых с.в. неравенство выполняется (с.м. теорему 12.1.). Итак, пусть с.в. X и Y зависимые. Рассмотрим стандартные с.в. $\breve{X}_\text{Н} = \breve{X}/\sigma_X$ и $\breve{Y}_\text{Н} = \breve{Y}/\sigma_Y$ и вычислим дисперсию с.в. $Z = \breve{X}_\text{Н} \pm \breve{Y}_Y$ с учётом свойства 3, имеем: с одной стороны $DZ \ge 0$. С другой стороны

$$DZ = D(\breve{X}_\text{Н} + \breve{Y}_\text{Н}) = D(\breve{X}_\text{Н}) + D(\breve{Y}_\text{Н}) \pm 2M[(\breve{X}_\text{Н} - M(\breve{X}_\text{Н}))\cdot(\breve{Y}_\text{Н} - M(\breve{Y}_\text{Н}))].$$

Следовательно, с учётом того, что $\breve{X}_\text{Н}$ и $\breve{Y}_\text{Н}$ - нормированные (стандартизированные) с.в., то для них м.о. равно нулю, а дисперсия равна 1, поэтому, пользуясь свойством м.о. $M(cU) = cM(U)$ получим

$$M(\breve{X}_\text{Н}) = M\left(\frac{\breve{X}}{\sigma_X}\right) = \frac{M(\breve{X})}{\sigma_X};\ M(\breve{Y}_\text{Н}) = M\left(\frac{\breve{Y}}{\sigma_Y}\right) = \frac{M(\breve{Y})}{\sigma_Y},$$

а следовательно, на основании того, что $K_{XY} = M\left(\breve{X}\cdot\breve{Y}\right)$ получим

$$DZ = 1 + 1 \pm 2M(\breve{X}_{\text{Н}} \cdot \breve{Y}_{\text{Н}}) = 2\left(1 \pm \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\right) \geq 0$$

Отсюда следует, что $-\sigma_X\sigma_Y \leq K_{XY} \leq \sigma_X\sigma_Y$, т.е.

$$|K_{XY}| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y = \sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY} = \sqrt{DX \cdot DY}.$$

Утверждение доказано.

Из определения и свойства ковариации следует, что она характеризует и степень зависимости с.в., и их рассеяния (разброса) вокруг точки (m_X, m_Y). Размерность ковариации равна произведению размерностей случайных величин X и Y. Другими словами, величина корреляционного момента зависит от единиц измерения случайных величин. По этой причине для одних и тех же двух величин X и Y, величина корреляционного момента будет иметь различные значения в зависимости от того, в каких единицах были измерены величины.

Пусть, например, X и Y были измерены в сантиметрах и $K_{XY} = 2\ см^2$; если измерить X и Y в миллиметрах, то $K_{XY} = 200\ мм.$ Эта особенность корреляционного момента и есть недостаток этой числовой характеристики, так как сравнение корреляционных моментов различных систем случайных величин становится затруднительным.

Для того чтобы устранить этот недостаток, вводят новую числовую характеристику - *коэффициент корреляции*.

Коэффициентом корреляции r_{XY} случайных величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратичных отклонений этих величин:

(13) $$r_{XY} = K_{XY} / \sigma_X \cdot \sigma_Y .$$

Так как размерность K_{XY} равна произведению размерностей величин X и Y, σ_X имеет размерность величины X, σ_y имеет размерность величины Y, то r_{XY} есть просто число (т.е. «*безразмерная величина*»). Таким образом, величина коэффициента корреляции не зависит от выбора единиц измерения случайной величины, в этом состоит *преимущество* коэффициента корреляции перед корреляционным моментом.

В Т. 8. п. 8.3 нами было введено понятие *нормированной* с.в. $\breve{X}_{\text{Н}} = \breve{X}/\sigma_X$, формула (18), и доказана теорема о том, что $M\breve{X}_{\text{Н}} = 0$ и $D\breve{X}_{\text{Н}} = 1$(см. там же теорема 8.2.). Здесь докажем следующее утверждение.

Теорема 12.3. Для *любых двух случайных величин* X *и* Y *справедливо равенство* $r_{XY} = K_{\breve{X}_{\text{Н}}\breve{Y}_{\text{Н}}}$. *Другими словами, коэффициент корреляции* r_{XY} *любых двух с. в.* X *и* Y *равно корреляционному моменту их соответствующих нормированных* с.в. $\breve{X}_{\text{Н}}$ *и* $\breve{Y}_{\text{Н}}$.

Доказательство. По определению нормированных случайных величин $\breve{X}_{\text{Н}}$ и $\breve{Y}_{\text{Н}}$

$$\breve{X}_{\text{Н}} = \breve{X}/\sigma_X \text{ и } \breve{Y}_{\text{Н}} = \breve{Y}/\sigma_Y .$$

Учитывая свойство математического ожидания: $M(C \cdot U) = C \cdot M(U)$ и равенство (40) получим

$$r_{XY} = \frac{M[(X - m_X)\cdot(Y - m_Y)]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \left[M\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right)\cdot\left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right)\right] =$$
$$= M\left((\breve{X}/\sigma_X)\cdot(\breve{Y}/\sigma_Y)\right) = M\left(\breve{X}_{\text{Н}} \cdot \breve{Y}_{\text{Н}}\right) = K_{\breve{X}_{\text{Н}}\breve{Y}_{\text{Н}}}.$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим некоторые часто встречающие свойства коэффициента корреляции.

Свойства коэффициента корреляции:

1. Коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицу, т.е. это свойство прямо следует из формулы (12) определения коэффициента корреляции и теоремы 12.3.

$$|r_{XY}| \le 1 \text{ или } -1 \le r_{XY} \le 1.$$

2. Если случайные величины X и Y независимы, то коэффициент корреляции равен нулю, т.е. $r_{XY} = 0$.

Это свойство является прямым следствием равенства (40) и теоремы 12.3.

Следующее свойство сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 12.4.

Если с.в. X и Y между собой связаны линейной функциональной зависимостью, т.е. $Y = aX + b,\ a \ne 0,$ то $|r_{XY}| = 1$ при этом

$$r_{XY} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

и наоборот, если $|r_{XY}| = 1$, то с.в. X и Y связаны между собой линейной функциональной зависимостью, т.е. существуют постоянные $a \ne 0$ и b такие, что имеет место равенство $Y = aX + b$.

Доказательство. Пусть $Y = aX + b,\ a \ne 0,$ тогда на основании свойства 4 ковариации, имеем

$$\operatorname{cov}(X, aX + b) = cov(aX + b, X) = a \cdot \operatorname{cov}(X + b/a) = a\operatorname{cov}(X, X) = aDX$$

и поскольку, $DY = D(aX + b) = a^2 DX$, поэтому

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{aDX}{\sqrt{DX} \cdot |a| \sqrt{DX}} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Следовательно, $|r_{XY}| = 1$. Равенство в одну сторону получено. Пусть далее, $|r_{XY}| = 1$, тогда следует рассматривать два случая:1) $r_{XY} = 1$; и 2) $r_{XY} = -1$; Итак, рассмотрим первый случай. Тогда по определению $K_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$ и следовательно из равенства $DZ = D[\breve{X}_{\text{Н}} - \breve{Y}_Y]$, где $\breve{X}_{\text{Н}} = \dfrac{X - m_X}{\sigma_X}; \breve{Y}_{\text{Н}} = \dfrac{Y - m_Y}{\sigma_Y}$. В нашем случае $K_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$, поэтому из равенства

$$DZ = D[\breve{X}_{\text{Н}} - \breve{Y}_Y] = 2\left(1 - \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\right),$$

получаем, что $DZ = 0$, значит $Z = c -$постоянна. Так как $c = Mc,$ и поскольку $M(X - m_X) = M(Y - m_Y) = 0$, то $c = 0,$ действительно,

$$MZ = M\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) = M\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right) - M\left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) =$$

$$\frac{M(X - m_X)}{\sigma_X} - \frac{M(Y - m_Y)}{\sigma_Y} = 0 - 0 = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{X - m_X}{\sigma_X} = \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} \Rightarrow Y = aX + b, \quad a = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X};\ b = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} m_X + m_Y.$$

Аналогично, показывается, что для $r_{XY} = -1$ имеет место (проверьте самостоятельно!)

$$Y = aX + b\,,\ \ a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X};\ b = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} m_X + m_Y\,.$$

Некоторые выводы:

1. Если X и Y независимые случайные величины, то $r_{XY} = 0$

2. Если с.в. X и Y между собой связаны линейно, то $|r_{XY}| = 1$.

3. В остальных случаях $-1 < r_{XY} < +1$:

Говорят, что с.в. X и Y связаны между собой *положительной корреляцией,* если $r_{XY} > 0$; в случаях же $r_{XY} < 0$ – *отрицательной корреляцией*. Чем ближе $|r_{XY}|$ к единице, тем больше оснований считать, что с.в. X и Y связаны линейной зависимостью.

Отметим, что корреляционные моменты и дисперсии системы с.в. обычно задаются *корреляционной матрицей*:

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} DX & K_{XY} \\ \\ K_{YX} & DY \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что определитель корреляционной матрицы удовлетворяет:

$$DX \cdot DY - K_{XY}^2 = (\sigma_X \cdot \sigma_Y - K_{XY})(\sigma_X \cdot \sigma_Y + K_{XY})\,.$$

Как уже было отмечено, если две случайные величины зависимы, то они могут быть как *коррелированными*, так и *некоррелированными.* Другими словами, корреляционный момент двух зависимых величин может быть *не равен нулю*, но может и *равняться нулю.*

Пример 1. Закон распределения дискретной с.в.задан таблицей

X \ Y	-1	0	1
0	0,15	0,40	0,05
1	0,20	0,10	0,10

Найти коэффициент корреляции r_{XY}.

Решение. Находим законы распределения составляющих X и Y:

$$X:\ 0\quad 1 \qquad\qquad Y:\ -1\quad 0\quad 1$$

$$P:\ 0{,}6\quad 0{,}4 \qquad\qquad P:\ 0{,}35\quad 0{,}50\quad 0{,}15$$

Теперь вычислим м.о. составляющих:

$$m_X = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4\,.$$

$$m_Y = -1 \cdot 0{,}35 + 0 \cdot 0{,}50 + 1 \cdot 0{,}15 = -0{,}20$$

Этих величин можно было находить на основании таблицы распределения с.в. (X,Y) из равенства (1) пункта 12.1. Например,

$$m_X = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i p_{ij} = 0 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0{,}40 + 0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}20 + 1 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 0{,}10 = 0{,}4\,.$$

Аналогично определяется m_Y (найдите самостоятельно).

Вычислим дисперсии составляющих. При это будем пользоваться вычислительной формулой для дисперсии:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = (0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}4)^2 - (0{,}4)^2 = 0{,}24;$$

$$MY = \{(-1)^2 \cdot 0{,}35 + 0^2 \cdot 0{,}50 + 1^2 \cdot 0{,}15)^2 - ((-0{,}20)^2 = 0{,}46.$$

Следовательно, $\sigma_X = \sqrt{0{,}24} \approx 0{,}49; \sigma_Y = \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}68.$ Далее, на основании первой формулы (6) имеем:

Составим закон распределения $Z = XY$, а затем найдём $MZ = M(XY)$:

$$\begin{array}{llll} XY: & -1 & 0 & 1 \\ P: & 0{,}20 & 0{,}70 & 0{,}10 \end{array}$$

При составлении таблицы закона распределения следует выполнять действия:

1) оставить лишь различные значения всевозможных произведений $Z = \{x_i \cdot y_j\}$.

2) для определения вероятности данного значения $\{Z = z_{ij} = x_i \cdot y_j\}$, нужно складывать все соответствующие вероятности, находящиеся на пересечении основной таблицы, благоприятствующие наступлению данного значения.

В нашем примере с.в. Z принимает всего три различных значения $\{-1{,}0{,}1\}$. Здесь первое значение (-1) соответствует произведению $\{X = 1\}$ из второй строки и $\{Y = -1\}$ из первого столбца, поэтому на их пересечении находится вероятностное число $p_{21} = 0{,}20;$ аналогично

$$p_{12} = 0{,}15 + 0{,}40 + 0{,}10 + 0{,}10 = 0{,}70,$$

которое получено из суммы вероятностей, находящихся на пересечениях соответственно первой строки и первого столбца (0,15 ; 0,40; 0,05) и одно значение $0{,}10$, которое находится на пересечении второй строки и второго столбца, и наконец, $p_{23} = 0{,}10$, которое находится на пересечении второй строки и третьего столбца.

Из нашей таблицы следует:

$$MZ = M(XY) = (-1) \cdot 0{,}20 + 0 \cdot 0{,}70 + 1 \cdot 0{,}10 = -0{,}10.$$

Находим корреляционный момент, используя формулу (38):

$$K_{XY} = M(XY) - MX \cdot MY = -0{,}10 - 0{,}4 \cdot (-0{,}20) = -0{,}10 + 0{,}8 = 0{,}2 \neq 0.$$

Находим коэффициент корреляции по формуле (41)

$$r_{XY} = K_{XY} / \sigma_X \cdot \sigma_Y \approx \frac{-0{,}02}{0{,}49 \cdot 0{,}68} \approx -0{,}16.$$

Таким образом, получим отрицательную корреляцию.

Упражнение. Закон распределения дискретной с.в. задан таблицей

X \ Y	-1	0,5	1
0,2	0,15	0,20	0,25
1	0,20	0,10	0,10

Найти коэффициент корреляции r_{XY}.

Рассмотрим пример, где окажется две *зависимые случайные величины* могут быть *некоррелированными.*

Пример 2. Двумерная случайная величина (X, Y) задана функцией плотностью

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1/6\pi, & (x^2/9) + (y^2/4) < 1, \\ 0, & (x^2/9) + (y^2/4) > 1. \end{cases}$$

Докажем, что X и Y *зависимые,* но *некоррелированные* случайные величины.

Решение. Воспользуемся ранее вычисленными плотностями распределения составляющих X и Y:

$$M(XY)=0\cdot(-1)\cdot 0{,}15+0\cdot 0\cdot 0{,}40+0\cdot 1\cdot 0{,}05+1\cdot(-1)\cdot 0{,}20+1\cdot 0\cdot 0{,}10+1\cdot 1\cdot 0{,}10=-0{,}10.$$

$$\varphi_X(x,y)=\begin{cases}2\sqrt{9-x^2}\big/9\pi; & |x|<3,\\ 0, & |x|\geq 3.\end{cases}$$

$$\varphi_Y(x,y)=\begin{cases}\sqrt{4-y^2}\big/9\pi; & |y|<2,\\ 0, & |y|\geq 2.\end{cases}$$

Так как $\varphi(x,y)\neq\varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y)$, то X и Y зависимые величины. Для того, чтобы доказать *некоррелированность* X и Y, достаточно убедиться в том, что $K_{XY}=0$.

Найдем корреляционный момент по формуле:

$$K_{XY}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)\cdot(y-m_Y)\,\varphi(x,y)dxdy.$$

Поскольку дифференциальная функция $\varphi_X(x)$ симметрична относительно оси *OY*, то $m_X=0$; аналогично $m_Y=0$, в силу симметрии $\varphi_Y(y)$ относительно оси *OX*. Поэтому, вынося постоянный множитель $\varphi(x,y)$

$$K_{XY}=\varphi(x,y)\int_{-\infty}^{+\infty}y\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\right)dy.$$

Внутренний интеграл равен нулю (подынтегральная функция нечетна, пределы интегрирования симметричны относительно начала координат), следовательно, $K_{XY}=0$, т.е. *зависимые случайные величины X и Y между собой не коррелируют*.

Итак, из коррелированности двух случайных величин следует их зависимость, но из некоррелированности ещё нельзя заключить о независимости этих величин.

Однако, для нормально распределённых с.в. такой вывод является **исключением,** т.е. из *некоррелированности нормально распределенных* с.в. вытекает их *независимость*.

Этому вопросу посвящается следующий пункт.

3. Двумерное нормальное распределение

Среди законов распределения двумерной случайной величины (X,Y) чаще всего на практике встречается нормальное (гауссово) распределение вероятностей.

Нормальным законом распределения на плоскости называют распределение вероятностей двумерной случайной величины *(X, Y),* если её функция плотности $\varphi(x,y)$ распределения задаётся равенством

$$(15)\qquad \varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-r_{XY}^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2r_{XY}\cdot\frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]},$$

где $m_X, m_Y, \sigma_X, \sigma_Y$ и $r=r_{XY}$ - параметры данного распределения. Итак, нормальный закон на плоскости определяется пятью параметрами: $m_X, m_Y, \sigma_X, \sigma_Y$ и $r=r_{XY}$. Обычно их называют параметрами распределения.

Можно показать, что эти параметры имеют следующий вероятностный смысл: m_X, m_Y – математические ожидания, σ_X, σ_Y - средние квадратичные отклонения, r_{XY} – коэффициент корреляции с.в. (X,Y), причём так определённая функция $\varphi(x,y)$ является функцией плотности двумерного распределения вероятностей с.в. (X,Y) т.е. имеет место равенство:

(16) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u,v)dudv = 1 \text{ (Контроль).}$$

Это значит, что двумерное нормальное распределение полностью определяется заданием его числовых характеристик, что очень удобно на практике. Обычно на практике опытным путём эти параметры находятся и получают совместную плотность $\varphi(x,y)$ двух нормально распределённых с.в. X и Y. Докажем следующее утверждение.

Теорема 12.5. *Для функции* $\varphi(x,y)$ *определённой равенством* (15) *плотность вероятностей одномерных с.в.* X *и* Y *справедливы равенства:*

(17) $$\varphi_1(X) = \varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}};$$

(18) $$\varphi_2(Y) = \varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dx = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}.$$

Доказательство. Покажем первое из них. Согласно свойству 5, функции плотности $\varphi(x,y)$ (см. первую формулу (14) п.11.6.) имеет место равенство

$$\varphi_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}\cdot e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2(1-r^2)}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(Y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}-2r\frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y}\right]}dy = \left(\text{замена}: \frac{x-m_X}{\sigma_X\sqrt{2}} = u; \frac{y-m_Y}{\sigma_Y\sqrt{2}} = v\right) =$$

$$= \frac{\sigma_Y\sqrt{2}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\cdot e^{-\frac{u^2}{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(v^2-2\kappa uv)}{1-r^2}}dv = = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\sigma_X\sqrt{1-r^2}}\cdot e^{-\frac{u^2}{1-r_{xy}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(v-ru)^2-r^2u^2}{1-r^2}}dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\sigma_X\sqrt{1-r^2}}\cdot e^{-\frac{u^2}{1-r_{xy}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(v-ru)^2-r^2u^2}{1-r^2}}dv = \frac{e^{-\frac{u^2}{1-r^2}+\frac{r^2u^2}{1-r^2}}}{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\sigma_X\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(v-u)^2}{1-r^2}}dv =$$

$$= \left(\text{Замена}: \frac{v-ru}{\sqrt{1-r^2}} = t\right) = \frac{e^{-t^2}\cdot\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\sigma_X\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dv,$$

С учётом интеграла Пуассона: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$, упростив (используя значения $r = r_{XY}$ согласно формулам (13) и (10) последней замены, получим равенство (17), т.е.

$$\varphi_1(X) = \varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Аналогично получается равенство (18).

Тем самым показано, что $X \approx N_{\{m,\sigma\}}$ и $Y \approx N_{\{m,\sigma\}}$. График плотности $\varphi(x,y)$ нормального распределения у двумерной случайной величины (X,Y) как уже было упомянуто ранее (см. рис.50) представляет холмообразную поверхность, вершина которой находится в точке $\left(m_X, m_Y, 1\Big/\left(2\pi\,\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}\right)\right)$, т.е. максимальное значение функции $\varphi(x, y)$ достигается в точке (m_X, m_Y).

Сечения поверхности распределения плоскостями, проходящими через точку $\left(m_X, m_Y, 1\Big/\left(2\pi\,\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}\right)\right)$ перпендикулярно плоскости Oxy, изображают кривые Гаусса вида $z = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\cdot e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}$.

Пересекая поверхность распределения $z = \varphi(x, y)$ плоскостью $z = z_0; 0 < z_0 < \max z$, параллельной плоскости Oxy, получим в сечении эллипс, уравнении проекции которого на плоскость Oxy, имеет вид

(19) $$\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2r\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} = d^2,$$

где $d^2 = -2(1-r^2)\ln[2\pi\, z_0\,\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}]$. (В силу ограничения на z_0 аргумент логарифма меньше 1, следовательно, значение логарифма отрицательно). Если в равенстве (19) осуществить традиционное преобразование параллельного переноса и поворота осей координат по известным формулам (из курса аналитической геометрии)

$$\begin{cases} x = m_X + x'Cos\alpha - y'Sin\alpha, \\ y = m_Y + x'Sin\alpha + y'Cos\alpha, \end{cases}$$

где угол α определяется равенством $tg 2\alpha = \dfrac{2r\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2}$, то уравнение (19) приводится к каноническому уравнению эллипса. Эллипс (19) называется *эллипсом рассеяния*; оси симметрии эллипса (они образуют с осью Ox углы α *и* $90^0 + \alpha$) – называются *главными осями рассеяния,* а центр эллипса (m_X, m_Y) - называют *центром рассеяния*.

Убедимся в том, что если составляющие двумерной нормально распределенной случайной величины некоррелированны, то они и независимы. Действительно, пусть X и Y некоррелированны. Тогда, полагая в формуле (17) $r = r_{XY} = 0$, получим

(20) $$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]}.$$

Отсюда (с учётом формул (17) и (18)) легко следует равенство $\varphi(x, y) = \varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y)$. Для этого случая (некоррелированных с.в.) уравнение эллипса (19) принимает вид:

$$\frac{(x-m_X)^2}{(\sigma_X d)^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{(\sigma_Y d)^2} = 1;$$

Этот эллипс при $d = 1$ имеет вид:

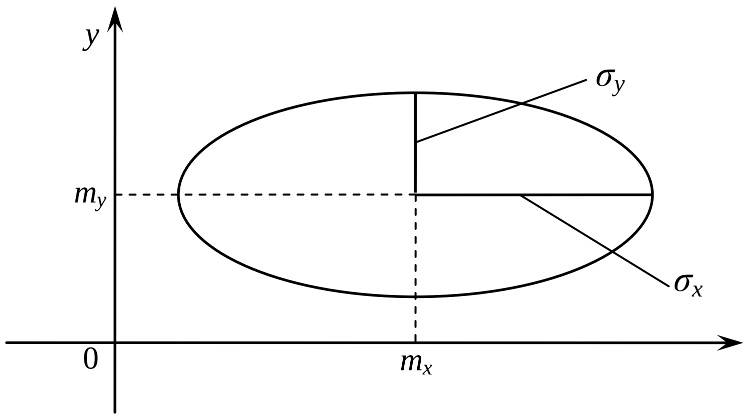


Рисунок 52

Задание. Начертите эллипс при $d = 3$.

Следовательно, *если составляющие нормально распределенной случайной величины некоррелированны, то функция плотности двумерного распределения* $\varphi(x, y)$ *равна произведению соответствующих функций плотностей составляющих, а отсюда и следует независимость составляющих.* Справедливо и обратное утверждение.

Итак, для нормально распределённых с.в. на плоскости термины «***независимость***» и «***некоррелированность***» являются эквивалентными.

Замечание. В частности, если $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, то распределение (20) называется *круговым* и в этом случае имеет вид:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma^2}\right]}$$

Написанное выражение, обладает круговой симметрией по отношению к точке (m_X, m_Y).

Следствие. Если с.в. X и Y *независимы*, то *вероятность попадания* двумерной с.в. (X, Y), *распределённой по нормальному закону в области* $G = \{a \le x \le b; c \le y \le d\}$, вычисляется по формуле:

$$P\{(X,Y) \in (G)\} = \left\{\Phi_0\left(\frac{(b-m_X)}{\sigma_X}\right) - \Phi_0\left(\frac{(a-m_X)}{\sigma_X}\right)\right\} \cdot \left\{\Phi_0\left(\frac{(b-m_Y)}{\sigma_Y}\right) - \Phi_0\left(\frac{(a-m_Y)}{\sigma_Y}\right)\right\},$$

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt -$ функция Лапласа.

Доказательство непосредственно выводится на основании формулы законов распределения вероятностей независимых с. в. X и Y с последующим применением равенства $\varphi(x, y) = \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y)$.

В общем случае, так как произвольную область (G) можно приближённо заменить областью, составленной из прямоугольников, то на этом основывается применение так называемых «*сеток рассеивания*».

Можно также показать, что вероятность попадания случайной точки (X, Y) в один из эллипсов рассеяния равна

$$P\left\{\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} \le d^2\right\} = 1 - e^{-0{,}5 \cdot d^2}$$

Пример 3. Орудие обстреливает плоскость xOy. Цель находится в начале координат. Как известно, в реальных условиях стрельбы точка попадания снаряда не совпадает *абсолютно точно* с целью: при стрельбе неизбежны отклонения. Отклонения вызываются целым рядом причин: неточностью установки прицела, переменчивостью атмосферных условий, неравномерностью горения заряда и т.д. В теории стрельбы исходят из предположения, что точка попадания распределена по нормальному закону (причем центр распределения совпадает, разумеется, с местом положения цели). Основанием для такого предположения является множественность причин, вызывающих отклонения, и незначительность действия каждой из них в отдельности. Примем, что в данном случае распределение точки попадания является круговым нормальным распределением с центром в начале координат, т. е. что плотность распределения имеет вид:

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Поскольку точка попадания является случайной точкой, ее расстояние до начала координат будет случайной величиной.

Требуется найти для этой величины закон распределения.

Решение. Обозначим указанное расстояние через R. Вероятность события $r_1 \le R \le r_2$ равна интегралу от функции $\varphi(x,y)$ по области G, заключенной между концентрическими окружностями $R=r_1$ и $R=r_2$. Переходя в этом интеграле от прямоугольных координат x,y к полярным r,φ, будем иметь:

$$P\{r_1 \le R \le r_2\}=\int_{r_1}^{r_2}dr\int_0^{2\pi}r\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}d\varphi=\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{\sigma^2}re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr.$$

Отсюда видно, что плотность вероятности случайной величины R есть функция

$$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma^2}re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & при\;\; r\ge 0,\\ 0, & при\;\; r<0.\end{cases}.$$

Пример 4. Производится ряд независимых «выстрелов» по плоскости xOy. Рассеивание точек попадания то же, что и в предыдущем примере. Как много следует сделать выстрелов, чтобы с вероятностью $\ge 0{,}99$ попасть хотя бы раз в цель, имеющую вид круга радиуса σ с центром в начале координат?

Решение. Если производится один выстрел, то вероятность *не попасть* в указанный круг равна:

$$P\{r_1 \le R \le r_2\}=\frac{1}{\sigma^2}\int_\sigma^\infty re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\Big|_\sigma^{+\infty}=e^{-0{,}5}.$$

Если производится n независимых выстрелов, то вероятность *не попасть ни разу* в указанный круг равна $(e^{-\frac{1}{2}})^n=e^{-\frac{n}{2}}$. Следовательно, вероятность хотя бы одного попадания при n выстрелах будет $1-e^{-\frac{n}{2}}$. Для того, чтобы выполнялось неравенство

$$1-e^{-\frac{n}{2}}\ge 0{,}99 \quad \text{или} \quad e^{-\frac{n}{2}}\le 0{,}01, \text{ нужно взять } n\ge 8.$$

Пример 5. Найти вероятность попадания точки (X,Y) в прямоугольник, $\{\,|x|\le 1; |y|\le 2\,\}$, если плотность совместного распределения с.в. X и Y равна

$$\varphi(x,y) = (1/3\pi)\cdot e^{-\frac{x^2+4y^2}{6}}.$$

Решение. Функцию $\varphi(x,y)$ перепишем в виде

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(x-0)^2}{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{2(y-0)^2}{3}} = \varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y),$$

где мы воспользовались равенствами:

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0)^2}{2(\sqrt{3})^2}};\ \varphi_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{3/4}\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-0)^2}{2(\sqrt{3/4})^2}}.$$

Следовательно, с.в. X и Y являются независимыми и $X \approx N_{(0,\sqrt{3})}; Y \approx N_{(0,\sqrt{3/4})}$

.Поэтому (с учётом равенство (38) пункта 9.9. и таблицы значения функции Лапласа) имеем

$$P\{|x|\le 1; |Y|\le 2\} = 2\Phi_0(1/\sqrt{3})\cdot 2\Phi_0(4/\sqrt{3}) = 4\Phi_0(0{,}58)\Phi_0(2{,}31) = 0{,}428.$$

4. Линейная регрессия, прямые линии среднеквадратической регрессии

Пусть (X,Y) двумерная случайная величина, где X и Y являются зависимые случайные величины. В этом пункте кратко исследуем приближённое представление одну из величин как линейную функцию через другую (точную функциональную зависимость, вообще говоря, описать невозможно!). Итак, пусть случайная величина Y через величины X приближенно представлена в виде $Y \approx f(x) = \alpha X + \beta$, где $\alpha, \beta -$ параметры, подлежащие определению. Это можно сделать различными способами. Наиболее употребительными из них является «*метод наименьших квадратов»*.

Функцию $f(x) = \alpha + \beta X$ называют «*наилучшим приближением*» с.в.Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[(Y - f(x))^2]$ принимает наименьшее возможное значение; *функцию* $f(x)$ *называют среднеквадратической регрессией с.в.* Y *на* X . Имеет место утверждение

Теорема 12.6. *Линейная среднеквадратическая регрессия* Y *на* X *имеет вид*

$$f(x) = r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y, \tag{21}$$

где $m_X = MX; m_Y = MY;\ \sigma_X = \sqrt{DX}; \sigma_Y = \sqrt{DY}; r = r_{XY} = K_{XY}/\sigma_X\,\sigma_Y -$ *коэффициент корреляции с.в.* X *и* Y .

Доказательство. Введём в рассмотрение функцию двух независимых аргументов α и β :

$$F(\alpha,\beta) = M\{[(Y - (\alpha + \beta X)]^2\}. \tag{22}$$

На основании равенств:
$M(X - m_X) = M(Y - m_Y) = 0,\ K_{XY} = r_{XY}\sigma_X\sigma_Y = M[(X - m_X)(Y - m_Y)],$ и после выполнения некоторых выкладок (с учётом свойства м.о.) получим

$$F(\alpha,\beta) = \sigma_X^2 + (\beta\sigma_X)^2 - 2r\sigma_X\sigma_Y\beta + (m_Y - (\alpha + \beta m_X)^2.$$

Далее, исследуем функцию $F(\alpha,\beta)$ на экстремум. Для этого найдём частные производные и приравниваем нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = -2(m_Y - \alpha - \beta m_X) = 0 \ , \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta \sigma_X^2 - 2r\sigma_X \sigma_Y = 0. \end{cases}$$

Решая систему линейных уравнений относительно неизвестных α и β получим:

$\beta = r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$, $\alpha = -r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X + m_Y$.

Согласно общей теории функция $F(\alpha, \beta)$ при этих значениях α и β принимает своё наименьшее значение (**Убедитесь в этом**!).

Итак, линейная средняя квадратичная регрессия Y и X имеет вид

$$f(x) = \alpha + \beta X = m_Y - r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y .$$

Утверждение доказано.

Коэффициент $\beta = r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ называют коэффициентом регрессии Y на X, а прямую

$$y - m_Y = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X), \tag{23}$$

называют прямой среднеквадратической регрессии Y на X .

Подставляя найденные значения α и β в равенстве (23), получим минимальное значение функции $F(\alpha, \beta)$, равное $\sigma_Y^2(1 - r^2)$, которую называют *остаточной дисперсией с.в. Y относительно с.в. X*; она характеризует величину ошибки, которую допускают при замене с.в. Y на линейной функцией $f(X) = \alpha + \beta X$. При $r = \pm 1$ остаточная дисперсия равна нулю; т.е. при этих крайних значениях коэффициента корреляции не возникает ошибки при замене Y в виде линейной функции от X. Следовательно, если $r = \pm 1$, то Y и X между собой связаны линейной функциональной зависимостью.

Аналогично, можно получить прямую линию среднеквадратичной регрессии с.в. X на Y:

$$x - m_X = r \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - m_Y) \tag{24}$$

($r\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ – коэффициент регрессии X на Y), а также остаточную дисперсию $\sigma_X^2(1 - r^2)$ величины X относительно Y .

Если $r = \pm 1$, то обе прямые регрессии, как видно из (23) и (24) совпадают.

Из уравнений (23) и (24) вытекает, что обе прямые регрессии проходят через точку, (m_X, m_Y), которую называют ***центром совместного распределения величин X и Y.***

Важной характеристикой условного распределения вероятностей является условное математическое ожидание.

5. Условное математическое ожидание, линейная корреляция, теорема о нормальной корреляции

При изучении двумерной случайной величины рассматриваются не только числовые характеристики одномерных компонент X и Y, но и числовые характеристики условных распределений: условные м.о. и условные дисперсии.

Условным математическим ожиданием одной из случайной величины, входящих в систему (X,Y) называется её м.о., вычисляемое при условии, что другая с.в. приняла определенное значение (или попала в данный интервал). Обозначается: $M(Y\mid X=x)$ и $M(X\mid Y=y)$ или $M(Y\mid x)$ и $M(X\mid y)$. вычисляются соответственно (для д.с.в. и для н.с.в.) по формулам:

$$(25)\qquad M(X\mid y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,p(x_i\mid y);\;\; M(X\mid y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\,\varphi(x\mid y)dy,$$

где $\varphi(x\mid y)$ – условная вероятностная плотность случайной величины X при $Y=y$. Отметим, что условное математическое ожидание $M(X\mid y)$ есть функция от y: $M(X\mid y)=g(y)$, называют функцией *регрессии* с.в. X на Y.

Аналогично определяется условное математическое ожидание случайной величины Y

$$(26)\qquad M(Y\mid x)=\sum_{i=1}^{m}y_j\,p(y_j\mid x);\;\; M(Y\mid x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\varphi(y\mid x)dx,$$

и функция *регрессии* Y на $X: M(Y\mid x)=f(x)$.

Графики этих функций называются соответственно линиями (или «кривыми») регрессии с.в. X на y и с.в. Y на x. Рассмотрим пример для случая д.с.в.

Пример 6. Дискретная двумерная случайная величина (X,Y) задана таблицей

Y \ X	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,30	0,10	0,03	0,07

Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X=x_1=1$.

Решение. Найдем $p(x_1)$, для этого сложим вероятности, помещенные в первом столбце таблицы.

$$p(x_1)=0{,}15+0{,}30=0{,}45.$$

Найдем условное распределение вероятностей величины Y при $X=x_1=1$.

$$p(y_1\mid x_1)=p(x_1,y_1)/p(x_1)=0{,}15/0{,}45=1/3;$$

$$p(y_2\mid x_1)=p(x_1,y_2)/p(x_1)=0{,}30/0{,}45=2/3;$$

Вычислим искомое условное математическое ожидание по первой формуле (34):

$$M(Y\mid X=x_1)=\sum_{i=1}^{2}y_j\,p(y_j\mid x)=3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{2}{3}=5.$$

Задание. а) Вычислите величины: $M(Y\mid x_i);\;\; i=2,\,3,\,4$;

б) Вычислите величины: $M(X\mid y_j);\; j=1{,}2.$

Теперь рассмотрим важный случай, когда обе функции регрессии Y на X и X на Y линейны. В этом случае говорят, что с.в. X и Y связаны *линейной корреляционной зависимостью.*

Теорема 12.7. (Теорема о нормальной корреляции). *Если двумерная случайная величина* (X, Y) *распределена по нормальному закону, то с.в.* X *и* Y связаны линейной корреляционной зависимостью.

Доказательство. Найдём условное м.о. $M(Y \mid x)$ (т.е. функция регрессии Y на x, используя условный закон распределения с.в. Y при $X = x,$ который определяется условной плотностью распределения $\varphi(y \mid x).$ На основании формулы (23) п.13.5

$$\varphi(y \mid x) = \varphi(x, y) / \varphi_X(x).$$

Совместная плотность $\varphi(x, y)$ задана формулой (40), а плотность распределения составляющей X равна (см.формулу(42))

$$\varphi_1(X) = \varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)dy = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Поэтому, имеем

$$\varphi(y \mid x) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \sqrt{1-r_{XY}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-r_{XY}^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2r_{XY} \cdot \frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]} :$$

$$: \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Произведём упрощения в экспоненте последней формулы, получим

$$-\frac{1}{2(1-r_{XY}^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2r_{XY} \cdot \frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right] + \frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2} \cdot \frac{1-r^2}{1-r^2} =$$

$$= -\frac{2}{(1-r^2)}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2r_{XY} \cdot \frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y} - \frac{(x-m_X)^2(1-r^2)}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right) =$$

$$= -\frac{2}{(1-r^2)}\left(\frac{r^2(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2r_{XY} \cdot \frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y} - r\frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\varphi(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma_Y \sqrt{1-r^2}\right)} \cdot e^{-\frac{\left(y-[m_Y + r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)]\right)^2}{2\left(\sigma_Y\sqrt{1-r^2}\right)^2}}. \tag{27}$$

Отсюда легко заметить, что условный закон распределения является нормальным с условным математическим ожиданием и условной дисперсией, определяемыми равенствами:

(28) $$M(Y\mid x)=m_Y+r\cdot\frac{\sigma_Y(x-m_X)}{\sigma_X} \text{ и } D(Y\mid x)=\sigma_Y^2(1-r^2).$$

Аналогично

(29) $$M(X\mid y)=m_X+r\cdot\frac{\sigma_X(y-m_y)}{\sigma_Y} \text{ и } D(X\mid y)=\sigma_Y^2(1-r^2).$$

Так как обе функции регрессии (28 и (29) линейны, то корреляция между с.в. X и Y линейная. Утверждение доказано.

Задача. Пусть (X,Y) – двумерная нормальная случайная величина с параметрами $m_X=m_Y=0,\ \sigma_X=\sigma_Y=1.$ Найти условную плотность распределения с.в. X при условии, $Y=y$ и с.в. Y при условии, $X=x$.

Указание. Воспользоваться формулами (16) и (17).

Рассмотрим пример, когда система с.в. подчинена линейному закону распределения.

Пример 7. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с функцией плотностью

$$\varphi(X,Y)=\begin{cases}C\cdot(x+y); & \textit{в области } (D),\\ 0; & \textit{вне области } (D).\end{cases}$$

Область (D) – квадрат, ограниченный прямыми линиями: $x=0, x=3; y=0, y=3.$

Требуется:

1) Определить коэффициент C;

2) вычислить вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрат $(Q)\subset(D),$ ограниченный прямыми линиями: $x=1, x=2; y=1, y=2;$

3) найти математические ожидания m_X и m_Y;

4) найти средние квадратичные отклонения $\sigma_X;\sigma_Y$.

Решение. 1) Коэффициент C находим из интегрального уравнения (контроль):

$$C\cdot\int_0^3\int_0^3(x+y)dxdy=1.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^3\int_0^3(x+y)dxdy=\int_0^3[(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^3]dx=\{\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\}\Big|_0^3=27.$$

Следовательно, $C=1/27$.

2) $$P\Big\{(X,Y)\subset(Q)=\frac{1}{27}\int_1^2\int_1^2(x+y)dxdy=\frac{1}{27}\int_1^2[(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_1^2]dx=\{\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\}\Big|_0^3=27.$$

3) Находим математические ожидания m_X и m_Y; имеем

$$m_X=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 x\cdot(x+y)dxdy=\frac{1}{27}\int_0^3[(x^2y+\frac{xy^2}{2})\Big|_1^2]dx=\frac{1}{27}\int_0^3(3x^2+\frac{9x}{2})dx=(27+\frac{81}{4})=\frac{7}{4}.$$

Аналогично, находится и $m_Y=7/4$.

4) Находим среднеквадратичные отклонения σ_X и σ_Y: имеем

$$DX=\sigma_X^2=\iint_{(D)}(x-m_X)^2\varphi(x,y)dxdy=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3(x-\frac{7}{4})^2\cdot(x+y)dxdy=\frac{1}{27}.$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^2\cdot[(x-\frac{7}{4})+(y+\frac{7}{4})]dxdy=\frac{1}{27}=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^3\cdot dxdy+$$

$$+\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^2\cdot(y+\frac{7}{4})dxdy=\frac{1}{27}\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^2\cdot y\Big|_0^3 dx+\frac{1}{54}\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^2\cdot(y+\frac{7}{4})^2\Big|_0^3 dx=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{(x-7/4)^4}{4}\Big|_0^3+\frac{1}{27\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{361}{16}-\frac{49}{16}\right)\cdot(x-\frac{7}{4})^3\cdot\Big|_0^3=\frac{11}{16}.$$

Задание.

1. Найти в примере 7, ковариацию K_{XY} системы случайных величин (X,Y) и коэффициент корреляции r_{XY}.

2. Найти законы распределения составляющих дискретной двумерной случайной величины, заданной законом распределения

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,12	0,18	0,10
y_2	0,10	0,11	0,39

Ответт. $X:\ x_1,\ x_2,\ x_3;\quad Y:\ y_1,\ y_2,$

$P:\ 0{,}22;\ 0{,}29;\ 0{,}49;\quad P: 0{,}40;\ 0{,}60.$

3. Найти вероятность того, что составляющая X двумерной случайной величины примет значение $X<1/2$ и при этом составляющая Y примет значение $y<1/3$, если известна, что интегральная функция системы

$$\Phi(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg2x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg3y+\frac{1}{2}\right).$$

Ответ. $P\left(X<\frac{1}{2};Y<\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{16}.$

4. Найти вероятность попадания случайной точки *(X, Y)* в прямоугольник, ограниченный прямыми: $x=\pi/4;$ $x=\pi/2;$ $y=\pi/6;$ $y=\pi/3;$ если известна интегральная функция

$$\Phi(x,y)=\sin x\sin y;\ \left(0<x<\frac{\pi}{2},0<y<\frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ. $P\left(\frac{\pi}{4}<X<\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}<Y<\frac{\pi}{3}\right)=0{,}11.$

5. Найти дифференциальную функцию системы двух случайных величин по известной интегральной функции

$$\Phi(x,y)=(1-e^{-2x})(1-e^{2y});\quad (x\ge 0, y\ge 0).$$

Ответ. $$\varphi(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=6e^{-(2x+3y)}.$$

6. Системы двух с.в. (X,Y) подчинена равенствами:

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} C\cdot\sin(x+y); \; \textit{в} \;\; \textit{области} \; (D), \\ 0; \;\; \textit{вне области} \; (D). \end{cases}$$

Область (D), определяется неравенствами: $0\le x\le \pi/2;\;\; 0\le y\le \pi/2.$

Найти:

1) определить коэффициент C.

2) $\Phi(x,y)=?$

3) математические ожидания m_X и m_Y;

4) средние квадратичные отклонения σ_X и σ_Y;

5) ковариацию K_{XY} системы случайных величин (X,Y) и коэффициент корреляции r_{XY}.

Отв. 1) $C=0{,}5$; 2) $m_X=m_Y=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\Phi(x,y)=0{,}5[\sin x+\sin y-\sin(x+y)]$.

3) $\sigma_X=\sigma_Y=\dfrac{\sqrt{\pi^2+8\pi-32}}{4}\Rightarrow \sigma_X\cdot\sigma_Y=\sigma_X^2=\sigma_Y^2=(\pi^2+8\pi-32)/16$.

4) $K_{XY}=\dfrac{8\pi-16-\pi^2}{16}$; $r_{XY}=\dfrac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32}\approx-\dfrac{0{,}73688}{3{,}00232}\approx-0{,}2454.$

7. Система двух случайных величин распределена равномерно: в прямоугольнике (G), ограниченном прямыми линиями: $x=4; x=6; y=10; y=15$, дифференциальная функция сохраняет постоянное значение, а вне этого прямоугольника она равна нулю.

Найти: а) дифференциальную функцию, б) интегральную функцию системы

Ответы. а) $\varphi(x,y)=\begin{cases} 0{,}1; \; \textit{в области} \; (D), \\ 0; \;\; \textit{вне области} \; (D), \end{cases}$

$$\textit{б)}\;\; \Phi(x,y)=\frac{(x-4)(y-10)}{10}.$$

8. Пусть дифференциальная функция системы двух случайных величин имеет вид

$$\varphi(x,y)=\frac{C}{(4+x^2)(9+y^2)}.$$

Найти: а) величину C, б) интегральную функцию системы

Отв. $a)\; C=\dfrac{6}{\pi^2}$; $б)\;\; \Phi(x,y)=\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{y}{3}+\dfrac{1}{2}\right).$

9. Двумерная случайная величина задана дифференциальной функцией

$$\varphi(x,y)=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}e^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Найти условные законы распределения составляющих

Отв. $\varphi(x\,|\,y)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2}$; $\varphi(y\,|\,x)=\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+3y)^2}.$

10. Система с.в. (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} C\cdot(x^2+y^2), \ \textit{при}\ x^2+y^2\le r^2, \\ 0; \qquad\qquad \textit{при}\ x^2+y^2>r^2, \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент C.

б) $\Phi(x,y)=?$

Указание. Коэффициент C следует определить из равенства

$$C\cdot\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy=1(\text{контроль}).$$

где (D) – круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=r^2$. Переходите к полярным координатам, тогда

$$C\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r}\rho^3 d\rho d\theta=1,\ 2\pi C\cdot\frac{r^4}{4}=1\Rightarrow C=\frac{2}{\pi r^4}.$$

Функцию совместного распределения $\Phi(x,y)$ нужно определить из (12) (см. Т.11.,п.11.6).

<u>Тема 13</u>. Многомерная случайная величина (общие сведения)

1. Многомерная случайная величина

В этом разделе кратко рассмотрим систему n случайных величин, где $n-$любое натуральное число, большее 2. Система n случайных величин определяется аналогично, что и система двух случайных величин.

Систему n случайных величин называют $n-$*мерной (многомерной)* с.в. или случайным вектором $\vec{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.

Многомерная с.в. есть функция элементарного события ω: $(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\varphi(\omega)$. Каждому элементарному событию ω ставится в соответствие n действительных чисел $x_1,x_2,\cdots,x_n$, которые принимают соответственно случайные величины $X_1,X_2,\ldots,X_n$ в результате некоторого испытания (опыта). Вектор $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ называется *реализацией* случайного вектора $(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\vec{X}$.

Закон распределения вероятностей $n-$мерной случайной величины задается её функцией распределения

(1) $$\Phi_{\vec{X}}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(X_1<x_1;X_2<x_2;\ldots;X_n<x_n).$$

Функция распределения $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ обладает такими же свойствами, как и функция распределения двух случайных величин $\Phi(x,y)$.

В частности, она принимает значения на отрезке $[0,1]$:

$$\Phi(-\infty,-\infty,\ldots,-\infty)=0;\ \ \Phi(+\infty,+\infty,\ldots,+\infty)=1;$$

$$\Phi_k(x_k)=\Phi(+\infty,+\infty,\ldots,+\infty,x_k,+\infty,\ldots,+\infty);\quad 1\le k\le n.$$

Если $x_k<x_k'$, то $\Phi_k(x_k)\le\Phi_k(x_k')$, то есть монотонно возрастает по каждому аргументу и т.д.

Тема 14. Функции случайных величин

Часто возникают задачи, в которых по известному закону распределения (или числовым характеристикам) одной (или нескольких) случайной величины требуется определить распределение другой (или нескольких) с.в., функционально связанные между собой.

1. Функция одного случайного аргумента

Если каждому возможному значению с.в. X по определённому правилу соответствует одно возможное значение с.в. Y, то Y называют функцией случайного аргумента X, записывают $Y = f(X)$.

Пусть X – д.с.в. с возможными значениями $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ с соответствующими вероятностями, $p_j = P(X = x_j)$; $j = 1, 2, \ldots, n.$ Очевидно, что с.в. $Y = f(X)$ является также д.с.в. с возможными значениями, $y_j = f(x_j)$; $j = \overline{1, n}$; вероятности которых равны соответственно $p_j = P\{Y = y_j\} = P\{X = x_j\}$; $j = \overline{1, n}.$

Отметим, что различным значениям с.в. X могут соответствовать одинаковые значения с.в. Y. В этом случае вероятности повторяющихся значений нужно складывать и это число будет вероятностью этой повторяющееся значения случайной величины.

Математическое ожидание и дисперсия функции $Y = f(X)$ определяется соответственно равенствами:

$$MY = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) p_k; \quad DY = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - m_Y]^2 p_k.$$

Пример 1. Задан закон распределения д.с.в. X :

X	-1	1	2
P	0, 1	0,3	0,6

Найти MY, если: 1) $Y = X^2$; 2) $Y = 2X + 10.$

Решение. 1) Перечислим значения с.в. $Y = X^2 = \{1, 4\}$; Отсюда получим соответствующие вероятности

$p_1 = P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = +1) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4;$ $p_2 = P(Y = 4) = P(X = 2) = 0{,}6.$

Найдём закон распределения функции $Y = X^2$:

Следовательно, $MY = 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}8.$

Для сравнения найдём $MX = (-1) \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}4;$

2) Найдём закон распределения $Y = 2X + 10$:

Y	8	12	14
P	0, 1	0,3	0,6

Следовательно, $MY = 8 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}3 + 14 \cdot 0{,}6 = 12{,}8.$

Задание. Найти $DX; DY = DX^2; DY = D(2X + 10)$.

Пусть $X -$непрерывная с.в. с плотностью распределения $\varphi_X(x) = \varphi(x)$, а с.в. Y есть функция от с.в. X *т.е.* $Y = f(X)$. Найдём закон распределения с.в. $Y = f(X)$.

Для дальнейшего будем считать функцию $Y = f(X)$ непрерывной, строго возрастающей и дифференцируемой в интервале (a,b) (отрезок может быть вся числовая прямая $(-\infty, +\infty)$) всех возможных значений с.в. X.

Тогда существует функция $x = g(y)$, обратная к функции $y = f(x)$ (случайная точка (X,Y) лежит на графике кривой $y = f(x)$).

Определим функцию распределения с.в. Y, $G_Y(x) = P(Y < y)$. Или можно пользоваться и другими обозначениями: $G(y); \Phi_Y(y)$ *или* $\Phi_Y(x)$.

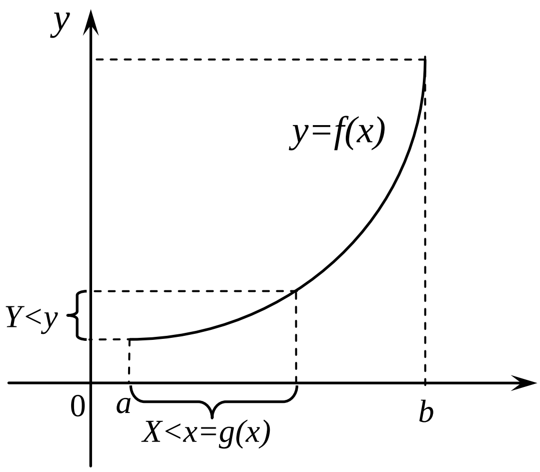


Рисунок 53

Поскольку событие $\{Y < y\}$ эквивалентно событию $\{X < g(y)\}$, то

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{X < g(y) = \Phi_X(g(y)) = \int_a^{g(y)} \varphi(x)dx, \text{ т.е.}$$

$$G(y) = \int_a^{g(y)} \varphi(x)dx.$$

Дифференцируя это равенство по y, найдём плотность распределения с.в. Y:

$$h(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \varphi[g(y))] \cdot \frac{d}{dy}(g(y)) = \varphi[g(y)] \cdot g'(y), \text{т.е.}$$

(1) $$\varphi_Y(y) = f(g(y) \cdot g'(y).$$

Если функция $y = f(x)$ в интервале (a,b) строго убывает, то событие $\{Y < y\}$ эквивалентно событию $\{X > g(y)\}$. Поэтому

$$G(y) = \int_{g(y)}^{b} \varphi(x)dx = -\int_b^{g(y)} \varphi(x)dx.$$

Отсюда следует, что

(2) $$\varphi_Y(y) = -\varphi_X[g(y)] \cdot g'(y).$$

Учитывая, что плотность распределения не может быть отрицательной, формулы (1) и (2) можно объединить в одну

(3) $$\varphi_Y(y) = \varphi_X[g(y)]\cdot|g'(y)|.$$

Эта формула верна и для взаимно однозначных (для них существует обратная функция) кусочно монотонных функций $f(x)$. Тот факт, что для счётного числа точек (концов интервалов монотонности) формулой (3) значение функции плотности не определяются, не является принципиальным. Плотности на выделенном счётном множестве можно придать любое значение, при этом функция распределения не изменится в силу свойства интеграла.

Пример 2. Найти плотность распределения функции $Y = -5X + 2,$ при условии, что с.в. X имеет плотность $\varphi(x)$.

Решение. Функция $y = -5x + 2,$ монотонно убывает в интервале $(-\infty;+\infty)$. Обратная функция есть $x = \frac{1}{5}(2-y) = g(y),\ g'(y) = -\frac{1}{5}.$

На основании формулы (3)получим:

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X(\frac{2-y}{5})\cdot\left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}\varphi_X(\frac{2-y}{5}),\ y \in (-\infty;+\infty).$$

Покажем на этом примере как выводится формула для плотности и функции распределения с.в. Y:

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{-5X + 2 < y\} = P\left\{X > \frac{2-y}{5}\right\} =$$

$$1 - P\left\{X \le \frac{2-y}{5}\right\} = 1 - P\left\{X < \frac{2-y}{5}\right\} - P\left\{X = \frac{2-y}{5}\right\} = 1 - P\left\{X < \frac{2-y}{5}\right\}$$

$$= 1 - \Phi_X\left\{\frac{2-y}{5}\right\};\ \textit{так как}\ P\left\{X = \frac{2-y}{5}\right\} = 0.$$

Далее вычислим функцию плотности с.в. Y. Имеем по определению

$$\varphi_Y(y) = G_Y'(y) = \left\{1 - \Phi_X(\frac{2-y}{5}\right\}_y' = -\varphi_X\left(\frac{2-y}{5}\right)\cdot\left(\frac{2-y}{5}\right)' = -\varphi_X\left(\frac{2-y}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right),$$

Следовательно, $\varphi_Y(y) = \frac{1}{5}\varphi_X\left(\frac{2-y}{5}\right);\ y \in (-\infty;+\infty).$

Замечание. Если функция $Y = f(X)$ не монотонна в интервале (a,b), то для нахождения функции плотности с.в. Y следует разбить интервал на n участков монотонности, затем найти обратную функцию на каждом из них и воспользоваться формулой

(4) $$\varphi_Y(y) = \sum_{k=1}^{n} f(g_k(y))\cdot|g'(y)|.$$

Существует широкий класс функций $f(x)$, не обязательно монотонных, для которых $Y = f(X)$ будет случайной величиной. К нему относятся, например, все непрерывные функции.

Если с.в. X является непрерывной и $\varphi_X(x)$ её плотность распределения, то для нахождения числовых характеристик с.в. $Y = f(X)$ необязательно находить закон её распределения, можно воспользоваться формулами:

(5) $$MY = M[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx;\ DY = \int_{-\infty}^{+\infty}[f(x) - m_X]^2\varphi(x)dx.$$

Обсуждение общей проблемы выходит за рамки нашей книги (В общем случае к этим вопросам довольно плодотворно применяется теория суммируемых функций и интегралов Стилтьеса), и мы рекомендуем читателям обратиться к фундаментальным книгам ([1], [7]).

В частности, отметим, что линейное преобразование $Y = kX + b$ *не меняет характера распределения, т.е. из нормальной с.в. получается нормальная случайная величина, а из равномерной - получается равномерная.* Рассмотрим пример на равномерное распределение.

Пример 3. Пусть с.в. X имеет равномерное распределение в интервале $\{-\pi/2; \pi/2\}$.

Найти математическое ожидание с.в. $Y = CosX$:

1) найти плотность $\varphi_Y(y)$;

2) не вычисляя функцию $\varphi_Y(y)$ найти математическое ожидание с.в. X .

Решение. 1) Легко заметить, что функция плотности $\varphi_X(x)$ с.в. X определяется равенствами (воспользуемся свойством функции плотности)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x \in \left\{-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right\}, \\ 0, & x \notin \left\{-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right\}. \end{cases}$$

В интервале $\{-\pi/2; \pi/2\}$. функция $Y = CosX$ не монотонна: в интервале $\{-\pi/2; 0\}$. функция возрастает, в $\{0; \pi/2\}$ – убывает. На первом участке обратная функция $x_1 = g_1(y) = -arcCosy$, на втором $x_2 = g_2(y) = arcCosy$. На основании формулы (4) имеем

$$\varphi_Y(y) = f[g_1(y)] \cdot |g_1'(y)| + f[g_2(y)] \cdot |g_2'(y)| =$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot |(1-y^2)^{-1/2}| + \frac{1}{\pi} \cdot |-(1-y^2)^{-1/2}| = \frac{2}{\pi} \cdot (1-y^2)^{-1/2},$$

т.е.

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \cdot (1-y^2)^{-1/2}; & 0 < y < 1, \\ 0, & y \notin (0,1). \end{cases}$$

Тогда

$$MY = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi_Y(y) dy\right] = \int_0^1 y \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1-y^2\right)^{-1/2} d(1-y^2) = -\frac{1}{\pi} \cdot 2\sqrt{1-y^2} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

т.е. $MY = 2/\pi$.

2) Воспользуемся непосредственно формулой (5)

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} Cosx \cdot \frac{1}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} Sinx \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{1}{\pi}(1-(-1) = \frac{2}{\pi},$$

т.е. $MY = 2/\pi$, оба результата одинаковые.

Задание. 1. Вычислить дисперсию и стандарт с.в. Y .

Рассмотрим следующую классическую задачу.

Задача (обратное распределение Коши). Случайная величина X имеет распределению Коши с плотностью распределения. Имеем

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad при \ -\infty < x < +\infty. \qquad \text{(см. пункт 7.4. пример 8.)}$$

Вычислить плотность распределения обратной случайной величины $Y = X^{-1}$.

Решение. Функция $y = x^{-1}$ не определена в нуле, убывает на интервалах $(-\infty;0),\ (0;+\infty)$ имеет однозначную обратную функцию $x = y^{-1}$. Применяя формулу $(*)$ получим

$$\varphi_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^{-2})y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad при \ -\infty < y < +\infty,$$

Следовательно, величина, обратная величине, распределённой по закону Коши, также имеет распределение Коши.

2. Функция двух случайных аргументов

При рассмотрении данного раздела в основном будем следовать изложению из книги [8].

Для успешного решения ряда практических задач нужно знать закон распределения (или числовые характеристики) следующих случайных величин: $Z = X \pm Y$; $Z = X \cdot Y$; $Z = \max\{X, Y\}$ $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$; и других.

Приведём общее определение функции для двух случайных величин.

Каждой паре с.в. X ; Y по заданному правилу f, ставим в соответствие вполне определённое значение с.в. Z, то Z называется функцией *двух случайных аргументов* X и Y, и обозначают в виде: $Z = f(X, Y)$.

Рассмотрим закон распределения с.в. $Z = X + Y$, наиболее часто встречающийся на практике. Пусть система двух непрерывных с.в. (X, Y) имеет совместную плотность распределения $\varphi(x, y)$. Тогда в соответствии со свойствами плотности двумерной с.в. (X, Y)
(см.11.6. равенство (11)) найдём функцию распределения с.в. $Z = X + Y$.

$$\Phi_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = \iint_{D_z} \varphi(x, y)\,dxdy.$$

Здесь D_z – множество точек плоскости $0xy$, координаты которых удовлетворяют неравенству
$x + y < z$, (см. рис. 54).

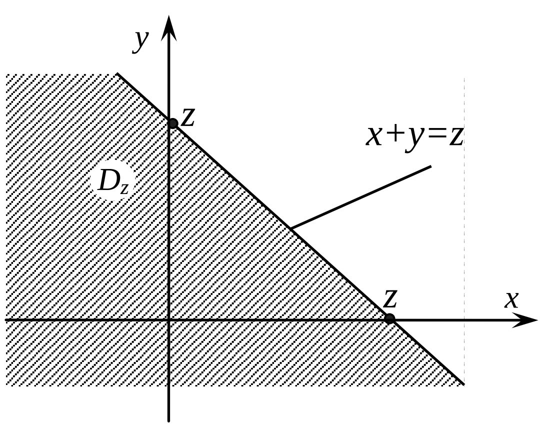


Рисунок 54

Следовательно, имеем

$$\Phi_Z(z) = P\{X + Y < z\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{z-x}\varphi(x,y)dy\right)dx.$$

Дифференцируя полученное равенство по переменной z, входящей в верхний предел внутреннего интеграла, получаем выражение для плотности распределения с.в. $Z = X + Y$:

(6) $$\Phi'_Z(z) = \varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, z-x)dx.$$

Если с.в. X и Y являются *независимыми*, то согласно равенству $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)$, то из (6) получим

(7) $$\varphi_Z(z) = \varphi_{X+Y}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x)\varphi_2(z-x)dx.$$

Закон распределения суммы независимых с.в. называется *композицией* или *свёрткой* законов распределения слагаемых. Для них принято специальное обозначение: $\varphi_{X+Y} = \varphi_X * \varphi_Y$,
где $*$ – знак свёртки, а формул (7) называют формулой свёртки или формулой композиции двух распределений. В равенстве (6) записав Z в виде $Z = Y + X$, можно получить и другое представление для $\varphi_Z(z)$, а именно

$$\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z-y, y)dy,$$

и для независимых случайных величин Y и X формулу (7) можно переписать в виде

(8) $$\varphi_Z(z) = \varphi_{Y+X}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(z-y)\varphi_2(y)dy.$$

Аналогично решаются задачи нахождения законов распределения с.в. $Z = X - Y,\ Z = X\cdot Y$ и других. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 4. Независимые с.в. X и Y распределены равномерно $X \approx \Re[0;4]$ и $Y \approx \Re[0;1]$. Найти плотность распределения вероятностей с.в. $Z = X + Y$ (рис. 55)

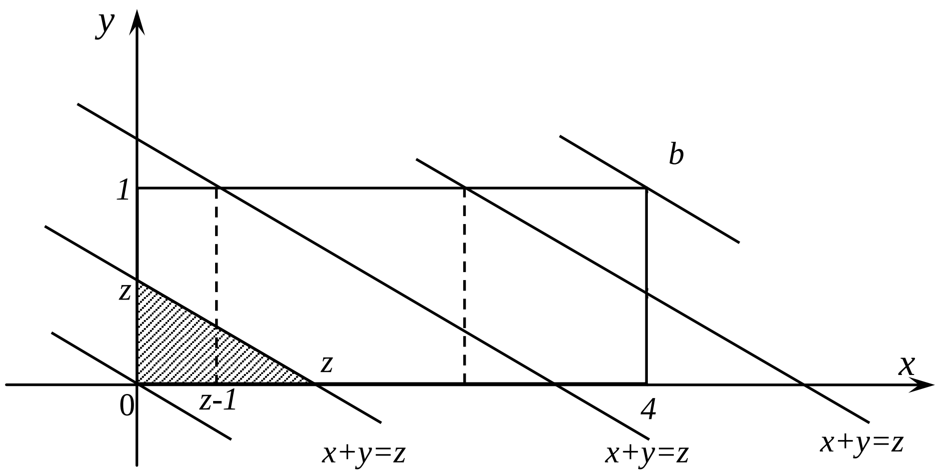


Рисунок 55

Решение. По условию система случайных величин (X,Y) равномерно распределена в прямоугольнике $D = \{0 \le x \le 4 : 0 \le Y \le 1\}$, следовательно,

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1/4; & x\in[0;4],\\ 0: & x\notin[0;4],\end{cases}\qquad \varphi_2(y)=\begin{cases}1; & y\in[0;1],\\ 0; & y\notin[0;1].\end{cases}$$

По условию с.в. X и Y являются независимыми, то $\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)=1/4\cdot 1=1/4$, и

$$\Phi_Z(z)=P\{X+Y<z\}=\iint\limits_{(x+y<z)}\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}S_{D_z},$$

где S_{D_z} – площадь области D_z – части прямоугольника, лежащей ниже прямой $x+y=z$: т.е.

1. если $z\le 0$, то $\Phi(z)=0$;
2. если $0<z\le 1$, то $\Phi(z)=0{,}25\cdot 0{,}5z^2$ (так как $S_{D_z}=0{,}5z^2$);
3. если $0<z\le 1$, то $\Phi(z)=0{,}25\cdot\big(0{,}5\cdot(z-1+z)\cdot 1\big)=0{,}125(2z-1)$;
4. если $4<z\le 5$, то $\Phi(z)=0{,}25\cdot\big(1\cdot 4-0{,}5\cdot(5-z)(5-z)\big)=0{,}125(8-(5-z)^2)$;
5. если $5<z$, то $\Phi(z)=0{,}25\cdot 4=1$.

Итак,

$$\varphi(z)=\Phi_Z'(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\ z>5,\\ 0{,}25z, & 0<z\le 1,\\ 0{,}25, & 1<z\le 4,\\ 0{,}25\cdot(5-z), & 4<z\le 5.\end{cases}$$

Проверим контроль:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)dz=\int\limits_0^1 0{,}25zdz+\int\limits_1^4 0{,}25dz+\int\limits_4^5 0{,}25\cdot(5-z)dz=1.$$

Полученную плотность распределения $\varphi_Z(z)$ можно найти другим способом, используя формулу (7), т.е. на основании равенства

$$\varphi(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x)\varphi_2(z-x)dx.$$

Имеем

$$\varphi(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\varphi_2(z-x)dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^4\varphi_2(z-x)dx.$$

Функция под знаком интеграла отлична от нуля лишь в случаях

$$\begin{cases}0\le x\le 4,\\ 0\le z-x\le 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 4,\\ z-1\le x\le z,\end{cases}\tag{9}$$

Решение системы зависит от значения z.

1. Если $z\le 0$, то система не имеет решений, так как отрезки $[0;4]$ и $[z-x;z]$ не пересекаются. Следовательно, $\varphi_2(z-x)=0$ и $\varphi_{X+Y}(z)=0$.

2. Если $0<z\le 1$, то система (9) эквивалентна неравенству $0\le x<z$, поэтому

$$\varphi(z)=\varphi_{X+Y}(z)=\frac{1}{4}\int\limits_0^z 1\cdot dx=\frac{1}{4}x\Big|_0^z=\frac{z}{4}.$$

3. Если $0<z\le 1$, то система (9) эквивалентна неравенству $z-1\le x<z$, поэтому

$$\varphi(z)=\varphi_{X+Y}(z)=\frac{1}{4}\int\limits_{z-1}^z 1\cdot dx=\frac{1}{4}x\Big|_{z-1}^z=\frac{1}{4}(z-z+1)=\frac{1}{4}.$$

4. Если $4 < z \le 5$, то система (9) эквивалентна неравенству $z-1 \le x < 4$, поэтому

$$\varphi(z) = \varphi_{X+Y}(z) = \frac{1}{4}\int_{z-1}^{4} 1 \cdot dx = \frac{1}{4} x \Big|_{z-1}^{4} = \frac{1}{4}(4 - z + 1) = \frac{(5-z)}{4}.$$

5. Если $5 < z$ то система (9) не имеет решений, поэтому $\varphi_{X+Y}(z) = 0.$

Таким образом, на основании 1.-5. получим

$$\varphi(z) = \Phi'_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0,\ z > 5, \\ 0{,}25z, & 0 < z \le 1, \\ 0{,}25, & 1 < z \le 4, \\ 0{,}25 \cdot (5-z), & 4 < z \le 5. \end{cases}$$

Задание. Изобразите на отрезках прямых линий (на разных параллельных линиях) интервалы изменения переменных x и z заштриховывая их в каждом из пяти случае.

Пример 5. Совместное распределение с.в. X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x + y, \ \textit{при} \ \ x \in [0;1];\, y \in [0;1], \\ 0, \qquad \textit{при} \ \ x \notin [0;1];\, y \notin [0;1]. \end{cases} \tag{10}$$

Найти функцию распределения и с помощью дифференцирования плотность распределения вероятностей с.в. $Z = X - Y$.

Решение. Сначала найдём функцию распределения $\Phi(z)$ с.в. $Z = X - Y$, а затем вычислим её производную $\Phi'(z) = \varphi_Z(z)$. В соответствии с формулой (11) пункта 11.6 имеем

$$\Phi_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X - Y < z\} = \iint_{D_z} (x + y)\, dxdy,$$

где D_z выражает множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x - y < z$,

т.е. $x - z < y$ (эти точки находятся выше прямой $y = x - z$), где z – произвольное число.

Ясно, что если $z \le -1$, то $\Phi(z) = 0$; так как по условию примера вне единичного квадрата $\varphi(x, y) = 0$

Область интегрирования D_z при $-1 < z \le 0$ изображена на рис. 56, при $0 < z \le 1$ – на рис. 57.

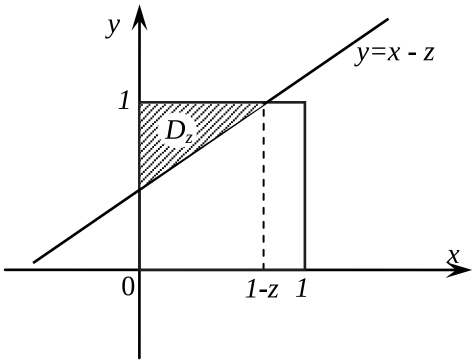


Рисунок 56

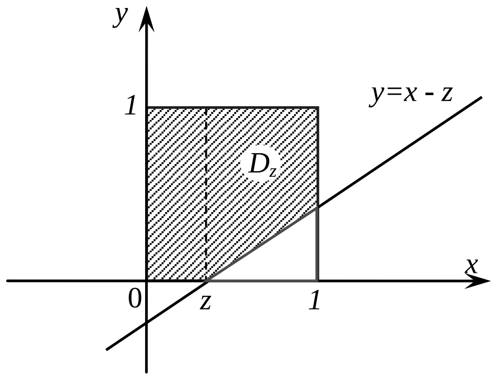


Рисунок 57

При $-1 < z \le 0$ имеем

$$\Phi_Z(z) = \iint_{D_z} (x + y)\, dxdy = \int_0^{1+z} dx \int_{x-z}^{1} (x + y) dy = \int_0^{1+z} dx \ (xy + \frac{y^2}{2}) \Big|_{x-z}^{1} =$$

$$=\int_0^{1+z}[x+\frac{1}{2}-x^2+xz-\frac{(x-z)^2}{2}]dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}+z\frac{x^2}{2}-\frac{(x-z)^3}{6}\right)\Big|_0^{1+z}=$$

$$=\frac{(1+z)^2}{2}+\frac{1+z}{2}-\frac{(1+z)^3}{3}+\frac{z(1+z)^2}{2}-\frac{1}{6}-\frac{z^3}{6}=\frac{(1+z)^3}{2}.$$

При $0<z\le 1$ имеем

$$\Phi_Z(z)=\iint_{D_z}(x+y)\,dxdy=\int_0^z dx\int_x^1(x+y)dy+\int_z^1 dx\int_{x-z}^1(x+y)dy=$$

$$=\int_0^z dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1+\int_z^1 dx\int_z^1 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x-z}^1=$$

$$=\int_0^z(x+\frac{1}{2})dx+\int_z^1[x+\frac{1}{2}-x^2+xz-\frac{(x-z)^2}{2}]dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^z+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}+z\frac{x^2}{2}-\frac{(x-z)^3}{6}\right)\Big|_z^1.$$

После стандартных подсчётов и упрощений окончательно получим

$$\Phi(z)=\frac{-z^2+2z+1}{2}.$$

Остаётся случай $z>1$, имеем

$$\Phi_Z(z)=\iint_{D_z}(x+y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1(x+y)dy=$$

$$=\int_0^1 (x+0{,}5)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1=1.$$

Таким образом, для функции распределения с.в. X получим

$$\Phi_Z(z)=\begin{cases}0\,, & при\quad z\le -1,\\ \dfrac{(z+1)^2}{2}\,, & при\quad -1<z\le 0,\\ \dfrac{(-z^2+2z+1)}{2}\,, & при\quad 0<z\le 1,\\ 1\,, & при\quad z>1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\Phi'_Z(z)=\varphi_Z(z)=\begin{cases}0, & при\ z\le -1;\ z>1,\\ z+1, & при\ -1<z\le 0,\\ 1-z, & при\ 0<z\le 1,\end{cases}$$

Проверим контроль.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)dz=\int_{-\infty}^{-1}0dz+\int_{-1}^{0}(z+1)dz+\int_{0}^{1}(1-z)dz+\int_{1}^{+\infty}0dz=1.$$

Упражнение. На основании условии (10) примера 5 найти функции и плотности распределения вероятностей случайных величин:

1. $Z=X+Y$, **2.** $Z=Y\cdot X^{-1}$**.**

Пример 6. Пусть X и Y независимые случайные величины, при этом $X\approx N_{(0,1)}$ и $Y\approx N_{(0,1)}$. Найти закон распределения с.в. $Z=X+Y$.

Решение. На основании формулы (7) получим

$$\varphi_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2x^2-2xz+z^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2\{(x-\frac{z}{2})^2+2xz+\frac{z^2}{4}\}}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^4}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-[x-\frac{z}{2}]^2}d(x-\frac{z}{2}).$$

На основании интеграла Пуассона $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\right)$ получим

$$\varphi_{X+Y}(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}.$$

Следовательно, сумма $Z=X+Y$ двух независимых нормальных с.в. X и Y с числовыми характеристиками: $m_X=0; m_Y=0;$ $\sigma_X=1;$ $\sigma_Y=1;$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m_Z=0,$ $\sigma_Z=\sqrt{2}.$

Тема 15. Распределение функций нормальных случайных величин

Рассмотрим распределения некоторых случайных величин, представленные функцией нормально распределённых с.в., часто используемые в математической статистике.

1. Распределение «χ^2- хи-квадрат или распределения Пирсона»

Пусть $X_j;(j=1,2,\cdots,n)-$ независимые случайные величины, распределённые по нормальному закону, при этом предполагается, что математическое ожидание и дисперсия каждого из них равны: $MX_j=0;$ $DX_j=1;$ $\sigma_{X_j}=1;$ $j=\overline{1,n}.$.

Распределением χ_n^2 *с* n ***степенями свободы*** *называется распределение суммы*

$$\chi^2=\sum_{j=1}^{n}X_j^2;\ X_j\approx N_{(0;1)}.$$

Плотность вероятности с.в. χ^2 *зависит только от числа слагаемых* n. *Например, если* $n=1$, *то* $\chi^2 = X^2$, *где* $X \approx N_{(0;1)}$, *а плотность распределения равна*

$$f_X(t) = \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Плотность вероятности с.в. χ^2 *при* $n \geq 2$ *определяется равенствами*

(1) $$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, & при \ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}, & при \ x > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ – гамма - функция Эйлера, $\operatorname{Re} z > 0$, в частности, $\Gamma(n+1) = n!$

С возрастанием числа n - степени свободы распределение χ^2 приближается к нормальному закону распределения (при $n > 30$ распределение χ^2 практически не отличается от нормального распределения), причём выполняются равенства:

(2) $$M\chi_n^2 = n, \ D\chi_n^2 = 2n.$$

На практике, как правило, используют не плотность вероятности, а квантили (Т.8.) распределения χ_n^2.

Квантилю распределения χ_n^2, соответствующей уровню значимости α, называется такое значение, $\chi_n^2 = \chi_{\alpha,n}^2$ при котором выполняется равенство

(3) $$P\{\chi_n^2 > \chi_{\alpha,n}^2\} = \int\limits_{\chi_{\alpha,n}^2}^{+\infty} f_{\chi_n^2}(x)dx = \alpha.$$

С геометрической точки зрения нахождение квантили $\chi_{\alpha,n}^2$ заключается в выборе такого значения $\chi_n^2 = \chi_{\alpha,n}^2$, чтобы площадь заштрихованной области на рис.58 фигуры была равна α.

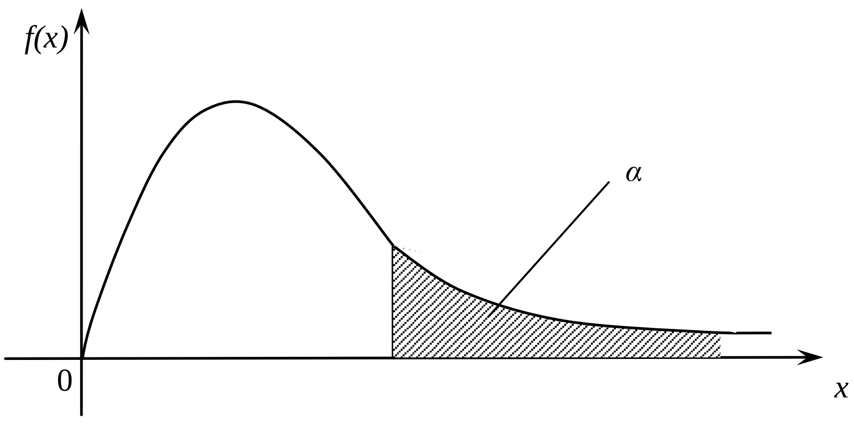


Рисунок 58

Значения квантилей $\chi_{\alpha,k}^2$ приводятся в специальных таблицах - приложениях

Для стандартного нормального распределения квантили уровня α обозначаются через $\pm u_\alpha$, при этом u_α является решением интегрального уравнения

(4) $$\Phi(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Следует заметить, что распределение χ^2 определяется одним параметром – числом степеней свободы n и с увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному закону. Распределение χ^2 так же называют критерием согласия Пирсона [10]. Оно позволяет проверить статистических гипотез о распределении вероятностей случайной величины.

2. Распределение Стьюдента

Пусть $Z \approx N_{(0\,;1)}$ - стандартная нормальная случайная величина, независящая от χ_n^2 – распределения, а $V -$ независимая от Z случайная величина, распределённая по закону χ_n^2.

Распределением Стьюдента (*или* $t-$*распределением*) *с* n степенями свободы называется распределение случайной величины

(5) $$T_n = \frac{Z\sqrt{n}}{\chi_n}.$$

(Стьюдент-псевдоним английского статистика В. Госсета).

Плотность вероятности Стьюдента имеет вид

(6) $$f_{T_n}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}; \quad -\infty < t < +\infty.$$

При $n \to \infty$ распределение Стьюдента приближается (начиная уже с $n > 30$ почти совпадает) к нормальному закону с математическим ожиданием и дисперсией:

(7) $$MT_n = 0; \quad DT_n = \frac{n}{n-2}; \quad n > 2.$$

На практике используют квантили $t-$распределения. Это такое значение $t = t_{(\alpha/2;\, n)}$, что

(8) $$P\left\{\, |t| > t_{(\alpha/2;\, n)} \right\} = 2\int_{t_{(\alpha/2,n)}}^{\infty} f(t)dt = \alpha.$$

С геометрической точки зрения задача нахождение квантилей заключается в выборе такого значения $t = t_{(\alpha/2;\, n)}$, чтобы площадь заштрихованной фигуры на рис. 59 была равна α.

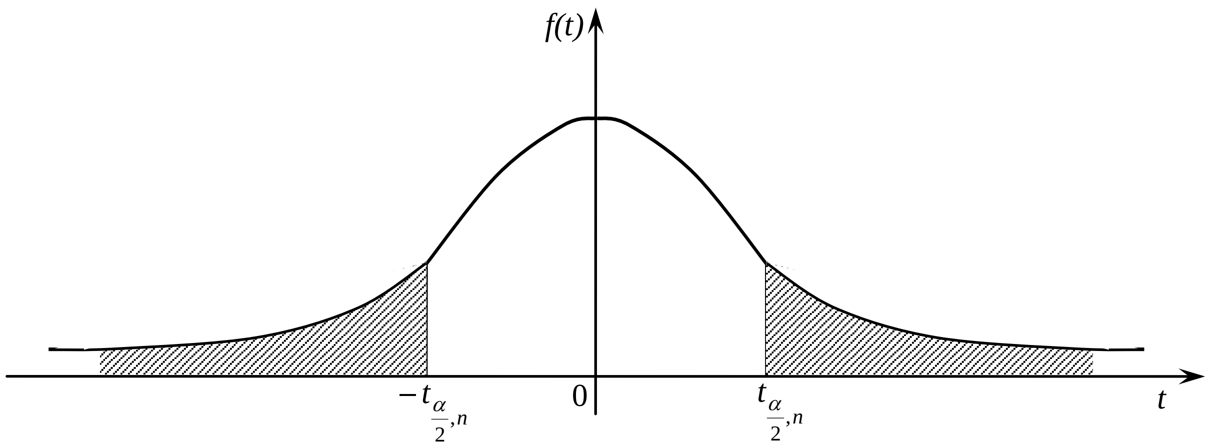


Рисунок 59

Мы ещё вернёмся к этому распределению в разделе «Математическая статистика».

3. Распределение Фишера – Снедекора (F – распределение)

Пусть $X = \chi_m^2$ и $Y = \chi_n^2$ – два независимые случайные величины, распределённые по закону χ^2 со степенями свободы соответственно m и n.

Распределением Фишера – Снедекора (или *F – распределением*) с m и n *степенями свободы* называется распределении с.в.

(9)
$$F = \frac{m^{-1}\chi_m^2}{n^{-1}\chi_n^2},$$

где χ_m^2 и χ_n^2 – независимые с.в., имеющие χ^2 – распределение соответственно с m и n степенями свободы. Плотность этого распределения равна

(10)
$$f(x) = \begin{cases} C_{m;n} \cdot \dfrac{x^{(m-2)/2}}{(n+mx)^{(m+n)/2}}, & при\ \ x > 0, \\ 0, & при\ \ x \le 0, \end{cases}$$

где
$$C_{m;n} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

При $n \to \infty$ F – распределение стремится к нормальному закону с числовыми характеристиками:

(11)
$$MF = \frac{n}{n-2}; \quad n > 2; \qquad DF = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}; \quad n > 4.$$

Обычно на практике используют квантили распределения в случаях, когда значение функции распределения $F = t_{\alpha,m,n}$ такое, что

(12)
$$P\{F > F_{(\alpha,m,n)}\} = \int_{F_{(\alpha,m,n)}}^{+\infty} f(F)\,dF = \alpha.$$

С геометрической точки зрения задача нахождение квантилей заключается в выборе такого значения величины $F = t_{\alpha,m,n}$, чтобы площадь заштрихованной области на рис. 60 была равна α.

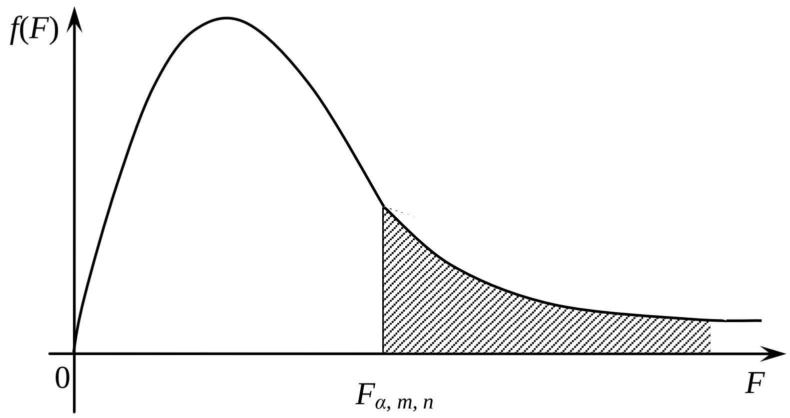


Рисунок 60

К этой теме мы ещё вернёмся более подробно в Т.20, (пункт 8.2).

ГЛАВА IV

Теория случайных процессов

Тема 16. Основы теории случайных процессов

1. Понятие случайной функции, стохастические процессы

При изучении многих явлений систематически приходится иметь дело со случайными величинами, изменяющимися в процессе проведения испытания в течение определённого времени. Мы уже встречались с примерами таких явлений в пунктах 6.2. и 9.2. в связи с законом распределения Пуассона.

Примерами таких с.в. являются: распад радиоактивного вещества при химической реакции, сигнал на выходе радиоприёмника под воздействием помех, длина очереди за билетом на футбольный матч, колебания цен в системе торговли товаров первой необходимости, загруженность студентов в течение учебного семестра, траектория частиц в броуновском движении, рейтинг претендентов в избирательных процессах, число вызовов поступающих на телефонную станцию, и т.д.

Такие случайные величины, изменяющиеся в процессе опыта (наблюдения, испытания) называют *случайными процессами* (*случайными функциями*). В настоящее время ряд отраслей техники и науки (физическая статистика, процесс диффузии, процессы химической реакции и т.д.) поставило перед теорией вероятностей новые задачи, не укладывающиеся в рамки классической теории вероятностей. В то время многие отрасли человеческой деятельности интересуют изучение процессов, то есть явлений, протекающих во времени. Они потребовали от науки теории вероятностей разработку общей теории, так называемых, случайных процессов. Другими словами, разработки теории, которая изучала бы случайные величины, зависящие от одного или нескольких непрерывно изменяющихся временных параметров. Приведём примеры таких задач, иллюстрирующих необходимость построения теории случайных процессов.

Представим себе, что мы хотим проследить за движением какой-либо молекулы газа или жидкости. Эта молекула в случайные моменты времени сталкивается с другими молекулами и меняет при этом свои скорость и положение. Очевидно, что состояние молекулы подвержено случайным изменениям в каждый момент времени. Многие явления природы требуют для своего изучения умения вычислять вероятности того, что определённое число явлений (молекул, изменение цен, поступление радиосигналов и т.д.) изменяет то или иное положение. На все эти и многие другие вопросы даёт ответ статистическая теория случайных процессов или, как принято её называть «***теория стохастических процессов***». Очевидно, что подобные задачи возникают в физике, химии, астрономии, экономике, генетике и др. Например, когда изучают процесс химической реакции, возникает законный вопрос:

- какая часть молекулы уже вступила в реакцию,
- как происходит эта реакция во времени,
- когда практически реакция уже закончилась?

Большое число явлений протекает по принципу радиоактивного распада. Суть этого явления состоит в том, что атомы радиоактивного вещества распадаются мгновенно, превращаясь в атомы другого химического элемента. Распад каждого атома происходит по времени быстро и с большой скоростью, подобно взрыву, с выделением определённого количества энергии. Как правило, многочисленные наблюдения показывают, что распад различных атомов для наблюдателя происходит в случайно взятые моменты времени. При этом расположение этих моментов времени не зависят друг от друга в смысле теории вероятностей. Для изучения процесса радиоактивного распада существенно определить какова вероятность того, что за определённый промежуток времени распадётся некоторое количество атомов? Формально, если задаваться только выяснением математической картины подобных явлений, то можно найти простое решение таких математических задач, к которым приводят подобные явления.

Вкратце изложим как, исходя из рассмотрения проблемы блуждания частиц по прямой, учёными Планком и Фоккером было получено дифференциальное уравнение в теории диффузии.

Пусть частица в момент времени $t=0$ в точке $x=0$, в моменты $k\tau;\ (k=1,2,3\cdots)$ испытывает случайные толчки, в результате которых она каждый раз перемещается с вероятностью p на величину h вправо и с вероятностью $q=1-p$ также на величину h влево.

Обозначим через $P(x,t)$ вероятность того, что частица в результате n толчков окажется в момент времени $t,\ (t=n\tau)$ в положении x (ясно, что при чётном числе толчков величина x может равняться лишь чётному числу шагов h, а при n нечётном – лишь нечётному числу шагов h). Если через m обозначить число шагов, сделанных частицей вправо (тогда $k=\ n-m$ есть число шагов, которые частица совершила влево), то согласно формуле Бернулли эта вероятность равна

$$P(x,t)=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Ясно, что эти величины связаны между собой равенством $m-(n-m)=x/h.$

Непосредственно, можно убедиться, что функция $P(x,t)$ удовлетворяет разностному уравнению

(1) $$P(x,t+\tau)=p\cdot P(x-h,t)+q\cdot P(x+h,t).$$

с начальными условиями $P(0,0)=1$, и при $x\neq 0$ $P(x,0)=0$. Физическая природа задачи заставит нас пойти, на определённые естественные ограничения по отношению параметров x,h,τ,p,q. Несоблюдение некоторых необходимых условий, о которых далее пойдёт речь, может привести к тому, что за конечный промежуток времени частица с вероятностью равной единице может уйти в бесконечность. Для того чтобы исключить такую возможность, накладываем на параметры следующие условия при $h\to\infty$

(2) $$x=nh,\quad t=n\tau,\ \frac{h^2}{\tau}\to 2D,\ \frac{p-q}{h}\to\frac{c}{D},$$

где величина c выражает *скорости течения*, а $D-$ *коэффициент диффузии.*

Отнимем от обеих частей равенства (1) величину $P(x,t)$, получим

(3) $$P(x,t+\tau)-P(x,t)=p[P(x-h,t)-P(x,t)]+q[P(x+h,t)-P(x,t)].$$

Предположим, что функция $P(x,t)$ дифференцируема по x дважды и один раз по t. Тогда имеем

$$P(x,t+\tau)-P(x,t)=\tau\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}+o\ \ (\tau),$$

$$P(x+h,t)-P(x,t)=h\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}+0{,}5\cdot h^2\ \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}+o\ \ (h^2),$$

$$-P(x,t)+P(x-h,t)=-h\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}+0{,}5\cdot h^2\ \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}+o\ \ (h^2),$$

где $\{g(u)=o(u)$ *при* $u\to 0$, *означает, что* $\lim\limits_{u\to 0}[g(u)/u]=0\}$.

После подстановки полученных равенств в (3) имеем

$$\tau \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + o\ \ (\tau) = -(p-q)h\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + 0{,}5\cdot h^2\ \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} + o\ \ (h^2).$$

Отсюда, переходя к пределу $h \to \infty$ и на основании условий (2) получим окончательно

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -2c\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Таким образом, мы получили известное уравнение, носящее в теории диффузии название *уравнения Фоккера – Планка*.

Начало общей теории стохастических процессов было положено в фундаментальных работах А.Н. Колмогорова и А.Я. Хинчина в начале 30 – х годов. В статье А.Н. Колмогорова «Об аналитических методах теории вероятностей» было дано систематическое и строгое построение основ теории стохастических процессов *без последействия* или, как часто говорят, процессов Марковского типа. В ряде работ Хинчина была создана теория, так называемых, стационарных процессов.

Таким образом, раздел математики, изучающий случайные явления в динамике их развития, называется *теорией случайных процессов* (*случайных функций*). Эти методы часто используются: в теории автоматического управления, при анализе и планировании финансовой деятельности предприятий и хозяйств, при обработке и передаче необходимых информаций (сигналов в радиотехнических устройствах, спутниковых связей и др.), в экономике и в теории массового обслуживания.

Кратко рассмотрим основные понятия теории случайных процессов (СП).

Если каждому значению $t \in T$, где T обозначает некоторое множество действительных чисел, поставлена в соответствие с.в. $X(t)$, то говорят, что на множестве T задана случайная функция (с.ф.) $X(t)$. Случайные процессы, у которых $T = [0,+\infty)$, особенно важны в приложениях. В тех случаях, когда параметр t интерпретируется как временной параметр, то случайная функция называется *случайным процессом, т.е. случайным процессом* называется семейство с.в. $X(t,\omega)$, зависящих от параметра $t \in T$ и заданных на одном и том же пространстве элементарных событий Ω. Обозначается $X(t,\omega)$ или $X(t), X_t$.

Случайный процесс можно задать в виде формулы (аналитической записи), если вид случайной функции известен. Например, с.ф. $X(t) = Y \cdot S\,\text{int},\ t \geq 0,$ является с.п., где случайная величина $Y \approx \Re_{[0,1]}$ имеет равномерное распределение. При фиксированном значении t, $(t = t_0 \in T)$, с.п. $X(t,\omega)$,то с.п. обращается в с.в. $X(t_0,\omega),$ которую называют сечением случайного процесса.

Реализацией или *траекторией* случайного процесса $X(t,\omega)$ называется *неслучайная* функция времени $x(t) = X(t,\omega_0)$ при фиксированном $\omega = \omega_0 \in \Omega$, т.е. в результате испытания с.п. принимает конкретный вид $X(t,\omega_0)$, при этом реализации с.п. обозначают через $x_1(t), x_2(t),\ ,\cdots,$ где индексы указывают на номер испытания.

На рис.61 показаны три реализации $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ случайного процесса при $\omega = \omega_1$;

$\omega = \omega_2;\ \omega = \omega_3.$ Они напоминают виды трёх синусоидальных колебательных явлений в некотором механическом процессе, при этом каждая такая реализация (траектория) является обычной функцией $x(t)$.

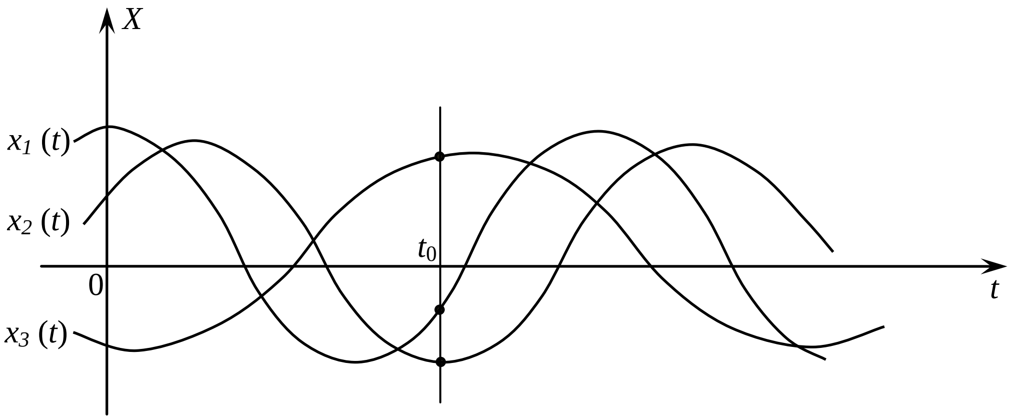


Рис унок 61

В данном примере с.в. Y в трёх опытах приняла соответственно три значения: 1, 2, 0,5, т.е. констатируется три реализации СП: $x_1(t) = Sin t, \quad x_2(t) = 2Sin t, \quad x_3(t) = 0{,}5 \cdot Sin t$. Все три функции являются неслучайными. Если в этом примере зафиксировать момент времени, при $t = \pi/2$, то получим сечение: $X(\pi/2) = Y$ - случайная величина или при $t = \pi/4$, $X(\pi/4) = (\sqrt{2}/2) \cdot Y, \cdots$ - случайные величины. Отметим, что $\Phi_t(x) = P\{X(t) < x\}$ – так называемый *одномерный закон распределения случайного процесса* $X(t)$ не является *исчерпывающей характеристикой с.п.* Случайный процесс $X(t)$ представляет собой совокупность всех сечений при различных значениях $t \in T$, поэтому для полного его описания следует рассматривать совместную функцию распределения сечений процесса:

$$\Phi_{(t_1, t_2, \cdots, t_n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \cdots, X(t_n) < x_n\} -$$

так называемый конечномерный закон распределения с.п. в моменты $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$. Другими словами возникают многомерные с.в. $\{X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)\}$.

Таким образом, понятие с.п. является прямым обобщением понятия системы случайных величин, когда этих величин – бесконечное множество.

2. Процесс Пуассона

Распределение Пуассона как один из предельных законов подробно рассматривали в пунктах 6.2, 9.2. В этом разделе ещё раз возвращаемся к этому закону уже с точки зрения теории случайных процессов. В пункте 6.2. было введено некоторые предварительные понятия относительно простейшего потока событий. Кратко напомним о них ещё раз.

Потоком событий называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени.

Рассмотрим процесс без последействия, имеющий важное значение в современной физике, теории связи, теории надёжности и в теории массового обслуживания. Предполагают, что этот процесс был впервые подвергнуть исследованию в начале XX века физиками А. Эйнштейном и М. Смолуховским в связи с задачами броуновского движения.

Предположим, что в случайные моменты времени происходит некоторое событие. Нас интересует число появления этого события в промежуток времени от 0 до *t*. Относительно процесса появления события предполагается выполнение трёх условий, о которых ниже напомним ещё раз.

Среди основных свойств, которыми могут обладать потоки, выделяются три свойства: ***стационарности, ординарности*** и ***отсутствия последействия.***

1. ***Стационарность*** означает, что для любой группы из конечного числа между собой непересекающихся промежутков времени вероятность появления определённого числа событий на протяжении каждого из них зависит только от этих чисел и от длительности промежутков времени, и не зависит от сдвига всех отрезков времени на одну и ту же величину. В частности, вероятность появления k событий в течении промежутка времени от τ до $\tau + t$ не зависит от τ и является функцией только величин k и τ.

Поэтому *среднее число событий, появляющихся в единице времени,* так называемая *интенсивность* потока, есть постоянная $\lambda(t) = \lambda.$

2. ***Отсутствие последействия*** означает, что вероятность появления k событий в течение промежутка времени $(\tau, \tau + t)$ на любом участке времени длины t не зависит от того, сколько событий появилось ранее. Это предположение означает, что условная вероятность появления событий за промежуток времени $(\tau, \tau + t)$ при любом предположении о наступлении событий до момента τ совпадает с безусловной вероятностью. В частности, отсутствие последействия означает взаимную независимость того или иного количества событий в непересекающиеся промежутки времени.

3. ***Ординарность*** выражает требование практической невозможности появления двух или нескольких событий за малый промежуток времени Δt, то есть события появляются не группами, а поодиночке. Иначе говоря, вероятность появления более одного события на малом участке времени Δt пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью появления только одного события, т.е. имеет место $P_{k>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$.

Итак:

- *если поток обладает свойством <u>стационарности</u>, то вероятность появления k событий за промежуток времени длительностью t есть функция, зависящая только от k и t;*

- *если поток обладает свойством <u>отсутствия последействия</u>, то имеет место взаимная независимость появлений того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени;*

- *если поток обладает свойством <u>ординарности</u>, то за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события.*

Поток событий, обладающий указанными свойствами *стационарности, отсутствия последействия и ординарности* называется *простейшим* (*пуассоновским) потоком.*

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Процесс Пуассона удовлетворяет трём условиям: *стационарности, без последействия и ординарности*. Докажем утверждение.

Теорема 16.1. *Для вероятностей $P_k(t)$ наступления события за промежуток времени t произойдут k событий, $k = 1, 2, 3, \cdots$ справедлива формула*

(5) $$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что величина $P_k(t)$ за промежуток времени длительности t, если произойдёт k событий, эти вероятности не зависят от того, что где расположен этот отрезок времени. С этой целью в соответствии наших предположений обнаружим, что при малых Δt имеет место $P_1(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t), \lambda -$ постоянное.

Действительно, рассмотрим промежуток времени длительности равное единице и обозначим через p вероятность того, что за этот срок больше не наступит ни одно событие. Разобьем наш промежуток на n равных непересекающихся частей. В силу первого и второго предположений имеет место равенство $p = [\,p_0(1/n)]^n$, откуда следует, что $p_0(1/n) = p^{1/n}$. Отсюда при любом натуральном числе k получим равенство $p_0(k/n) = p^{k/n}$. Пусть теперь t – некоторое неотрицательное число. При любом n можно найти такое k, что будет иметь место неравенства: $(k-1)/n \le t < k/n$. Поскольку вероятность $P_0(t)$ есть убывающая функция времени, то

$$P_0((k-1)/n)) \ge P_0(t) \ge P_0(k/n).$$

Таким образом, $p_0(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$p^{(k-1)/n} \ge P_0(t) \ge p^{k/n}.$$

Пусть n и k стремятся к бесконечности так, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = t.$$

Так как величина $P_0(t)$, как вероятностное число удовлетворяет, неравенствам $0 \le P_0(t) \le 1$, то могут представиться три следующих случая: $1. p = 0$; $2. p = 1$; $3. 0 < p < 1$. Первые два случая малоинтересны. В первом из них при любом t, $P_0(t) = 0$. Следовательно, вероятность за промежуток времени любой длительности произойти хотя бы одному событию равна единице.

Другими словами, с вероятностью равной единице за промежуток времени любой длительности происходит бесконечно много событий. Во втором случае $P_0(t) = 1$, следовательно, в этом случае ни одного события не происходят. Представляет лишь интерес третий случай, в котором положим $p = e^{-\lambda}$, где $\lambda = \ln\frac{1}{p}$ – некоторое положительное число.

Итак, из определений стационарности и отсутствия последействия мы вывели, что при любом $t > 0$

(6) $$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

В соответствии с определением вероятности понятно, что

$$P_0(t) + P_1(t) + P_{>1}(t) = 1.$$

Из формулы (6) вытекает, что при малых значениях t

$$P_0(t) = 1 - \lambda t + o(t).$$

Следовательно, в силу условия ординарности, получим

(7) $$P_1(t) = \lambda t + o(t).$$

Теперь можем приступить к выводу формул для вероятностей $P_k(t)$, *для* $k \ge 1$. С этой целью определим вероятность того, что за время $t + \Delta t$ событие наступит ровно k раз. Это может осуществиться $k+1$ различными способами, а именно:

1) за промежуток времени длительности t произойдут k событий, а за время Δt – ни одного события;

2) за промежуток времени длительности t произойдут $k-1$ событие, а за время Δt – одно;

3) за промежуток времени длительности t произойдут $k-2$ событие, а за время Δt – два и так далее; за $(k+1)$ промежуток времени длительности t не наступит ни одного события, а за время Δt произойдут k событий.

По формуле полной вероятности (с учётом условий стационарности и отсутствия последействия) имеем равенство

$$P_k(t+\Delta t) = \sum_{m=0}^{k} P_m(t) \cdot P_{k-m}(\Delta t).$$

Обозначим

$$R_k = \sum_{m=0}^{k-2} P_m(t)\cdot P_{k-m}(\Delta t).$$

Отсюда с учётом условия ординарности имеем цепочку неравенства:

$$R_k \le \sum_{m=0}^{k-2} P_{k-m}(\Delta t) = \sum_{S=2}^{k} P_S(\Delta t) \le \sum_{S=2}^{\infty} P_S(\Delta t) = P_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t)\,.$$

Таким образом,

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)P_0(\Delta t) + P_{k-1}(t)P_1(\Delta t) + o(\Delta t).$$

Далее, согласно формуле (7)

$$P_0(\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} = 1-\lambda\Delta t + o(\Delta t),\ P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

Поэтому

$$P_k(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)P_k(t) + \lambda\Delta t P_{k-1}(t) + o(\Delta t)$$

Отсюда

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t),$$

Поскольку при $\Delta t \to 0$ предельное значение правой части равенства существует, то существует и предел левой части. В результате для определения $P_k(t)$ получаем уравнение

(8) $$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)\,.$$

Выберем начальные условия такие:

(9) $$P_0(0) = 1;\quad P_k(0) = 0 \ \ при\ \ k \ge 1.$$

Для решения дифференциального уравнения (9) введём функцию

(10) $$Q_k(t) = P_k(t)e^{\lambda t}, k = 0,1,2\cdots \Leftrightarrow P_k(t) = e^{-\lambda t}Q_k(t).$$

Поставляя $Q_k(t)$ в (9), получаем

(11) $$Q_k'(t) = \lambda Q_{k-1}(t);\ k = 1,2,3,\dots,$$

где $Q_0(t) \equiv 1;$ начальные условия остаются теми же: $Q_k(0) = 0,\ k = 1,2,3,\dots$ Последовательно решая уравнения (11), с учётом начальных условий последовательно получаем

$$Q_1'(t) = \lambda \ \ или\ \ Q_1(t) = \lambda t + C \Rightarrow Q_1(t) = \lambda t;$$

$$Q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} + C \quad\Rightarrow\quad Q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!};$$

$$Q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} + C \quad\Rightarrow\quad Q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Следовательно, на основании (10),

$$P_k(t) = \frac{\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},$$ получим доказательство теоремы 16.1.

Таким образом, мы доказали, что при каждом t случайная величина $X(t)$ починяется распределению Пуассона с параметром λt. В частности, среднее количество наступлений события за время t равно $\lambda t.$

Следствие. В условиях теоремы 16.1 при любом номере n для вероятностей $P_n(t)$ с начальными условиями $P_0(0) = 1;\quad P_n(0) = 0 \ \ при\ \ n \ge 1$, имеют место равенства

1. $P_n'(t) + \lambda\Delta_1[P_{n-1}(t)] = 0,$ (разностно-дифференциальное уравнение)

2. $P_n(t)+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}P'_k(t)=P_0(t)$ (свойство последовательности «наследия»).

3. На основании равенства $P'_0(t)+\lambda P_0(t)=0$, имеет место равенство

$$P_n(t)+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}P'_k(t)=0$$

Заметим, что теория развитая, в настоящем пункте, может быть применена не только в предположении, что параметр t играет роль временного параметра, но и других объектов. Чтобы убедится в этом, рассмотрим следующий пример.

Пример 1. В пространстве разбросаны точки, для которых выполнены следующие требования:

1. Пусть $P_k(v)$ обозначает вероятность того, что k точек окажется в заданной области G , зависит лишь от объёма v этой области, но никак не зависит ни от её формы, ни от её положения в пространстве;

2. Количество точек, попавших в неперекрывающиеся области, являются независимыми случайными величинами:

3. Потребуем, чтобы $\sum_{k=2}^{\infty}P_k(\Delta v)=o(\Delta v)$.

Эти требования удовлетворяют условиям: стационарности, отсутствия последействия и ординарности. Поэтому существует положительная постоянная a, такая, что для вероятности $P_k(v)$ будет иметь место равенство

$$P_k(v)=\frac{(a\cdot v)^k\cdot e^{-at}}{k!}.$$

Если в жидкости взвешены (выпали в осадок) мельчайшие частицы какого-либо вещества, то под воздействием ударов окружающих молекул эти частицы находятся в непрерывном хаотическом движении (броуновское движение). В результате в каждый момент времени мы имеем случайное распределение частиц в пространстве, о чем говорилась в рассмотренном примере.

Согласно теории стохастических процессов следует считать, что такое распределение частиц, попадающих в определённую область пространства, будет подчинено закону Пуассона. Ниже рассмотрим таблицу, заимствованную из книги [1], где расчёты приводятся из статьи физика Смолуховского, и результаты вычислений проведены по закону Пуассона.

Число частиц	Число наблюдавшихся случаев	Число $\frac{m}{518}$	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	Вычисленное Число случаев
0	112	0,216	0,213	110
1	168	0,325	0,328	173
2	130	0,251	0,253	131
3	69	0,133	0,130	67
4	32	0,062	0,050	26
5	5	0,010	0,016	8
6	1	0,002	0,004	2
7	1	0,002	0,001	1

Постоянное число, $\lambda=av$ которым определяется закон Пуассона, выбрано равным среднему арифметическому из наблюдавшегося количества частиц, т.е.

$$\lambda \approx \frac{0{,}112+1{,}168+2{,}130+3{,}69+4{,}32+5{,}5+6{,}1+7{,}1}{518} \approx 1{,}54.$$

3. Классификация случайных процессов

Здесь, коротко рассмотрим основные вопросы систематизации (классификации) случайных процессов.

Случайный процесс, протекающий (проходящей) в любой физической системе S, представляет собой случайные переходы системы из одного состояния в другое. В зависимости от множества этих состояний W, от множества T значений аргумента t все случайные процессы делят на классы (группы):

1. Дискретный процесс **(**дискретное состояние) с дискретным временем.

2. Дискретный процесс с непрерывным временем.

3. Непрерывный процесс (непрерывное состояние) с дискретным временем.

4. Непрерывный процесс с непрерывным временем.

В 1-м 3-м случаях множество T дискретно, т.е. аргумент t принимает дискретные значения $t_0, t_1, \cdots,$ обычно $t = 0,1,2,\cdots;$ в 1-м случае множество значений случайной функции $X(t)$ определяются равенствами: $X(t_k) = x_k; k = 0,1,2,\cdots,$ является дискретное множество W (множество W конечно или счетное).

В третьем случае множество W несчётно, т.е. сечение случайного процесса в любой момент времени t представляет собой непрерывную случайную величину.

Во 2-м и 4-м случаях множество T непрерывно, во втором случае множество состояний системы W конечно или счетное, а в четвёртом случае множество W – несчётное.

Приведём некоторые примеры случайных процессов 1-4 классов соответственно:

1. Хоккеист может забить или не забить один или несколько шайб в ворота соперника во время матчей, проводимых в определенные моменты (согласно расписанию игр) времени

$t_1, t_2 \cdots$. Случайный процесс $X(t)$ есть число забитых шайб до момента t.

2. Случайный процесс $X(t)$ - количество просмотренных фильмов в кинотеатре «Звезда»

от начала работы кинотеатра до момента времени t.

3. В определённые моменты времени $t_0, t_1, t_2 \cdots,$ измеряется температура $Y(t)$ больного в некотором лечебном центре. $Y(t)$ - является случайный процесс непрерывного типа с дискретным временем.

4. Показатель уровня влажности воздуха в течение сутки в городе А.

Можно рассматривать и другие более сложные классы случайных процессов. Для каждого класса случайных процессов разрабатываются соответствующие методы их изучения.

Можно найти ряд разнообразные и интересные примеры случайных потоков в учебниках [1], [7] и в монографии [12] .

Для случайных процессов также вводятся простеющие функциональные характеристики, зависящие от параметра t, аналогичные основным числовым характеристикам случайных величин.

Знание этих характеристик, достаточно для решения многих задач. Напомним, что полная характеристика случайного процесса даётся её многомерным (конечномерным) законом распределения.

В отличие числовых характеристик случайных величин в общем случае функциональные характеристики представляют собой определённые функции.

4. Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса

Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция

$m_X(t)$, определённая при любом фиксированном значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса:

(12) $$m_X(T) = M[X(t)].$$

Для краткого обозначения математического ожидания с.п. применяют также обозначение $m(t)$.

Функция $m_X(t)$ характеризует поведение случайного процесса в среднем. Геометрический смысл математического ожидания $m(t)$ истолковывается как «средняя кривая», около которой расположены кривые-реализации.

На основании свойства математического ожидания случайной величины и учитывая, что $X(t)-$ случайный процесс, а $g(t)-$неслучайная функция, получаем *свойства* математического ожидания *случайного процесса:*

1. Математическое ожидание неслучайной функции равно самой функции: $M[g(t)] = g(t)$.

2. Неслучайный множитель (неслучайную функцию) можно выносить за знак математического ожидания случайного процесса, т.е. $M[g(t)\cdot X(t)] = g(t)\cdot m_X(t)$.

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных процессов равно сумме

(разности) математических ожиданий слагаемых, т.е.

$$M[X(t)\pm Y(t)] = m_X(t)\pm m_Y(t).$$

Отметим, что если зафиксируем аргумент (параметр) t, то переходим от случайного процесса к случайной величине (т.е. переходим к сечению случайного процесса), можно найти м.о. этого процесса при этом фиксированном t.

Поскольку, если сечение с.п. $X(t)$ при заданном t есть непрерывная с.в. с плотностью $\varphi(t,x)$, то его математическое ожидание можно вычислить по формуле

(13) $$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\varphi(t,x)dx.$$

Пример 2. Пусть с.п. определяется формулой $Y(t) = X\cdot e^{-t}$, $t>0$; $X \approx N_{(3;1)}$, т.е. $X-$с.в.,

распределена по нормальному закону с $a = MX = 3$, $\sigma = 1$.

Найти математического ожидания случайного процесса $Y(t)$.

Решение. По свойству 2. имеем

$$m_Y(t) = M[X\cdot e^{-t}] = e^{-e}MX = 3e^{-e},$$

так как $X \approx N_{(3,1)}$ и следовательно, $MX = 3$.

Упражнение. Вычислить математическое ожидание воспользуюсь, равенствами

$$\varphi(x) = \frac{1}{1\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 1^2}}, \qquad m_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\varphi(t,x)dx,$$

а затем на основании формулы (13) вычислить интеграл и убедиться, что результат будет тот же самый.

Указание. Воспользоваться равенством

$$m_Y(t)=\frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(-\int_{-\infty}^{+\infty}(x-3)\cdot e^{-\left(\frac{(x-3)^2}{\sqrt{2}}\right)}dx+3\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot e^{-\left(\frac{(x-3)^2}{\sqrt{2}}\right)}dx\right).$$

Дисперсия случайного процесса.

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция

(14) $$D_X(t)=DX(t)=MX^2(t)-[m_X(t)]^2.$$

Дисперсия $D_X(t)$ с.п. рассматривается, также характеризуют разброс (рассеяние) возможных значений с.п. относительно его математического ожидания.

Наряду с дисперсией с.п. рассматривается также среднее квадратическое отклонение $\sigma(t)$

(коротко с.к.о.), которое определяется равенством

(15) $$\sigma_X(t)=\sqrt{D_X(t)}.$$

Размерность функции $\sigma_X(t)$ равна размерности с.п. $X(t)$.

Значения реализаций с.п. при каждом t отклоняется от математического ожидания $m(t)$ на величину порядка $\sigma_X(t)$ (см. рис 60).

Отметим простейшие свойства дисперсии случайных процессов.

1. Дисперсия неслучайной функции $g(t)$ равна нулю, т.е.

$$D[g(t)]=0$$

2. Дисперсия случайного процесса $X(t)$ неотрицательна т.е.

$$D_X(t)=\sigma_X^2(t)\ge 0.$$

3. Дисперсия произведения неслучайной функции $g(t)$ на случайную функцию $X(t)$ равна произведению квадрата неслучайной функции на дисперсию случайной функции, т.е.

$$D_X[g(t)\cdot X(t)]=g^2(t)\cdot D_X[X(t)].$$

4. Дисперсия суммы с.п. $X(t)$ и неслучайной функции $g(t)$ равна дисперсии с.п., т.е.

$$D_X[X(t)\pm g(t)]=D_X[X(t)].$$

Пример 3. Пусть с.п. определяется формулой $Y(t)=X\cdot e^{-t},\ t>0;\ \ X\approx N_{(3;1)}$, т.е. X – с.в.

распределена по нормальному закону с $a=MX=3,\ \sigma=1$.

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение с.п. $Y(t)$.

Решение. Вычислим дисперсию на основании формулы из свойства 3. Имеем $D_Y(t)=D(e^{-t}\cdot X)=e^{-2t}DX$, но $X\approx N_{(3;1)}$, следовательно, по определению дисперсии с.в. X

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-3)^2\frac{1}{1\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 1^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}2u^2e^{-u^2}\sqrt{2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-u^2}du=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}u\cdot e^{-u^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=1^2=1$$

Следовательно, $D_Y(t)=e^{-2t}\cdot 1=e^{-2t}$; т.е. $D_Y(t)=e^{-2t}$ и $\sigma_Y=e^{-t}$.

5. Корреляционная функция случайного процесса

При исследовании вопросов *зависимости или независимости* двух или более сечений случайных процессов знание лишь математического ожидания и дисперсии с.п. не достаточно.

Для определения связи между различными случайными процессами используется понятие корреляционной функции – аналог понятия ковариации случайных величин (см. Т.8)

$$K_{XY} = M[(X - m_X)\cdot(Y - m_Y)] = M[XY] - m_X m_Y,$$

Корреляционной (ковариационной, автоковариационной, автокорреляционной) функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_X(t_1;t_2)$, которая при каждой паре значений $\{t_1,t_2\}$ равна корреляционному моменту соответствующих сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$:

$$K_X(t_1;t_2) = M[(X(t_1) - m(t_1))\cdot(X(t_2) - m(t_2))]$$

или (с учётом обозначения центрированной случайной функции $\breve{X}(t) = X(t) - m_X(t)$) имеем

$$K_X(t_1;t_2) = M[\breve{X}(t_1)\cdot(\breve{X}(t_2)] = M[X(t_1)\cdot X(t_2)] - m_X(t_1)m_X(t_2).$$

Приведём основные *свойства корреляционной функции* $K_X(t_1;t_2)$ случайного процесса $X(t)$.

1. Корреляционная функция при одинаковых значениях аргументов равна дисперсии с.п.

$$K_X(t;t) = D_X(t) = \sigma^2 x(t).$$

Действительно,

$$K_X(t;t) = Cov[X(t);X(t)] = M\left(\breve{X}(t)\cdot\breve{X}(t)\right) =$$
$$= M[(\breve{X}(t))^2] = M[(X(t) - m_X(t))^2] = D_X(t).$$

Доказанное свойство позволяет вычислить м.о. и корреляционную функцию являющимися основными характеристиками случайного процесса, необходимость в подсчёте дисперсии отпадает.

2. Корреляционная функция не меняется относительно замены аргументов, т.е. является симметрической функцией относительно своих аргументов: $K_X(t_1;t_2) = K_X(t_2;t_1)$.

Это свойство непосредственно выводится из определения корреляционной функции.

3. Если к случайному процессу прибавить неслучайную функцию, то корреляционная функция не меняется, т.е. если $Y(t) = X(t) + g(t)$, то $K_Y(t_1;t_2) = K_X(t_1;t_2)$. Другими словами является периодической функцией относительно любой неслучайной функции.

Действительно, из цепочки рассуждений

$$m_Y(t) = m_X(t) + g(t) \Rightarrow Y(t) - m_Y(t) = X(t) + g(t) - m_X(t) - g(t),$$

следует, что $Y(t) - m_Y(t) = X(t) - m_X(t)$. Отсюда получим требуемое свойство 3.

4. Модуль корреляционной функции не превосходит произведения с.к.о., т.е.

$$|K_X(t_1,t_2)| \le \sqrt{D_X(t_1)\cdot D_X(t_2)} = \sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2).$$

Доказательство свойства 4. проводится аналогично как в пункте 12.2., с учётом первого свойства корреляционной функции с.п. $X(t)$.

5. При умножении с.п. $X(t)$ на неслучайный множитель $g(t)$ её корреляционная функция умножится на произведение $f(t_1)\cdot f(t_2)$, т.е., если $Y(t) = X(t)\cdot g(t)$, то

$$K_Y(t_1;t_2) = g(t_1)g(t_2)K_X(t_1;t_2).$$

5.1. Нормированная корреляционная функция

Наряду с корреляционной функцией с.п. рассматривается также *нормированная корреляционная функция* (*или автокорреляционная функция*) $r_X(t_1;t_2)$, определяемая равенством

$$r_X(t_1;t_2) = \frac{K_X(t_1;t_2)}{\sigma_X(t_1)\cdot\sigma_X(t_2)}.$$

Следствие. На основании свойства 1 имеет место равенство

$$r_X(t_1;t_2) = \frac{K_X(t_1;t_2)}{\sqrt{K_X(t_1;t_1)}\cdot\sqrt{\cdot K_X(t_2;t_2)}}.$$

По своему смыслу величина $r_X(t_1;t_2)$ аналогична коэффициенту корреляции для с.в., но не является постоянной, а зависит от аргументов t_1 и t_2.

Перечислим *свойства нормированной корреляционной функции*:

1. $|r_X(t_1;t_2)|\le 1$;
2. $r_X(t_1;t_2)=1$;
3. $r_X(t_1;t_2)=r_X(t_2;t_1)$.

Пример 4. Пусть с.п. определяется формулой $Y(t)=X\cdot e^{-t}$, $t>0$; $X\approx N_{(3;1)}$, т.е. X – с.в.,
распределена по нормальному закону с $a=MX=3$, $\sigma=1$.

Найти корреляционную и нормированную функции случайного процесса $Y(t)$.

Решение. По определению имеем

$$K_Y(t_1,t_2)=M[(X\cdot e^{-t_1}-3\cdot e^{-t_1})\cdot(X\cdot e^{-t_2}-3\cdot e^{-t_2})]=$$
$$=M[X^2\cdot e^{-(t_1+t_2)}-6X\cdot e^{-(t_1+t_2)}+9\cdot e^{-(t_1+t_2)}]=M[e^{-(t_1+t_2)}\cdot(X-3)^2]=$$
$$=M[e^{-(t_1+t_2)}\cdot(X-3)^2]=e^{-(t_1+t_2)}\cdot DX=e^{-(t_1+t_2)}\cdot 1^2=e^{-(t_1+t_2)},$$

т.е. $K_Y(t_1,t_2)=e^{-(t_1+t_2)}$. Отсюда с учётом определения нормированной корреляционной функции и результатов решения предыдущих примеров получим $r_Y(t_1,t_2)=\dfrac{e^{-t_2}\cdot e^{-t_2}}{e^{-t_2}\cdot e^{-t_2}}=1$,
т.е. $r_Y(t_1,t_2)=1$.

5.2. Взаимная корреляционная функция случайного процесса

Для определения степени зависимости *сечений* двух случайных процессов используют корреляционную функцию связи или взаимную корреляционную функцию.

Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называется неслучайная функция $G_{XY}(t_1;t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту двух сечений $X(t_1)$ и $Y(t_2)$;

$$G_{XY}(t_1;t_2)=M[\breve{X}(t_1)\cdot Y(t_2)];\ \breve{X}(t)=X(t)-m_X(t),\ \breve{Y}(t)-m_Y(t).$$

Два с.п. $X(t)$ и $Y(t)$ называются *некоррелированными*, если их взаимная корреляционная функция тождественно равна нулю, т.е. если для любых t_1 и t_2 имеет место $G_{XY}(t_1;t_2)=0$. Если же для любых t_1 и t_2 окажется $G_{XY}(t_1;t_2)\ne 0$, то случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *коррелированными* (или *связанными*).

Рассмотрим свойства взаимной корреляционной функции, которые непосредственно выводятся из её определения и свойств корреляционного момента (см. 12.2):

1.При одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не меняется, то есть $G_{XY}(t_1;t_2)=G_{YX}(t_2;t_1)$.

2. Модуль взаимной корреляционной функции двух случайных процессов не превышает произведения их средних квадратичных отклонений, то есть $|G_{XY}(t_1;t_2)| \le \sigma_X(t_1) \cdot \sigma_Y(t_2)$.

3. Корреляционная функция не изменится, если к случайным процессам $X(t)$ и $Y(t)$ прибавить неслучайные функции $g(t)$ и $h(t)$ соответственно, то есть $G_{X_1Y_1}(t_1;t_2) = G_{XY}(t_1;t_2)$, где соответственно $X_1(t) = X(t) + g(t)$ и $Y_1(t) = Y(t) + h(t)$.

4. Неслучайные множители $Y_1(t) = h(t) \cdot Y(t)$ можно вынести за знак корреляции, то есть, если $X_1(t) = g(t) \cdot X(t)$ и, то $G_{X_1Y_1}(t_1;t_2) = [g(t) \cdot h(t)] \cdot G_{XY}(t_1;t_2)$.

5. Если $Z(t) = X(t) + Y(t)$, то $K_Z(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + K_Y(t_1,t_2) + G_{XY}(t_1,t_2) + G_{YX}(t_1,t_2)$
.

6. Если случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ *некоррелированные*, то корреляционная функция их суммы равна сумме их корреляционных функций, то есть $K_{X+Y}(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + K_Y(t_1,t_2)$.

Для оценки степени зависимости сечений двух с.п. используют также *нормированную взаимную корреляционную функцию* $r_{XY}(t_1,t_2)$, определяемую равенством:

$$r_{XY}(t_1,t_2) = \frac{G_{XY}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_X(t_1) \cdot D_Y(t_2)}} = \frac{G_{XY}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_X(t_1;t_1) \cdot K_Y(t_2;t_2)}}.$$

Функция $r_{XY}(t_1,t_2)$ обладает теми же свойствами, что и функция $G_{XY}(t_1,t_2)$, но свойство 2
заменяется на следующее двойное неравенство $|r_{XY}(t_1,t_2)| \le 1$, т.е. модуль нормированной взаимной корреляционной функции не превышает единицы.

Пример 5. Найти взаимную корреляционную функцию двух с.п. $\boldsymbol{X(t) = t \cdot V}$ и $Y(t) = (t+l) \cdot V$, где $l > 0$; $V -$случайная величина, при этом $DV = q,\ q > 0$.

Решение. Так как $m_X(t) = M[tV] = t \cdot MV = t \cdot m_V$, $m_Y(t) = M[(t+l)V] = (t+l) \cdot m_V$.
То $G_{XY}(t_1,t_2) = M[(t_1(V - m_V)) \cdot ((t_2 + l)(V - m_V))] = t_1 \cdot (t_2 + l) \cdot M[(V - m_V)^2] =$
$= t_1 \cdot (t_2 + l) DV = q \cdot t_1 \cdot (t_2 + l)$, т.е. $G_{XY}(t_1,t_2) = q \cdot t_1 \cdot (t_2 + l)$.

6. Стационарный случайный процесс в широком и узком смысле

Важным классом случайных процессов являются *стационарные* случайные процессы, то есть, случайные процессы, не изменяющие свои характеристики с течением времени. Они имеют вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения. Таковыми являются: давление газа в газопроводе, колебания самолёта при «автополёте», колебания напряжения в электрической сети и т.д.

Случайный процесс $X(t)$ *называется* ***стационарным в <u>широком смысле</u>****, если его математическое ожидание* $m_X(t)$ *есть постоянное число, а корреляционная функция* $K_X(t_1,t_2)$ *зависит только от разности аргументов, т.е.*

$$m_X(t) = m = const;\ K_X(t_1,t_2) = K_X(t_2 - t_1).$$

Из этого определения следует, что корреляционная функция стационарного процесса есть функция одного аргумента: $K_X(t_1,t_2) = K_X(\tau),\ \tau = t_2 - t_1$. Это обстоятельство часто упрощает операции над стационарными случайными процессами.

Случайный процесс называют ***стационарным в <u>узком смысле</u>****, если его характеристики зависят не от значений аргументов, а лишь от их взаимного расположения. То есть, для функции распределения сечений процесса должно выполняться равенство:*

$$\Phi_{t_1+h,\, t_2+h,, \cdots, t_n+h,}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Phi_{t_1, t_2,, \cdots t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

при любых $h > 0, n \geq 1;\ t_1, t_2, \cdots, t_n \in T.$

Отметим, что из стационарности СП в узком смысле следует стационарность его в широком смысле, обратное утверждение неверно.

В дальнейшем мы будем рассматривать только стационарные случайные процессы в широком смысле. Далее приведем основные свойства корреляционной функции случайного стационарного процесса (с.с.п.).

1. Дисперсия с.с.п. постоянна и равна значению корреляционной функции в нуле, т.е. $D_X(t) = K_X(0) = const$, то есть в начале координат $D_X(t) = K_X(t;t) = K_X(t-t) = K_X(0)$.

2. Корреляционная функция с.с.п. является чётной функцией, т.е. $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$.

3. Абсолютное значение корреляционной функции с.с.п. не превосходит её значение при $\tau = 0$, т.е. $|K_X(\tau)| \leq K_X(0)$.

Нормированная корреляционна функция с.с.п. является неслучайная функция аргумента τ, т.е.

$$r_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{K_X(0)} = \frac{K_X(\tau)}{\sigma_X^2};$$

при этом в соответствии свойство 3 имеет место неравенство $|r_X(\tau)| \leq 1$.

Пример 6. Задана случайная функция, $X(t) = Cos(t+\varphi),\ \varphi -$ равномерно распределённая случайная величина, в интервале $(0, \pi)$.

Доказать, что $X(t) -$ случайная стационарная функция.

Решение. Найдём математическое ожидание

$$m_X(t) = M[Cos(t+\varphi)] = M[Cost \cdot Cos\varphi - S\operatorname{int} \cdot Sin\varphi] =$$
$$= Cost \cdot M[Cos\varphi] - S\operatorname{int} \cdot M[Sin\varphi].$$

На основании определения м.о. получим (с учётом равномерной распределённости с.в. φ, по условию контроля $c = 1/2\pi$)

$$M[Cos\varphi] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Cos\varphi\, d\varphi = 0 \text{ и } M[Sin\varphi] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Sin\varphi\, d\varphi = 0.$$

Следовательно, $m_X(t) = 0.$

Найдём корреляционную функцию. Учитывая, что центрированная и случайная функция равны (т.к. $m_X(t)=0$), т.е. $\breve{X}(t)=X(t)=Cos(t+\varphi)$, то согласно определению корреляционной функции (см. пункт 16.5) имеем

$$K_X(t_1,t_2)=M[\breve{X}(t_1)\breve{X}(t_2)]=M[Cos(t_1+\varphi)\cdot Cos(t_2+\varphi)]=$$

$$=M[\frac{Cos(t_2-t_1)+Cos(t_2+t_1+2\varphi)}{2}]=\frac{Cos(t_2-t_1)}{2}+\frac{1}{2}M[Cos(t_2+t_1+2\varphi].$$

$$=\frac{Cos(t_2-t_1)}{2},$$

поскольку $M[Cos(t_2+t_1+2\varphi)]=0$).

Задание. Покажите, что в условиях нашего примера имеет место $M[Cos(t_2+t_1+2\varphi)]=0.$

Итак, математическое ожидание с.в. $X(t)$ есть постоянное число при всех значениях аргумента, и её корреляционная функция зависит только от разности аргументов. Следовательно, $X(t)-$ случайная стационарная функция.

Отметим что, положив $t_1=t_2=t$ в корреляционной функции, найдём дисперсию

$$D_X(t)=K_X(t,t)=\frac{Cos(t-t)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, дисперсия сохраняет постоянное значение при всех значениях аргумента, как и должно, быть при случайной стационарной функции.

Большинство случайных стационарных процессов обладают важным для практики, так называемым, «***эргодическим свойством***», сущность которого состоит в том, что по одной, достаточно длинной отдельной реализации данного процесса можно судить обо всех свойствах процесса также как по любому количеству реализаций.

Другими словами, отдельные характеристики с.с.п. $\{m_X,\ K_X(\tau)\}$ могут быть определены как соответствующие средние по времени для одной реализации достаточно большой продолжительности.

Связь между классами стационарных и случайных эргодических процессов можно охарактеризовать, например, как на рисунке 62.

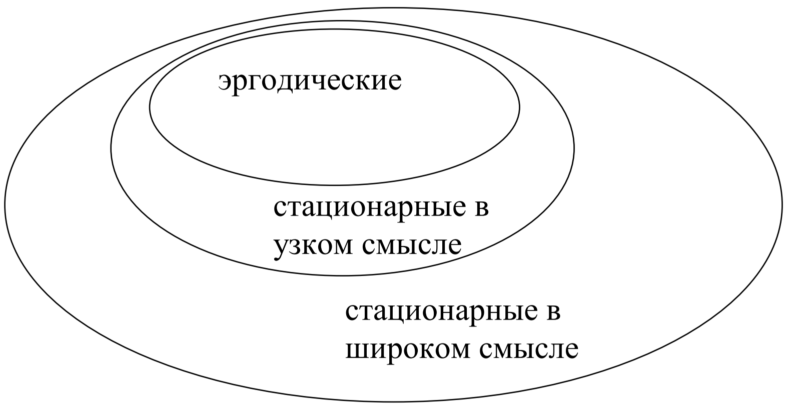


Рис.62

Достаточным условием эргодического с.п. $X(t)$ относительно математического ожидания и корреляционной функции является стремление к нулю его корреляционной функции при $\tau\to\infty$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}K_X(\tau)=0$.

В качестве оценок характеристик эргодических с.с.п. принимают усреднённое по времени значение:

$$\widetilde{m}_X(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt,\ \widetilde{K}_X(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}(x(t+T) - \widetilde{m}_X(t))\cdot(x(t) - \widetilde{m}_X(t))dt.$$

Интегралы, в правых частях равенств, на практике вычисляют приближённо.

Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *стационарно связанными*, если их взаимно корреляционная функция $K_{XY}(t_1;t_2)$ зависит только от разности $\tau = t_1 - t_2$. В качестве примера стационарного процесса можно взять с.п. $X(t) = A\cdot Cos(\omega t + \varphi)$ – гармоническое колебание. Можно показать, что $m_X(t) = 0,$ а

$$K_X(t_1,t_2) = \frac{1}{2}M(A^2)\cdot Cos\omega(t_1 - t_2) = \sigma_X^2\cdot Cos(\omega\tau).$$

7. Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов

При проектировании различных систем (систем автоматического управления или регулирования некоторыми процессами и т.д.) и других практических задач возникает следующая задача:

- на вход некоторой системы S подаётся «*входной сигнал*» - с.п. $X(t)$ с известными характеристиками; система преобразует этот сигнал, в результате чего на выходе системы S получается случайный процесс $Y(t)$, называемый «*выходным сигналом*»; требуется определить характеристики с.п. $Y(t)$ на выходе системы S

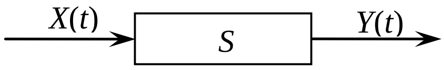


Рис. 63

Преобразование случайного процесса $X(t)$ в случайную величину, $Y(t)$ осуществляемое системой (прибором) S, обычно записывается в виде $Y(t) = A\{X(t)\},$ где A- называют преобразованием или оператором системы S. Оператор A может иметь любой вид: оператор сложения или умножения, оператором дифференцирования или интегрирования и т.д. Так. например, если $x(t) = Sin2t$, и оператор A есть оператор интегрирования

$$A(x,t) = \int_0^t x(\tau)d\tau \text{, то } y(t) = A\{Sin2\omega,t\} = \int_0^t Sin2udu = \frac{1}{2}(1 - Cos2t).$$

Все виды подобных преобразований (операторов) можно разделить на две различные группы: линейные L и нелинейные N. В свою очередь линейные преобразования линейные однородные L_0 и линейные неоднородные L_H. Преобразование (оператор) называется линейным однородным, если оно (он) обладает двумя свойствами:

1. Оператор суммы функций (с.п.) равен сумме операторов от каждой функции, входящих в сумму, т.е. $L_0\{X(t) + Y(t)\} = L_0\{X(t)\} + L_0\{Y(t)\}$.

2. Постоянную величину можно выносить за знак оператора: $L_0\{C\cdot X(t)\} = C\cdot L_0\{X(t)\}$.

Другими словами оператор удовлетворяет свойствам аддитивности и однородности.

Преобразование (оператор) L_H называется линейным неоднородным, если оно состоит из суммы однородного линейного преобразования L_0 с прибавлением заданной неслучайной функции $g(t)$, то есть $L_H\{X(t)\} = L_0\{X(t)\} + g(t)$.

Примерами однородных линейных операторов являются оператор дифференцирования $Y(t) = \dfrac{DX(t)}{dt}$, оператор интегрирования $Y(t) = \int_0^t X(u)du$, оператор умножения на заданную функцию $Y(t) = g(t) \cdot X(t)$. Все преобразования, не являющиеся линейными, называются *нелинейными*. Примерами неоднородных линейных операторов являются:

$$Y(t) = \frac{DX(t)}{dt} + g(t);\ Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau + g(t);\ Y(t) = g(t) \cdot X(t) + h(t),\ \textit{и т.д.}$$

Примерами нелинейных операторов являются: $Y(t) = X^3(t); Y(t) = \frac{DX(t)}{dt} + SinX(t)$, и т.д.

8. Дифференцирование и интегрирование случайных процессов (функций)

Пусть заданы характеристики $m_X(t)$ и $K_X(t_1, t_2)$, некоторого случайного процесса $X(t)$ и он подвергается действию *дифференцирования, т.е. следует определить* случайный процесс $Y(t) = A\{X(T)\} -$ *«выходного сигнала»,* где $A-$ оператор дифференцирования. Имеем

$$Y(t) = \frac{DX(t)}{dt}.$$

Требуется определить характеристики $m_Y(t)$ и $K_Y(t_1, t_2)$ с.п. $X'(t) = Y(t) -$ *«выходного сигнала».*

Теорема 16.2. *Математическое ожидание производной $X'(t)$ от с.п. $X(t)$ равно производной от её математического ожидания*

(16) $$m_Y = m'_X(t).$$

Доказательство. Предполагая, что с.п. $X(t)$ является непрерывным, производная от него существует, а математическое ожидание предела равенства

$$Y(t) = X'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t},$$

также существует. Приравниваем м.о. обеих частей равенства, а затем изменим, порядок нахождения м.о. и предела (законность изменения порядка этих операций примем без доказательства). С учётом сказанного приходим к равенству

$$M[Y(t)] = M[X'(t)] = m_Y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_X(t + \Delta t) - m_X(t)}{\Delta t}$$

т.е. $m_Y(t) = \frac{dm_X(t)}{dt} = m'_X(t)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Последняя формула показывает, что для среднеквадратических дифференцируемых случайных функций операции нахождения м.о. и дифференцирования можно менять местами, т.е.

$$M[X'(t)] = [M(X(t))']).$$

Пример 6. Пусть математическое ожидание $m_X(t) = Q(t) = at^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_{m-1}t + a_m$.

Решение. Искомое математическое ожидание получим из формулы (16)

$$m_{X'}(t) = mat^{m-1} + (m-1)a_1 t^{m-2} + \cdots + a_{m-1}.$$

Замечание 2. Если первая производная дифференцируема, то производную от первой производной называют второй производной и обозначают, через $X''(t)$. Аналогично определяют производные более высоких порядков.

Задание. Найти в нашем примере $m_{X''}(t),\ m_{X'''}(t)$ и т.д. $m_{X^{(n)}}(t)$.

Можно показать, что *корреляционная функция производной от случайной функции $X(t)$ равна второй смешанной производной от её корреляционной функции*

$$K_{X'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Пример 7. Пусть задана корреляционная функция $K_X(t_1,t_2)=5t_1t_2+t_1^5t_2^5$ с.п. $X(t)$. Найти корреляционную функцию его производной.

Решение. Найдём частные производные от корреляционной функции по аргументам t_1 и t_2

$$\frac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1}=5t_2+5t_1t_2^5,\ \frac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}=5t_1+5t_1^5t_2.$$

Отсюда следует, что искомая корреляционная функция равна

$$K_{X'}(t_1,t_2)=5(1+5t_1t_2).$$

Перейдём к рассмотрению понятие интеграла от случайной функции.

Пусть заданы характеристики $m_X(t)$ и $K_X(t_1,t_2)$, некоторого случайного процесса $X(t)$, а линейное преобразование случайного процесса состоит в том, что он подвергается действию *интегрирования в отрезке* $[0,t]$*, т.е. следует определить характеристики* $m_Y(t)$ и $K_Y(t_1,t_2)$, с.п. $Y(t)$, где $Y(t)=A\{X(T)\}-$ *«выходного сигнала»,* где $A-$ оператор интегрирования. Положим

$$Y(t)=\int_0^t X(s)du. \tag{17}$$

Требуется найти характеристики с.п. $Y(t)$. Обычно (см. например, [Гмурманн]) определение интеграла от случайной функции даётся с помощью предельного соотношения, а именно:

Интегралом от случайной функции $X(t)$ по отрезке [0, t] называют предельное значение среднеквадратического интегральной суммы при стремлении к нулю частичного интервала $|\Delta s_i|$ максимальной длины, т.е.

$$Y(t)=\lim_{|\Delta s_i|\to 0}\sum X(s_i)\cdot\Delta s_l=\int_0^t X(s)ds.$$

Ниже приведём два утверждения, относящихся к характеристикам с.п. без доказательства.

Теорема 16.3. *Математическое ожидание интеграла от случайной функции* $X(t)$ *равно интегралу от её математического ожидания, то есть справедливо равенство*

$$m_Y(t)=\int_0^t m_X(s)ds, \tag{18}$$

и корреляционная функция интеграла от случайной функции $X(t)$ *равна двойному интегралу от её корреляционной функции, если* (17)*, то*

$$K_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}K_X(s_1,s_2)ds_1ds_2. \tag{19}$$

Эти равенства доказываются стандартным путём на основании свойств м.о. и функции корреляции с.п. $X(t)$ (см. [Гмурманн] гл.23).

Рассмотрим примеры на применении равенств (18) и (19).

Пример 8. Пусть м.о. $m_X(t)=10t^9+13\cdot e^{-t}$ и корреляционная функция $K_X(t_1,t_2)=e^{-(t_1+t_2)}$, найти м.о. и корреляционную функцию с.п. $Y(t)$, определённую равенством (17).

Решение. Искомое м.о. $m_Y(t)=\int_0^t\{10s^9+13e^{-s}\}ds=t^{10}+13[e^{-t}-1]$. Далее

$$K_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}e^{-s_1-s_2}ds_1ds_2=\int_0^{t_1}e^{-s_1}\ ds_1\int_0^{t_2}e^{-s_2}ds_2=$$

$$=\int_0^{t_1}e^{-s_1}\left(-e^{-s_2}\Big|_0^{t_2}\right)ds_1=(1-e^{-t_2})\cdot(1-e^{-t_1}).$$

Упражнение. Известны характеристики двух некоррелированных с.п. $X(t)$ и $Y(t)$, если

$$X(t): m_X(t) = 3t + 7,\ K_X(t_1, t_2) = t_1 t_2;$$

$$Y(t): m_Y(t) = -3t + 3; K_X(t_1, t_2) = 5e^{-(t_1+t_2)}.$$

Найти математическое ожидание и корреляционную функцию с.п. $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

9. Элементы спектральной теории стационарных случайных процессов (функций)

В этом пункте кратко ознакомимся с новой характеристикой случайной функции, с понятием «*спектральная плотность*».

Из курса математического анализа известно, что неслучайную функцию $x(t)$, удовлетворяющую определённым условиям (условиям Дирихле) можно разложить в некотором промежутке $[-l;+l]$ в ряд Фурье. Важность теории рядов Фурье обусловлена той большой ролью, которую играют её приложения не только в математике, но и в механике, физике и ряде других научных дисциплин. Во многом это предопределено тем, что тригонометрические ряды Фурье соединяют в себе особенности, как тригонометрических рядов, так и общих рядов Фурье. С теорией рядов Фурье и интегралах Фурье можно ознакомиться, например, в учебнике [15].

Аналогичную теорию можно применять и в теории случайных функций (процессов), т.е. любой с.п. $X(t)$ можно представить (разложить) в виде суммы так называемых «***элементарных случайных процессов***». А именно, в функциональный ряд вида

(20) $$X(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot x_k(t),$$

где V_k – случайные величины, $x_k(t)$ – неслучайные функции времени. Метод разложения СП в ряды вида (20) упрощает различные преобразования СП (линейных и нелинейных), в частности используя её можно найти характеристики «*выходного процесса*» стационарной линейной динамической системы по известным характеристикам «*входного процесса*». Вообще говоря, стационарную случайную функцию можно представить в виде гармонических колебаний со случайными амплитудами и случайными фазами. Рассмотрим два класса случайных функций:

A. Пусть $X(t)$ случайная функция вида (локальный случай)

(21) $$X(t) = UCos(\omega t) + VSin(\omega t),$$

где ω – действительное число, U и V – некоррелированные случайные величины с математическим ожиданием, равными нулю и одинаковыми дисперсиями, или коротко:

$$\omega = const;\ m_U = m_V = 0; D_U = D_V = D; K_{UV} = M[(U - m_U)\cdot(V - m_V) = M[\breve{U} \cdot \breve{V}] = 0.$$

Напомним, что в наших условиях с.п. $X(t) = \breve{X}(t) = X(t) - m_X(t)$, т.е. $X(t)$ центрированный случайный процесс. Следовательно, такой случайный процесс является центрированным. Покажем, что этот случайный процесс является ***стационарным***.

Действительно, вычислим $M[X(t)]$:

$$M[X(t)] = m_X(t) = m_U \cdot Cos\omega t + m_V \cdot Sin\omega t = 0 \cdot Cos\omega t + 0 \cdot Sin\omega t = 0.$$

Вычислим корреляционную функцию. С учётом равенства:

$$X(t) = \breve{X}(t), M(U^2) = M(V^2) = D; m_X(t_1) = m_X(t_2) = 0,$$

и определения корреляционной функции имеем

$$K_X(t_1, t_2) = M[X(t_1) \cdot X(t_2)] = M[X(t_1)] \cdot M[X(t_2)] =$$
$$= M[(U \cdot Cos(\omega t_1) + V \cdot Sin(\omega t_1)) \cdot (U \cdot Cos(\omega t_2) + V \cdot Sin(\omega t_2))] =$$
$$= M(U^2)Cos(\omega t_1) \cdot Cos(\omega t_2) + M(V^2)Sin(\omega t_1) \cdot Sin(\omega t_2) + 0 =$$
$$= D(U)Cos(\omega t_1) \cdot Cos(\omega t_2) + D(V)Sin(\omega t_1) \cdot Sin(\omega t_2) =$$
$$= D[Cos(\omega t_1) \cdot Cos(\omega t_2) + Sin(\omega t_1) \cdot Sin(\omega t_2)] = D \cdot Cos\omega(t_1 - t_2).$$

Следовательно, мы доказали, что $X(t)$ является стандартным случайным процессом.

Б. Рассмотрим теперь СП $X(t)$, являющейся суммой бесконечного числа слагаемых вида (21) (общий случай)

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\{U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t), \tag{22}$$

где выполнены следующие условия:

$$m_{U_k} = m_{V_k} = 0; D_{U_k} = D_{V_k} = D_k;\ M[U_k \cdot U_l] = M[U_k \cdot V_k] = 0; M[V_k \cdot V_l] = 0; \tag{23}$$

при любых $k \neq l$, $\omega_k -$ постоянные числа.

Покажем, что случайный процесс $X(t)$*, определённый равенством* (22) *с условиями* (23) *также является стационарным.*

Действительно, с учетом свойства м.о. имеем

$$M\{X(t)\} = M[m_X(t) + M\left(\sum_{k=1}^{\infty}\{U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t)\right) =$$

$$= m_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty} M\{U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t)\} = m_X(t) + 0 = m_X(t).$$

Следовательно, $X(t) = \breve{X}(t)$.

Поскольку слагаемые в равенстве (22) некоррелированные, то с учётом формулы для корреляционной функции с.п. (21) и свойства 6, пункта 16.5, т.е. с учётом равенства

$$K_{X+Y}(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + K_Y(t_1,t_2)$$

получаем

$$K_X(t_1,t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k Cos\omega_k(t_2 - t_1), \tag{24}$$

Итак, с.п. (23) является *стационарным* случайным процессом.

Отметим, что равенство (24) можно рассматривать как разложение корреляционной функции $K_X(t_1,t_2)$ на промежутке $[-T;+T]$ и ряд Фурье по косинусам: $K_X(t_1,t_2) = K_X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k Cos\omega_k\tau$,

где

$$\omega_k = k \cdot \omega_1 = k\frac{\pi}{T},\quad D_0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} K_X(\tau)d\tau,$$

(25)

$$D_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} K_X(\tau)Cos(\omega_k\tau)d\tau = \frac{2}{T}\int_{0}^{+T} K_X(\tau)Cos(\omega_k\tau)d\tau$$

Можно доказать, что $D_k \geq 0$ для любой корреляционной функции стационарного случайного процесса $X(t)$.

Разложение (22) обычно называется *каноническим* или *спектральным разложением стационарного случайного процесса.* А разложение (24) для которого выполнены равенства (25) называется *спектральным разложением корреляционной функции СП* $X(t)$ *с равноотстоящими частотами.*

Отметим, что спектральное разложение (22) с.с.п. можно представить в виде суммы гармонических колебаний со случайными амплитудами A_k, и фазами φ_k и частотами ω_k:

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot Sin(\omega_k t + \varphi_k), \tag{26}$$

где $A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}$; $\varphi_k = arctg\dfrac{U_k}{V_k}$.

Кратко наметим схему получения представление (26) на основании равенства (22), где $X(t) = UCos(\omega t) + VSin(\omega t)$ и выполнены условий: $m_U = m_V = 0; D_U = D_V = D; \omega = const.$

Очевидно, $X(t) = V\left[\dfrac{U}{V}Cos(\omega t) + Sin(\omega t)\right]$. Обозначим $tg\varphi = \dfrac{U}{V}$ и выполнив стандартные выкладки, получим $X(t) = \sqrt{U^2 + V^2} \cdot Sin(\omega t + \varphi)$, где $\varphi = arctg(U/V)$.

Отсюда вытекает, что каждую случайную функцию $X_k(t) = U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t)$ в правой части (26) можно истолковать как гармоническое колебание со случайной амплитудой $A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}$, частотой ω_k и *случайной фазой* $(\omega_k t + \varphi_k)$. Отметим, что согласно условиям (23) величины U_k и V_k будут центрированные случайные величины, т.е. $U_k = \breve{U}_k; V_k = \breve{V}_k$.

9.1. О дисперсии стационарного случайного процесса.

Имеет место, следующее утверждение.

Теорема 16.4. *Дисперсия стационарного случайного процесса, представленного в виде равенства*

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\{U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t),$$

где выполнены следующие условия:

$$m_{U_k} = m_{V_k} = 0; D_{U_k} = D_{V_k} = D_k;\ M[U_k \cdot U_l] = M[U_k \cdot V_k] = 0; M[V_k \cdot V_l] = 0;$$

при любых $k \neq l$, ω_k *– постоянные числа, равно сумме дисперсий всех гармоник его спектрального разложения:*

(27) $$D_X = \sum_{k=0}^{\infty} D_k.$$

Доказательство. В соответствии свойства 1, пункта 16.6 получим

$$D_X = [K_X(t;t)] = K_X(0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k Cos(\omega_k \cdot 0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k.$$

Заметим, что если сумма существует, то ряд сходится.

Множество значений дисперсии D_k ***называют спектром стационарного случайного процесса* (ССП), *а ординаты этих величин – спектральными линиями, с соответствующими частотами*** ω_k.

Спектр можно представить графически

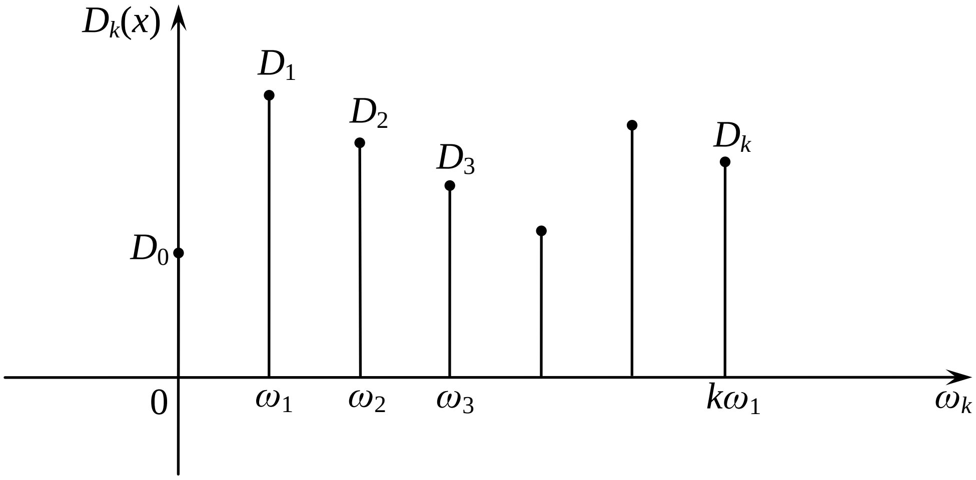


Рис.64

Сумма всех ординат спектра равна дисперсии случайного процесса $X(t)$. Спектр случайного процесса определённый равенством (22) называется *линейчатым дискретным* с бесконечным числом равноотстоящих спектральных линий. Расстояние между соседними линиями по частоте равно $\omega_1 = \dfrac{\pi}{T} = \Delta\omega.$

9.2. Дискретный спектр, с произвольным конечным числом частоты.

Пусть стационарная случайная функция $X(t)$ представлена в виде конечного спектрального разложения

$$(28) \qquad X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{n} X_k(t) = m_X + \sum_{k=1}^{n}[U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t)],$$

с условиями $m_{U_k} = m_{V_k} = 0; D_{U_k} = D_{V_k} = D_k$; при этом как уже было показано $X(t) = \breve{X}(t)$.

Найдём дисперсию одной гармоники $X_k(t)$, учитывая, что случайные величины U_k и V_k не коррелированны и дисперсии этих величин с одинаковыми индексами равны между собой, $D(U_K) = D(V_K) = D_k$.

$$D[X_k(t)] = D[U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t)] =$$
$$D[U_k Cos(\omega_k t)] + D[V_k Sin(\omega_k t)] =$$
$$= Cos^2 \omega_k t \cdot D(U_k) + Sin^2 \omega_k t \cdot D(V_k) =$$
$$= (Cos^2 \omega_k t + Sin^2 \omega_k t) \cdot D_k = D_k.$$

Следовательно, с учётом свойства 2, дисперсии случайного процесса, т.е. $D(m_X(t) = 0$, и приняв во внимание, что слагаемые $X_k(t)$ не коррелированны и потому дисперсия их суммы равна сумме дисперсий слагаемых, получим

$$(29) \qquad D[X(t] = \sum_{k=1}^{n} D_k \ .$$

Итак, дисперсия с.с.п. представляемая в виде суммы конечного числа гармоник с произвольными частотами, равна сумме дисперсий составляющих её гармоник.

Пример 9. Построить дискретный спектр стационарного случайного процесса

$$X(t) = \sum_{k=1}^{4}[U_k Cos(k+1)t + V_k Sin(k+1)t],$$

если случайные величины $U_k; V_k, k = 1,2,3,4.$ не коррелированны, их математические ожидания равны нулю и заданы их дисперсии равенствами:

$$(30) \qquad DU_1 = DV_1 = 3; DU_2 = DV_2 = 5; DU_3 = DV_3 = 4; DU_4 = DV_4 = 6;$$

$\omega_k = (k+1); k = 1,2,3,4;$ а на вертикальной оси – соответствующие им дисперсии (30).

Решение. В прямоугольной системе координат отложим по горизонтальной оси частоты,

Задание. 1. Найти $D[X(t)] = ?$

2. Постройте график изображения спектра.

10. Спектральная плотность случайного процесса, теорема Винера – Хинчина

Выше, когда частоты гармоник спектрального разложения стационарной случайной функции были дискретными и равноотстоящими, и был получен дискретный линейчатый спектр, причём соседние частоты отличались друг от друга на величину $\Delta\omega = \pi/T$.

Спектральное разложение с.п. на промежутке $[-T;+T]$ даёт приближённое его описание. Более полное представление о случайных процессах при спектральном разложении может быть получено при $T \to \infty$. Также отметим, что при неограниченном увеличении промежутка разложения ($T \to \infty$) число слагаемых в равенстве (29) неограниченно увеличивается, а коэффициенты D_k в разложении корреляционной функции (см.(24)) неограниченно уменьшается, но сумма остаётся постоянной. Интервал между частотами будет стремиться к нулю, т.е. $\omega_1 = \Delta\omega = \pi/T \to 0.$ Ясно, что при этом частота изменяется непрерывно (поэтому обозначим её через ω без индекса), соседние ординаты спектра сближаются и в пределе вместо дискретного спектра получим *непрерывный* (сплошной) спектр, т.е. каждой частоте ω $(\omega \geq 0)$ соответствует ордината, которую обозначим через $S_X(\omega)$.

Среднюю плотность дисперсии $D_k/\Delta\omega$ обозначают через $S_X(\omega)$, т.е.

(31) $$S_X(\omega) = \frac{D_k}{\Delta\omega} = \frac{D_k}{\omega_1}.$$

Спектральной плотностью $S_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ называется предел отношения дисперсии приходящийся на интервал частот $\Delta\omega$ к длине этого интервала, когда длина $\Delta\omega$ стремится к нулю

(32) $$S_X(\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{D_k}{\Delta\omega},.$$

т.е. спектральная плотность с.с.п. есть предел средней плотности дисперсии (31), когда $\Delta\omega \to 0.$

Далее получим формулы, связывающую спектральную плотность $S_X(\omega)$ и корреляционную функцию $K_X(\tau)$ при условии $T \to \infty\ (\Delta\omega \to 0)$. С этой целью, найдём дисперсию D_k из равенства (31) затем, поставив её в равенства (24) и (25) (см. пункт 16.9) получаем: $D_k = S_X(\omega) \cdot \Delta\omega = S_X(\omega) \cdot \dfrac{\pi}{T}.$

(33) $$K_X(t_1, t_2) = K_X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} S_X(\omega) \cdot Cos\omega_k\tau \cdot \Delta\omega,$$

$$D_k = \frac{\pi}{T} S_X(\omega) = \frac{2}{T} \int_0^T K_X(\tau) Cos(\omega\tau) d\tau,$$

т.е.

(34) $$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^T K_X(\tau) Cos(\omega\tau) d\tau\ .$$

Переходя к пределу при $T \to \infty\ (\Delta\omega \to 0)$, из равенств (33) и (34) получаем известнее утверждение полученное, независимо друг от друга Винером и Хинчиным.

Теорема 16.5 (Теорема Винера - Хинчина). *Корреляционная функция и спектральная плотность стационарного случайного процесса* $X(t)$ *между собой связаны взаимно обратными косинус - преобразованиями Фурье:*

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K_X(\tau)Cos(\omega\tau)d\tau; \quad K_X(\tau) = \int_0^{\infty} S_X(\omega)Cos(\omega\tau)d\omega; \tag{35}$$

Дискретный линейчатый спектр разложения переходит, при $T \to \infty$, в непрерывный спектр, в котором каждой частоте $\omega \geq 0$ соответствует неотрицательная ордината $S_X(\omega)$.

Кривая $S_X(\omega)$ изображает плотность распределения дисперсий по частотам непрерывного спектра относительно прямоугольной системы координат (см.рис. 65).

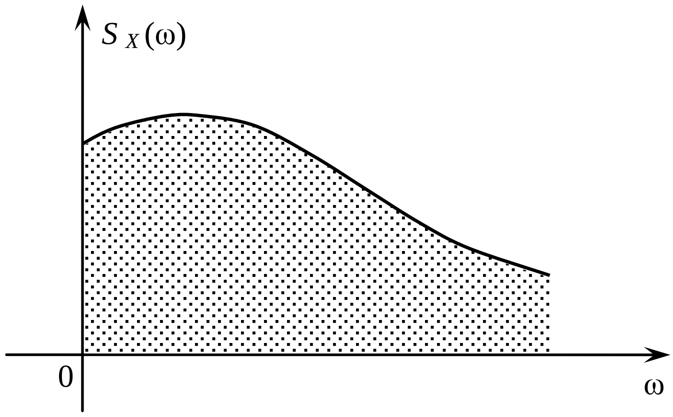


Рис.65

Свойства спектральной плотности стационарного случайного процесса.

Спектральная плотность $S_X(\omega)$ с.с.п. обладает следующими свойствами:

1. Спектральная плотность является неотрицательной функцией, т.е. $S_X(\omega) \geq 0$.
Это свойство выводится из определения (31) с учётом неравенства $D_k \geq 0$; $\Delta\omega \geq 0$.

2. Интеграл от спектральной плотности на полупрямой $[0,+\infty)$ равен дисперсию с.с.п., т.е.

$$\int_0^{+\infty} S_X(\omega)d\omega = D_X \ .$$

Равенство вытекает из второго равенства (35) с учётом первого свойства дисперсии (см.16.6);

$$D_X = K_X(0) = \int_0^{+\infty} S_X(\omega)Cos(\omega \cdot 0)d\omega = \int_0^{+\infty} S_X(\omega)d\omega,$$

Следует отметить, что часто для упрощения математических выкладок удобно использовать спектральное разложение с.с.п. в комплексной форме, при этом можно считать, что частоты изменяются в интервале $(-\infty,+\infty)$, (частоты $\omega < 0$ физического смысла не имеют).

Спектральной плотностью стационарного случайного процесса в комплексной форме называется функция

$$S_X^{\bullet}(\omega) = \frac{1}{2}S_X(|\,\omega\,|). \tag{36}$$

Комплексная форма Винера -Хинчина имеют вид

$$S_X^{\bullet}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau; \quad K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X^{\bullet}(\omega)e^{i\pi\omega}d\omega. \tag{37}$$

Доказательство этих равенств, проводится на основании спектрального разложения (24) с последующим использованием формулы Эйлера

$$Cos\omega_k\tau = \frac{e^{i\omega_k\tau} - e^{-i\omega_k\tau}}{2};\ Sin\omega_k\tau = \frac{e^{i\omega_k\tau} - e^{-i\omega_k\tau}}{2i},$$

и предельного перехода при $T \to \infty, (\Delta\omega \to 0)$.

Отметим, что спектральная функция $S_X^{\bullet}(\omega)$ является чётной функцией на всём интервале $(-\infty,+\infty)$, т.е. $S_X^{\bullet}(-\omega) = S_X^{\bullet}(\omega)$.

На участке полупрямой $[0,+\infty)$ имеем равенство $S_X^{\bullet}(\omega) = (0,5)\cdot S_X(\omega)$ (см. рис. 66).

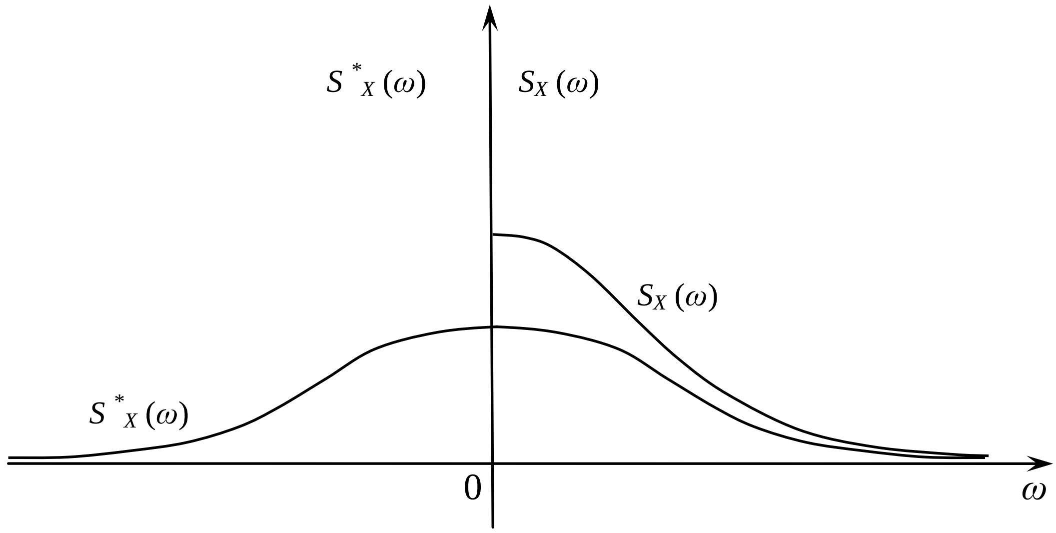


Рис. 66

Таким образом, значения функции $S_X^{\bullet}(\omega)$ в два раза меньше значения функции $S_X(\omega)$ при тех значениях аргумента ω.

Пример 10. Пусть корреляционная функция стационарного случайного процесса $X\{t\}$ задана равенством $K_X(\tau) = D\cdot e^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0$. Найти спектральную плотность ССП $X\{t\}$.

Решение. На основании первой формулы (37) получим

$$S_X^{\bullet}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D\cdot e^{-\alpha|\tau|}\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau\right\} = \frac{D}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)\tau}\,d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\,d\tau\right\} =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left\{\frac{e^{(\alpha-i\omega)\tau}}{\alpha - i\omega}\cdot\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(\alpha+i\omega)\tau}}{\alpha + i\omega}\cdot\Big|_{0}^{+\infty}\right\} = \frac{D}{2\pi}\left\{\frac{1}{\alpha - i\omega} - \frac{(1-0)}{\alpha - i\omega}\right\} =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left(\frac{\alpha + i\omega + \alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\right) = \frac{D}{2\pi}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{D\cdot\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Таким образом, $S_X^{\bullet}(\omega) = \dfrac{D\cdot\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$ или $S_X(\omega) = \dfrac{2D\cdot\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$.

Пример 11. Найдём спектральную плотность ССП $X(t)$, если её корреляционная функция задана в виде:

$$K_X(\omega)=\begin{cases}1-0{,}5|\tau|;\ |\tau|<2,\\ 0, \qquad\qquad |\tau|\geq 2.\end{cases}$$

Решение. Применяем первую формулу из равенства (35), и учитывая, что в интервале $(0,2)$, $|\tau|=\tau$, а вне этого интервала равно нулю, получим

$$S_X(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^2(1-0{,}5\tau)Cos(\omega\tau)d\tau.$$

Применяя метод, интегрирование по частям после стандартных подсчётов получим

$$S_X(\omega)=\frac{2\cdot Sin^2\omega}{\pi\omega^2}\ \text{ или }\ S_X^{\bullet}(\omega)=\frac{Sin^2\omega}{\pi\omega^2}.$$

Пример12. Найти корреляционную функцию СП., если её спектральная плотность задана в виде

$$S_X^{\bullet}=\begin{cases}S_0,\ |\omega|\leq\omega_0\\ 0,\quad |\omega|>\omega_0\end{cases}$$

$$K_X(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_0\cdot e^{i\omega\tau}d\omega=\int_{-\omega}^{+\omega}S_0\cdot e^{i\omega\tau}d\omega=S_0\cdot\frac{1}{i\tau}e^{i\omega\tau}\Big|_{-\omega}^{+\omega}=$$

$$=S_0\cdot\frac{1}{i\tau}e^{i\omega\tau}\Big|_{-\omega}^{+\omega}=\frac{2S_0}{\tau}\cdot\frac{e^{i\omega_0\tau}-e^{-i\omega_0\tau}}{2i}=2\cdot S_0\cdot\omega_0\cdot\frac{Sin(\omega_0\tau)}{\omega_0\tau}.$$

График корреляционной функции изображён на рис.67.

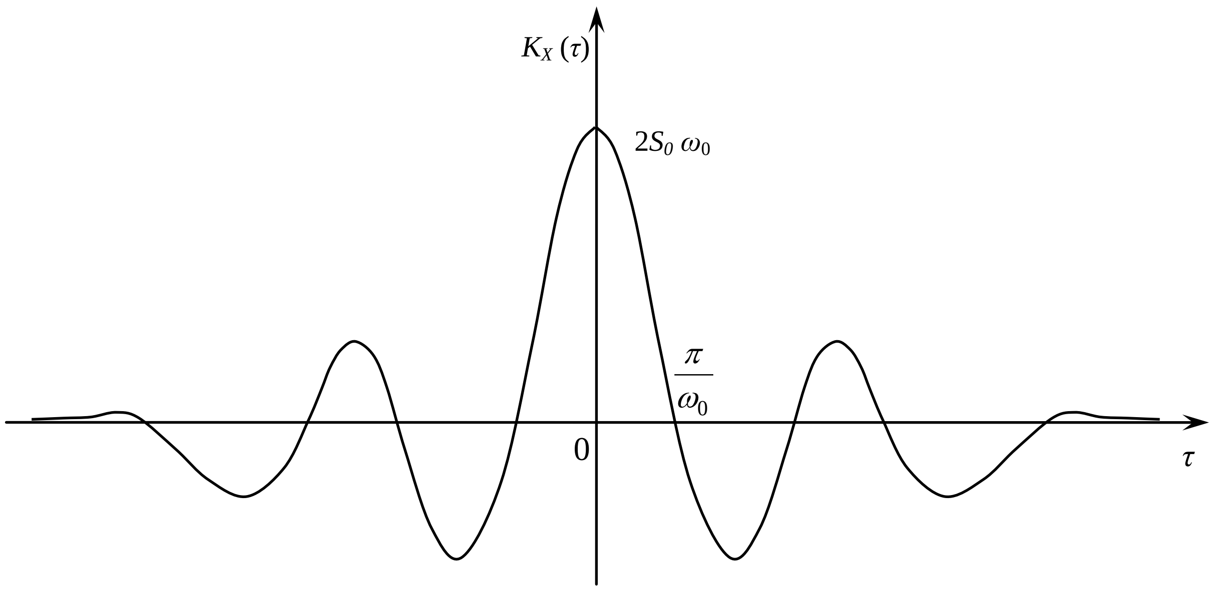


Рис.67

На практике часто с понятием спектральной плотностью также используют понятие нормированную спектральную плотность.

Нормированной спектральной плотностью с.с.п. $X(t)$ называют отношение спектральной плотности к дисперсии СП, т.е.

(38) $$S_{(X,N)}(\omega)=\frac{S_X^{\bullet}(\omega)}{D_X}=\frac{S_X^{\bullet}(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty}S_X^{\bullet}(\omega)d\omega}.$$

Пример 13. Задана спектральная плотность $S_X^{\bullet}(\omega) = S_0 / [\pi(1+\omega^2]$ стационарной случайной функции $X(t)$, где S_0 – положительная постоянная. Найти нормированную спектральную плотность.

Решение. По второй формуле равенства (35) при $\tau = 0$ имеем (с учётом $S_X^{\bullet}(-\omega) = S_X^{\bullet}(\omega)$)

$$D_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X^{\bullet}(\omega) d\omega = \frac{S_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1+\omega^2} d\omega = \frac{S_0}{\pi} [arctg\omega \Big|_{-\infty}^{+\infty} = S_0 .$$

Найдём искомую нормированную плотность, для этого достаточно воспользоваться формулой (38), получим

$$S_{(X,N)}(\omega) = \frac{1}{[\pi(1+\omega^2)]}$$

11. Стационарный белый шум, дельта функция

Одним из конкретных видов стационарного СП. является так называемый «***стационарный белый шум***». Кратко остановимся на это очень важное явление.

Стационарным белым шумом называется стационарный с.п. $X(t)$, спектральная плотность которого является постоянным числом:

$$S_X^{\bullet}(\omega) = S_0 = const \text{ для } \forall \omega \in (-\infty, +\infty) .$$

Корреляционная функция белого шума, находится на основании второй формулы (35) с последующим использованием так называемой дельта функцией, определяемая равенством

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \qquad (39)$$

где $\delta(t)$ – дельта функция Дирака. Кратко рассмотрим основные сведения об этой функции. Представление (39) выводится на основании теории интегралов Фурье.

Дельта функция Дирака.

Дельта – функция Дирака $\delta(t)$ является одним из первых примеров обобщённых функций. Обобщённая функция определяется, как предел последовательности однопараметрического семейства непрерывных функций, и удовлетворяет условию, что она ставит в соответствие всякой непрерывной функции $f(t)$ её значение в точке $t = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) . \qquad (40)$$

Правую часть равенства (40) можно представить в виде предела: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta_{\varepsilon}(t) f(t) dt . \qquad (41)$$

где

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } |t| \geq \varepsilon, \\ 1/(2\varepsilon), & \text{если } |t| < \varepsilon. \end{cases}$$

Таким образом, дельта – функцию можно рассматривать как предел последовательности функций $\delta_{\varepsilon}(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая, что $\delta_{\varepsilon}(t) \to 0$ при $t \neq 0$, $\delta_{\varepsilon}(t) \to 0$ для $t \to 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1$, условно пишут

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq 0, \\ \infty, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Наглядно график функции Дирака геометрически можно представить в виде графика, изображённого на рисунке 68.

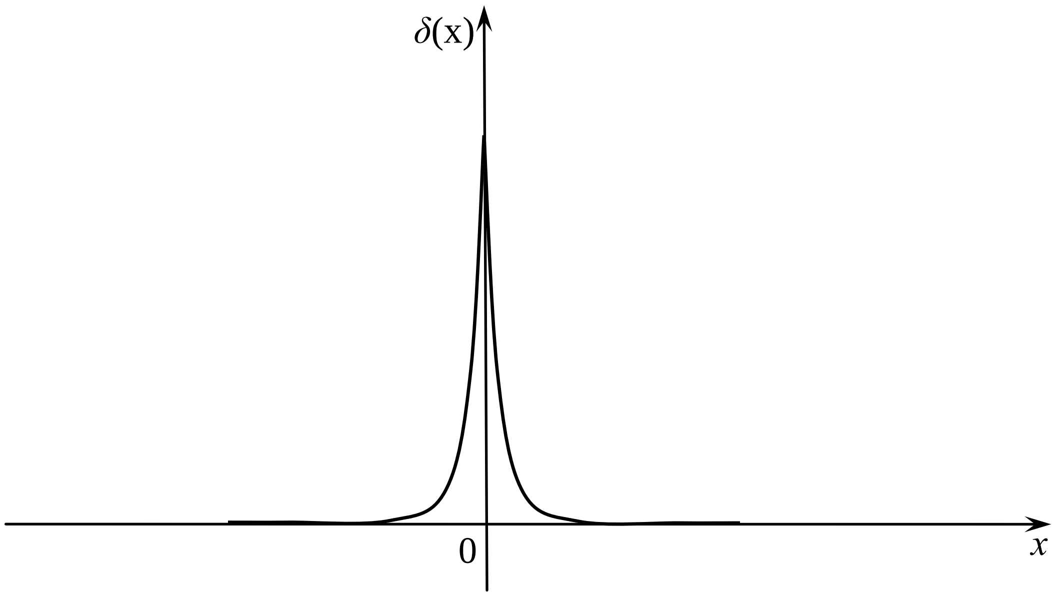


Рис. 68

Равенство (39) также пишут в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi \cdot \delta(t).$$

Физический смысл дельта – функции можно охарактеризовать как плотность единичной массы, сосредоточенный в нулевой точке, а в остальных точках она равна нулю.

Замечание. В приложениях равенство (39) часто применяют в форме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0),$$

которое выводится аналогично как выше (следует все рассуждения в окрестности точки $t = t_0$).

Далее продолжим изучение «стационарного белого шума». Вычислим корреляционную функцию белого шума. На основании второй формулы (35) с последующим использованием формулы (39) получим

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = S_0 \cdot \int_{-\omega}^{+\omega} \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = S_0 \cdot 2\pi \cdot \delta(\tau).$$

То есть

(42) $$K_X(\tau) = S_0 \cdot 2\pi \cdot \delta(\tau)$$

Равенство (42) означает некоррелированность любых двух различных сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ (поскольку $\delta(t) = 0,$ при всех значениях $t \neq 0$). В силу этого явления осуществить белый шум невозможно, т.е. белый шум - полезная математическая абстракция. В частности, явление белый шум используют для моделирования с.п., которые имеют постоянную спектральную плотность в определённом диапазоне частот, при этом поведение спектральной плотности вне его диапазона исследователя не интересует.

Пример 14. Спектральная плотность стационарной случайной функции $X(t)$ постоянна в диапазоне $(-\omega_0, +\omega_0)$, а вне этого диапазона равна нулю, т.е.

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_0 = const, & \omega \in (-\omega_0, \omega_0), \\ 0, & \omega \notin (-\omega_0, \omega_0). \end{cases}$$

Найти: 1. Корреляционную функцию;

2. Дисперсию случайного процесса $X(t)$.

Решение. 1. Найдём искомую корреляционную функцию:

$$K_X(\tau)=\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} S_0 Cos\omega\tau\, d\omega = 2S\int_0^{\omega_0} Cos\omega\,\tau\, d\omega = \frac{2S_0 Sin\omega_0\tau}{\tau},$$

Итак,

$$K_X(\tau)=\frac{2S_0 Sin\omega_0\tau}{\tau}.$$

2. Найдём искомую дисперсию:

$$D_X=\lim_{\tau\to 0}K_X(\tau)=\lim_{\tau\to 0}\frac{2S_0 Sin\omega_0\tau}{\tau}=2S_0\omega_0\lim_{\tau\to 0}\frac{Sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau}.$$

Следовательно, на основании первого замечательного предела получим

$$D_X == 2S_0\omega_0.$$

Тема 17. Марковские случайные процессы

1. Понятие Марковской цепи, марковские случайные процессы

Непосредственным обобщением схемы повторных независимых испытаний (схема Бернулли) является схема так называемых *цепей Маркова*, впервые систематически изученные известным математиком А.А.Марковым. Мы здесь ограничимся изложением элементов этой теории.

Представим себе, что проводится последовательность испытаний, в каждом из которых может осуществиться одно и только одно из k несовместных событий $A_1^{(s)}, A_2^{(s)},\cdots, A_k^{(s)}$, где верхний индекс обозначает номер испытания.

Говорят, что последовательность испытаний *образует цепь Маркова*, точнее, «*простую цепь Маркова*»*, если условная вероятность события* $\mathrm{A}_i^{(s+1)}$*, которое произошло в* $(s+1)-м$ *испытании* $(s=1,2,3,\cdots)$ $(i=1,2,\cdots,k)$ *зависит лишь от того, какое событие произошло при* $s-м$ *испытании и не изменяется от добавочных сведений о том, какие события происходили в более ранних испытаниях.*

Часто при изложении теории цепей Маркова придерживаются и другой терминологии. При этом говорят о некоторой физической системе S, в которой в каждый момент времени может находиться система в одном из состояний $s_1, s_2,\cdots, s_k$ и меняет своё состояние только в моменты времени $t_1, t_2,\cdots, t_n,\cdots$. Для цепей Маркова вероятность перехода в какое либо состоянии система s_i ,$(i=1,2,\cdots,k)$ в момент $\mathrm{t_i}$, зависит только от s_i и того, в каком состоянии система находилась в момент t $(t_{s-1}<t<t_s)$, и не изменяется от того, что становятся известными её состояния в более ранние моменты.

Для иллюстрации этого понятия (цепей Маркова) рассмотрим примеры:

Пример 1. Представим, что частица, находящаяся на прямой, движется по этой прямой под влиянием случайных толчков, происходящих в моменты $t_1, t_2,\cdots, t_n,\cdots$. Частица может находиться в точках с целыми координатами $a, a+1, a+2,\cdots, b;$ при этом, в точках a и b находятся отражающие шкалы (стенки). Каждый толчок перемещает частицу в право с вероятностью p и влево с вероятностью $q=1-p$, если только частица не находится у стенки. Если же частица находится у стенки, то любой толчок переводит её на единицу внутрь промежутка между стенками. Легко видит, что приведённый пример «*блуждания частицы*» представляет собой типичный пример цепи Маркова. Аналогично можно было бы рассмотреть случай, когда частица прилипает к одной из стенок или к обеим стенкам.

Случайный процесс называется процессом с дискретными состояниями, если множество его возможных состояний $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_i, \cdots$ конечно или счетное (можно заранее перечислить), а переход из одного состояния в другое осуществляется скачком, переходы возможны только в определённые моменты времени $t_1, t_2, t_3, \cdots$.

Среди случайных процессов особое место занимают марковские случайные процессы.

Если переходы возможны в любой момент времени, т.е. моменты переходов из одного состояния в другое *случайны*, то такой процесс называется *процессом с непрерывным временем*.

Случайный *процесс с дискретным процессом называется* ***марковским,*** *если для любого момента времени* t_0 *условная вероятность каждого из состояний системы* S *в будущем (т.е. при* $t > t_0$*) зависит только от её состояния в настоящем (т.е. при* $t = t_0$*) и не зависит от того, когда и как система пришла в это состояние, т.е. каковы были предыдущие состояния, при* $t < t_0$.

Марковский процесс называют также *процессом без последействия*: будущее в нём зависит от прошлого только через настоящее, вероятность системы S попасть в состояние s_j в момент времени t_k $(S(t_k) = s_j)$ зависит лишь от состояния, s_i в котором система находилась в предыдущий момент времени t_{k-1} $(S(t_{k-1}) = s_i$.

Другими словами, имеет место цепочка равенств:

$$P[S(t_k) = s_j \,|\, S(t_1) = x_1, S(t_2) = x_2, \cdots, S(t_{k-1}) = s_i] =$$
$$= P[S(t_k) = s_j \mid S(t_{k-1}) = s_i],$$

где $x_1, x_2, \cdots$ - возможные состояния системы $\{s_1, s_2, \cdots, s_i, \cdots, s_j, \cdots, s_n\}$.

Марковский процесс служит математической моделью для многих процессов в биологии (распределение эпидемий, рост популяции), в физике (распад радиоактивного вещества), в теории массового обслуживания (поток пассажиров в метро, поток поступлений звонков на телефонную станцию и др.).

Отметим, что в системе массового обслуживания множество состояний системы определяется числом каналов, т.е. линий связи, вычислительные машины, продавцы и т.д. Переходы между состояниями системы S происходят под воздействием потока событий (потока заявок, требований, отказов и т.д.), будут простейшими, пуассоновскими.

Случайные процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого «*графа состояний*». В нём состояния $s_1, s_2, \cdots$ системы S изображаются прямоугольниками (или кружками), а возможные непосредственные переходы из одного состояния в другое - стрелками (или ориентированными дугами), которые соединяют эти состояния с указанием их направлений.

Пример 2. Построим граф состояний следующего случайного процесса: некоторое устройство S в случайный момент времени, может выйти из строя, оно контролируется в моменты времени (к примеру, через каждый час) и в случае необходимости проводится либо ремонт, либо идёт на списание.

Решение. Возможные состояние системы (устройства) S: пусть $s_1 -$ устройство исправно, $s_2 -$ устройство неисправно, требуется ремонт, $s_3 -$ устройство неисправно, ремонту не подлежит (на списание).

Процесс представляет собой случайное блуждание системы S по состояниям, время проверки 1 час, является шаг процесса. Граф системы представлен на рисунке 69

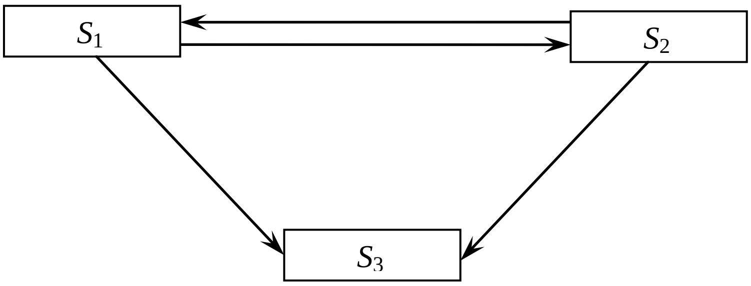


Рис.69

Одно из возможных реализация с.п. блуждания системы может иметь такой вид: $\{s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, s_1^{(3)}, s_2^{(4)}, s_1^{(5)}, s_1^{(6)}, s_3^{(7)}\}$, что означает: при 1-м, 2-м, 3-м осмотрах устройство исправно; при 4-м осмотре обнаружено неисправность, ремонтируется; при 5-м, 6-м осмотрах обнаружено исправность, при 7-м осмотре признано негодность, устройство списано. Процесс закончился.

Для описания с.п. с дискретными состояниями пользуются вероятностями состояний системы S, то есть значениями $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)$, где $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}$ выражает того, что в момент времени t система находится в состоянии s_i; $S(t)$ – случайное состояние системы в момент времени t.

Естественно, что для любого момента времени t сумма вероятностей всех состояний равна единице (как сумма вероятностей полной группы несовместных событий):

$$\sum_{л=1}^{n} p_k(t) = 1.$$

2. Дискретный Марковский процесс, цепь Маркова

Пусть в некоторой системе S происходит с.п. с дискретными состояниями $s_1, s_2, \cdots, s_n$ и дискретным временем, т.е. переход системы из одного состояния в другое происходит только в определённые моменты времени $t_0, t_1, t_2, \cdots$. Эти моменты называют *шагами* процесса (обычно разности смежных моментов наблюдения $t_i - t_{i-1}$ равны постоянному числу – длине шага, принимаемого в качестве единицы времени); t_0 – начало процесса.

Этот с.п. можно рассматривать как последовательность (цепь) событий $S(0), S(1), S(2), \cdots$. ($S(0)$ – начальное состояние системы, т.е. перед 1-м шагом; $S(1)$ – состояние системы после 1-го шага, $S(2)$ – состояние системы после 2-го шага и т.д.), т.е. событий вида $\{S(k) = s_i\}$; где $\mathrm{i} = 1,2,3,\cdots,\mathrm{n};\ \mathrm{k} = 0,1,2,\cdots$.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют *марковской цепью* (цепь Маркова).

Отметим, что *марковский цепь*, в которой условные вероятности состояний в будущем зависят только от состояния на последнем этапе (и не зависят от предыдущих), называют *простой цепью Маркова*.

Примером такой системы S может служить техническое устройство, возможные состояния которого следующие:

s_1 – исправная работа;

s_2 – профилактический осмотр и обслуживание;

s_3 – ремонтная работа;

s_4 – списание за негодностью;

Граф состояние работы изображен на рисунке 70

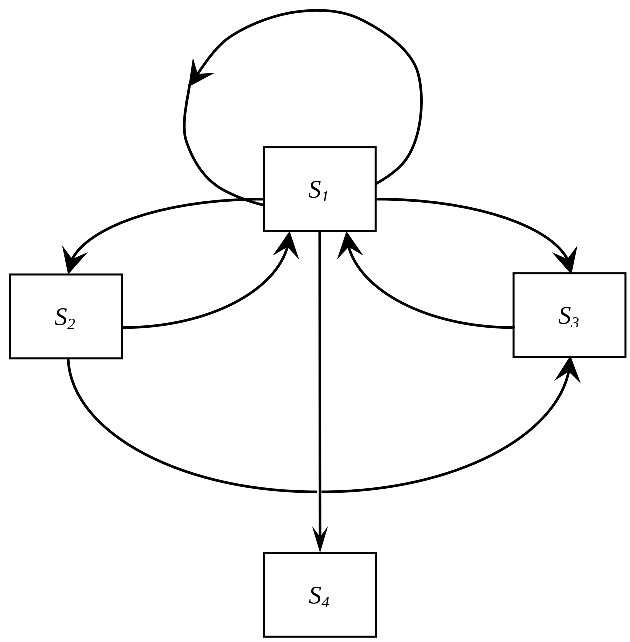


Рис.70

Из анализа графа видно, что из состояния нормальной работы вершины s_1 система может переходить в состояние профилактического обслуживания s_2, а затем опять возвращаться в s_1. Или переходить из s_1 в состояние ремонта s_3, после чего либо возвращается в s_1, либо переходить в состояние списания. Состояние s_4 является конечным, так как переход из него невозможен. Переход из s_1 опять в s_1 означает задержку в этом состоянии.

На практике часто встречаются системы, состояния которых образует цепь, в которой каждое состояние s_i (кроме крайних s_0 и s_n) связано прямой и обратной связи с двумя соседними, $s_{i-1}; s_{i+1}$, а крайние состояния – с одним соседним (см. рис.71)

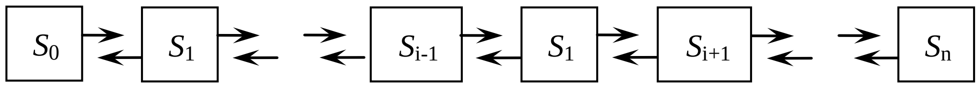


Рис.71 Цепь состояний

Примером такой системы может служить техническое устройство, состоящее из однотипных узлов. Каждое состояние системы характеризуется числом неисправных t узлов в момент проверки.

Основной задачей исследования является нахождение вероятностей состояния s_i на любом k – м шаге. Будем вычислять вероятности состояний дискретной системы

Мы здесь будем рассматривать только простые цепи Маркова. Далее, кратко будем также рассматривать понятия о непрерывных Марковских процессах.

При дискретном времени изменения состояний системы каждый переход от одного состояния к другому называют *шагом*.

Из определения марковской цепи следует, что для нее вероятность перехода системы S в состояние на $(k+1)-$м шаге зависит только от того, в каком состоянии s_j находилась система на предыдущем $k-$шаге.

$$p_i(k) = P\{S(k) = s_i\}, i = 1,2,3,\cdots, \mathrm{n};\ \mathrm{k} = 0,1,2,\cdots.$$

где $P\{S(k) = s_i\}-$безусловная вероятность того, что на $k-$м шаге система именно будет находиться в состояние s_i. Для нахождения этих вероятностей необходимо знать начальное распределение вероятностей $p_1(0), p_2(0),\cdots, p_n(0)$, т.е. вероятности состояний $p_i(0)$ в момент времени $t_0 = 0$ (начало процесса) и так называемые *переходные вероятности* $p_{ij}(k)$ марковской цепи на $k-$м шаге.

Переходной вероятностью $p_{ij}(k)$ называют условную вероятность перехода системы S на
$k-$м шаге, в состояние s_j, если известно, что на предыдущем $(k-1)-$м шаге она была в состоянии s_i, т.е.

(43) $$p_{ij}(k) = P\{S(k) = s_j \,|\, S(k-1) = s_i\},\ i, j = \overline{1,n}; k = 0,1,2,\cdots,$$

где первый индекс указывает на номер предшествующего, а второй индекс на номер последующего состояния системы.

Цепь Маркова называется *однородной,* если величина, $p_{ij}(k) = p_{ij}$, т.е. условные вероятности $p_{ij}(k)$ не зависят от номера испытаний, в противном случае называется неоднородной.

Далее, мы будем рассматривать только однородные цепи, которые могут быть заданы с помощью вектора $p(0) = (p_1(0), p_2(0),\cdots, p_n(0))$- вероятности состояний в момент времени $t_0 = 0$ и матрицы (*называемой матрицей перехода*)

(44) $$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \left(p_{ij}\right)_{n\times n}.$$

Элементы матрицы $P = \left(p_{ij}\right)$ обладают основными свойствами обычных квадратных матриц и дополнительно следующими свойствами:

а) $p_{ij} \ge 0$, б) $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,$ при каждом фиксированном $i = 1,2,\cdots,\mathrm{n}$, т.е. сумма элементов каждой строки *матрицы перехода* равна единице (как вероятности событий перехода из одного состояния s_i в любое другое возможное состояние s_j- образующих полную группу событий).

Вероятность состояния системы на следующем шаге определяется по рекуррентной формуле:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\cdot p_{ij},\ (k = 1,2,3,\cdots, j = 1,2,3,\cdots n).$$

При некоторых условиях (эргодичность, однородность, отсутствие циклов) в цепи Маркова устанавливается *стационарный режим*, в котором вероятности состояний системы уже от номера шага не зависят. Такие вероятности называют *предельными* (или финальными) вероятностями цепи Маркова:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij}\ \ (j = 1,2,\cdots,n).$$

Имеет место утверждение.

Теорема 17.1. *Для матрицы перехода вероятностей за* r *шагов* $P(r)$ *справедлива формула*

$$P(r) = P^r, \quad (45)$$

где $P_{ij}(r, r+1) = p_{ij} = P\{X_{r+1} = j \mid X_r = i\}$.

Доказательство. По правилу умножения двух квадратных матриц $n-$го порядка имеем

$$P \cdot P = P^2 = (l_{ij})_{n\times n}; \text{ где } l_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p_{kj};$$

при этом, по определению матрицы перехода известно, что $\sum_{j=1}^{n} p_{kj} = 1;$ при любом $k = 1, 2, \cdots, n$.

Просуммируем обе части равенства $l_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p_{kj}$ по всем $\mathrm{j} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}$, и заменяя порядок суммирования после дважды применения свойство а) получим, что $P(2) = P^2 -$матрица перехода за два шага. Аналогично, последовательно рассуждая шаг за шагом, получим наше утверждение в общем случае.

Пример 3. Задана матрица перехода

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы переходных вероятностей $P(2); P(3)$.

На основании правила умножения двух матриц получим

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}25 & 0{,}41 \\ 0{,}37 & 0{,}28 & 0{,}35 \\ 0{,}31 & 0{,}25 & 0{,}44 \end{pmatrix}.$$

Задание. Проверьте, что верно равенство

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}25 & 0{,}41 \\ 0{,}37 & 0{,}28 & 0{,}35 \\ 0{,}31 & 0{,}25 & 0{,}44 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} 0{,}316 & 0{,}269 & 0{,}415 \\ 0{,}319 & 0{,}265 & 0{,}416 \\ 0{,}319 & 0{,}256 & 0{,}425 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что конечная дискретная цепь Маркова представляет с собой дальнейшее обобщение схемы Бернулли, к тому же на случай зависимых испытаний; независимые испытания являются частным случаем марковской цепи. Здесь под «событием» понимается состояние системы, а под «испытанием» понимается изменение состояния системы.

Если «*испытания*» (опыты) являются независимыми, то появление определённого события в любом опыте не зависит от результатов ранее произведённых испытаний.

Задания. а) Заданы матрицы переходов

1. $P = P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$**;**

2. $P = P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$**;**

3. $P = P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$**.**

Найти в каждом случае матрицу $P(2)$.

Ответы: а) **1.** $P(2)=\begin{pmatrix}0{,}34 & 0{,}66\\ 0{,}33 & 0{,}67\end{pmatrix}$;

2. $P(2)=\begin{pmatrix}0{,}60 & 0{,}40\\ 0{,}35 & 0{,}65\end{pmatrix}$;

3. $P(2)=\begin{pmatrix}0{,}244 & 0{,}756\\ 0{,}252 & 0{,}748\end{pmatrix}$.

в) Заданы матрицы переходов

$$P_2(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix};\quad P_3(1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Найти $P_2(2), P_2(3), P_3(2)$.

Ответы: в) **1.** $P_2(2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0{,}75 & 0{,}25\end{pmatrix}$; **2.** $P_2(3)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0{,}875 & 0{,}125\end{pmatrix}$;

3. $P_3(2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3/4 & 1/4 & 0\\ 11/18 & 5/18 & 1/9\end{pmatrix}$.

Замечание. В общем случае дискретная *марковская цепь* $\{X_n\}$ представляет собой марковский случайный процесс, пространство состояний которого конечно или счётное, а множество индексов $T=(0,1,2,\cdots)$ - множество всех неотрицательных целых чисел или его некоторое подмножество (конечное или счётное). Мы можем говорить об X_n как об исходе $n-$го испытания.

Часто пространство состояний процесса удобно отожествить с множеством неотрицательных целых чисел $(0,1,2,\cdots)$ и в этих случаях говорят, что X_n находится в состоянии i, если $X_n=i$.

Вероятность попасть случайной величины X_{n+1} в состояние j (*называемая одношаговой переходной вероятностью*), как уже было упомянуто выше, обозначается $P_{ij}(n,n+1)=P_{ij}$, т.е.

(46) $$P_{ij}(n,n+1)=P_{ij}=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}.$$

В таком обозначении подчёркивается, что в общем случае переходные вероятности зависят не только от начального и конечного состояний, но и от момента осуществления перехода.

В случаях, когда одношаговые переходные вероятности не зависят от временной переменной (т.е. от значения n), то говорят, что марковский процесс обладает *стационарными переходными вероятностями*. Итак, для дальнейшего отметим, что имеет место равенство $P_{ij}(n,n+1)=P_{ij}=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}$, который не зависит от n, и p_{ij} обозначает вероятность перехода за одно испытание из состояния i в состояние j.

Обычно вероятности p_{ij} объединяют в квадратную матрицу (конечную или счётную) в зависимости от рассматриваемого процесса:

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{03} & \cdots \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}=\left(p_{ij}\right)_{\infty\times\infty},$$

и называют марковской матрицей, или *матрицей переходных вероятностей* марковской цепи. В матрице P $\{i+1\}-$я строка представляет собой распределение вероятностей с.в. X_{n+1} при условии, что $\mathrm{X_n}=i$. Если число состояний, конечно, то P - конечная квадратная матрица, порядок которой (число строк) равен числу состояний.

Естественно, что вероятности p_{ij} удовлетворяют следующим двум условиям:

а) $p_{ij}\geq 0;\ i,\ j=0,1,2,\cdots,$,

б) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1,$ при каждом фиксированном $i=0,1,2,\cdots.$

Условие б) отражает тот факт, что каждое испытание вызывает некоторый переход из одного состояния в другое состояние. Для удобства обычно говорят также о *переходе* и в том случае, когда состояние остаётся неизменным. Имеет место утверждение.

Теорема 17.2. *Процесс полностью определён, если заданы вероятности* (46)*, т.е.*

$$P_{ij}(n,n+1)=P_{ij}=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\},$$

и распределение вероятностей случайной величины X_0.

Доказательство. Покажем, что для любого конечного n как вычисляются вероятности

(47) $$P\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\},$$

так как по формуле полной вероятности любые другие вероятности, относящиеся случайным величинам $X_{j_1},X_{j_2},\cdots,X_{j_k},\ j_1<j_2<\cdots<j_k$, могут быть получены суммированием слагаемых (членов) вида (47).

По определению условной вероятности имеем

(48) $$P\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=$$
$$=P\{X_n=i_n\mid X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}\cdot P\{X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1}\}.$$

Но по определению марковского процесса получим

(49) $$P\{X_n=i_n\mid X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}\cdot P\{X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1}\}=$$
$$=P\{X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1}\}=P_{i_{n-1},i_n}.$$

Поставляя равенство (49) в (48) получим

(50) $$P\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}==P_{i_{n-1},i_n}\cdot P\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}.$$

Продолжая этот процесс последовательно, получим:

(51) $$P\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=P_{i_{n-1},i_n}\cdot P_{i_{n-2}i_{n-1}}\cdots P_{i_0,i_1}\cdot P_{i_0}.$$

Процесс полностью определён. Что требовалась доказать.

3. Примеры Марковских цепей

Большое число процессов: физических, биологических, в случайные блуждания системы, модели теории запасов, ветвящиеся процессы, различные модели в генетике и многие экономические явления описываются Марковскими цепями. Ниже приведём некоторые примеры.

А. Пространственно однородные марковские цепи

Пусть дискретная случайная величина ξ принимает неотрицательные целочисленные значения, причём $P\{\xi = i\} = \alpha_i, \alpha_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ представляют результаты независимых наблюдений с.в. ξ.

Опишем две различные марковские цепи, связанные с последовательностью $\{\xi_i\}$. В обоих случаях пространство состояний совпадает с множеством неотрицательных целых чисел.

I. Определим процесс X_n, n $= 0,1,2,\cdots\}$, положив $X_n = \xi_n$ с заданным начальным значением $X_0 = \xi_0$. Матрица переходных вероятностей этого процесса имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}.$$

Тот факт, что в этом процессе у матрицы P все строки одинаковы, означает, что случайная величина X_{n+1} не зависит от с.в. X_n.

II. Следующий важный класс Марковских цепей возникает при рассмотрении последовательных частичных сумм S_n случайных величин ξ_i, т.е.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \ \ n = 1, 2, \cdots.$$

Согласно определению считаем $S_0 = 0$. Нетрудно заметить, что этот процесс $\{X_n = S_n\}$, является марковским. Найдём его матрицу переходных вероятностей: именно с учётом независимостью ξ_i получим

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P\{S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1} = j \mid S_n = i\} =$$
$$= P\{\xi_{n+1} = j - i\} = \begin{cases} a_{j-i}, & j \geq i, \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

Следовательно, матрица переходных вероятностей P будет иметь вид

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Замечание. Если случайная величина ξ может принимать как положительные, так и отрицательные целочисленные значения S_n, т.е. для каждого n значение S_n содержатся в множестве целых чисел $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$, то в этом случае пространство состояний удобнее отожествить со всеми целыми числами (а не преобразовывать в множество неотрицательных целых). Тогда матрицу переходных вероятностей удобно представить в более симметричной форме

$$P = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \cdots & a_{-3} & a_{-2} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}.$$

где $P\{\xi = k\} = a_k, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$ и $a_k \geq 0,\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = 1.$

4. Расчет цепи Маркова для стационарного режима

Для нахождения финальных вероятностей необходимо составить систему алгебраических уравнений исходя из правила: для стационарного режима суммарный поток, переводящий систему из других состояний в состояние s_j, равен суммарному потоку вероятностей событий, выводящих систему из состояния s_j;

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot p_{ij} = p_j \sum_{i=1}^{n} p_{ji}, (j = 1,2,\cdots,n;\ j \neq i). \qquad (53)$$

К этим уравнениям надо добавить нормировочное условие $\sum p_i = 1$, отбросив любое (одно) из уравнений. Полученная система уравнений с n неизвестными имеет единственное решение.

Пример 4. Вычислительная машина находится в одном из следующих состояний:

s_1 – система исправно работает;

s_2 – система неисправна, тестируется;

s_3 – система неисправна, настраивается программное обеспечение;

s_4 – система находится на профилактике;

s_5 – система ремонтируется, модернизируется;

Размеченный граф состояний системы показан на рисунке 72

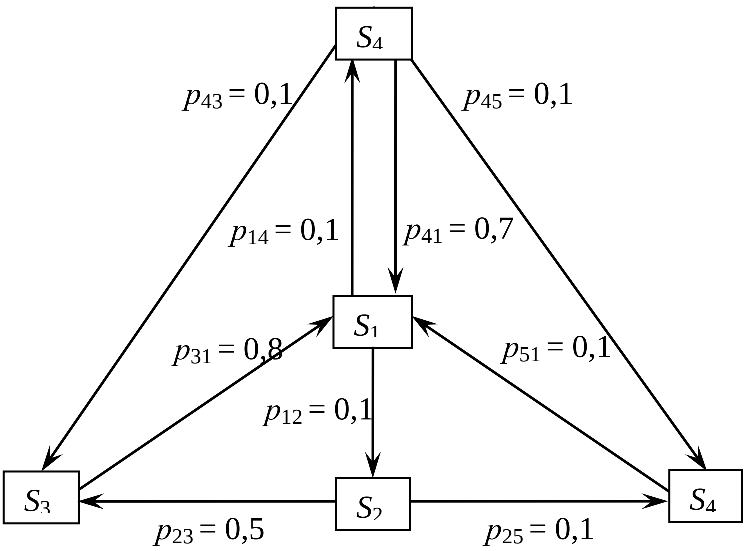


Рис.72

Составить систему алгебраических уравнений и найти предельные вероятности состояний.

Решение. Рассмотрим состояние s_5 системы в размеченном графе. В это состояние направлено две стрелки, следовательно, на основании (53) в левой части уравнения для $j=5$ будут два слагаемых. Из этого состояния выходит одна стрелка, следовательно, в правой части уравнения будет одно слагаемое. Таким образом, получаем первое уравнение системы:

$$p_2 p_{25} + p_4 p_{45} = p_5 p_{51}.$$

Аналогично запишем ещё три уравнения для оставшихся состояний (вершин графа):

$$\begin{cases} p_2(p_{23} + p_{25}) = p_1 p_{12}; \\ p_2 p_{23} + p_4 p_{43} = p_3 p_{31}; \\ p_4(p_{41} + p_{43} + p_{45}) = p_1 p_{14}. \end{cases}$$

В качестве пятого уравнения возьмём нормировочное уравнение $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$. При решении системы уравнение для s_1 отбрасываем. Его можно в конце использовать для контроля полученного решения. Таким образом, перепишем систему уравнений в виде:

$$p_2 = \frac{p_1 p_{12}}{p_{23} + p_{25}}; \quad p_3 = \frac{p_2 p_{23} + p_4 p_{43}}{p_{31}};$$

$$p_4 = \frac{p_1 p_{14}}{p_{41} + p_{43} + p_{45}}; \quad p_5 = \frac{p_2 p_{25} + p_4 p_{45}}{p_{51}};$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1.$$

В результате решения системы методом подстановок получим:

$$p_1 \approx 0{,}597; \ p_2 \approx 0{,}1; \ p_3 \approx 0{,}071; \ p_4 \approx 0{,}066; \ p_5 \approx 0{,}166.$$

Замечание. Для решения этого примера нам не потребовались вероятности «*задержек*» $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}, p_{55}$.

Пример 5. В локальной вычислительной сети работают три ЭВМ. По истечению определённого промежутка времени t все ЭВМ тестируются, в результате чего каждая из них признаётся либо исправленной, либо требующего ремонта. Вероятность того, что за время t исправная ЭВМ выйдет из строя, равна p, а вероятность того, что неисправная будет отремонтирована, равна q. Процессы выхода ЭВМ из строя и их восстановление протекают независимо друг от друга. Пологая $p = 0{,}2;$ $q = 0{,}3;$

Найти предельные (финальные) вероятности.

Решение. Сначала построим граф состояний (см.рис. 73).

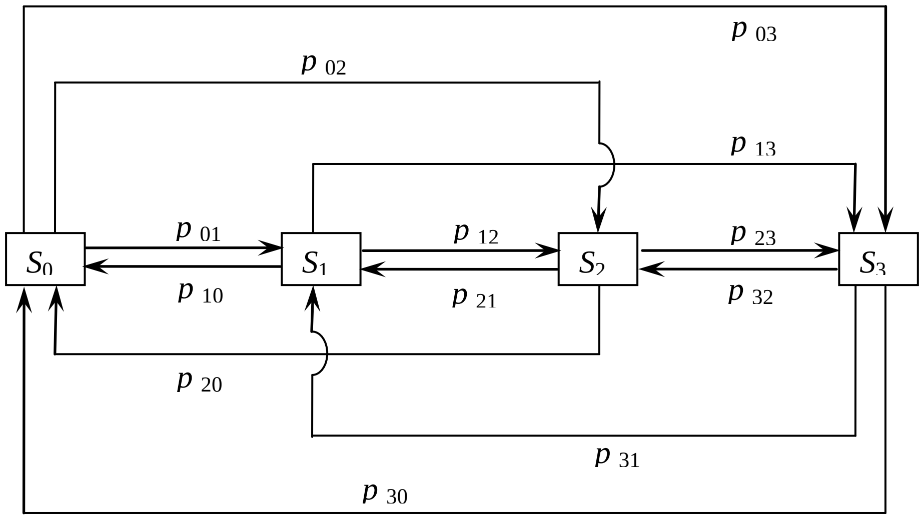


Рис. 73

Пронумеруем состояний системы по числу неисправных ЭВМ:

s_0 – ни одной неисправной; s_1 – одна неисправна;

s_2 – две неисправны; s_3 – все три неисправны;

Для того чтобы система перешла из состояния s_0 в состояние s_1, нужно, чтобы одна из трёх ЭВМ за время τ вышла из строя.

Эта вероятность в соответствии с законом распределения Бернулли равна $p_{01} = C_3^1 p(1-p)^2$. Аналогично, находим:

$$p_{02} = C_3^2 p^2(1-p);\ p_{03} = C_3^3 p^3;\ p_{00} = 1 - p_{01} - p_{02} - p_{03} = (1-p)^3.$$

Для того, чтобы система из состояния s_1, перешла в состояние s_0, нужно, чтобы неисправная ЭВМ за время τ была отремонтирована (событие A), а две исправные не вышли из строя (событие B). Тогда получим $p_{10} = P(A \cdot B) = q(1-p)^2$,

Аналогично находим:

$$p_{11} = q \cdot 2p(1-p) + (1-q)(1-p)^2;$$

$$p_{12} = q \cdot p^2 + (1-q) \cdot 2p(1-p);$$

$$p_{13} = (1-q) \cdot p^2; \qquad \sum_{i=0}^{3} p_{1i} = 1.$$

Рассуждая подобным образом, находим:

$$p_{20} = q^2(1-p);\ p_{21} = q^2 \cdot p + (1-p) \cdot 2q(1-q);$$

$$p_{22} = (1-q)^2(1-p) + p2q(1-q);\ p_{23} = (1-q)^2\ p;$$

$$p_{30} = q^3;\ p_{31} = C_3^1 q^2(1-q);$$

$$p_{32} = C_3^2 q(1-q)^2;\ p_{33} = (1-q)^3;$$

Составим матрицу переходов при $p = 0{,}2$ и $q = 0{,}3$:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} = 0{,}512 & p_{01} = 0{,}384 & p_{02} = 0{,}096 & p_{03} = 0{,}008 \\ p_{10} = 0{,}192 & p_{11} = 0{,}544 & p_{12} = 0{,}236 & p_{13} = 0{,}028 \\ p_{20} = 0{,}072 & p_{21} = 0{,}354 & p_{22} = 0{,}476 & p_{23} = 0{,}098 \\ p_{30} = 0{,}027 & p_{31} = 0{,}027 & p_{32} = 0{,}441 & p_{33} = 0{,}343 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемого примера система уравнений (53) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} 0{,}488 p_0 - 0{,}192 p_1 - 0{,}072 p_2 - 0{,}0027 p_3 = 0; \\ -0{,}384 p_0 + 0{,}456 p_1 - 0{,}354 p_2 - 0{,}189 p_3 = 0; \\ -0{,}096 p_0 - 0{,}236 p_1 + 0{,}524 p_2 - 0{,}441 p_3 = 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решая полученную систему линейных уравнений с помощью одним из известных методов (например, методом последовательного исключения неизвестных) получим: $p_0 = 0{,}213$; $p_1 = 0{,}431$; $p_2 = 0{,}289$; $p_3 = 0{,}067$.

На этом мы закончим этот раздел и для читателей рекомендуем в целях более подробного ознакомления с этим важным разделом теории вероятностей обратиться к фундаментальным книгам [Гнеденко, Феллер и Карлин и др.].

В завершении этой тематики рассмотрим кратко понятие о непрерывном Марковском процессе и системы уравнения Колмогорова.

5. О непрерывном Марковском процессе, уравнения Колмогорова

Пусть в некоторой системе S происходит марковский случайный процесс с дискретными состояниями $s_1, s_2, \cdots, s_n$.

Если переходы системы из одного состояния в другое состояние происходят в случайные моменты времени, а не в заданные (фиксированные) моменты $t_0, t_1, t_2, \cdots$, (что часто на практике встречаются), то такой процесс называют *марковским процессом с дискретными состояниями и непрерывным временем.*

Марковские с.п. указанного типа используются, в частности, для исследования реальных систем массового обслуживания (СМО); в них процессы протекают в непрерывном времени.

Под *состоянием системы* понимается *количество заявок (требований) на обслуживание данной* системы.

Будем считать, что переходы системы из состояния s_i в состояние s_j осуществляется под воздействием пуассоновского потока событий (см.16.2) с интенсивностью $\lambda_{ij} = const$.

Граф состояний системы с проставленными у стрелок интенсивностями называют *размеченным* (см. рис.74).

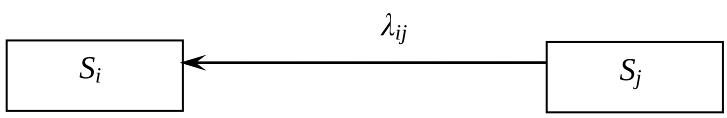


Рис. 74

Переходы системы из состояния s_i в s_j происходят в момент, когда наступает первое событие потока.

Вероятность события, когда система S в момент времени t находится в состоянии s_i, обозначается через $p_i(t)$. Тогда по определению $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}$, при этом выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1.$$

Для нахождения этих вероятностей $p_i(t)$ состояний системы $s_1, s_2, \cdots, s_n$, нужно решит систему дифференциальных уравнений следующего вида

(53) $$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot (p_j(t) - p_i(t)); \; i = 1,2,3,\cdots,\mathrm{n},$$

с начальными условиями

(54) $$p_1(0), p_2(0), \cdots, p_n(0); \; p_i(0) \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1$$

и условием нормировки $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (53) с начальными условиями (54), называется уравнением Колмогорова.

При составлении системы уравнений Колмогорова удобно пользоваться *размеченным графом* состояний системы.

Алгоритм (правило) составления уравнений Колмогорова следующее:

- в левой части каждого из уравнений стоит производная вероятности s_i, состояния системы в момент времени t, т.е. $\frac{dp_i(t)}{dt}$; а в правой части стоит сумма произведений вероятностей $p_j(t)$ всех состояний (когда стрелка ведёт в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков,

- *минус* вероятность данного s_i состояния, умноженная на суммарную интенсивность, всех потоков (когда стрелка ведёт из данного состояния см. рис.75)

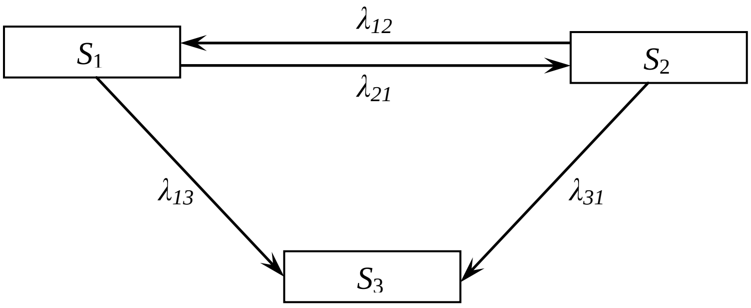


Рис. 75

Например, для системы S, размеченный граф состояний которой показан на рис 75, система дифференциальных уравнений будет следующее

$$\begin{cases} p_1'(t) = \lambda_{21} \cdot p_2(t) - p_1(t) \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \\ p_2'(t) = \lambda_{12} \cdot p_1(t) - p_2(t) \cdot (\lambda_{21} + \lambda_{23}) \\ p_3'(t) = \lambda_{13} \cdot p_1(t) + p_2(t) \cdot \lambda_{23}. \end{cases}$$

Кроме того, выполняется нормированное условие $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$.

При интегрировании такой системы следует учесть состояние системы в начальный момент, т.е. при $t = 0$. К примеру, если в этот момент система была в состоянии s_k, то полагают $p_i(0) = 0$, если $i \neq k$.

Замечание. Случайный процесс, устанавливающийся в системе при $t \to \infty$ (так называемый *предельный стационарный режим*), характеризуют так называемые предельные вероятности состояний, т.е. вероятности $p_i(t)$ при $t \to \infty$.

Предельные вероятности существуют, если число состояний конечно, «состояний без выхода» (из них невозможен переход ни в какое другое состояние) нет, потоки событий стационарны ($\lambda_{ij} = const$).

Предельная вероятность состояния s_i показывает *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии.*

Для нахождения предельных вероятностей в уравнениях Колмогорова полагают, все производные $\dfrac{dp_i(t)}{dt}$ равными нулю и решают систему однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot (p_j(t) - p_i(t)) = 0;\ i = 1,2,3,\cdots,\text{n},$$

с условием нормировки $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Пример 6. Найти предельные вероятности для системы S, представленный на рисунке 76

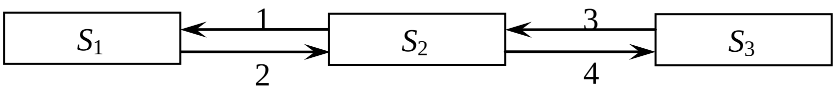


Рис. 76

Решение. Составляем дифференциальные уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} p_1'(t) = 4p_2 - p_1 \\ p_2'(t) = p_1 - (2+4) \cdot p_2 + 3p_3 \\ p_3'(t) = 2p_2 - 3p_3 \end{cases}$$

Тогда система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим системы S, принимает вид

$$\begin{cases} 4p_2 - p_1 = 0 \\ p_1 - 6 \cdot p_2 + 3p_3 = 0 \\ 2p_2 - 3p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решая эту систему находим, $p_1 = \dfrac{12}{17}, p_2 = \dfrac{3}{17}, p_3 = \dfrac{2}{17}$, т.е. система S в среднем 70,6% будет находиться в состоянии s_1; 17,6% - в состоянии s_2; 11,8% - в состоянии s_3.

Математическая статистика,
эта наука о принятии решения
в условиях неопределённости

ГЛАВА 5

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Тема 18. Статистическая выборка и её характеристики

1. Краткая историческая справка

Математическая статистика возникла (XVII в.) в работах Я. Бернулли, П. Лапласа, К. Пирсона и как научное направление математики формировалось параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX и начало XX вв.) обязано, в первую очередь, П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову, а также К. Гауссу, А. Кетле, Ф. Гальтону, Г. Крамера, Р. Фишера, Ю. Неймана и др.

В XX в. наиболее существенный вклад в развитии математической статистики внесли математики советского периода Романовский, Слуцкий, Колмогоров, Смирнов, Хинчин, Гнеденко, а также английские учёные Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон и американские учёные Ю. Нейман, А. Вельд и многие другие.

В современной жизни человека во всех сферах его деятельности требуется создавать такие статистические методы обработки данных и направление деятельности любого производства, так чтобы оно не просто констатировало непригодность (брак) изготовленной продукции, но и своевременно вмешиваться в производственный процесс, не допускающий изготовления некачественной продукции. Именно к этому должно стремиться любое производство.

Таким образом, для управления качеством производства, главная задача состоит в разработке методов статистического исследования, которые позволяли бы уловить тот момент, когда бракованная продукция ещё не произведена, а уже возникает «***повышенная вероятность-сигнал***» начала её производства.

Идея статистического метода управления качеством в процессе производства состоит в том, чтобы время от времени проверять небольшие партии только что изготовленной продукции.

По результатам таких проверок можно судить своевременно о качестве работы того или иного станка. Однако, нужно помнить, что такую проверку следует производить не слишком

часто, чтобы не лихорадить ***переналадками*** оборудования производственный процесс, и не слишком ***редко***, чтобы не пропускать момент его ***разладки***. Далее результаты наблюдения наносятся на, так называемые, ***контрольные карты***, которые позволяют судить, что нужно предпринимать после каждой серии таких наблюдений – *прекратить работу для переналадки оборудования или продолжить производственный процесс.*

Если на некоторых производствах первичное произведение замеров параметров, определяющих качество продукции, допустимо и далее оценивается вручную, то на других производствах оно уже требует заметного усовершенствования и перехода к автоматизации замеров и обработки результатов измерения.

Дело в том, что во многих случаях приходится иметь дело с огромной скоростью технологических операций. Скорость настолько велика, что пока оператор производит измерение параметров отобранных изделий, автомат успевает изготовить сотни других изделий. В результате, при ручном измерении оказывается, что запаздывает информация о наладке процесса, а вместе с ней управляющее воздействие.

Вот почему предлагаются современные автоматы и автоматические линии на производстве, которые замеряют необходимые параметры своевременно и сами выполняют математические операции, необходимые для управления качеством.

Методы приёмочного контроля и статистические методы управления качеством оказались весьма эффективным средством упорядочения производства и экономии станочного времени, ресурсов, рабочей силы.

Экономический эффект от использования этих методов исчисляются миллиардами учётных денежных (валютных) единиц различных государств.

По-настоящему история статистических методов контроля и управления качеством можно сказать, что ещё недостаточно изучена и нуждается в совершенстве.

2. Задача математической статистики

В курсе теории вероятностей были введены правила, которые позволяли по вероятностям одних случайных событий вычислять вероятность других событий, связанных с ними: по числовым характеристикам и функциям распределения одних случайных величин можно было найти функции распределения и числовые характеристики других. Возникает естественный вопрос: как найти эти исходные вероятности, числовые характеристики и функции распределения? Как оценить хотя бы приближённые их значения? Это является предметом исследования науки о массовых случайных явлениях, которая получила название «*математическая статистика*» (МС). Как наука со своей установившейся тематикой и методами исследования МС сформировалась, в сущности, только в XX веке. Однако отдельные её задачи возникали и рассматривались задолго до XX века – и в XVII – XIX вв.

Термин «*статистика*» происходит от латинского слова «статус» (status) – состояние. Первоначально в XVIII веке, когда статистика начала оформляться в научную дисциплину, термин статистика связывался с системой описания фактов, характеризующих основные информации (данные) о состояние общества (государства). При этом даже не предполагалось, что введению статистики подлежат только явления массового порядка. В настоящее время статистика как наука включает в себя определённое содержание, а именно *установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основанные на изучении статистических данных – результатах наблюдений.*

Приведём основные задачи МС:

- первая задача это разработка приёмов и методов статистического наблюдения в процессе сбора статистических данных.

- вторая задача математической статистики – указать способы группировки (если данных очень много) статистических сведений, т.е. сведений, характеризующих отдельные единицы каких-либо массовых совокупностей;

- третья задача математической статистики является разработка методов анализа собранных статистических информаций, в зависимости от поставленных целей и задач исследования, и выявить тех закономерностей, которые могут быть установлены на основе собранных данных массового наблюдения;

Этот раздел фактически и составляет содержание науки математической статистики. На практике человеческой деятельности сбор статистических сведений, касающихся главным образом населения, производился уже давно: имеются сведения, что в 2238 году до н.э. в Китае при императоре Яо была произведена перепись населения. Переписи населения производились и в Древнем Иране, в Древнем Египте, Римской империи; известны переписи населения в России в 1245, 1259, 1273, 1287гг. и более поздние сроки. Следует отметить, что эти переписи были чрезвычайно примитивны. В Китае, например, в течение, 200 лет население учитывалось путём копировки списков предыдущих переписей. Однако, даже такие неполные и несовершенные переписи давали возможность намечать важные государственные мероприятия. На данном этапе этот вопрос является весьма актуальным во всех государствах. *Практическое значение статистики в наше время, бесспорно, возросло многократно.*

Роль математической статистики не ограничивается вопросами обработки экспериментальных данных, а распространяется и на управленческие процессы в целом, а также на разнообразные технологические процессы, в том числе, на проблему «*проверки соответствия теории того или иного явления экспериментальным данным».*

Исходным материалом для статистического исследования *реального явления* служит набор полученных результатов наблюдений или же набор результатов специально поставленных опытов (испытаний) над исследуемыми объектами. Вопросы, которые возникают при исследование, очень много и разнообразные по своему содержанию. Укажем на некоторые из них:

1. ***Оценка значения неизвестной вероятности случайного события;***

2. ***Определение неизвестной функции распределения и их основных числовых характеристик (математическое ожидание, дисперсии и среднеквадратичное отклонение);***

3. ***Определение неизвестных параметров распределения.***

Общая задача ставится так: в результате n - независимых испытаний над случайной величиной X получены следующие её значения $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. Требуется определить хотя бы приближённо неизвестную функцию распределения $\Phi(x)$ величины X .

Часто общетеоретические соображения позволяют сделать достаточно определённые заключения о типе функции распределения интересующей нас случайной величины. Так, например, теорема Ляпунова даёт возможность считать, что в определённых случаях функция распределения должна быть нормальной. При этом определение неизвестной функции распределения сводится к определению по результатам наблюдения только неизвестных параметров $a = MX$; $\sigma_X = \sqrt{DX}$.

Общая задача ставится так: случайная величина X имеет функцию распределения данного вида, зависящую от k параметров, значения которых неизвестны. На основании практических наблюдений величины X нужно найти последовательно значение этих параметров.

Очевидно, что определение неизвестной вероятности $p = P(A)$ события A является частным случаем только что сформулированной задачи. Так как мы можем рассматривать случайную величину X , принимающую значение 1, если событие A появляется - «успех» и значение 0, если событие A не появляется - «не удача» в данном испытании. Следовательно, функция распределения зависит от единственного параметра $p = P(A)$.

4. ***Проверка статистических гипотез.***

Эта задача ставится следующим образом: на основании некоторых предположений можно считать, что функция распределения случайной величины X есть $\Phi(x)$.

Возникает естественный вопрос, согласуются ли полученные значения с гипотезой в результате проведённого наблюдения (опыта), что с.в. X действительно имеет данное распределение $\Phi(x)$.

В частности, если вид функции распределения не вызывает сомнений и в проверке нуждается только значения некоторых параметров, характеризующих данное распределение, то в задаче ставиться вопрос: не опровергают ли результаты наблюдений ту гипотезу, что параметры распределения имеют предположенные значения? Эта задача есть «*проверки простой гипотезы*».

Если проверяемая гипотеза состоит в том, что параметры принимают не полностью множество значения, а часть из этих множеств значения (например, в случае биномиального распределения, гипотеза выполняется с ограничением $p < p_0$), то гипотеза называется *сложной.*

В качестве примера статической гипотезы приведём проверку однородности статистического материала. Наиболее часто встречается в русле такой задачи следующее: имеются две последовательности $x_1, x_2, \cdots, x_n$ независимых наблюдений над случайной величиной X с функцией распределения $\Phi_1(x)$, и над случайной величиной Y с последовательностью со значениями $y_1, y_2, \cdots, y_m$ и с функцией распределения $\Phi_2(x)$. Функции распределения $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ неизвестны. Требуется оценить правдоподобность гипотезы $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$.

5. ***Оценка зависимости.*** Производится последовательность наблюдений сразу двух случайных величин X и Y. Результаты наблюдений даны следующими парами значений: $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n$. Выяснить наличие функциональной или корреляционной связи между двумя случайными величинами X и Y.

6. ***Управление процессами.*** Пусть имеется случайный процесс от дискретного или непрерывного времени $X(t)$. Процесс под влиянием тех или иных причин может нарушить своё нормальное протекание стать другим, т.е. будет протекать по другому процессу $X_2(t)$. Это нарушение нормального течения может привести к нежелательным последствиям и следует
исследователю своевременно заметить момент «***разладки***» и оказать соответствующее воздействие с целью восстановления нормального хода процесса.

В качестве примера можно указать на работу технологического процесса (линии), которая вырабатывает определённую продукцию. Время от времени в силу различных причин процесс выходит из нормального состояния. Этими причинами могут служить сбой некоторых частей инструментов (затупление инструмента, нарушение энергетического снабжения и т.д.). Они приводят к ухудшению качества выпускаемого продукта от предусмотренного стандарта.

В этих случаях требуется по наблюдениям уловить момента ***разладки*** и восстановить ход процесса.

Следует заметить, что перечисленными задачами далеко не исчерпываются основные проблемы математической статистики. Совершенно новые и разнообразные задачи возникают перед наукой математической статистики в связи быстрыми темпами развитием научной и практической промышленности, а также происходящие глобальные изменения, в мировом масштабе.

Изучение тех или иных явлений методами математической статистики служит средством решения многих вопросов, выдвигаемых наукой и практикой (правильная организация технологического процесса, оптимальное планирование в экономических и финансовых сферах, своевременная регулировка экологических и социальных проблем в глобальном масштабе и др.). В частности, само планирование «**испытаний»** является одной из важнейшей задачей математической статистики.

Итак, если кратко резюмировать вышесказанное, то при решении многих прикладных задач для случайных величин определяются их вероятностные и числовые характеристики на основе статистического анализа экспериментальных данных.

Статистическое описание результатов наблюдений, построение и проверка различных математических моделей, использующих понятие вероятности, составляют основное содержание математической статистики, а «*задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов».*

Перейдём к изложению, одного из важнейших разделов математической статистики без которого в целом невозможно успешно изучать предмет математической статистики.

3. Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого *качественного* или *количественного* признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным – контролируемый размер детали, или, рассматривая работу диспетчера парикмахера, продавца, оператора технологической линии, и др., следует исследовать: его загруженность, тип клиентов, скорость обслуживания, моменты поступления заявок и т.д.

Каждый из таких признаков или различные сочетания их образуют случайную величину, наблюдения над которыми мы и производим. Совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, производимых при постоянных условиях над каждым объектом, обычно называют генеральной совокупностью.

Иногда проводят сплошное обследование, т.е. обследуют каждый из объектов всей совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяется сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Генеральная совокупность – это случайная величина, $X(\omega)$ заданная на пространстве элементарных событий Ω с выделенным в нём классом S подмножеств событий, для которых указаны их вероятности, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Выборочной совокупностью, или просто *выборкой*, называют совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности.

Более точно: *выборка* – это последовательность $X_1, X_2, \cdots, X_n$ независимых одинаково распределенных с.в., распределение каждой из которых совпадает с распределением самой генеральной случайной величины.

Количество наблюдаемых объектов в совокупности, генеральной или выборочной называется её объёмом; обозначается соответственно буквами N и n. Например, если из 10000 деталей отобрано для обследования 1000 деталей, то объемом генеральной совокупности $N = 10000$, а объемом выборки $n = 1000$.

Конкретные значения выборки, полученные в результате наблюдений (испытаний), называют *реализацией выборки* и обозначают строчными буквами $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Метод статистического исследования, состоящий в том, что на основе изучения выборочной совокупности делается заключение обо всей генеральной совокупности, называется *выборочной*.

Обычно, в целях получения достаточно «хороших» *оценок характеристик* генеральной совокупности необходимо, чтобы выборка была *репрезентативной* (*представительной*), то есть, чтобы она достаточно полно представляла изучаемые признаки генеральной совокупности. Условием обеспечения такой выборки является, согласно закону больших чисел, соблюдение *случайности производимого отбора*, то есть все объекты генеральной совокупности, попадающие в данную выборку, должны иметь равные вероятности (равные возможности).

Различают выборки *с возвращением* (*повторные*) и *без возвращения* (*бесповторные*). В первом случае отобранный объект возвращается в генеральную совокупность перед началом следующего испытания; во втором – не возвращается. На практике чаще используется бесповторная выборка.

Если объём выборки значительно меньше, чем объём генеральной совокупности, то можно не учитывать различие между повторной и бесповторной выборками . В зависимости от конкретных условий для обеспечения представительности выборки применяют различные способы отбора. Их можно подразделить на два вида:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности. Сюда относятся:

а) *простой случайный бесповторный отбор;*

б) *простой случайный повторный отбор*;

Простым случайным отбором называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному (случайным образом) из всей генеральной совокупности.

Если карточку возвращают в пачку каждый раз перед очередным выбором, то выборка является простой случайной бесповторной.

Если карточку не возвращать в пачку каждый раз перед очередным выбором, то выборка является простой случайной повторной.

Например, для извлечения n объектов из генеральной совокупности объема N поступают так: выписывают номера от 1 до N на карточках, которые тщательно перемешивают и наугад вынимают одну карточку; объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию; затем карточка возвращается в пачку (или не возвращается) и процесс повторяется, т.е. карточки перемешиваются, наугад вынимают одну из них и т.д. Так поступают n раз; в итоге получают простую случайную повторную (бесповторную) выборку объема n.

Следует отметить, что при большом объёме генеральной совокупности указанный процесс трудоёмкий. В таких случаях пользуются готовыми таблицами так называемых «*случайных чисел»,* в которых числа расположены в случайном порядке. Среди них, например, чтобы отобрать n объектов из перенумерованных N всего объектов генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают подряд n чисел. В выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными n случайными числами. Если какое-то случайное число окажется больше чем N, то оно пропускается. При осуществлении бесповторной выборки случайные числа таблицы, уже встречавшиеся ранее, следует также пропустить.

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся:

а) типический отбор;

б) механистический отбор;

в) серийный отбор.

- ***типическим отбором*** называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой её «типической» части.

Например, перед выборной компанией при анализе рейтинга определённых государственных деятелей опрашивают мнение случайно отобранных людей различных по признаку пола, возраста, социального статуса и т.д.. Другой пример, детали изготавливают на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, изготовленных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности, и т.д.

Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных «*типических частях*» генеральной совокупности. Если продукция изготавливается на нескольких технологических машинах, среди которых есть более и менее изношенные, то здесь типический отбор целесообразен.

-***механистический отбором,*** называют такой отбор при котором генеральная совокупность «механически» делят на группы, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект (например, опрос мнения по некоторому вопросу у каждого человека с простым порядковым номером); или, если нужно отобрать 20% изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь; если требуется отобрать 5% деталей, то отбирают каждую двадцатую деталь и т. д.

Следует указать, что иногда механический отбор ни всегда может обеспечить *представительности* выборки. Например, если отбирается каждый двадцатый обтачиваемый валик, причем сразу же после отбора производят замену резца, то отобранными окажутся все валики, обточенные затупленными резцами. В таком случае надо устранить совпадение ритма отбора с ритмом замены резца, для чего надо отбирать, скажем, каждый десятый валик из двадцати обточенных.

-***серийным отбором*** называют такой отбор, при котором объекты из генеральной совокупности отбираются «сериями», которые должны исследоваться при помощи сплошного обследования.

Например, если изделия изготавливают большой группой станков – автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков. Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

Подчеркнем, что на практике часто применяется *комбинированный отбор*, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, иногда разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

Пример 1. Пятьдесят абитуриентов проходят тестирование по математике. Каждый из них может набрать от 0 до 5 балов включительно. Пусть X_k – количество балов набранных k – м $(k = 0,1,\cdots,50)$, абитуриентом.

Тогда значения $0,1,2,3,4,5$ будут возможные количества баллов, набранных одним абитуриентом, из которых образуют генеральную совокупность.

Выборка $X_1, X_2, \cdots, X_{50}$ – результат тестирования 50 абитуриентов.

Реализациями выборки могут быть, например, следующие наборы чисел: $\{0,0,\cdots 0\},\ldots,$ $\{1,1,\cdots,1\},\cdots,$ $\{5,2,3,\cdots,4,5\},\{1,2,3,1,2,4,\cdots,5,5,5\}$, и т.д., где в каждом из этих наборов (подмножеств) по 50 цифр, общее число наборов $C_{50}^{6} = \dfrac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$.

Замечание. Часто генеральная совокупность содержит конечное число объектов. Однако, если это число достаточно велико, то иногда в целях упрощения вычислений, или для облегчения теоретических выводов, допускают, что генеральная совокупность состоит из бесчисленного множества объектов. Такое допущение оправдывается тем, что увеличение объема генеральной совокупности (достаточно большого объема) практически не сказывается на результатах обработки данных «выборки».

4. Статистическое распределение выборки, эмпирическая функция распределения

Пусть исследуется произвольная случайная величина X и относительно этой случайной величины производится ряд независимых опытов (испытаний) при наличии определённого комплекса условий. Далее, пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 наблюдалось n_2 раз, и так далее x_k наблюдалось n_k раз, при этом натуральное число $1 \le k \le n$; и

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{j=1}^{k} n_j = n,$$

выражает объём выборки, значения x_j называют *вариантами* *с.в.* X. Вся совокупность значений с.в. X представляет собой первичный статистический материал, который подлежит дальнейшей обработке, сначала подлежать *упорядочению*. Операцию по упорядочению значений случайной величины (признака) по не убыванию называют «*ранжированием*» статистических данных. Полученная таким способом последовательность значений $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(k)}\}$ случайной величины X, где $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(k)}$; $x_{(1)} = \min\limits_{1 \le j \le k}\{x_1\}$, $x_{(k)} = \max\limits_{1 \le j \le k}\{x_j\}$ называется *вариационным рядом*.

Числа n_j, показывающие, сколько раз встречаются варианты (числа) x_j в ряде наблюдений, называются *частотами*. А числа $W_n(n_j) = p_j^{\bullet}$ равное отношение n_j к объёму выборки n, называются *относительными частотами*, т.е.

$$p_j^{\bullet} = W_j = \frac{n_j}{n},\ j = 1, 2, \cdots, k;\ n = \sum_{j=1}^{k} n_j. \qquad (1)$$

Перечень *вариантов* и соответствующие им *частость* или *относительных частот* называют *статическим распределением выборки или статическим рядом*.

Статистическое распределение записывается в виде таблицы, где в первой строке пишут численные значения вариантов, а вторая заполняется их соответствующими *частотами* n_j. Из этой таблицы затем составляют новую таблицу с указанием *частотностей* (*относительных частот)* $p_j^{\bullet}$, где должен выполняться «*контроль*» $\sum_{j=1}^{k} p_j^{\bullet} = 1$.

Пример 2. Задано распределение частот выборки объема $n = 20$,

$$x_j:\ 2\quad 6\quad 12$$

$$n_j:\ 3\quad 10\quad 7\ .$$

Эта таблица означает, что $x_1 = 2$ принимается три раза, $x_2 = 6$ принимается 10 раз и $x_3 = 12$ принимается 7 раз. В итоге: $n = 20 = 3 + 10 + 7$.

Написать таблицу распределение относительных частот.

Решение. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки:

$$p_1^{\bullet} = \frac{3}{20} = 0.15,\ p_2^{\bullet} = \frac{10}{20} = 0.50,\ p_3^{\bullet} = \frac{7}{20} = 0.35.$$

Теперь, составим таблицу распределения относительных частот:

$$x_j:\ 2\quad 6\quad 12$$

$$p^{\bullet}:\ 0{,}15\quad 0{,}5\quad 0{,}35.$$

Контроль: $0{,}15 + 0{,}5 + 0{,}35 = 1.$

Пример 3. В результате тестирования группы из 10 человек для приёма на работу претенденты набрали баллы: $5, 3, 0, 1, 4, 2, 5, 4, 1, 5$. Составить

а) вариационный ряд;
б) статический ряд;
в) таблицу частот и относительных частот.

Решение. а) Упорядочив статические данные, получим вариационный ряд:

$$\{x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(10)}\} = \{0,1,1,2,3,4,4,5,5,5\};$$

б) Подсчитав *частоту* и относительную *частотность* вариантов: $x_1=0, x_2=1, x_3=2$, $x_4=3,\ x_5=4,\ x_6=5$, получим статическое распределение выборки (так называемый дискретный ряд).

x_j	0	1	2	3	4	5
n_j	1	2	1	1	2	3

где $\sum n_j = 10$. Контроль.

Построим таблицу относительную частоту

x_j	0	1	2	3	4	5
$p_j^\bullet$	1/10	2/10	1/10	1/10	2/10	3/10

где $\sum p_j^\bullet = 1$. Контроль.

Статистическое распределение выборки является оценкой неизвестного распределения.

По теореме Бернулли, относительные частоты $W_n(n_j)=p_j^\bullet$ сходятся при $n\to\infty$ к соответствующим вероятностям, p_j, т.е. $p_j^\bullet \to p_j$. Поэтому, при больших значениях n статическое распределение мало отличается от истинного распределения.

В случаях, когда количество значений признака (с.в. X) достаточно велико или когда случайная величина X является непрерывной (т.е. её значение заполняет некоторый отрезок числовой прямой), *составляют интервальный статистический ряд.*

В первую очередь образуют частичные промежутки, $[c_0,c_1);[c_1,c_2),\cdots,[c_{k-1},c_k)$, которые берут обычно с одинаковыми длинами, равными $h=c_1-c_0=c_2-c_1=\cdots=c_j-c_{j-1}=\cdots$.

Интервалы	$I_1=[c_0,c_1)$	$I_2=[c_1,c_2)$	$I_3=[c_2,c_3)$	$\cdots$	$I_k=[c_{k-1},c_k]$
Частота	n_1	n_2	n_3	$\cdots$	n_k
Частость	$p_1^\bullet$	$p_2^\bullet$	$p_3^\bullet$	$\cdots$	$p_k^\bullet$

Эта таблица означает, что весь диапазон изменения величины X разбит на интервалы (границами $j-$го интервала являются, c_j и c_{j+1}); число $p_j^\bullet,(j=\overline{1,k})$; есть частота попадания в $j-$й интервал, $p_j^\bullet=n_j/n$, где n_j-количество чисел в исходном ряде (выборке), приходящихся в j- й интервал. На практике число интервалов выбирается обычно в пределах одного-двух десятков. Также следует отметить, что в общем случае длины интервалов не обязаны быть одинаковыми.

Для определения величины интервала $h=c_j-c_{j-1}$ существуют разные подходы, в качестве одного из таких способов разбиения, может быть использована формула Стерджесса:

$$h=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{1+\log_2 n},$$

где $x_{\max}-x_{\min}$ выражает разность между наибольшим и наименьшим значениями признака, числа интервалов $m=1+\log_2 n$; $(\log_2 n\approx(3{,}322)\cdot\lg 2)$. За начало первого интервала рекомендуется брать величину $(x_{\min}-\frac{h}{2})$, и если конец последнего промежутка входит во множестве с.в. X, то оно также включается в число элементов, входящих в последний промежуток. После завершения «разбиения» первую строку таблицы статического распределения заполняют полученными частичными промежутками. Во второй строчке статистического ряда вписывают числа n_j $(j=\overline{1,k})$- количество наблюдений, попавших в каждый интервал, а затем составляют вторую таблицу относительных частот по выше указанному принципу, где мы для удобства объединили обе таблицы.

Заметим, что в теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике — соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или *частость (относительные частоты).*

Пример 4. Измерили рост (с некоторой точностью скажем до 1 см.) 30 наудачу отобранных студентов. Результаты измерения показали:

$$178,\ 160,\ 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155,$$
$$157,\ 175,\ 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169,$$
$$179,\ 165,\ 156, 179, 158,\ 171, 175, 173, 164, 172.$$

Построить интервальный статистический ряд.

Решение. Сначала упорядочим полученные данные.

153,154,155,155,156,157,158,159,160,163,164,165,166,167,167,169,170,
171,171,172,173,173,175,175,178,179,179,182,183,186.

Следует, что X – рост студентов является непрерывной с.в. При более точном измерении роста значения с.в. X обычно не повторяется и может отличиться друг от друга на несколько миллиметров. Вероятность наличия на Земле двух человека с одинаковым ростом, например, $\sqrt{3}\approx 1{,}732050808...$ метров, равна нулю.

Отсюда следует, что $x_{\min}=153,\ x_{\max}=186$; в соответствии с формулой Стерджесса, при $n=30$, находим длину частичного интервала разбиения:

$$h=\frac{186-153}{1+\log_2 30}=\frac{33}{1+(3{,}322)\cdot\lg 30}\approx\frac{33}{5{,}907}\approx 5{,}59.$$

Если примем за $h=6$, тогда $x_1=x_{нач}=153-\dfrac{6}{2}=150.$ Все исходные данные разбиваем на 6 интервалов (при $m=1+\log_2 30\approx 6$): $I_1=[150{,}156);\ I_2=[156{,}1162);\cdots,I_6=[180{,}186];$

Подсчитав общее число студентов $n_j;(j=1,2,\cdots,6)$, попавших в каждый из полученных промежутков, получим интервальный статистический ряд:

Рост	[150-156)	[156-162)	[162-168)	[168-174)	[174-180)	[180-186)
Частота	4	5	6	7	5	3
Частость	0,13	0,17	0,20	0,23	0,17	0,10

Одним из способов статистической обработки вариационного ряда является построение эмпирической функции распределения.

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X; n_x – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака $X<x, x\in\Re$, а n – общее число наблюдений (объем выборки).

Эмпирической (статистической) функцией распределения называется функция, $\Phi_n^{\bullet}(x)$ определяющая для каждого значения x частость события $\{X<x\}$:

(2) $$\Phi_n^{\bullet}(x)=p^{\bullet}\{X<x\}=\frac{n_x}{n}.$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки, интегральную функцию $\Phi_X(x)$ распределения генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения.* Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция

(3) $$\Phi_X(x) = P\{X < x\}$$

- определяет вероятность события $\{X < x\}$, а эмпирическая функция $\Phi_n^\bullet(x)$, определяет относительную частоту этого же события.

Очевидно, что функция $\Phi_n^\bullet(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и истинная функция $\Phi_X(x)$ (см.Т.3). Другими словами, числа $\Phi_n^\bullet(x)$ и $\Phi_X(x)$ мало отличаются одно от другого. Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции $\Phi_X(x)$ – -распределения генеральной совокупности. Такое заключение подтверждается и тем, что $\Phi_n^\bullet(x)$ обладает всеми свойствами $\Phi_X(x)$. Действительно, из определения функции $\Phi_n^\bullet(x)$ вытекают следующие ее свойства:

1. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0,1];
2. $\Phi_n^\bullet(x)$ – неубывающая функция;
3. Если x_1 – наименьшая варианта, то $\Phi_n^\bullet(x) = 0$ при $x \le x_1$; и если x_n – наибольшая варианта, то при $x > x_n$, $\Phi_n^\bullet(x) = 1$.

На основании теорем ЗБЧ при увеличении числа n наблюдений (опытов) относительная частота события $\{X < x\}$ приближается к истинной вероятности этого события.

Эмпирическая функция распределения $\Phi_n^\bullet(x)$ является как бы «*оценкой*» вероятности события $\{X < x\}$, т.е. оценкой теоретической функции распределения $\Phi_X(x)$ с.в. $X < x$.

Таким образом, можно заключить, что имеет место утверждение,

Пусть $\Phi_X(x)$ ***является теоретическая функция распределения случайной величины*** $X < x$***, а*** $\Phi_n^\bullet(x)$ ***её эмпирической функцией распределения. Тогда для любого*** $\varepsilon > 0$ ***справедливо предельное соотношение***

(4) $$\lim_{n\to\infty} P\{|\Phi_n^\bullet(x) - \Phi(x)| < \varepsilon\} = 1.$$

Пример 5. В условиях примера 3, и используя полученные результаты, построим эмпирическую функцию $\Phi_n^\bullet(x)$.

Решение. В нашем случае по условию $n = 10$. В целях наглядности решения примера приведём ещё раз полученную таблицу относительных частот

x_j	0	1	2	3	4	5
$p_j^\bullet$	1/10	2/10	1/10	1/10	2/10	3/10

где $\sum p_j^\bullet = 1$. Контроль.

Поэтому $\Phi_{10}^\bullet(x) = \dfrac{0}{10} = 0$ при $x \le 0$ (наблюдений меньше 0 отсутствует);

$\Phi_{10}^\bullet(x) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ при $0 < x \le 1$ (здесь по таблице $n_X = 1$). $\Phi_{10}^\bullet(x) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{10} = 0{,}3$ при $1 < x \le 2$ (здесь $n_X = 3$) и т.д. Таким образом, получаем

$$\Phi_{10}^{\bullet}(x) = \begin{cases} 0; & \text{при } -\infty < x \le 0, \\ 0{,}1; & \text{при } \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}3; & \text{при } \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}4; & \text{при } \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}5; & \text{при } \quad 3 < x \le 4, \\ 0{,}7; & \text{при } \quad 4 < x \le 5, \\ 1; & \text{при } \quad 5 < x + \infty. \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения имеет вид:

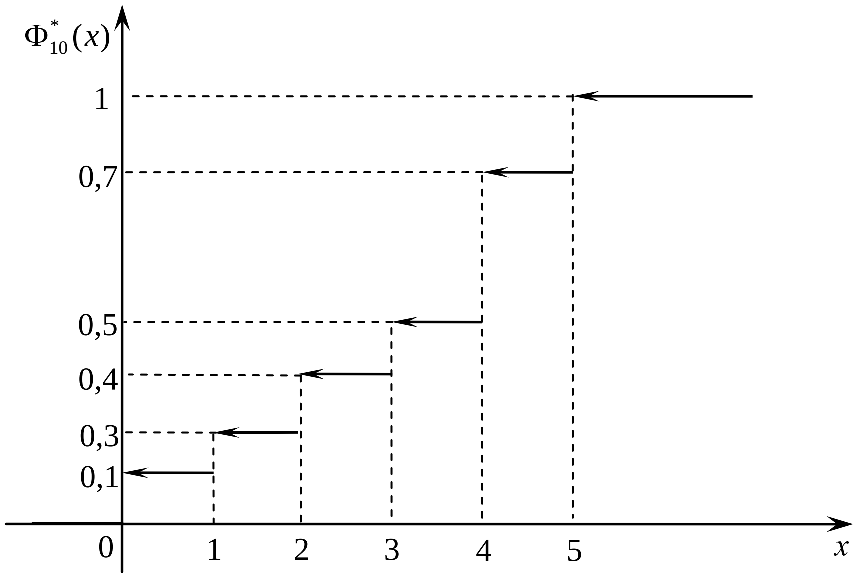


Рис. 77

5. Графическое изображение статистического распределения, полигон и гистограмма.

В целях наглядности изучения статистического распределения изображают (строят) различные графики в виде так называемых полигона и гистограммы. Полигон, как правило, служит для изображения дискретного (т.е. варианты отличаются друг от друга на постоянную величину) статистического ряда.

Полигоном частот называют ***ломаную***, построенную путём последовательного соединения отрезками точек (x_1, n_1), $(x_2, n_2), \cdots, (x_k, n_k)$ на плоскости $X0Y$. Для построения *полигона частот* на оси абсцисс OX откладывают значения вариантов x_j, а на оси ординат OY соответствующие им частоты n_j; $j = 1, 2, \cdots, k$. Точки (x_j, n_j) соединяют слева направо отрезками прямых и получают *полигон частот*.

Полигоном относительных частот называют ***ломаную***, построенную путём последовательного соединения отрезками точек $(x_1, p_1^{\bullet})$, $(x_2, p_2^{\bullet}), \cdots, (x_k, p_k^{\bullet})$ на плоскости $X0Y$. Для построения *полигона относительных частот* на оси абсцисс OX откладывают значения вариантов x_j, а на оси ординат OY соответствующие им относительные частоты $p_j^{\bullet}$; $j = 1, 2, \cdots, k$. Точки $(x_j, p_j^{\bullet})$ соединяют слева на право отрезками прямых и получают *полигон относительных частот*.

Пример 6. Для примера 3, полигон относительных частот изображен на чертеже 78. по таблице

x_j	0	1	2	3	4	5
$p_j^\bullet$	1/10	2/10	1/10	1/10	2/10	3/10

где $\sum p_j^\bullet = 1$. Контроль.

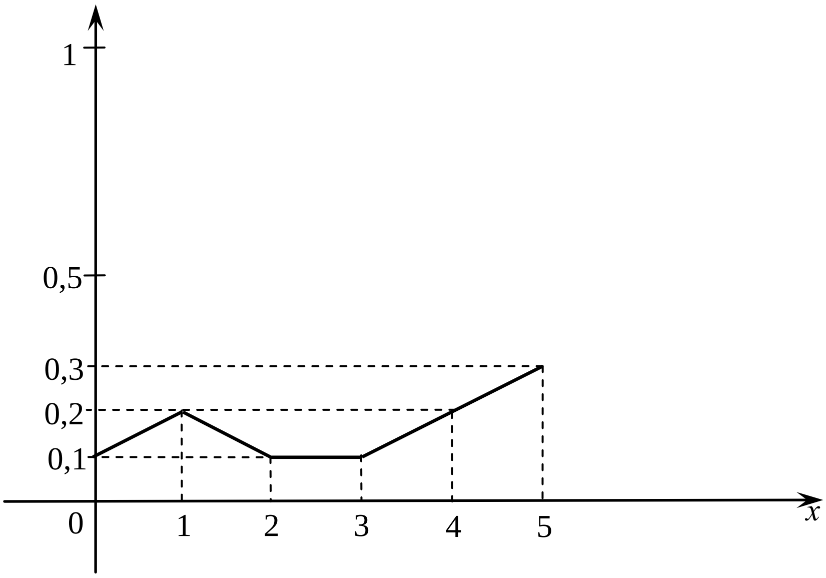


Рис.78.

Задание. Построить для этого же примера полигон частот на основании таблицы

x_j	0	1	2	3	4	5
n_j	1	2	1	1	2	3

где $\sum n_j = 10$. Контроль.

Сравнение этих двух графиков показывают, что ординаты полигона частот может быть достаточно «*высоким*», причем сумма координат равна числу выборке n. Ординаты полигона относительных частот ограничены сверху единичной прямой, причём сумма их координат (ординат) равна 1. Как бы во втором случае происходит «*нормировка*» графика.

Для непрерывного распределения признака (т.е. значения варианты могут отличиться один от другого на сколь угодно, малую величину) можно построить *полигон частот*, взяв середины интервалов в качестве значений $x_1, x_2, \cdots, x_k$. В этих случаях обычно строят *гистограмму частот,* а также *гистограмму относительных частот*

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{n_j}{h} = h_j$ – *плотность частоты.*

Гистограммой относительной частоты называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{p_j^\bullet}{h} = \frac{n_j/n}{h} = h_j^\bullet$ – *плотность относительной частоты.*

На основании этих определений, легко заметить, что:

1. *Площадь гистограммы частот* $S_{гч}$ *равна объёму выборки* n, *т.е.*

(5) $$S_{гч} = \sum h_j \cdot h = \sum n_j = n.$$

2. *Площадь гистограммы относительных частот $S_{гоч}$ равна единице, т.е.*

(6) $$S_{гоч} = \sum h_j^{\bullet} \cdot h = \sum p_j^{\bullet} = 1.$$

Пример 7. В условиях примера 4 рассмотрим гистограмму частот и гистограмму относительных частот.

Решение. В примере 4 длина интервала равна $h = 6$, и нами была составлена статистическая таблица распределения

Рост	[150-156)	[156-162)	[162-168)	[168-174)	[174-180)	[180-186)
Частота	4	5	6	7	5	3
Частость	0,13	0,17	0,20	0,23	0,17	0,10

На основании этой таблицы находим высоты $h_j^{\bullet}$ прямоугольников:

$$h_1^{\bullet} = \frac{0{,}13}{6} \approx 0{,}022; \quad h_2^{\bullet} = \frac{0{,}17}{6} \approx 0{,}028; \quad h_3^{\bullet} = \frac{0{,}20}{6} \approx 0{,}033;$$

$$h_4^{\bullet} = \frac{0{,}23}{6} \approx 0{,}038; \; h_5^{\bullet} = \frac{0{,}17}{6} \approx 0{,}028; \; h_6^{\bullet} = \frac{0{,}10}{6} \approx 0{,}017;$$

Гистограмма относительных частот изображена на рис. 79.

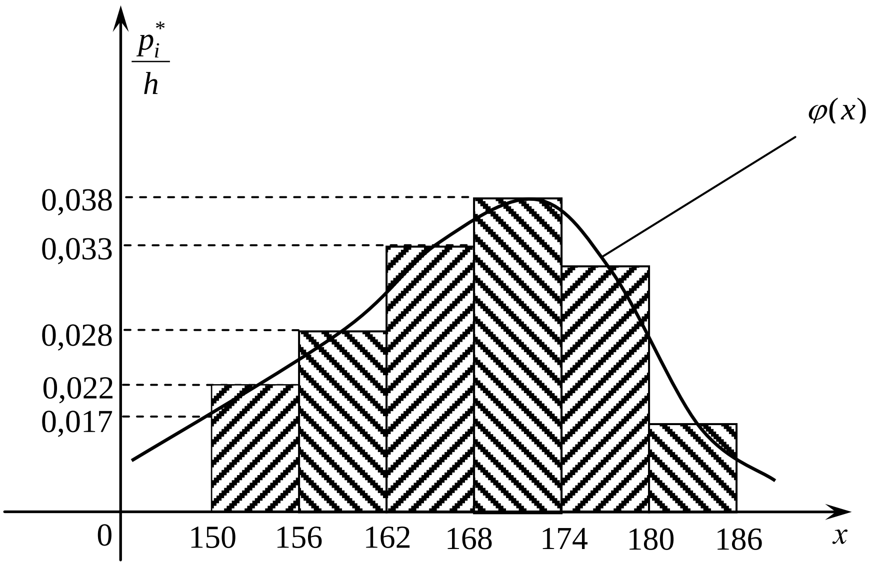


Рис. 79

Заметим, что гистограмма относительных частот является статистическим аналогом дифференциала функции распределения плотности $\varphi(x)$ с.в. X. Сумма площадей прямоугольников равна единице.

$$\sum_{j=1}^{6} h_j^{\bullet} \cdot h = \sum_{j=1}^{6} p_j^{\bullet} = 1,$$

что соответствует условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1 \qquad \text{(контроль)}$$

для плотности вероятностей $\varphi(x)$. Кривая на рисунке 79 выражает и плотность вероятностей $\varphi(x)$.

Если соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой, то получим полигон того же распределения. (Самостоятельно убедитесь в этом)

Задание. На основании таблицы примера 7 и формулы $\dfrac{n_j}{h} = h_j$

1. Найдите значения чисел h_j; $j = 1, 2, \cdots, 6$.
2. Изобразите гистограмму частот

Упражнение. Дана таблица измерения некоторого измерительного процесса

Интервал длиною $h = 5$	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
Частота интервала n_j	4	6	16	36	24	10	4
Плотность частоты $\dfrac{n_j}{h} = h_j$	0,8	1,2	3,2	7,2	4,8	2,0	0,8

1. Вычислить объём выборки n,

2. Найти численные значения высот $h_j^{\bullet}$ и $p_j^{\bullet}$,

3. Постройте геометрическое изображение гистограммы частот и относительных частот.

6. Числовые характеристики статистического распределения

Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак. Естественно возникает задача оценки параметров, которыми определяется это распределение. Например, если априори (до эксперимента) известно, что изучаемый признак в генеральной совокупности распределен нормально, то необходимо оценить (приближенно найти) математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение. Если же есть основания считать, что признак имеет, например распределение Пуассона, то необходимо оценить параметр λ, которым это распределение определяется.

Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки, например, значения количественного признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученные в результате наблюдений (***здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми***). Через эти данные можно определить ряд числовых характеристик, аналогичным тем, что в теории вероятностей определялись для случайных величин.

Предположим, что статистическое распределение выборки объёма n (таблица) имеет вид:

x_j	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_j	n_1	n_2	$\cdots$	n_k
$p_j^{\bullet}$	n_1/n	n_2/n	$\cdots$	n_k/n

Выборочным средним $\overline{x}_b$ (или математическим ожиданием выборки) называется среднее арифметическое всех значений выборки:

(7) $$\overline{x}_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot n_j$$

Выборочное среднее с учётом значения относительной частоты можно записать и так:

(8) $$\overline{x}_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot p_j^{\bullet}$$

Для обозначения выборочного среднего используют: $\overline{x}_b, M^{\bullet}(X), m_x^{\bullet}$.

Следует отметить, что в случае интервального статистического ряда в равенстве (7) в качестве x_j берут середины его интервалов, а в качестве n_j – соответствующие им частоты.

Выборочной дисперсией D_b называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\overline{x}_b$, т.е.

(9) $$D_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j - m_b^{\bullet})^2 n_j,$$

или, с учётом выборочной относительной частоты имеем

(10) $$D_b = \sum_{j=1}^{k} (x_j - m_b^{\bullet})^2 p_j^{\bullet}.$$

Ввиду того, что наблюдения проводятся независимые, можно доказать вычислительную формулу, где

(11) $$D_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j^2 \cdot n_j - \ (m_b^{\bullet})^2 = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \cdot p_j^{\bullet} - (m_b^{\bullet})^2.$$

или $D_b = \overline{x}_b^2 - (\overline{x}_b)^2$.

Следует отметить, все основные свойства математического ожидания и дисперсии, рассмотренные ранее (см. Т.8.) сохраняются.

Выборочное среднеквадратическое отклонение выборки определяется формулой

(12) $$\sigma_b = \sqrt{D_b}\ .$$

Особенность выборочного среднеквадратичного отклонения σ_b состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и изучаемый признак.

При решении практических задач используется и величина

(13) $$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{k} (x_j - m_b^{\bullet})^2 \cdot n_j = \frac{n}{n-1} \cdot D_n.$$

Величина S^2 называется исправленной выборочной дисперсией, а величина

(14) $$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_b}$$

- называется *исправленным выборочным средним квадратическим отклонением.*

Для непрерывно распределённого признака формулы для выборочных средних будут такими же, но за значения последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_k$ следует брать не концы промежутков, $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \cdots$, а их середины $\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \cdots$.

В качестве описательных характеристик вариационного ряда $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}\}$ или полученного из него статистического распределения выборки (таблицы) используется медиана, мода, размах выборки (вариации) и т.д.

Размахом вариации называется число, $R = x_{(n)} - x_{(1)}$, где $x_{(1)} = \min\limits_{1 \le j \le n} x_j$; $x_{(n)} = \max\limits_{1 \le j \le n} x_j$ или $R = x_{\max} - x_{\min}$; где $x_{\max}$ – наибольший, $x_{\min}$ – наименьший вариант статистического ряда.

Модой $M_c^\bullet$ вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Медианой $M_0^\bullet$ вариационного ряда называется значение признака (с.в. X), приходящееся на середину ряда, при этом

$$M_c^\bullet = \begin{cases} \dfrac{x_{(l)} + x_{(l+1)}}{2}; & \text{если } n = 2l, \\ x_{(l+1)}; & \text{если } n = 2l+1. \end{cases} \tag{15}$$

Пример 8. По условиям примера 3 найти характеристики выборки результаты тестирования десяти абитуриентов.

Решение. Сначала приведём полученные таблицы частоты и относительные частоты (см. решение примера 3) из примера 3:

x_j	0	1	2	3	4	5
n_j	1	2	1	1	2	3

где $\sum n_j = 10$. Контроль.

x_j	0	1	2	3	4	5
$p_j^\bullet$	1/10	2/10	1/10	1/10	2/10	3/10

где $\sum p_j^\bullet = 1$. Контроль.

На основании определений, таблиц и формулы (7)-(15) соответственно получим:

1. $\bar{x}_b = M^\bullet(X) = \dfrac{1}{10} \cdot (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3) = 3,$
2. $D_b = \dfrac{1}{10} \cdot [(0-3)^2 \cdot 1 + (1-3)^2 \cdot 2 + \cdots + (5-3)^2 \cdot 3] = 3{,}2,$
3. $\sigma_b = \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}7888543,$
4. $S^2 = \dfrac{10}{9} \cdot 3{,}2 = 3{,}355555$
5. $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{3{,}3555555} \approx 1{,}8318175$
6. $R = 5 - 0 = 5$
7. $M_0^\bullet = 5,$
8. $M_c^\bullet = \dfrac{3+4}{2} = 3{,}5;\ \ n = 10,\ k = 5.$

Упражнение. На одном из телефонных станции города «П» производились наблюдения за количеством неправильных соединений в минуту.

Результаты наблюдений в течение одного часа представлены в виде статистического распределения.

x_j	0	1	2	3	4	5	6
n_j	8	17	16	10	6	2	1

$p_j^{\bullet}$	0,133	0,283	0,267	0,167	0,100	0,033	0,017

1. а) построить полигоны частот и относительных частот.

б) построить гистограммы частот и относительных частот.

2. Найти значения выборочные среднее и дисперсию. Сравните распределение относительной частоты с распределением Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{e^{-a}\lambda^m}{m!}; \quad a = m_X^{\bullet}.$$

Ответы: $\bar{x}_b = m_b^{\bullet} = 1{,}983 \approx 2;\ D_b = 1{,}949 \approx 1{,}95.\ \sum p_j^{\bullet} = 1,$

$$p_1 = \frac{e^{-2}2^0}{0!} \approx 0{,}135, \quad p_2 = \frac{e^{-2}2^1}{1!} \approx 0{,}270, \quad p_3 = \frac{0{,}135\cdot 2^2}{2!} \approx 0{,}270, \quad p_4 = \frac{e^{-2}2^3}{3!} \approx 0{,}180,$$

$$p_5 = \frac{e^{-2}2^4}{4!} \approx 0{,}090, \quad p_6 = \frac{e^{-2}2^5}{5!} \approx 0{,}036, \quad p_7 = \frac{e^{-2}2^6}{6!} \approx 0{,}017.$$

3. Проверьте равенство $\sum p_j = 1$ и убедитесь, что с.в. X – количество неправильных соединений имеет фактически пуассоновское распределение.

<u>Тема19.</u> Элементы теории оценок и проверки гипотез

1. Оценки параметров распределения

1.1 Понятие оценки параметров

Пусть рассматривается случайная величина X с некоторым законом распределения. По виду статистического распределения (таблицы распределения) можно строить гипотезы об истинном характере распределения величины X. Например, построив гистограмму, естественно предположить, что распределение величины X подчиняется определённому (нормальному или равномерному и т.д.) закону.

На практике, в целом, редко встречается такое положение, когда изучаемый закон распределения неизвестен *полностью.* Чаще всего дело обстоит следующим образом, что ***вид*** закона распределения заранее (из каких-либо теоретических соображений) известен. Требуется найти лишь некоторые ***параметры***, от которых закон зависит. Например, если распределение происходит по закону Пуассона

$$P\{X = m\} = \frac{e^{-a}a^m}{m!},$$

то следует определить параметр a, а если по нормальному закону, то нужно определить параметры a и σ. Впрочем, в некоторых задачах и сам вид закона распределения несущественен, а требуется только его числовые характеристики. Во всех подобных случаях можно обойтись сравнительно небольшим числом - порядка одного или нескольких десятков наблюдений.

Предположим, что изучается случайная величина X с некоторым законом распределения, зависящим от одного или нескольких параметров.

Напомним, что $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – случайные величины, полученные в результате n опытов (наблюдений), при этом: X_1 – результат первого наблюдения, X_2 – результат второго наблюдения и т.д., при этом каждая с.в. $X_j,\ j = 1,2,\cdots,n$ имеет такое же распределение как X : конкретная выборка $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ это значения (реализация) независимых случайных величин $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

Статистической оценкой $\tilde{\theta}_n$ (далее просто оценкой - оценкой $\tilde{\theta}$) параметра θ теоретического распределения называющего приближённое значение, зависящее от данных (свойства) выборки.

Для того чтобы статистические оценки давали «***хорошие***» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям.

1.2. Требования, предъявляемые к оценкам параметров

Предположим, что закон распределения с.в. X содержит некоторый параметр θ. Численное значение этого параметра не указано (хотя оно должно быть определённым числом). В связи с этим возникает задача: исходя из набора значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ величины X, полученного в результате n независимых опытов, оценить значение параметра θ.

Любая оценка для θ - обозначим её буквой $\tilde{\theta}$ - является значением некоторой функции результатов наблюдений над случайной величиной X, т.е.

(1) $$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n).$$

Тем самым $\tilde{\theta}$ будет случайной величиной (принимающей свои значения в результате n опытов над X). Её закон распределения будет зависеть от закона распределения с.в. X, которому подчинена каждая из величин $X_1, X_2, \cdots, X_n$, а следовательно величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ и от проводимого количества опытов n.

Естественно, к оценке величины $\tilde{\theta}$ предъявить ряд требований, которым она должна удовлетворять, чтобы быть «близкой» к истинному значению параметра θ, быть в каком-то смысле «доброкачественной, надёжной» оценкой. Попробуем сформулировать некоторые из этих требования:

1. Желательно, чтобы, при использовании величиной $\tilde{\theta}$ вместо θ, не происходили систематические ошибки ни в одну сторону (ни в сторону занижения, ни в сторону завышения), т.е. чтобы было

(16) $$M[\overline{\theta}] = \theta.$$

Оценка, удовлетворяющая условию (16) называется «***несмещённой***». Требование наличие несмещённой оценки особенно важно при «*малом*» числе испытаний (опытов).
Другими словами несмещённой называют статистическую оценку $\tilde{\theta}$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любом объёме выборки.

В случаях, когда $M\tilde{\theta}_n \to \theta$, то оценка $\tilde{\theta}_n$ называется «***асимптотически несмещённой***».

Смещённой называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

2. Желательно, чтобы с увеличением числа опытов n, значения случайной величины $\tilde{\theta}$ концентрировались около величины θ все более тесно, т.е. чтобы выполнялось предел

(17) $$D[\tilde{\theta}_n] \to 0,$$

когда $n \to \infty$.

Другими словами, оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ, называют «***состоятельной***», если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру θ:

$$\tilde{\theta}_n \xrightarrow[n \to \infty]{вер} = \theta;$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное равенство:

(18) $$\lim_{n\to\infty} P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1.$$

Равенство (18) означает, что с увеличением объёма выборки мы всё ближе приближаемся к истинному значению параметра θ; т.е. практически верно приближённое равенство $\tilde{\theta}_n \approx \theta$.

Теорема 19.1. *Если оценка* $\tilde{\theta}_n$ *параметра* θ *является несмещённой и выполняется равенство* $D[\tilde{\theta}_n] \to 0$, *то* $\tilde{\theta}_n$ *является* ***состоятельной оценкой****, т.е. справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1.$$

Доказательство. На основании неравенство Чебышева для с.в. $\tilde{\theta}_n$ для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\tilde{\theta}_n}{\varepsilon^2}.$$

Поскольку, по условию (17) $D[\tilde{\theta}_n] \to 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} \geq 1.$ Но вероятность любого события не превосходит единицы и, следовательно, выполняется предельное равенство (18), т.е. состоятельность оценки $\tilde{\theta}_n$ к параметру θ доказана.

Замечание. Свойство состоятельности обязательно для любого правила оценки (несостоятельные оценки не используются).

Однако было бы ошибочным считать, что несмещенная оценка всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. Действительно, возможные значения $\tilde{\theta}$ могут быть сильно рассеяны вокруг своего среднего значения, т. е. дисперсия $D[\tilde{\theta}]$ может быть значительной. В этом случае, найденная по данным одной выборки оценка, например $\tilde{\theta}_1$, может оказаться весьма удаленной от среднего значения $\overline{\theta}$, а значит, и от самого оцениваемого параметра θ; приняв $\tilde{\theta}_1$ в качестве приближенного значения θ, мы допустили бы большую ошибку. Если же потребовать, чтобы дисперсия $\overline{\theta}$ была малой, то возможность допустить большую ошибку будет исключена. По этой причине к статистической оценке предъявляется требование «***эффективности***».

Несмещённая оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется ***эффективной,*** если она среди всех возможных несмещённых оценок параметра θ, имеет наименьшую дисперсию, т.е. оценка $\tilde{\theta}_n$ эффективна, если ее дисперсия ***минимальна.***

Эффективную оценку в ряде случаев можно вычислять, на основании формулы (неравенство) Рао – Крамера:

$$D\tilde{\theta}_n \geq \frac{1}{n \cdot I(\theta)},$$

где $I(\theta)$ – информация Фишера, определяемая формулами:

$$I(\theta) = M\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)\right]^2 = \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{p'_\theta(x_j,\theta)}{p(x_j,\theta)}\right]^2 \cdot p(x_j,\theta);$$

в дискретном случае, где $p(x,\theta) = P(X = x)$, а в непрерывном случае

$$I(\theta) = M\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)\right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\varphi'_\theta(x,\theta)}{\varphi(x,\theta)}\right]^2 \cdot \varphi(x,\theta);$$

где $\varphi(x,\theta)$ – плотность распределения непрерывной случайной величины X.

Эффективность оценки определяется равенством (формулой):

$$\text{Э}ff\tilde{\theta}_n = \frac{D\tilde{\theta}_n^{\text{Э}}}{\mathrm{D}\tilde{\theta}_n},$$

где $\tilde{\theta}_n^{\text{Э}}$ – эффективная оценка, а $D\tilde{\theta}_n^{\text{Э}} = \dfrac{1}{n \cdot I(\theta)}$. Чем ближе $\text{Э}ff\tilde{\theta}_n$ к единице, тем эффективнее оценка $\tilde{\theta}_n$. Если $\text{Э}ff\tilde{\theta}_n \to 1$ при $n \to \infty$, то оценка называется ***асимптотически эффективной.***

Следует отметить, что на практике не всегда удаётся удовлетворить всем перечисленным выше требованиям (несмещённость, состоятельность, эффективность), и поэтому приходится ограничиться (довольствоваться) оценками, не обладающими сразу всеми тремя свойствами. Тем не менее, выполнение всех трёх свойств, как правило, обеспечивает однозначность оценки.

1.3. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии, оценки параметров нормального распределения

Предположим, что заранее известен вид теоретического распределения интересующего нас признака X, но параметры этого распределения не известны и должны быть найдены по данным выборки. Например, если известно, что интересующая нас величина распределена по нормальному закону, то нужно определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (или дисперсии). Другими словами неизвестными параметрами являются: м.о. $a = MX = m_X$ и дисперсия $D = DX$. Требуется их найти. Поскольку в качестве оценки обычно ищут количество точек характеризующих искомое число (точку на координатной оси), то такие оценки называют ***точечными.***

Статистика (число), используемая в качестве приближённого значения неизвестного параметра генеральной совокупности, называется её *точечной оценкой.* Другими словами, точечная оценка характеристики генеральной совокупности – это число, определяемое по выборке, т.е. точечная оценка, определяется *одним числом* (например, в качестве точечной оценки неизвестной вероятности p в случае биномиального распределения берут $W = m/n$ – относительную частоту).

Пусть $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за с.в. X.

Чтобы подчеркнуть то, что величины $x_1, x_2, \cdots, x_n$ носят случайный характер перепишем их в виде последовательности случайных величин $X_1, X_2, \cdots, X_n$, т.е. под X_j будем подразумевать значение с.в. X в j – м опыте. Случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n$ можно рассматривать как n независимых «***экземпляров***» величины X. Поэтому имеем: $MX_1 = MX_2 = \cdots = MX_n = a$ и $DX_1 =$
$= DX_2 = \cdots = DX_n = DX$. Имеет место утверждение

Теорема 19.2. *Пусть* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *– выборка из генеральной совокупности и* $MX_j = MX = a;\ DX_j = DX\ \ (j = \overline{1,n})$. *Тогда выборочное среднее*

$$\overline{X}_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

есть несмещённая и состоятельная оценка математического ожидания $MX = a$.

Доказательство. Найдём математическое ожидание величины $\overline{X}_b$. На основании свойства м.о. имеем:

$$M\overline{X}_b = M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a = \frac{a}{n}\cdot n = a.$$

Отсюда по определению (16) получаем, что $\overline{X}_b$ есть несмещённая оценка MX.
Далее, согласно теореме Чебышева для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{19}$$

Согласно условиям теоремы, равенство (19) можно переписать в следующем виде:

(20) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\overline{X}_b - MX\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

или, именно выполняется равенство (18) $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\overline{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1.$ Тем самым, согласно определению получаем, что $\overline{X}_b$ есть состоятельная оценка MX.

В статистике оценку математического ожидания принято обозначать: $\overline{X}$ или $\overline{X}_b$.

На практике во всех случаях в качестве оценки математического ожидания используется среднее арифметическое, если она неизвестно.

Теперь покажем, что при нормальном распределении именно оценка $\overline{X}_b$ будет эффективной.

Теорема 19.3. *Пусть с.в.* $X = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ – *выборка из генеральной совокупности и* $MX_j = MX = a, DX_j = DX$, D_b *её выборочная дисперсия. Тогда справедливо равенство*

(21) $$DX = \frac{n}{n-1} \cdot MD_b .$$

Доказательство. Покажем, что имеет место равенство (по поводу обозначений выборочных параметров см. равенства (7) - (11) в пункте 18.6.). На основании свойства м.о. и определения.

$$D_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2 = \overline{X}^2 - (\overline{X})^2;\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j;\ \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2,,$$

вычислим величину MD_b, имеем

(22) $$MD_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2 = M\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2\right] =$$

$$= M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2\right) - \frac{1}{n^2} M\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M(X_j^2) - \frac{1}{n^2} \cdot M\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 .$$

Далее, используем известное равенство

(23) $$\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i z_j ,$$

где во втором слагаемом суммирование ведётся по $i \neq j$, а количество слагаемых равняется числу $C_n^2 = n(n-1)/2$. Согласно (22) и (23) после стандартных упрощений получим

$$MD_b = \frac{n-1}{n^2}\left[MX_1^2 + MX_2^2 + \cdots + MX_n^2\right] - .$$

$$-\frac{2}{n^2}\left[(MX_1 \cdot MX_2) + (MX_1 \cdot MX_3) + \cdots + (MX_{n-1} \cdot MX_n)\right].$$

Отсюда, согласно условиям теоремы получим

$$MD_b = \frac{n-1}{n^2} \cdot n \cdot MX^2 - \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}(MX)^2 =$$

$$= \frac{n-1}{n}[MX^2 - (MX)^2] = \frac{n-1}{n} \cdot DX .$$

Утверждение доказано. Из равенства (21) следует, что $MD_b \neq DX$, т.е. ***выборочная дисперсия является <u>смещённой</u> оценкой дисперсии*** DX **.** Поэтому выборочную дисперсию, D_b поправляют, путём умножения на число $n/(n-1)$. Тогда получается формула

$S^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot D_b$. см. 18.6, равенство (13). Имеет место следствие.

Следствие. В условиях теорем 19.2 и 19.3.справедливо равенство $MS^2 = DX$.
Действительно,

$$MS^2 = M\left(\frac{n}{n-1}\cdot D_b\right) = \left(\frac{n}{n-1}\cdot MD_b\right) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}DX = DX. \quad (24)$$

Отсюда согласно определению получаем, что S^2 – является несмещённой оценкой величины DX.

Задание. Докажите ***состоятельность*** оценки S^2.

Следует отметить, что при больших значениях n разница между D_b и S^2 очень мала и они практически равны, поэтому выборочную оценку S^2 применяют при оценки дисперсии при малых (небольших) выборках, обычно при $n \le 30$.

Ниже сформулируем без доказательства два утверждения о состоятельности некоторых оценок.

Утверждения. 1. Относительная частота $W_n(n_A) = n_A/n$ появления события A в n независимых испытаниях является ***несмещённой состоятельной и эффективной оценкой*** неизвестной вероятности $p = P(A)$ случайного события A.

Это утверждение является непосредственным следствием ЗБЧ Бернулли.

2. Эмпирическая функция выборки $\Phi^{\bullet}(x)$ является несмещённой состоятельной оценкой функции распределения $\Phi(x)$ случайной величины X.

Пример 9. Пусть проводится повторное независимое испытание n раз (например, подбрасывание монеты) по схеме Бернулли. Вероятность наступления событие A (например, выпадения герба при каждом подбрасывание) равна $p = P(A)$. В ходе опыта было обнаружено, что событие A (выпадение герба) наступило n_A раз при n испытаниях. Показать несмещённость и состоятельность оценки $\tilde{\theta} = n_A/n$ вероятности $\theta = p$ наступления событие A (выпадение герба) в каждом опыте.

Решение. Число «**успехов**» n_A имеет распределение Бернулли. Тогда для построения точечной оценки рассмотрим случайную величину

$$\sum_{j=}^{n} X_j,$$

являющейся суммой индикаторов испытаний. Тогда математическое ожидание и дисперсия этого распределения (см. теорему Бернулли) имеют вид $M(n_A) = np;\ D(n_A) = npq$ при этом $p + q = 1$. Следовательно,

$$M\tilde{\theta} = M(n_A/n) = \frac{1}{n}\cdot M(n_A) = \frac{1}{n}\cdot np = p,$$

т.е. $\tilde{\theta} = \frac{n_A}{n} \Rightarrow p \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ есть несмещённая оценка. Далее проверим эту оценку на состоятельность:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j,$$

На основании свойства м.о. и теоремы Чебышева, согласно которой среднее арифметическое системы случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\theta} = p$.

В следующем пункте рассмотрим наиболее распространённые методы получения точечных оценок параметров распределения.

2. Методы нахождения точечных оценок параметров распределения

В статистике наиболее часто применяемые методы нахождения точечных оценок параметров распределения являются:

- метод моментов (коротко (ММ);

- метод максимального правдоподобия (коротко - ММП);

- метод наименьших квадратов (коротко МНК).

2.1. Метод моментов (ММ)

Суть метода моментов для нахождения точечных оценок неизвестных параметров заданного распределения состоит в том, что *приравнивается теоретические моменты распределения соответствующим эмпирическим моментам, найденные по выборке.*

Например, если распределение зависит от одного параметра θ (задан вид плотности распределения $\varphi(x,\theta)$), то для нахождения его оценки нужно решить относительно θ одно уравнение: $MX = \overline{X}_b$, где

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x,\theta)dx = f(\theta)$$

- есть функция от θ.

Если распределение зависит от двух параметров θ_1, θ_2, (например, вид плотности распределения $\varphi(x,\theta_1,\theta_2)$), то надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} MX = \overline{X}_b, \\ DX = D_b, \end{cases}$$

относительно параметров $\{\theta_1, \theta_2\}$.

И, наконец, если надо оценить n параметров $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$, то надо решить одну из систем вида:

$$(26) \qquad \begin{cases} MX = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j, \\ MX^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ MX^k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^k, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} MX = \overline{X}_b, \\ DX = D_b, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ M(X - MX)^k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X}_b)^k \end{cases}$$

В этих системах мы видим, что присутствуют моменты до $k-$го порядков случайного события X и его центрированного, $\breve{X} = X - MX$.

Метод моментов является наиболее простым методом оценки параметров, и он был предложен в 1894г. Пирсоном. Оценки, получаемые методом моментов, обычно являются состоятельными, однако их эффективность часто меньше единицы.

Пример 10. Найдём оценки параметров нормального распределения с.в. X применяя метод моментов.

Решение. Пусть дана выборка $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Найти точечные оценки параметров $a = MX = \theta_1$ и $\sigma = \sqrt{DX} = \theta_2$. По методу моментов приравниваем их, соответственно, к выборочному среднему и выборочной дисперсии: $\nu_1 = MX -$ начальный момент первого порядка, $\mu_2 = DX -$ центральный момент второго порядка и получаем

$$\begin{cases} MX = \overline{x}_b, \\ DX = D_b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \overline{x}_b, \\ \sigma = \sqrt{D_b}. \end{cases}$$

Таким образом, искомые оценки параметров нормального распределения будут: $\overline{\theta}_1 = \overline{x}_b$ и $\overline{\theta}_2 = \sqrt{D_b}$.

2.2. Метод максимального правдоподобия (ММП)

Пусть $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за с.в. X, и пусть вид закона распределения случайной величины X, например, вид функции плотности $\varphi(x,\theta)$, известен, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон. Требуется по заданной выборке оценить параметр θ.

Метод максимального правдоподобия (ММП), предложен Р.Фишером в основе которого, лежит понятие так называемой функции «*правдоподобия*».

Функцией правдоподобия, построенная по выборке $x_1, x_2, \cdots, x_n$, называется функция, зависящая от аргумента θ и заданная в следующем виде:

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \varphi(x_1,\theta)\cdot\varphi(x_2,\theta)\cdot\ldots\cdot\varphi(x_1,\theta) = \prod_{j=1}^{n}\varphi(x_j,\theta). \qquad (27)$$

Функция правдоподобия обладает свойством «*вполне мультипликативности*» по аргументам $x_1, x_2, \cdots, x_n$, равномерна относительно параметру θ, где $\varphi(x,\theta)$- плотность распределения с.в. X, в случаях, когда с.в. X является *непрерывной*. Если же с.в. X является *дискретной*, то функция правдоподобия определяется равенством

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = p(x_1,\theta)\cdot p(x_2,\theta)\cdot\ldots\cdot p(x_1,\theta) = \prod_{j=1}^{n} p(x_j,\theta), \qquad (28)$$

где $p(x_j,\theta) = P\{X = x_j,\theta\}$.

Замечание. На основании этих определений следует, что *чем больше значение функции* $L(x,\theta)$, *тем вероятнее (правдоподобнее) появление чисел* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ в результате данного проводимого опыта (эксперимента) при фиксированном θ.

За точечную оценку параметра θ, *согласно ММП, берут такое его значение* $\tilde{\theta}$, *при котором функция правдоподобия достигает максимального своего значения.*

Такая оценка, называемая *оценкой максимальной правдоподобия,* является решением уравнения

$$\left.\frac{dL(x,\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 0. \qquad (29)$$

Из курса математического анализа известно, что функции $L(x,\theta)$ и $\ln(L(x,\theta))$ достигают своего максимума при одном и том же значении θ (самостоятельно убедитесь в этом), то вместо отыскания максимального значения функции $L(x,\theta)$ ищут (что проще, где в правых частях равенств (27) и (28) каждое произведение превращается в сумму слагаемых) максимум функции $\ln(L(x,\theta))$.

Таким образом, для нахождения оценки максимального правдоподобия необходимо:

1. Решить уравнение правдоподобия

$$\left.\frac{d(\ln L(x,\theta))}{d\theta}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} = 0; \qquad (30)$$

2. Следует отобрать то решение, которое обращает функцию $\ln(L(x,\theta))$ в максимум, при этом удобно использовать вторую производную: если

(31) $$\left.\frac{d^2(\ln L(x,\theta))}{d\theta^2}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} < 0,$$

то точкой максимума будет $\theta = \tilde{\theta}$.

В случаях, когда подлежат оценке несколько параметров $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ распределения, то оценки $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \cdots, \tilde{\theta}_n$ определяются решением системы уравнений правдоподобия;

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial \theta_1}\right|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial \theta_n}\right|_{\theta_n=\tilde{\theta}_n} = 0. \end{cases}$$

Пример 11. Найдём оценку параметра λ в распределения Пуассона методом математического правдоподобия.

Решение. В данном примере

$$P\{X = m = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Поэтому

$$p(x_j, \theta) = P\{X = x_j, \theta\} = \frac{\theta^{x_j} \cdot e^{-\theta}}{x_j!}, \text{ при } x_j \in Z_+ = \{1,2,3,\cdots\}.$$

Составляем функцию правдоподобия для дискретной случайной величины X: по формуле (28) имеем

$$L(x,\theta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\theta_j \cdot e^{-x_j}}{x_j!}.$$

Отсюда, после логарифмирования обе части равенства получим

$$\ln L(x,\theta) = -n \cdot \theta + \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \ln\theta - \ln[(x_1!) \cdot (x_2!) \cdot \cdots \cdot (x_n!)].$$

Обе части равенства продифференцируем по параметру θ, получим

$$\frac{d(\ln L(x,\theta))}{d\theta} = -n + \frac{1}{\theta} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Таким образом, уравнение правдоподобия имеет вид:

(32) $$\frac{d(\ln L(x,\theta))}{d\theta} = \left.\left(-n + \frac{1}{\theta}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\right|_{\theta=\tilde{\theta}} = 0.$$

Следовательно,

(33) $$\tilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \bar{x}_b.$$

А так как из (32) следует, что

(34) $$\left.\frac{d^2(\ln L(x,\theta))}{d\theta^2}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} = -\frac{1}{\tilde{\theta}^2}\sum_{j=1}^{n} x_j < 0,$$

то найденная оценка $\tilde{\theta} = \bar{x}_b$ является оценкой максимального правдоподобия. Итак, $\tilde{\theta} = \tilde{\lambda} = \bar{x}_b$.

2.3. Сглаживания экспериментальных зависимостей метод наименьших квадратов (МНК)

Пусть проводится некоторый опыт, целью которого является исследование зависимости определённой физической (экспериментальной) величины от другой (скажем y от x). Будем предполагать, что величины y и x связаны некоторой функциональной зависимостью $y = f(x)$. Необходимо определить вид этой зависимости, что и требуется из опыта.

Предположим вначале, что зависимость $y = f(x)$ известна и в результате опыта получен ряд экспериментальных точек (x_j, x_j). Обычно, эти точки не ложатся точно на графике нашей функции $y = f(x)$. Как правило, имеется некоторый разброс точек, полученных опытным путём от графика функции, т.е. обнаруживается случайные отклонения от данной функциональной зависимости. Эти отклонения связаны с неизбежными допустимыми ошибками при любом опыте. В связи с этим возникает естественный вопрос, «***не зная зависимости*** $y = f(x)$, ***как, наилучшим образом воспроизвести эту зависимость по результатам экспериментальных данных***».

Простое соединение все экспериментальные точки некоторой кривой линией, являющейся графиком определённой функции, в общем случае лишено смысла. Потому, что вид этой зависимости будет меняться при разных сериях измерений, а в некоторых случаях её в принципе нельзя получать (несколько экспериментальных точек могут иметь одинаковые абсциссы и разные ординаты). В этом случае возникнет типичная задача для практики «***задача сглаживания экспериментальных зависимостей***», т.е. требуется найти функцию $y = f(x)$, чтобы она некоторым наилучшим образом отражала функциональную зависимость y от x, и вместе с тем были бы сглажены случайные, незакономерные отклонения измерений, связанные с неизбежными погрешностями самых измерений.

Обычно ситуация облегчается тем, что из теоретического соображения или из других соображений, связанных с существом рассматриваемой задачи, и даже по полученному экспериментальному материалу можно указать вид функциональной зависимости y от x (линейная, квадратичная, показательная и т.д.). Требуется только установить численные значения параметров этих зависимостей. Именно, далее задачу рационального выбора таких числовых параметров будем рассматривать. Ниже дадим кратко обоснование так называемого *метода наименьших квадратов* на примере нормально распределённых случайных величин.

Итак, пусть имеются результаты n независимых измерений - опытные точки (x_j, y_j); $j = \overline{1,n}$. Из теоретических или иных соображений, с точностью до количества (или других признаков) неизвестных параметров (здесь мы ограничимся двумя) α и β известна функциональная зависимость y от x в виде

$$y = f(x, \alpha, \beta). \tag{35}$$

Экспериментальные точки уклоняются от этой зависимости вследствие неизбежных ошибок измерений. Как правило, эти ошибки распределены по нормальному закону. Рассмотрим некоторое значение независимой переменной x_j. Результат измерения может рассматриваться как нормально распределённая случайная величина ξ_j с математическим ожиданием $f(x_j \alpha, \beta)$ и соответствующим среднеквадратичным отклонением σ_j, характеризующим ошибку измерений. Дополнительно предположим, что «точность измерения во всех точках одинакова, то есть $\sigma_j = \sigma$; $j = \overline{1,n}$. Тогда плотность вероятности с.в. ξ_j имеет вид

$$f_{\xi_j}(y_j) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_j - f(x_j, \alpha, \beta))^2}{2\sigma^2}}; \; j = 1, 2, \cdots, n; \tag{36}$$

В результате получаем $n-$ мерную случайную величину $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, координаты которой независимы и плотности вероятности которых определении равенствами (36). Как было показано ранее, плотность распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотностей вероятности компонент:

(37) $$f_{\{\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(y_j - f(x_j,\alpha,\beta))^2}{2\sigma^2}}.$$

Теперь для определения параметров α и β воспользуемся идеей метода максимального правдоподобия (ММП), согласно которой в эксперименте реализуются те значения компонент, при которых плотность вероятности системы (37), близка к максимальному значению. Учитывая специальный вид равенств (37), можно заметить, что она достигает максимума, когда показатель степени принимает максимальное значения. Отбрасывая отрицательный множитель $(-\frac{1}{2\sigma^2})$ приходим к задаче отыскания минимума выражения:

(38) $$\sum_{j=1}^{n}[y_j - f(x_j, \alpha, \beta)]^2 \Rightarrow \min.$$

Поскольку минимизируется сумма квадратов разностей экспериментальных и теоретических значений функции (их обычно называют «***невязками***»), предложенную процедуру называют ***методом наименьших квадратов.***

Согласно теории дифференциального исчисления в принципе задача сводится к решению системы двух однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

(39) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\sum\limits_{j=1}^{n}[y_j - f(x_j, \alpha, \beta)]^2 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\beta}\sum\limits_{j=1}^{n}[y_j - f(x_j, \alpha, \beta)]^2 = 0. \end{cases}$$

Если функциональная зависимость (35) линейна относительно параметров α и β, то система уравнений (39) также будет линейной и её решение можно найти известными методами линейной алгебры.

Таким образом, в общем случае мы приходим к следующему выводу.

Метод нахождения оценки $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений выборочных данных от определяемой (искомой) оценки θ, называется методом наименьших квадратов.

Другими словами, в МНК требуется найти такое значение $\tilde{\theta}$, которое минимизировало бы сумму

$$H(\theta) = \sum_{j=1}^{n}(X_j - \theta)^2 \Rightarrow \min.$$

Следует отметить, что МНК является наиболее простым и практичным методом нахождения оценок параметра θ.

Пример 12. Проведена серия опытов по определению влияния дозы внесённых удобрений
на повышение урожайности некоторой сельхоз культуры (например, пшеницы).

Соответствующие данные приведены в трёх столбцах таблицы, и пусть x выражает внесённую дозу удобрений в центнерах на гектар, y выражает прирост урожайности в центнерах с гектара

j	x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j \cdot y_j$
1	0,342	2,10	0,1170	4,41	0,718
2	0,417	4,70	0,1739	22,09	1,960
3	0,675	6,05	0,4556	36,60	4,084
4	0,867	8,65	0,7517	74,82	7,500
5	1,000	10,00	1,0000	100,00	10,000
6	1,158	12,60	1,3410	158,76	14,591
7	1,283	12,08	1,6461	145,93	15,499
8	1,500	14,68	0,2500	215,50	22,020
9	1,733	16,65	3,0033	277,22	28,854
10	2,008	19,25	4,0321	370,56	38,654
11	2,083	19,98	4,3389	399,20	41,618
12	2,242	23,20	5,0266	538,24	52,014
13	2,508	23,93	6,2901	572,64	60,016
$\frac{1}{13}\sum_1^{13}$	1,370	13,37	2,3405	224,31	22,887

Требуется, применяя метод наименьших квадратов подобрать линейную функцию f, выражающую y через x.

Решение. Предполагая, искомые величины связаны между собой линейной зависимостью $y = \alpha x + \beta$. Определим коэффициенты α и β на основании системы (39).

Система (39) в нашем случае принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{j=1}^{13} [y_j - (\alpha x_j + \beta)]^2 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta} \sum_{j=1}^{n} [y_j - (\alpha x_j + \beta)]^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\sum_{j=1}^{13} (y_j - \alpha x_j - \beta) \cdot x_j = 0, \\ -2\sum_{j=1}^{n} (y_j - \alpha x_j - \beta) \cdot y_j = 0. \end{cases}$$

После раскрытия скобок и некоторых стандартных преобразований, для определения наших параметров α и β получим следующую систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{13} \sum_{j=1}^{13} x_j^2 \right) \cdot \alpha + \left(\dfrac{1}{13} \sum_{j=1}^{13} x_j \right) \cdot \beta = \left(\dfrac{1}{13} \sum_{j=1}^{13} x_j \cdot y_j \right), \\ \left(\dfrac{1}{13} \sum_{j=1}^{13} x_j \right) \cdot \alpha + \beta = \left(\dfrac{1}{13} \sum_{j=1}^{13} y_j \right). \end{cases}$$

Решая эту систему методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса), в итоге получим:

$$\alpha = 9{,}86;\ \beta = -0{,}14 \Rightarrow y = 9{,}86x - 0{,}14.$$

Замечание. Во многих приложениях также используется и другая зависимость: $y = \dfrac{\alpha}{x} + \beta$, также линейно е относительно параметров α и β. В этом случае задача легко может быть сведена к предыдущей заменой переменной: $z = \dfrac{1}{x}$.

Пример 13. Найдём оценку параметра λ распределения Пуассона методом наименьших квадратов.

Решение. Найдём точку минимума функции $H(\theta)=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\theta)^2$. Найдём $H'(\theta)$.

$$H'(\theta)=[H=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\theta)^2]'=\sum_{j=1}^{n}2(X-\theta)\cdot(-1);$$

Из уравнения $H'(\theta)=0$ находим критическую точку: -2$\sum_{j=1}^{n}(X-\theta)=0,$ т.е.

$$\sum_{j=1}^{n}X_j-\sum_{j=1}^{n}\theta=0\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}X_j=n\theta,$$

следовательно, $\theta_{\text{кр}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$. Поскольку

$$H''(\theta_{\text{кр}})=[-2\sum_{j=1}^{n}(X_j-\theta)]'\Big|_{\theta}=-2\sum_{j=1}^{n}(-1)=2n>0,$$

при любом значении θ, то

$$\theta_{\text{кр}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$$

будет точкой минимума функции $H(\theta)$. Таким образом, оценкой параметра λ в распределении Пуассона

$$P(m;\lambda)=\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!},\quad m=0,1,2,\cdots$$

в соответствии с МНК, является величина $\tilde{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$.

Задание. Докажите, что имеют место равенства: $M(\tilde{\theta})=\theta=\lambda,\ D(\tilde{\theta})=\frac{\theta}{n}.$

Задачи с указаниями.

1. Найти оценку параметра распределения Пуассона методом моментов.

Указание. Распределение Пуассона $P\{X=m\}=\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}$ содержит один параметр λ .
Для оценки его методом моментов запишем уравнение $MX=\bar{x}_b$. Отсюда следует, что $\lambda=\bar{x}_b$.
Следовательно, $\vec{x}_b=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\Rightarrow\tilde{\theta}=\lambda=\bar{x}.$

2. Пользуясь ММП, оценить вероятность, появление герба, если при десяти подбрасываниях монеты герб появился шесть раз.

Указание. В данном случае с.в. X является дискретной с законом распределения

x_j	1	0
p_j	p	1- p

Так как

$$p(x_j,\theta)=P\{X=x_j,\theta\}=\begin{cases}p, & если\,x_j=1,\\ 1-p, & если\,x_j=0,\end{cases}$$

то функция правдоподобия имеет вид: $L=L(x,\theta)=\theta^6\cdot(1-\theta)^4.$ Тогда $\ln L=6\cdot\ln\theta+4\ln(1-\theta),$
и уравнение правдоподобия

$$\left(\frac{6}{\theta}-\frac{4}{1-\theta}\right)\Big|_{\theta=\tilde{\theta}}=0\Rightarrow\tilde{\theta}=p^{\bullet}=0{,}6.$$

3. Пусть случайная величина X равномерно распределена со значениями в отрезке $<a,b>$, т.е. $X \approx \Re_{\{a,b\}}$. По выборке $x_1, x_2, \cdots, x_n$ оценить величины a и b методом моментов.

Указание. В этой задаче требуется оценить две величины θ_1 и θ_2, т.е. величины a и b, методом моментов. Как было показано ранее, (см. Т. 9.5) $MX = \dfrac{a+b}{2}$; $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} MX = \bar{x}_b, \\ DX = D_b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \bar{x}_b, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = \sigma_b^2. \end{cases}$$

Отсюда находим: $b = 2\bar{x}_b - a,\ (2\bar{x}_b - 2a)^2 = 12\sigma_b^2;$ т.е. $(\bar{x}_b - a)^2 = 3\sigma_b^2; \bar{x}_b - a = \pm\sqrt{3}\,\sigma_b$, $\bar{x}_b = a + \sqrt{3}\,\sigma_b$ и, значит, $a = \bar{x}_b - \sqrt{3}\,\sigma_b$, $b = \bar{x}_b + \sqrt{3}\,\sigma_b$ (вариант $a = \bar{x}_b + \sqrt{3}\,\sigma_b$, $b = \bar{x}_b - \sqrt{3}\,\sigma_b$ из-за $a < b$ исключается). Таким образом, оценки величин a и b получены и таковы:

$$\tilde{\theta}_1 = \tilde{a} = \bar{x}_b - \sqrt{3}\,\sigma_b, \tilde{\theta}_2 = \tilde{b} = \bar{x}_b + \sqrt{3}\,\sigma_b.$$

Задание. Решая систему

$$\begin{cases} MX = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \bar{x}_b \\ MX^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 = \bar{x}_b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \bar{x}, \\ \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} = \bar{x}_b^2. \end{cases}$$

получить те же самые оценки.

Теперь, кратко остановимся на общий случай, когда рассматриваемая зависимость близка к некоторой функциональной зависимости, где входят семейство параметров больше чем два, т.е. функциональная зависимость имеет общий вид

(40) $$y = f(x, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots),$$

требуется подобрать значения параметров так, чтобы кривая (40) как можно меньше уклонялась от точек, полученных экспериментальным путём.

Решение этой задачи, например, методом наименьших квадратов (МНК) заключается в отыскании таких значений параметров, для которых выражение

(41) $$H(a,b,c,\cdots) = \sum_{j=1}^{n}[y_j - f(x_j, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots)]^2 \Rightarrow \min$$

принимает наименьшее значение. И здесь, задачу можно свести к решению системы уравнений

(42) $$\left.\frac{\partial H}{\partial \theta_1}\right|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} = 0;\ \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right|_{\theta_2=\tilde{\theta}_2} = 0;\ \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right|_{\theta_2=\tilde{\theta}_2} = 0, \cdots$$

где число уравнений совпадает с числом неизвестных параметров.

В общем случае решить систему (42) при произвольной функции $f(\cdots)$ конечно невозможно; для практического приложения необходимо задать конкретный вид функции $f(\cdots)$. В ряде случаев функцию $f(\cdots)$ задают в виде многочлена

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^r,$$

где роль параметров играют коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$. В некоторых случаях $f(\cdots)$ выбирается как комбинация показательных функций

$$a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 z} + \cdots + a_k e^{\alpha_k z},$$

где какие-то из чисел a_j и α_j могут быть заданы заранее, в то время как другие неизвестны (эти неизвестные и играют роль параметров, подлежащих вычислению). Возможны, разумеется и другие формы задания функции $f(\cdots)$.

3. Понятие интервального оценивания параметров

Точечные оценки неизвестного параметра θ хороши в качестве первоначальных результатов обработки наблюдений. Их недостаток в том, что заранее (априори) неизвестно с какой точностью они характеризуют оцениваемый параметр. Поскольку точечные оценки параметров распределения являются случайными величинами и могут отличаться от оцениваемых параметров, то возникает необходимость в оценке точности и надёжности найденного. То есть требуется знать, к каким ошибкам может привести замена неизвестного параметра его точечной оценкой, и с какой уверенностью можно ожидать, что допущенные ошибки не выйдут за известные пределы.

С этой целью вводятся понятия «***интервальные оценки***», накрывающие неизвестный параметр, то есть по данным выборки указывается интервал, который с заданной и достаточно близкой к единице вероятностью γ_p обеспечивает верхнюю и нижнюю границу оценок. Обычно, величину γ_p называют доверительной вероятностью или надёжностью оценки и определяют формулой:

(43) $$\gamma_p = P\left\{\theta \in (\tilde{\theta} - \varepsilon; \tilde{\theta} + \varepsilon)\right\} = P\left\{\,|\,\theta - \overline{\theta}\,| < \varepsilon\right\}.$$

Число $\varepsilon > 0$ характеризует точность оценки: чем меньше разность $|\,\theta - \overline{\theta}\,|$, тем точнее оценка. Для выборок небольшого объёма вопрос о точности оценок очень важен.

Оценка неизвестного параметра называется ***интервальной***, если она определяется двумя числами – началом и концом интервала. Задачу в общем случае можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, относительно которого с заранее выбранной вероятностью γ_p можно сказать, что внутри этого интервала находится точное значение оцениваемого параметра.

Величина γ_p выбирается заранее, её выбор зависит от конкретно решаемой задачи. Например, степень доверия авиапассажира к надёжности самолёта, естественно, должно быть выше степени доверия покупателя к надёжности бытовых приборов.

Надёжность γ_p принято выбирать равной числам : 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999. Тогда практически достоверно нахождение параметра θ в доверительном интервале $(\tilde{\theta} - \varepsilon; \tilde{\theta} + \varepsilon)$.

4. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

В этом разделе построим доверительные интервалы для параметров нормального распределения, т.е. когда выборка производится из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с параметрами $MX = a$ и σ.

4.1. Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

Пусть с.в. $X \approx N_{(a,\sigma)}$; и σ – известна, и задана доверительная вероятность (надёжность) γ_p. Предположим, что $x_1, x_2, \cdots, x_n$ означают выборку, полученную в результате проведения n независимых наблюдений за с.в. X. Чтобы подчеркнуть случайный характер выборки

$x_1, x_2, \cdots, x_n$, перепишем их в виде $X_1, X_2, \cdots, X_n$, т.е. под X_j будем понимать значение с.в. X в $j-$м опыте. Случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n$ - независимы, закон распределения любой из них совпадает с законом распределения с.в. X, (т.е. с $X \approx N_{(a,\sigma)}$). А это значит, что $MX = = MX_j = a;\ DX_j = DX;\ j = \overline{1, n}.$ Выборочное среднее

$$\overline{X}_b = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

также будет распределено по нормальному закону. Параметры распределения $\overline{X}$ таковы: $M(\overline{X}) = a,\ D(\overline{X}) = \sigma^2/n$. Действительно,

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a = \frac{a}{n}\cdot n = a.$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} DX_j = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} DX = \frac{DX}{n^2}\cdot n = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Отсюда, $\overline{X} \approx N_{(a,\sigma/\sqrt{n})}$.

Следовательно, пользуясь формулой (43) (см. Т.9) .

$$P\{|\ X - a| < \delta\} = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1,$$

можно записать для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\gamma_p = P\{|\ \overline{X} - a| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(t),$$

где $t = \dfrac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sigma}$, следовательно,

(44) $$\varepsilon = \frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}},$$

поэтому $\gamma_p = P\{|\ \overline{X} - a| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\dfrac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t)$ или

(45) $$P\left\{\overline{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi_0(t) = \gamma_p.$$

Замечание. ***Если потребуется оценить математическое ожидание с заранее заданной точностью*** ε ***и надёжностью*** γ_p***, то минимальный объём выборки, который обеспечивает эту точность, находят по формуле*** $n = (t\sigma/\varepsilon)^2$ **(*непосредственное следствие формулы* (44)).**

В соответствии с определением доверительного интервала получаем, что доверительный интервал для $a = MX$ есть интервал

(46) $$\left(\overline{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

где t определяется из равенства (45), т.е. из функционального уравнения

(47) $$\Phi_0(t) = \frac{\gamma_p}{2} \text{ или } \Phi(t) = \frac{1+\gamma_p}{2}.$$

При заданном γ_p по таблице функции Лапласа находим аргумент t.

Заметим, что из равенства (44) непосредственно следует: с увеличением объёма выборки n число ε убывает и, значит, точность оценки увеличивается. Увеличение надёжности γ_p влечёт за собой уменьшение точности оценки.

Пример 14. Произведено 5 независимых наблюдений над с.в. $X \approx N_{(a,20)}$. Результаты наблюдений таковы: $x_1 = -25,\ x_2 = 34,\ x_3 = -20,\ x_4 = 10,\ x_5 = 21$. Найти оценку для $a = MX$, а также построить для него 95% -й доверительный интервал.

Решение. Находим сначала величину $\bar{x}_b : \bar{x}_b = \frac{1}{5}(-25 + 34 - 20 + 10 + 21) = 4,$ т.е. $\bar{x} = 4.$

Учитывая, что $\gamma_p = 0{,}95$ и $\Phi_0(t) = \frac{\gamma_p}{2} \Rightarrow \Phi_0(t) = 0{,}475.$ По таблице значений функции Лапласа находим, что $t = t_\gamma = 1{,}96.$ Тогда по формуле (44) $\varepsilon = \frac{1{,}96 \cdot 90}{\sqrt{5}} \approx 17{,}5$. Следовательно, доверительный интервал для $a = MX$ согласно равенство (45) будет следующее:

$$\{4 - 17{,}5; 4 + 17{,}5\} \Rightarrow \{-13{,}5; 21{,}5\}.$$

4. 2. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Обратимся теперь к случаю, когда параметр σ неизвестен (он должен сам оцениваться по результатам наблюдений).

Пусть с.в. $X \approx N_{(a,\sigma)}$, $\sigma -$ неизвестна, а доверительная вероятность γ_p задана. Найдём число ε, для которого выполнялось соотношение $P\{\bar{X} - \varepsilon < a < X + \varepsilon\} = \gamma_p$, или

$$(48) \qquad P\{|\,\bar{X} - a\,| < \varepsilon\} = \gamma_p$$

Введём случайную величину

$$(49) \qquad T = \frac{\bar{X} - a}{S_n},\ S_\sigma = \frac{S}{\sqrt{n}},$$

$S -$ исправленное среднеквадратическое отклонение с.в. X, вычисленное по выборке $x_1, x_2, \cdots, x_n$, (по которым мы условились определить с.в. $X_1, X_2, \cdots, X_n$), $\bar{X} = \bar{x}_b -$ выборочное среднее, построенное по заданной выборке (см. 18.6)

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2}.$$

В 15.2. было рассмотрено распределение Стьюдента. Аналогично показывается, что с.в. T имеет распределение Стьюдента с ($n-1$) степенью свободы. Плотность этого распределения имеет вид:

$$(50) \qquad \varphi_T(t, n-1) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma((n-1)/2)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1} \cdot e^{-u} du -$ гамма – функция Эйлера; $\varphi_T(t, n-1)$ является чётной функцией по t.

Преобразуя левую часть равенства (48) от с.в. к с.в. T получим

$$P\left\{\frac{|\,\bar{X} - a\,|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < \frac{\varepsilon}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right\} = \gamma_p \Leftrightarrow P\left\{|\,T\,| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{S}\right\} \Leftrightarrow P\left\{|\,T\,| < t_{\gamma_p}\right\},$$

где

(51) $$t_{\gamma_h} = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}.$$

Величина t_{γ_p} определяется из условия

$$P\left\{|T| < t_{\gamma_p}\right\} = \int_{-t_{\gamma_p}}^{+t_{\gamma_p}} \varphi_T(t, n-1)dt = 2 \cdot \int_0^{t_{\gamma_p}} \varphi_T(t, n-1)dt = \gamma_p$$

Следовательно, из равенства $2 \cdot \int_0^{t_{\gamma_p}} \varphi_T(t, n-1)dt = \gamma_p$ пользуясь таблицей квантилей Стьюдента (см. приложение 6.), находим значение t_{γ_p} в зависимости от доверительной вероятности γ_p и числа степеней свободы, равные $n-1$, (t_{γ_p} есть квантиль уровня $1-\gamma_p$). Определив значение величины t_{γ_p} из равенства (51), находим значение ε:

(52) $$\varepsilon = \frac{t_{\gamma_h} \cdot S}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, равенства (48) принимает вид

$$P\left\{\overline{X} - t_{\gamma_p} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{\gamma_p} \frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma_p.$$

А значит, интервал $\left(\overline{X} - t_{\gamma_p} \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_{\gamma_p} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает (ограничивает) величину м.о. $a = MX$ с вероятностью γ_p. Другими словами, является доверительным интервалом для неизвестного математического ожидания случайной величины X , которую можно представить в виде

$$\overline{X} - t_{\gamma_p} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{\gamma_p} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Пример 15. По условию примера 14, считая, что случайная величина распределена по нормальному закону: $X \approx N_{(a,20)}$, построить для неизвестного $MX = a$ доверительный интервал. Считать, что $\gamma_p = 0{,}95$. Напомним условие примера 14: произведено 5 независимых наблюдений над (относительно) с.в. $X \approx N_{(a,20)}$.

Результаты наблюдений таковы: $x_1 = -25,\ x_2 = 34,\ x_3 = -20,\ x_4 = 10,\ x_5 = 21.$

Найти оценку для $a = MX$, а также построить для него 95% -й доверительный интервал.

Решение. Оценку величины $\bar{x} = \overline{X}$ для $a = MX$ уже знаем: $\overline{X} = 4$. Вычислим значение S :

Сначала находим S^2 по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2.$$

Поэтому $S^2 = \frac{1}{4}\left\{(-25-4)^2 \cdot 1 + (34-4)^2 + (-20-4)^2 + (10-4)^2 + (21-4)^2\right\} = 660{,}5.$ Отсюда, $S \approx 25{,}7$. По таблице для $\gamma_p = 0{,}95$ и $n-1 = 4$ находим, что $t_{\gamma_p} = 2{,}78.$ Следовательно,

По формуле (52)

$$\varepsilon \approx 2{,}78 \cdot \frac{25{,}7}{\sqrt{5}} \approx 31{,}9.$$

Итак, доверительный интервал для математического ожидания таков: $(-27{,}9; 35{,}9)$.

Далее, кратко рассмотрим, как нужно находить доверительного интервала для нормально распределённой случайной величины, в связи с математическим ожиданием.

4.3. Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения

Пусть с.в. $X \approx N_{(a,\sigma)}$, $\sigma -$ неизвестно, а доверительная вероятность γ_p задано. Здесь мы приводим существующие результаты без доказательства в зависимости от м.о. в двух случаях:

1. Математическое ожидание ***известно*** (т.е. можно вычислить), тогда имеет место утверждение.

Доверительный интервал для неизвестного среднего квадратичного отклонения величины σ (стандарта) имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_2},\frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_1}\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_2}\le\sigma\le\frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_1}$$

где $n -$ объём выборки,

$$S_o^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-a)^2,$$

а величины χ_1 и χ_2 являются квантилями и $\chi^2 -$ распределения с n степенями свободы (см.15.2) , равные $\chi_1^2=\chi^2_{\{0,5(1+\gamma_p);\ n\}}$; $\chi_2^2=\chi^2_{\{0,5(1-\gamma_p),;n\}}$ и определяются по таблице (приложение 5). Очевидно, что $\chi_2^2>\chi_1^2$; $\dfrac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_2}<\dfrac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_1}$.

2. Математическое ожидание ***неизвестно***, тогда имеет место утверждение.

Доверительный интервал для неизвестного среднеквадратичного отклонения величины σ (стандарта) имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2},\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2}\le\sigma\le\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}$$

где $n -$ объём выборки, $S=\sqrt{S^2}$ является ***исправленное*** среднеквадратическое отклонение

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2,$$

а квантили определяются соответственно по таблице (приложение 5) равенствами: $\chi_1^2=\chi^2_{\{0,5(1+\gamma_p);n-1\}}$; $\chi_2^2=\chi^2_{\{0,5(1-\gamma_p);n-1\}}$.

Пример 16. Для оценки параметра нормально распределённой случайной величины произведена (сделана) выборка в 30 единиц и известно (вычислено) $S=1{,}5$.

Найти доверительный интервал, покрывающий (содержащий в себе) величину σ с доверительной вероятностью $\gamma_p=0{,}90$.

Решение. По условиям примера имеем: $n=30$; $\gamma_p=0{,}9$. По таблице $\chi^2_{\alpha,k}$ находим:

$$\chi_1^2=\chi^2_{\{0,5(1+0,9);\,30-1\}}=\chi^2_{\{0,95;29\}}=17{,}7;\ \chi_2^2=\chi^2_{\{0,5(1-0,9);\,30-1\}}=\chi^2_{\{0,05;29\}}=42{,}6;$$

Доверительный интервал имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{29}\cdot1{,}5}{\sqrt{42{,}6}};\frac{\sqrt{29}\cdot1{,}5}{\sqrt{17{,}7}}\right)\Leftrightarrow1{,}238<\sigma<1{,}920.$$

Кратко остановимся на доверительном интервале для оценки вероятности успеха при большом числе испытаний Бернулли. Точечная оценка имела вид:

$$\sum_{j=1}^{k} n_j = n;\ w_j = \frac{n_j}{n};\ \sum_{j=1}^{k} w_j = 1$$

В целях нахождения доверительного интервала, для оценки вероятности события, рассмотрим отклонения относительной частоты $W(A) = p^{\bullet}$ от истинной вероятности $p,$ то есть разность $W(A) - p = p^{\bullet} - p.$

Учитывая, что вероятность появления события A при n испытаниях m раз, а следовательно, и относительная частота, определяется формулой Бернулли и при больших n вычисляется по интегральной теореме Муавра- Лапласа, получим

$$P\{|\, p^{\bullet} - p\,| \le \varepsilon\} = P\{n(p-\varepsilon) \le m \le n(p+\varepsilon)\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{np + \varepsilon p - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{np - \varepsilon p - np}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = \gamma_p\,,$$

где γ_p - надёжность требуемой оценки.

Переходя к новой переменной $t_{\gamma_p} = \varepsilon\sqrt{n}\big/\sqrt{pq}$, получим

$$P\left(|\, p^{\bullet} - p\,| \le t_{\gamma_p} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 2\Phi\left(t_{\gamma_p}\right) = \gamma_p\,,$$

где γ_p определяется по таблице значений функции Лапласа из условия $\Phi\left(t_{\gamma_p}\right) = \gamma_p/2$. Отсюда с вероятностью γ_p должно выполняться неравенство $p_1 \le p \le p_2$, где

(53) $$p_1 = p^{\bullet} - t_{\gamma_p} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};\ p_2 = p^{\bullet} + t_{\gamma_p} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};$$

Полученная оценка обладает двумя недостатками:

1) она зависит от p неизвестной величины;

2) фраза «***справедлива при больших*** n» является понятием расплывчатым (не точным).

От первого недостатка можно избавиться. Путём замены $p \approx p^{\bullet}$ под квадратным корнем, что даёт для оценки истинной вероятности события A следующий доверительный интервал,

(54) $$p^{\bullet} - t_{\gamma_p} \cdot \sqrt{\frac{p^{\bullet}(1-p^{\bullet})}{n}} \le p \le p^{\bullet} + t_{\gamma_p} \cdot \sqrt{\frac{p^{\bullet}(1-p^{\bullet})}{n}},$$

который с надёжностью γ_p покрывает оцениваемый параметр $p = P(A)$.

Второй недостаток устраняется путём заменой точного распределения разности ($W(A) - p$) на нормальное распределение. Практически удовлетворительный результат получается при $npq = np(1-p) \ge 10$.

Пример 17. Из подвергнутых испытаниям на сортность 100 единиц товара 80 выдержали его. Найти доверительный интервал с надёжностью 0,95 для вероятности того, что произвольно выбранный образец удовлетворяет предъявленным условиям.

Решение. В качестве точечной оценки неизвестного параметра принимаем числа $p^{\bullet}$ и определяем равенством $p^{\bullet} = W(A) = \frac{80}{100} = 0{,}8$. По доверительной вероятности с помощью таблицы значений функции Лапласа находим $t_{\gamma_p} = 1{,}96$ и затем на основании формуле (53) определяем доверительный интервал: $o{,}711 \le p \le 0{,}867$.

Пример 18. Для проверки фасовочной установки было отобраны и взвешены 20 упаковок, были получены следующие результаты (в граммах).

246	247	247,3	247,4	251,7	252,5	252,6	252,8	252,8	252,9
253	253, 6	254,6	254,7	254,8	256,1	256,3	256,8	257,4	259,2

Найти доверительные интервалы для математического ожидания с надёжностью 0, 95 и среднеквадратического отклонения с надёжностью 0,9, предполагая, что измеряемая величина распределена по нормальному закону.

Решение. Находим точечные оценки для $a = MX$; и $\sigma = \sqrt{DX}$.

$$a^{\bullet} = m_x^{\bullet} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{20} X_j = 252{,}98,$$

$$S^2 = \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_j)^2 = \frac{1}{19}\sum_{j=1}^{20}(X_j - \overline{X}_j)^2 = 13{,}3,$$

$$\tilde{\sigma} = S = \sqrt{13{,}3} \approx 3{,}65 .$$

Определим по таблице распределения Стьюдента (приложение 6) для доверительной вероятности $\gamma_p = 0{,}95$ с числом свободы $(n-1) = 20 - 1 = 19$ соответствующее значение $t_{\gamma_p} = 2{,}093$, и по формуле

$$P\left\{ \overline{X} - t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}} \right\} = \gamma_p$$

находим искомый интервал надёжности $\left(\overline{X} - t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}} \le a \le \overline{X} + t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}} \right)$:

$$252{,}98 - \frac{2{,}093}{\sqrt{20}} \le a \le 252{,}98 + \frac{2{,}093}{\sqrt{20}} \Rightarrow 251{,}27 \le a \le 254{,}69.$$

Для построения доверительного интервала для с.к.о. σ с надёжностью $\gamma_p = 0{,}9$ находим по таблице распределения значений χ^2 с $(n-1) = 19$ степенями свободы (приложение 5) из условий:

$$\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2} \le \sigma \le \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}; \quad \chi_1^2 = \chi^2_{\{0,5(1+\gamma_p);\, n-1\}}; \quad \chi_2^2 = \chi^2_{\{0,5(1-\gamma_p);\, n-1\}}.$$

$$2{,}9 \le \sigma \le 5{,}0.$$

Задание. Выполните самостоятельно завершающие выкладки и убедитесь в справедливости полученных оценок (результатов) снизу и сверху (см. решение примера 16).

Задачи с указаниями.

Глубина нефтяной скважины измеряется некоторым прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены по нормальному закону с дисперсией 225 кв. м (т.е. $\sigma = 15$м). Сколько раз нужно провести независимые измерения, чтобы определить глубину скважины с ошибкой не более 5 м, если надёжность вероятности равна $\gamma_p = 0{,}9$?

Указание. Нужно воспользоваться $\varepsilon = \dfrac{t_{\gamma_p}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$; $\Phi_0(t_{\gamma_p}) = \dfrac{\gamma_p}{2}$.

При $\varepsilon = 5,\ \sigma = 15,\ \gamma_p = 0{,}9$; показать, что $\Phi_0(t_{\gamma_p}) = 0{,}45.$ По таблице находить: $t_{\gamma_p} = 1{,}65$.

Наконец, по формуле $\varepsilon = \dfrac{t_{\gamma_p} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$, убедиться что $n = 24{,}5025$ т.е. необходимо произвести не менее 25 раз измерений.

Измерили рост (с некоторой точностью скажем до 1 см.) 30 наудачу отобранных студентов. Результаты измерения показали:

$$178,\ 160,\ 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155,$$
$$157,\ 175,\ 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169,$$
$$179,\ 165,\ 156, 179, 158,\ 171, 175, 173, 164, 172.$$

(см. условие примера 6, 18.4.,).

Найти доверительный интеграл для среднего роста студентов, при надёжности вероятности $\gamma_p = 0{,}95.$

Указание. Покажите, что $\overline{x}_b = \overline{x} = \dfrac{1}{30}\sum_{j=1}^{6} x_j \cdot n_j = 167{,}6;\ S = 9{,}28;$ при $\gamma_p = 0{,}95$ и $(n-1) = 29$ по таблице распределения Стьюдента находить равенство $t_p = 2{,}05$. Наконец, вычислите по формуле $\varepsilon = \dfrac{t_{\gamma_p} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \approx 3{,}47$ и убедитесь, что доверительный интервал будет $(164{,}13; 171{,},07)$

3. Производятся независимые испытания с одинаковой, но с неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании.

Найти доверительный интервал для оценки p с надёжностью $\gamma_p = 0{,}95$, если в 400 раз проведённых наблюдений, событие A наступило (появилось) 80 раз.

Указание. По заданным условиям $n = 400; n_A = m = 80;\ \gamma_p = 0{,}95$**,** относительная частота события A равна $p^{\bullet} = \dfrac{80}{400} = 0{,}2.$ Из соотношения $\Phi_0(t_{\gamma_p}) = 0{,}475$ и таблицы значений функции Лапласа найдите: $t_{\gamma_p} = 1{,}96,$ далее по формулам (53) и (54) вычислите величины p_1 и p_2 в итоге покажите, что доверительный интервал будет иметь вид: $0{,}161 \le p \le 0{,}239$

5. Другие характеристики вариационного ряда

Кроме выборочной средней и выборочной дисперсии применяются и другие характеристики вариационного ряда. Укажем главные из них.

Модой M_0 называют варианту, которая имеет наибольшую частоту.

Например, для ряда

Варианта:	1	4	7	9
Частота:	5	1	20	6

мода равна 7.

Медианой m_e называют варианту, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если число вариант нечетно, т. е. $n = 2k + 1$, то $m_e = x_{k+1}$; и при четном $n = 2k$ медиана равна

$$m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Например, для ряда $\{\ 2,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 7\}$, медиана равна 5, а для ряда $\{2,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 7,\ \ 8\}$ медиана равна $(5+6)/2 = 5{,}5.$

Размахом варьирования называют число R равное разности между наибольшим и наименьшим значениями варианты т.е $R = x_{\max} - x_{\min}$

Например, для ряда $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 17,\ 19\}$ размах равен $R = 19$—1=18.

Размах является простейшей характеристикой рассеяния вариационного ряда.

Средним абсолютным отклонением Θ называют среднее арифметическое абсолютных отклонений:

$$\Theta = \frac{\sum n_j \, | x_j - \overline{x_в} |}{\sum n_j}.$$

Например, для вариационного ряда

$$x_j: \ \{1,\ 3,\ 6,\ 16\}$$

$$n_j: \ \{4,\ 10,\ 5,\ 1\}$$

имеем

$$\overline{x}_b = \frac{4 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 16}{4 + 10 + 5 + 1} = \frac{80}{20} = 4;$$

$$\Theta = \frac{4 \cdot |1 - 4| + 10 \cdot |3 - 4| + 5 \cdot |6 - 4| + 1 \cdot |16 - 4|}{20} = 2{,}2.$$

Среднее абсолютное отклонение служит для характеристики рассеяния вариационного ряда.

Тема 20 . Проверка статистических гипотез

1. Задачи статистической проверки гипотез

На бытовом языке слово *гипотеза* означает *предположение*. В математической статистике это предположение относится к распределению вероятностей на выборочном пространстве.

Предположения могут быть как о конкретном законе распределения, так и о значениях его
параметров. Таким образом, *статистическая гипотеза – это предположение о распределении вероятностей, которое нужно проверить по имеющимся статистическим данным.*

Одна из часто встречающихся на практике задач, связанных с применением методов статистического анализа, состоит в решении вопроса о том, должно ли быть на основании *данной выборки* принято или напротив опровергнуто некоторое предположение (гипотеза) относительно *генеральной совокупности* (случайной величины).

Например, новое лекарство испытано на определённом количестве людей. Можно ли по данным результатам лечения сделать обоснованный вывод о том, что новое лекарство более эффективно, чем применявшиеся ранее лекарства?

Аналогичный вопрос логично задать, говоря о новом правиле поступления в ВУЗ, о новых инновационных методах (формах) обучения, о пользе голодания для здоровья, о пользе быстрой ходьбы, о преимуществах новой модели автомобиля, о преимуществах внедрения новой автоматической технологии в производстве, о новой форме управления экономикой, т.д.

Процедура обоснованного сопоставления высказанного предположения (гипотезы) с имеющимися в нашем распоряжении выборочными данными называется *проверкой гипотез.*

На практике часто встречаются задачи сравнения двух выборочных совокупностей. Например, нас может интересовать сравнение двух методов обработки статистических данных, т.е. двух различающихся действий, направленных к одной и той же цели: *двух методик обучения, двух методик технологий управления процессами, двух способов получения информации и т.д.* Для формирования статистической гипотезы необходимо признаки (черты) присущие конкретной проблеме, чтобы их можно было выразить в терминах, относящихся к распределению вероятности.

Отметим, что этот процесс является творческим (динамичным), и его невозможно формализовать. При этом нужно помнить, что для ряда типовых случаев математическая теория (модель исследования) разработана достаточно хорошо (подробно), и нужно стараться по возможности задачу свести к одной из типовых статистических задач.

2. Статистическая гипотеза, статистический критерий

Под *статистической гипотезой* или просто *гипотезой* понимают всякое высказывание (предположение) о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Статистические гипотезы служат инструментом проверки выдвигаемых теоретических предположений. Гипотезы могут быть высказаны относительно параметров статистического распределения вероятностей. Например, в случае нормального закона распределения с.в., относительно м.о. и дисперсии. Тогда гипотезу называют *параметрической*.

Предположения могут быть сделаны так же относительно самого распределения с.в. (подчинение закону Бернулли, Пуассона, геометрическому, равномерному, нормальному и т.д.). В этом случае проверяемую гипотезу *называют непараметрической.*

На практике одну из гипотез выделяют в качестве *основной* или *нулевой* и обозначают H_0
, (которая формируется в предположении отсутствия существенной различии между выборочной и генеральной совокупностями), а другую *конкурирующей* гипотезой,

являющуюся противоположной к H_0, т.е. логическим отрицанием первого, в качестве *альтернативной гипотезы* и обозначается H_1.

Гипотезу, однозначно фиксирующую распределение наблюдений, называют *простой,* если в ней идёт речь об одном значении параметра, в противном случае – *сложной*.

Например, гипотеза H_0, состоящая в том, что математическое ожидание с.в. X равно a_0, то есть $MX = a_0$, является простой. В качестве альтернативной гипотезы, т.е. сложной можно рассматривать одну из следующих гипотез: $MX \neq a_0$ или $MX > a_0$, $MX < a_0$.

Имея две гипотезы H_0 и H_1 надо на основе выборки $x_1, x_2, \cdots, x_n$, принять либо основную гипотезу H_0, либо конкурирующую H_1. Исследуя выборку, принимается решение: согласуется она с этой гипотезой или нет. *Альтернативная гипотеза* H_1 принимается после того, как опровергается основная (нулевая).

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0, или отклонить или принять H_1, называется *статистическим критерием* или просто *критерием* проверки данной гипотезы.

Проверку гипотез осуществляют на основании результатов выборки $x_1, x_2, \cdots, x_n$, из которых формируется функция выборки $T_n = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, называемой *статистикой критерия*.

Основной принцип проверки гипотез состоит в следующем. Множество возможных значений статистики критерия T_n разбивается на два непересекающихся подмножества: *критическую область* S, т.е. область отклонения гипотезы H_0 и область $\overline{S}$ *принятия гипотезы* H_0. Если фактически наблюдаемое значение статистики критерия, т.е. значение критерия, вычисленное по выборке: $T_{\text{набл}} = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ попадает в критическую область S, то основная гипотеза H_0 отклоняется и принимается альтернативная гипотеза H_1; если же $T_{\text{набл}}$ попадает в область $\overline{S}$, то принимается H_0, а H_1 отклоняется.

Пример 1. Пусть в некотором высшем учебном заведении нам нужно доказать, что студенты пятого курса в среднем выше ростом, чем студенты первого курса.

Решение. В качестве нулевой гипотезы выдвинем предположение о равенстве и их среднего роста:

$$H_0 : \overline{L}_5 = \overline{L}_1,$$

где $\overline{L}_5$ – средний рост студентов 5-го курса, $\overline{L}_1$ – средний рост студентов 1-го курса.

В качестве альтернативной (конкурирующей) гипотезы к H_0 могла бы быть выдвинута гипотеза, утверждающая существенные отличия их роста:

$$H_1 : \overline{L}_5 \neq \overline{L}_1,$$

то есть возможные две случаи: $\overline{L}_5 > \overline{L}_1$; $\overline{L}_5 < \overline{L}_1$. Если в результате статической проверки гипотеза H_0 будет опровергнута, то тем самым будет доказана возможность принятия гипотезы

H_1. Если следовать здравому смыслу, то рост студентов в конце обучения не уменьшается, следовательно, он действительно стал больше. Таким образом, альтернативную гипотезу в данном примере можно сформулировать как одностороннюю:

$$H_1 : \overline{L}_5 > \overline{L}_1.$$

При проверке гипотезы может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух видов:

Ошибка первого рода состоит в том, что отвергается нулевая гипотеза H_0, когда на самом деле она верна.

Ошибка второго рода состоит в том, что отвергается альтернативная гипотеза H_1, когда она на самом деле верна.

Рассматриваемые случаи наглядно иллюстрирует следующая таблица.

Гипотеза H_0	Опровергается	Принимается
верна	ошибка 1-го рода	правильное решение
неверна	правильное решение	ошибка 2-го рода

Вероятность ошибки 1-го рода обозначается числом α и называется ***уровнем значимости критерия.*** Очевидно, что число $\alpha = P(H_1/H_0) = P_{H_0}(H_1)$ выражает условную вероятность альтернативной гипотезы H_1 по отношению уже принятой гипотезы H_0. Чем меньше, α тем меньше вероятность отклонить верную гипотезу.

Обычно, допустимую ошибку 1-го рода задают заранее. Для числа α используются стандартные значения: $\alpha = 0{,}05;\ 0{,}01;\ 0{,}005;\ 0{,}001$. Например, $\alpha = 0{,}05$ означает, что в среднем из 100 испытаний в 5 случаях верная гипотеза будет опровергнута.

В общем случае величину α задают в зависимости рассматриваемой задачи (когда речь идёт, например, о разрушении сооружений, гибели судна, прыжок с большой высоты с парашютом, тонкая хирургическая операция, стыковка космических кораблей и т.д., нельзя пренебречь обстоятельствами, которые могут появиться с вероятностью, равной 0,001).

Вероятность ошибки 2-го рода обозначается через β, т. е. $\beta = P(H_0|H_1)$

Величину $1 - \beta$, т. е. вероятность недопущения ошибки 2-го рода (отвергнуть неверную гипотезу H_0, принять верную H_1), называется *мощностью критерия.*

Очевидно, $1-\beta = P(H_0|H_1) = P((x_1, x_2, ..., x_n) \in S|H_1$

Чем больше мощность критерия, тем вероятность ошибки 2-го рода меньше, что, конечно, желательно (как и уменьшение α).

Последствия ошибок 1-го, 2-го рода могут быть совершенно различными: в одних случаях надо минимизировать α, в других нужно минимизировать β. Так, применительно к радиолокации говорят, что $\alpha -$ вероятность пропуска сигнала, $\beta -$ вероятность ложной тревоги.

Применительно к производству, к торговле можно сказать, что $\alpha -$ риск поставщика (т. е. доля товара подлежащего браковке по выборке всей партии изделий, удовлетворяющих стандарту), $\beta -$риск потребителя (т. е. прием по выборке всей партии изделий, не удовлетворяющей стандарту);

Применительно к судебной системе, ошибка 1-го рода приводит к оправданию виновного, ошибка 2-го рода приводит к осуждению невиновного.

Отметим, что *одновременное уменьшение ошибок* 1-*го и* 2-*го рода возможно лишь при увеличении объема выборок.* Поэтому обычно при заданном уровне значимости α отыскивается критерий с наибольшей мощностью.

Методика проверки гипотез сводится к следующему:

1. При наличии выборки $X_1, X_2, \cdots, X_n$, формируют основную (нулевую) гипотезу H_0 и альтернативную H_1.

2. В каждом конкретном случае подбирают статистику критерия $T_n = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, обычно из следующих распределений: $N_{(a,\sigma)} -$ нормальное распределение, $\chi^2 -$ распределение хи-квадрат (Пирсона), $t -$распределение Стьюдента, $F -$распределение Фишера - Снедекора.

3. По статистике критерия T_n и уровню значимости α определяют критическую область S и $\overline{S}$. Для ее отыскания достаточно найти критическую точку $t_{кр}$, т.е. границу (или квантиль), отделяющую область S от $\overline{S}$.

Границы областей определяются, соответственно, из соотношений: $P(T_n > t_{кр}) = \alpha$. Для правосторонней критической области S (рис. 80); $P(T_n < t_{кр}) = \alpha$ для левосторонней критической области S (рис. 81); $P(T_n < t_{кр}^{л}) = P(T_n > t_{кр}^{п}) = \dfrac{\alpha}{2}$, для двусторонней критической области S (рис. 82).

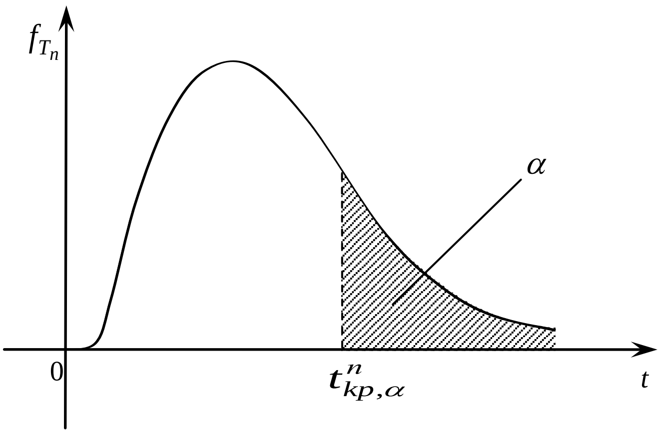


Рис.80

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят *критическую точку*, удовлетворяющую приведенным выше соотношениям.

4. Для полученной реализации выборки $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ подсчитывают значение критерия, т.е. $T_{набл} = T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = t$.

5. Если $t \in S$ (например, $t > t_{кр}$ для правосторонней области S), то нулевую гипотезу H_0 отвергают; если же $t \in \overline{S}$ ($t < t_{кр}$), то нет оснований, чтобы отвергнуть гипотезу H_0.

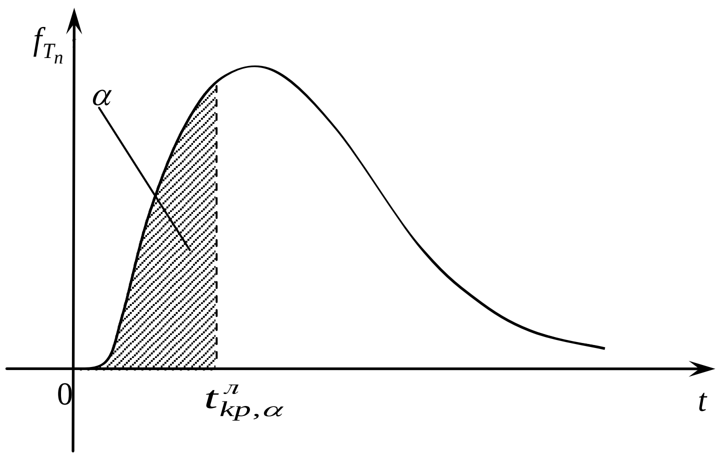


Рис.81

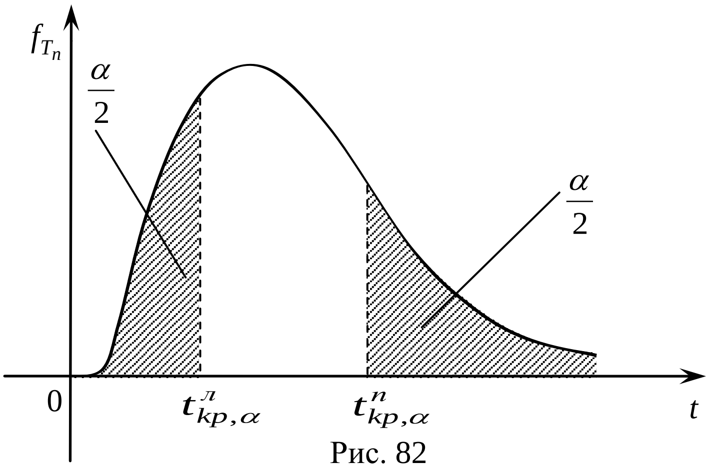


Рис. 82

3. Проверка гипотезы об однородности двух или более анализируемых совокупностей

Пусть мы имеем несколько наборов данных (выборок), образованных в результате наблюдения за одним и тем же параметром интересующего нас объекта. Эти наборы могут быть образованы, например, за счёт разделённости их регистрации во времени и в пространстве.

$$1-\text{я выборка:}\quad x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1};$$
$$2-\text{я выборка}\quad x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n_2};$$
(1) --

$$j-\text{я выборка}\quad x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jn_j}.$$

Обозначим функцию распределения, описывающую вероятностный закон, которому подчиняю наблюдения, первой выборки через $F_1(x)$, второй выборки через $F_2(x)$ и т.д.

Основные гипотезы однородности можно записать в следующем виде:

(2) $$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \cdots = F_j(x);$$

(3) $$H_0 : \overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \cdots = \overline{x}_j;$$

(4) $$H_0 : S_1^2 = S_2^2 = \cdots = S_j^2.$$

В случае принятия неотрицательного результата проверки этих гипотез утверждают, что соответствующие выборки однородны, т.е. принадлежат одной генеральной совокупности и различаются *статистически незначительно*. Это означает, что условия регистрации выборочных данных можно считать неизменными.

4. Проверка гипотез о законе распределения

Для статистической проверки гипотез о виде распределения вероятностей исследуемой случайной величины используется ***критерия согласия***

(5) $$H_0 : F_0(x; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l)$$

где α_j – параметры проверяемого закона распределения.

Во многих случаях закон распределения изучаемой случайно величины неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет вполне определенный вид: нормальный, биномиальный или какой-либо другой.

Пусть необходимо проверить гипотезу H_0 о том, что с. в. X подчиняется одному из законов распределения, функция, распределения которой, $F_0(x)$, т. е. H_0: $\Phi_X(x) = F_0(x)$ Под альтернативной гипотезой H_1 будем понимать в данном случае то, что просто не выполнена основная гипотеза, т.е. H_1: $\Phi_X(x) \neq F_0(x)$.

Для проверки гипотезы о распределении случайной величины X проведем выборку, которую представим в виде статистического ряда:

x_j	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_j	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

где $\sum_{j=1}^{k} n_j = n -$ объем выборки.

Требуется сделать заключение: согласуются ли результаты наблюдений с высказанным предположением. Для этого используем специально подобранную величину так называемую «критерий согласия».

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. (Он используется для проверки согласия предполагаемого вида распределения с опытными данными на основании выборки.)

Существуют различные критерии согласия: Пирсона. Колмогорова, Фишера, Смирнова и др.

Критерий согласия Пирсона — наиболее часто употребляемый критерий для проверки простой гипотезы о законе распределения.

5. Критерий согласия χ^2 (Критерий Пирсона)

Для проверки гипотезы H_0 поступают следующим образом. Разбивают всю область значений св. X на m интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_k$ и подсчитывают вероятности p_j, $j = \overline{1,k}$, попадания случайной величины X (т.е. наблюдения) в интервал Δ_j, используя формулу

$$P\{\alpha \leq X \leq \beta\} = F_0(\beta) - F_0(\alpha).$$

Тогда теоретическое число значений с.в. X, попавших в интервал Δ_j, можно рассчитать по формуле $n'_j = n \cdot p_j$. Таким образом, имеем статистический ряд распределения с. в. X (8.11) и теоретический ряд распределения:

Δ_1	Δ_2	$\cdots$	Δ_k

$n_1' = n \cdot p_1$	$n_2' = n \cdot p_2$	$\cdots$	$n_k' = n \cdot p_k$

Если эмпирические частоты (n_j) сильно отличаются от теоретических частот $(n \cdot p_j = n_j')$, то проверяемую гипотезу H_0 следует отвергнуть; в противном случае нужно принять.

Каким критерием, характеризующим степень расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами, следует воспользоваться? В качестве меры расхождения между n_j и $n \cdot p_j$ для $j = 1, 2, \cdots, k$.

К. Пирсон (1857-1936; английский математик - философ) предложил величину «критерий Пирсона» в следующем виде:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j^2}{n \cdot p_j} - n. \qquad (6)$$

Согласно теореме Пирсона, при $n \to \infty$ статистика (6) имеет $\chi^2 -$ распределение с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где m — число групп (интервалов) выборки, r — число параметров предполагаемого распределения. В частности, если предполагаемое распределение нормально, то оценивают два параметра *(a и σ),* поэтому число степеней свободы $k = m - 3$.

Правило применения критерия χ^2 сводится к следующему:

1. По формуле (6) вычисляют $\chi^2_{\text{набл}}$ - выборочное значение статистики критерия.

2. Выбрав уровень значимости α критерия, по таблице $\chi^2 -$распределения находим критическую точку (квантиль) $\chi^2_{\alpha,k}$.

3. Если $\chi^2_{набл} \le \chi^2_{\alpha,\, k}$ гипотеза H_0 не противоречит опытным данным; $\chi^2_{набл} > \chi^2_{\alpha,\, k}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Необходимым условием применения критерия Пирсона является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений $(n_j \ge 5)$. Если в отдельных интервалах их меньше, то число интервалов надо уменьшить путем объединения (укрупнения) соседних интервалов.

Пример 2. Измерены 100 обработанных деталей; отклонения от заданного размера приведены в таблице:

$[x_j, x_{j+1})$	[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, -3)	[3, 4)	[4, 5]
n_j	3	10	15	24	25	13	7	3

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу H_0 о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

Решение. Число наблюдений в крайних интервалах меньше 5, поэтому объединим их с соседними. Получим следующий ряд распределения $n = 100$:

$[x_j, x_{j+1})$	[-3,-1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3,5]
n_j	13	15	24	25	13	10

Случайную величину — отклонение — обозначим через *X*. Для вычисления вероятностей p_j необходимо вычислить параметры, определяющие нормальный закон распределения (*a* и *σ*). Их оценки вычислим по выборке:

$$\bar{x} = \frac{1}{100}\cdot\left(-2\cdot 13 + (-0{,}5)\cdot 15 + \ldots + 4\cdot 10\right) = 0{,}885 \approx 0{,}9,$$

$$D_в = \frac{1}{100}\cdot\left(4\cdot 13 + 0{,}25\cdot 15 + \ldots + 16\cdot 10\right) - (0{,}885)^2 \approx 2{,}809,$$

$$\sigma \approx 1{,}676 \approx 1{,}7.$$

Находим p_j $(j = \overline{1,6})$. Так как св. $X \approx N_{(a,\sigma)}$ определена на $(-\infty,+\infty)$, то крайние интервалы в ряде распределения заменяем, соответственно, на $(-\infty,+\infty)$ и $(3,+\infty)$. Тогда

$$p_1 = P\{-\infty < X < -1\} = \Phi_0\left(\frac{-1-0{,}9}{1{,}7}\right) - \Phi_0(-\infty) = \frac{1}{2} - \Phi_0(1{,}12) = 0{,}1314.$$

Аналогично получаем:

$$p_2 = 0{,}1667,\ p_3 = 0{,}2258,\ p_4 = 0.2183,\ p_5 = 0{,}1503,$$

$$p_6 = P\{3 \le X < \infty\} = \Phi_0(+\infty) - \Phi((3-0{,}9)/1{,}7) = 0{,}5 - \Phi_0(1{,}24) = 0{,}1075.$$

Полученные результаты приведем в следующей таблице:

$[x_j, x_{j+1})$	$(-\infty, -1)$	$[-1, 0)$	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, +\infty)$
n_j	13	15	24	25	13	10
$n'_j = n\cdot p_j$	13,14	16,67	22,58	21,83	15,03	10,75

Вычисляем $\chi^2_{набл}$:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{j=1}^{6}\frac{n_j^2}{np_j} - n = \left(\frac{13^2}{13{,}14} + \frac{15^2}{16{,}67} + \cdots + \frac{10^2}{10{,}75}\right) - 100 \approx$$

$$\approx 101{,}045 - 100 = 1{,}045.$$

Следовательно, $\chi^2_{\text{набл}} \approx 1{,}045$

Находим число степеней свободы, по выборке рассчитаны два параметра, значит, r = 2. Количество интервалов 6, т. е. m = 6. Следовательно, k = 6 -2-1 = 3. Зная, что α = 0,01 и κ = 3, по таблице χ^2- распределения находим $\chi^2_{\alpha,\,k} = 11{,}3$. Итак, $\chi^2_{набл} < \chi^2_{\alpha,\,k}$, следовательно, нет оснований опровергнуть проверяемую гипотезу. Таким образом, отклонения от заданного размера подчиняются нормальному закону распределения.

6. Критерий Колмогорова

Критерий Колмогорова для простой гипотезы является наиболее простым критерием проверки гипотезы о виде закона распределения. Он связывает эмпирическую функцию распределения $\Phi^\bullet_n(x)$ с функцией распределения $\Phi(x)$ непрерывной случайной величины *X*.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - конкретная выборка из распределения с неизвестной непрерывной функцией распределения $\Phi(x)$ и $\Phi^\bullet_n(x)$ - эмпирическая функция распределения. Выдвигается простая гипотеза $H_0 : \Phi(x) = \Phi_0(x)$ (альтернативная $H_1 :\ \Phi(x) \ne \Phi_0(x)$, $x \in R$).

Сущность критерия Колмогорова состоит в том, что вводят в рассмотрение функцию

(7) $$D_n = \max_{-\infty<x<\infty} \left| \Phi_n^*(x) - \Phi_0(x) \right|$$

называемой *статистикой Колмогорова,* представляющей собой максимальное отклонение эмпирической функции распределения $\Phi_n^{\bullet}(x)$ от гипотетической (т. е. соответствующей теоретической) функции распределения $\Phi_0(x)$.

Колмогоров доказал, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины $\sqrt{n} \cdot D_n$ независимо от вида распределения с. в. *X* стремится к его *закону распределения:*

$$P\{\sqrt{n} \cdot D_n < x\} \to K(x)$$

где *K(x)* — функция распределения Колмогорова, для которой составлена таблица, ее можно использовать для расчетов уже при $n \geq 20$:

α	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
x_0	1,224	1.358	1,520	1,627	1,950

Найдем D_0 такое, что $P(D_n > D_0) = \alpha$.

Рассмотрим уравнение $K(x) = 1 - \alpha$. С помощью функции Колмогорова найдем значение (корень x_0) этого уравнения. Тогда по теореме Колмогорова,

$$P\{\sqrt{n} \cdot D_n < x_0\} = 1 - \alpha, \; P\{\sqrt{n} \cdot D_n > x_0\} = \alpha,$$

откуда $$D_0 = \frac{x_0}{\sqrt{n}}.$$

Если $D_n < D_0$, то гипотезу H_0 нет оснований опровергнуть; в противном случае - ее опровергают.

Пример 3. Монету бросали 4040 раз (Бюффон). Получили $n_1 = 2048$ выпадений герба и $n_2 = 1992$ выпадений решётки. Проверить, используя

а) критерий Колмогорова;

б) критерий Пирсона, согласуются ли эти данные с гипотезой H_0 о симметричности монеты ($\alpha = 0.05$).

Случайная величина *X* принимает два значения: $x_1 = -1$ (решётка); $x_2 = 1$(герб). Гипотеза H_0: $P\{X = -1\} = P\{X = 1\} = 1/5$.

а) По таблице распределения Колмогорова находим корень уравнения $K(x) = 1 - \alpha$ при $\alpha = 0{,}05$. Следует $x_0 = 1{,}358$. Тогда

$$D_0 = \frac{x_0}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}358}{\sqrt{4040}} \approx 0{,}021$$

Для нахождения по выборке D_n строим функции $\Phi_0(x)$ и $\Phi_n^{\bullet}(x)$ и вычисляем величину $D_n = \max\limits_{-\infty<x<\infty} \left| \Phi_n^*(x) - \Phi_0(x) \right|$.

	решётка	герб
x_j	x_1 = -1	x_2 = -1

p_j	0,5	0,5

$$\Rightarrow \quad \Phi_0(x) = \begin{cases} 0, \;\; при \;\; x \le -1, \\ 0{,}5, \;\; при \;\; x \in (-1,+1), \\ 1, \;\; при \;\; x > 1. \end{cases}$$

x_i	решётка x_1 = -1	герб x_2 = -1
n_i	1992	2048
p_i	≈ 0,493	≈0,507

$$\Rightarrow \Phi_n^*(x) = \begin{cases} 0, & при \;\; x \le -1 \\ 0{,}493, & при \;\; -1 < x \le 1 \\ 1, & при \;\; x > 1 \end{cases}$$

Максимальное отклонение $\Phi_0(x)$ от $\Phi_n^{\bullet}(x)$ равно 0,007, т.е. D_n = 0,007. Поскольку $D_n < D_0$, то нет оснований отвергать, гипотезу H_0; опытные данные согласуются с гипотезой H_0 о симметричности монеты.

б) Вычисляем статистику χ^2

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{6} \frac{n_i^2}{np_i} - n = \frac{1992^2}{\frac{1}{2} \cdot 4040} + \frac{2048^2}{\frac{1}{2} \cdot 4040} - 4040 = 0{,}776$$

По таблице χ^2 – распределения находим критическую точку $\chi^2_{\alpha,\, k} = \chi^2_{0{,}05;\, 1} = 3{,}8.$ Так как $\chi^2_{\alpha,\, k} < \chi^2_{0{,}05;\, 1}$, то опытные данные согласуются с гипотезой о симметричности монеты.

7. Критерий однородности Смирнова

Для проверки гипотез вида (2) (см. 20.2) об однородности двух или более выборок применяют *критерий однородности*:

(8) $$H_0: \quad F_1(x) = F_2(x) = \cdots = F_l(x)$$

Здесь, мы ограничимся частным случаем этой критерии для двух выборок (т.е. $l = 2$). В качестве критической статистики применяется критерий однородности Смирнова, которая имеет вид:

(9) $$\gamma_{1,2} = n_1 n_2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\frac{m_{1j}}{n_1} - \frac{m_{2j}}{n_2} \right)}{m_{1j} + m_{2j}},$$

где n_1, n_2 – число элементов выборок; m_{1j}, m_{2j} – количество элементов соответственно первой и второй выборок, попавших в j – й интервал.

При условии справедливости гипотезы $H_0: \; F_1(x) = F_2(x)$ величина $\gamma_{1,2}$ будет распределена приблизительно по закону χ^2 с $(k-1)$ степенью свободы. Гипотеза H_0 опровергается, если $\gamma_{1,2} \le \chi^2_{(1-0{,}5\alpha)}$ или $\gamma_{1,2} > \chi^2_{(0{,}5\alpha)}$, и *принимается при всех остальных значениях критерия* $\gamma_{1,2}$.

Рассмотрим следующую производственную задачу.

Пример 4. Ниже в таблице приведены *условные данные* о заработной плате работников двух видов предприятий: текстильной и машиностроительной отраслей, полученные в результате социологического опроса. Объёмы двух выборок выразятся как $n_1 = n_2 = 100$.

№ п /п	Интервал зарплаты в у.е.	Количество элементов выборки, попавших в данный интервал		$m_{1j} + m_{2j}$	$m_{1j} - m_{2j}$
		Текстиль m_{1j}	Машиностроение m_{2j}		
1	130-150	4	1	5	3
2	150-170	4	1	5	3
3	170-200	15	8	23	7
4	200-250	51	43	94	8
5	250-300	22	34	56	-12
6	300-350	3	7	10	-4
7	350-400	1	3	4	-2
8	400-450	0	3	3	-3

Решение. Проверим гипотезу (при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$) о том, что распределения вероятностей по заработной плате в анализируемых отраслях не отличаются друг от друга.

Далее вычисления величины $\gamma_{1,2}$ по формуле критерии Смирнова (9) с учётом данных в таблице даёт

(10) $$\gamma_{1,2} = 100 \cdot 100 \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\frac{m_{1j}}{100} - \frac{m_{2j}}{100} \right)}{m_{1j} + m_{2j}} = 14{,}58.$$

Задание. Самостоятельно проверьте это равенство.

Из таблицы значений χ^2 -распределения (см. приложение) определяем критическую точку: $\chi^2_{(0{,}05;7)} = 14{,}07$. Следовательно, гипотезу о совпадении вероятностных распределений заработной платы в двух отраслях необходимо отвергнуть, т.к. $\gamma_{1,2} > \chi^2_{(0{,}05,7)}$. При этом, вероятность допускаемой ошибки равна 0,05.

Критерий однородности Смирнова относится к *непараметрическим критериям* (в отличие от критерия Пирсона), так как используемая в нём критическая статистика никак не зависит от наших предположений относительно распределения закона случайной величины.

8. Проверка гипотезы об однородности параметров распределений

8.1. Критерий Стьюдента ($t-$критерий)

Критерий Стьюдента ($t-$критерий) предназначен для проверки гипотез (3) , т. е. $H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \cdots = \bar{x}_j$, $j = 2$, однородности математических ожиданий в двух выборках нормально распределённой случайной величины, имеющих одинаковую (хотя и неизвестную) дисперсию σ^2:

$$H_0: \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2; \qquad H_1: \quad \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2.$$

(11) $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{S} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}},$$

где $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ - оценки математических ожиданий в выборках объёмов n_1, n_2

$\bar{S}$ - стандартное отклонение, вычисляемое по формуле:

(12) $$\bar{S} = \sqrt{\bar{S}^2};$$

$\bar{S}^2$ - средняя дисперсия, которая вычисляется по выборочным дисперсиям S_1^2 и S_2^2 по формуле:

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{(n_1+n_2-2)}\left[n_1S_1^2 + n_2S_2^2\right].$$

В условиях справедливости гипотезы (3) и при дополнительном условии однородности дисперсий статистика t равенство (11) должна подчиняться распределению Стьюдента с ($k = n_1 + n_2 - 2$) степенями свободы. Определим из таблицы t- распределения критическое значение $t_{кр}$ для уровня значимости $0{,}5 \cdot \alpha$, и числа степеней свободы $n_1 + n_2 - 2$. Если окажется, что t, вычисленное по формуле (11), то гипотеза об однородности (3) отвергается.

Замечание. Слишком большое значение статистики t может быть следствием как неоднородности математических ожиданий двух выборок, так и неоднородности дисперсий. А это являться самостоятельной задачей исследования.

Частным случаем такой задачи является «задача о проверке гипотезы относительно равенствах математического ожидания нормально распределённой случайной величины заданному значению». Итак, имеем выборку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из нормальной генеральной совокупности $N_{(a,\sigma_x^2)}$. Рассмотрим различные варианты постановки задач по проверке гипотез о равенстве числового значения оценки математического ожидания $\bar{x}$ заданной постоянной величине c.

Вариант 1. $H_0: \bar{x} = c$ при условии, что дисперсия генеральной совокупности σ_x^2 известна.

Критическая статистика согласно формуле (11) имеет вид:

(13) $$t = \frac{\bar{x} - c}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

В условиях справедливости гипотезы H_0 статистика t подчиняется нормальному закону.

В качестве критического значения $t_{кр}$ используется квантиль нормального распределения U_α с уровнем значимости α

1) если $t > U_{1-\alpha}$ при альтернативе H_0 : $\bar{x} > c$;
2) если $t < U_{1-\alpha}$ при альтернативе H_0 : $\bar{x} < c$;
3) если $|t| > U_{1-\alpha}$ при альтернативе H_0 : $\bar{x} \neq c$.

Здесь U_α - квантиль стандартного нормального распределения с уровнем значимости α.

Вариант 2. $H_0: \bar{x} = c$ при условии, что дисперсия генеральной совокупности σ_x^2 неизвестна. Критическая статистика t вычисляется по формуле

(14) $$t = \frac{(\bar{x} - c)\sqrt{n-1}}{S}.$$

и распределена по закону Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы. Здесь S - выборочная оценка среднеквадратического отклонения.

Правило принятия решения - гипотеза H_0 отвергается:

1) если $t > t_{(\alpha,n-1)}$ при альтернативе H_1 : $\bar{x} > c$;
2) если $t < -t_{(\alpha,n-1)}$ при альтернативе H_1 : $\bar{x} < c$;
3) если $|t| < t_{(-0,5\alpha;n-1)}$ при альтернативе H_1 : $\bar{x} \neq c$.

Здесь $t_{(\alpha,n-1)}$ - 100 %- ная точка распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

Пример 5 . В целях оценки воздействия окружающей среды на здоровье населения обследованы два административных района. Эти показатели указаны в таблице.

Первый район		Второй район	
Населённый пункт	Заболеваемость x_i	Населённый пункт	Заболеваемость x_i
1	206	1	215
2	210	2	212
3	212	3	214
4	216	4	225
5	184	5	230
6	165	6	207
7	195	7	256
8	201	8	236
		9	302
		10	220
		11	214
		12	198

В первом районе с низким уровнем техногенной нагрузки проверено **восемь** крупных населённых пунктов, во втором - **двенадцать** населённых пунктов, имеющем химические и металлургические предприятия. По данным обследования населённых пунктов следует определить по уровню значимости критерия $\alpha = 0{,}05$ существенность различий этих районов по уровню заболеваемости населения злокачественными новообразованиями (X - количество заболеваний на 100 000 человек населения).

Сформулируем статистическую гипотезу. Факт влияния окружающей среды может быть доказан отклонением гипотезы о равенстве математических ожиданий двух выборок $H_0: \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

Решение.

1. Определим оценки математических ожиданий и дисперсий по обеим выборкам
$$\bar{x}_1 = 198{,}6; \qquad \bar{x}_2 = 225{,}2; \quad S_1^2 = 336{,}9; \quad S_2^2 = 777{,}7.$$
2. По формуле (13) найдём среднюю дисперсию выборочных данных и СКО:
$$\bar{S}^2 = \frac{1}{8+12-2} \left(8 \cdot 336{,}9 + 12 \cdot 777{,}7\right) = 668{,}8; \quad \bar{S} = 25{,}8.$$
3. Рассчитываем наблюдаемое значение критерия Стьюдента (11):
$$t = \frac{(198{,}6 - 225{,})}{25{,}8 \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{12}}} = -2{,}47.$$
4. При проверке $H_0: \ \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ по таблице t- распределения определим критическое значение $t_{(0{,}25;18)} = 2{,}45$.

Поскольку наблюдаемое значение критерия превосходит критическое, то гипотезу H_0 следует опровергнуть. Следовательно, данные наблюдений действительно подтверждают факт наличия влияния окружающей среды на здоровья населения.

Пример 6. Для предприятий, торгующих продуктами питания, установлены показатели эффективности их деятельности: уровень рентабельности товарооборота равна 20 % , средняя оборачиваемость товарных запасов, составляет 12 дней. Более низкие показатели означают снижение эффективности конкурентоспособности предприятия. В целях оперативного контроля результатов коммерческой деятельности в одной из торговых фирм проведён анализ эффективности торговых операций за последние 10 месяцев и получены данные, указанные в таблице:

месяц	Рентабельность, %	Продолжительность товарооборота $T_{\partial н}$
1	14	19
2	12	15
3	16	19
4	14	1
5	15	24
6	18	12
7	22	10
8	20	15
9	13	18
10	9	20

Сформулируем статистическую гипотезу относительно значения показателя рентабельности. Эффективность коммерческой деятельности будет удовлетворительной, если уровень рентабельности будет соответствовать нормативному показателю, т.е. при справедливости гипотезы: H_0 : «$\overline{R}-$ среднее арифметическое показателей продолжительность товарооборота ($T_{\partial н}$) равна 20» , т.е. $\overline{R} = (0{,}1)\cdot\sum_{j=1}^{10} T_{\partial н} = 20$.

Поскольку нарушение эффективности коммерческой деятельности произойдёт только в случае снижения показателя рентабельности относительного нормативного, примем в качестве альтернативной гипотезы $H_1 : \overline{R} < 20$.

Решение.

1. Определим среднее значение рентабельности по третьему столбцу:

$$\overline{R} = (0{,}1)\cdot\sum_{j=1}^{10} T_{\partial н} = \frac{153}{10} = 15{,}3;$$

2. По формуле (11) найдём значение критерия Стьюдента:

$$t = \frac{(15{,}3 - 20{,}0)\cdot\sqrt{9}}{3{,}86} = -3{,}65.$$

3. Найдём критическое значение критерия по таблице $t-$распределения Стьюдента: $t_{(0{,}05;9)} = 1{,}83$. Наблюдаемое значение $t < t_{(0{,}05;9)}$, (т.е. $-3{,}65 < 1{,}83$), следовательно, гипотеза H_0 должна быть опровергнута, что свидетельствует о нарушении эффективности торговых операций в анализируемом периоде.

8.2. Критерий Фишера (F – критерий)

$F-$критерий однородности дисперсий предназначен для проверки гипотезы однородности дисперсий H_0: $S_1^2 = S_2^2$ в двух нормально распределённых совокупностях. Он основан на использовании статистики

$$F_n = \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\left(\frac{n_1}{n_1 - 1}\right)\cdot\left(\frac{n_2 - 1}{n_2}\right), \qquad (15)$$

которая в условиях справедливости гипотезы H_0 должна подчиняться $F-$распределению Фишера с числами степеней свободы соответственно $(n_1 - 1)$ и $(n_2 - 1)$. В целях удобства пользования статистических таблиц в числителе формулы (15) обычно подставляют большую дисперсию. При заданном уровне значимости критерия α определяют табличные значения в виде: $F_{1-0{,}5\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ и $F_{0{,}5\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$. Если окажется, что

$$(16) \qquad F_{1-0,5\alpha}(n_1-1, n_2-1) \le F_n \le F_{0,5\alpha}(n_1-1, n_2-1),$$

то гипотеза об однородности дисперсий принимается (и опровергается во всех других случаях)

Частным случаем является проверка гипотезы о значении дисперсии нормальной совокупности. Предположим, что по случайной выборке $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, взятой из нормальной генеральной совокупности, получена оценка дисперсии S^2. Требуется проверить гипотезу о $H_0 : S^2 = \sigma_0^2$, где σ_0^2 есть некоторое конкретное числовое значение, исследуемой данной задачей. При проверке этой гипотезы используют *критическую статистику*

$$(17) \qquad F_h = \frac{n \cdot S^2}{\sigma_0^2},$$

которая в соответствии с теорией Фишера в условиях справедливости H_0 распределена по закону χ^2 с $(n-1)$ степенью свободы.

Принято следующее ***правило принятия решения*:** гипотезу H_0 опровергают (с вероятностью ошибки α), в следующих случаях:

1) $F_h > \chi^2_{\alpha(n-1)}$ при альтернативе $H_1 : S^2 > \sigma_0^2$;
2) при альтернативе $H_1 : S^2 < \sigma_0^2$;
3) $\chi^2_{0,5\alpha\cdot(n-1)} < F_h < \chi^2_{1-0,5\alpha\cdot(n-1)}$ при альтернативе $H_1 : S^2 \ne \sigma_0^2$.

Пример 7. Пусть в условиях примера 5, предварительный анализ законов распределения числа заболеваний в административных районах показал, что данные и в том и в другом случае Достаточно хорошо описываются *нормальной моделью* (т.е. достаточно хорошо соответствуют нормальному закону распределения). Нужно принять решение.

Решение. В решении поставленной задачи, перед тем как использовать $t-$критерий Стьюдента, необходимо убедиться в однородности дисперсии выборок, т.е. проверить гипотезу

$$H_0: \ S_1^2 = S_2^2.$$

С этой целью воспользуемся $F-$критерием. В рассматриваемом примере его значение оказывается равным 2,31 (дисперсии первой и второй выборки сосчитывались при решении примера 5 по таблице и были соответственно равны 336,9 и 777,7). Далее из таблиц $F-$ распределения находим критическую точку для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$; $F_{0,05}(7{,}11) = 3{,}01$.

Поскольку найденное (рассчитанное) значение критерия меньше чем критического, т.е. $2{,}31 < 3{,}01$, то имеется реальное основание принять, допущение о равенстве дисперсий в данных анализируемых выборочных совокупностях.

9. Построение статистических регрессионных моделей

9.1. Основные положения

Многофакторный регрессионный анализ служит для отыскания количественной зависимости между результирующим показателем (откликом) Y и независимыми факторами, (переменными) $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ которые оказывают влияние на Y. Требуется установить зависимость отклика Y от факторов x_j, число которых равно n, т.е. от X. Другими словами, имеется функциональная зависимость: $y = f\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ между откликами и факторами.

Значения отклика и фактора определяются в ходе пассивного или активного эксперимента над объектом. Количество факторов должно быть заранее установлено, т.е.

значения $x_1, x_2, \cdots, x_n$ известны. Явный вид функции связи факторов и откликов заранее неизвестен и должен быть установлен в ходе анализа. Кроме того, задача анализа состоит в определении численных параметров, входящих в эту функцию. Необходимо учитывать, что кроме установленных факторов на отклик *y* влияют и случайные величины, значения которых в ходе эксперимента не определяются.

Таким образом, можно говорить о математическом ожидании отклика *y,* который связан с факторами $x_1, x_2,..., x_k$ уравнением регрессии

$$M(y) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n + b_{12} x_1 x_2 + \\ + b_{13} x_1 x_3 + ... + b_1 x_1^2 + ... + b_n b_n^2 + ... \quad (18)$$

Описательные возможности линейного уравнения регрессии достаточно низки, поэтому для повышения адекватности модели в нее добавляют нелинейные зависимости. Например, парное взаимодействие факторов. Кроме того, нелинейные члены уравнения можно записать в виде квадратов, кубов и т.д.

В общем виде уравнение можно представить следующим образом:

$$M(y) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i,\, j=1\, (i \neq j)}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\, x_i^2 + ... \quad (19)$$

Следует учитывать, что по конечной выборке в результате полученной наблюдений, мы имеем не сами коэффициенты, а их *оценки (приближённые значения).* В результате подстановки их в уравнение регрессии будет получена оценка математического ожидания. Ее запись аналогична записи предыдущего уравнения.

Пусть имеется N результатов наблюдений над величиной *y,* зависящей от n факторов, причем степень полинома равна m. Тогда число коэффициентов регрессии равно числу C_{n+m}^{m}, где оно определяется неравенством

$$C_{n+m}^{m} = \frac{(n+m)!}{m! \cdot n!} < N .$$

Для получения возможности вычисления этих коэффициентов необходимо, чтобы количество опытов превышало C_{n+m}^{m}.

Для проведения регрессионного анализа следует соблюдать следующие условия:

- случайная величина *y* должна иметь нормальное распределение;
- независимые переменные фактора *X* должны измеряться с погрешностью, пренебрежимо малой по сравнению с дисперсией случайной величины *y.*

Уравнение регрессии можно упростить, если ввести следующие обозначения:

1) $x_0 = 1 -$ фиктивная переменная при свободном члене;

2) произведения двух переменных можно заменить, обозначив их следующим образом:

$$x_1^2 = x_{n+1};\ x_2^2 = x_{n+2};...;\ x_n^2 = x_{2n};\\ x_1 x_2 = x_{2n+1};\ x_1 x_3 = x_{2n+2};\ x_2 x_3 = x_{2n+3};\dots \quad (19)$$

x_S — конечное значение, соответствующее общему количеству переменных, включенных в уравнение регрессии.

Его максимальное значение определяется следующим образом:

$$S = 2n + C_n^2 = 2n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Таким образом, оценка математического ожидания наблюдаемой величины определяется формулой

(20) $$\tilde{y}=\sum_{j=1}^{S}\overline{b}_j x_j .$$

Здесь $\overline{b}_j$ – оценка коэффициента.

9.2. Матричный метод построения уравнения регрессии

Используем метод наименьших квадратов для определения коэффициентов регрессии по результатам наблюдений. Составим следующую систему линейных уравнений:

(21) $$\begin{cases} b_0 x_{01}+b_1 x_{11}+b_2 x_{21}+\ldots+b_{\mathrm{i}} x_{\mathrm{i}1}+\ldots+b_{\mathrm{n}} x_{\mathrm{n}1}+\varepsilon_1=y_1, \\ b_0 x_{02}+b_1 x_{12}+b_2 x_{22}+\ldots+b_{\mathrm{i}} x_{\mathrm{i}2}+\ldots+b_{\mathrm{n}} x_{\mathrm{n}2}+\varepsilon_2=y_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ b_0 x_{0\mathrm{m}}+b_1 x_{1\mathrm{m}}+b_2 x_{2m}+\ldots+b_{\mathrm{i}} x_{im}+\ldots+b_{\mathrm{n}} x_{\mathrm{nm}}+\varepsilon_m=y_{\mathrm{m}}, \end{cases}$$

Значения результатов первого опыта имеют индекс 1, второго индекс 2, n-го опыта имеют индекс n.

Результаты этих наблюдений можно записать в матричной форме, где X - матрица значений независимых переменных.

(22) $$X=\begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & \ldots & x_{n1} \\ x_{02} & x_{12} & \ldots & x_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{0m} & x_{1m} & \ldots & x_{nm} \end{pmatrix}=\left(x_{ij}\right)_{(m+1)\times n}$$

Коэффициенты регрессии можно представить в виде n-мерного вектора B^{T}, а наблюдаемые значения переменной величины в виде соответствующего вектора Y^{T}:

(23) $$B^T=(b_0,b_1,b_2,\cdots,b_n)^T; \quad Y^T=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T ,$$

где вектора B^{T} и Y^{T} являются транспонированными векторами к векторам столбцов B и Y. Тогда систему можно записать в матричном виде:

(24) $$X\cdot B=Y.$$

Для нахождения оценок по методу наименьших квадратов необходимо выяснить, при каких значениях коэффициентов B достигается минимум выражения

(25) $$\Sigma\,[Y\text{-}\,XB]^2\to\min$$

Вычисляя частные производные выражения (25) по каждому b_j, и приравнивая их к нулю получим, систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов b_j:

(26) $$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N}[y_i-b_0\cdot b_1(x_{1i}-\overline{x}_1)-\ldots-b_n\cdot(x_{ni}-\overline{x}_n)]=0,) \\ \sum\limits_{i-1}^{N}(x_{1i}-\overline{x}_1)[y_i-b_0\cdot b_1(x_{1i}-\overline{x}_1)-\ldots-b_n\cdot(x_{ni}-\overline{x}_n)]=0, \\ \ldots \quad \cdots \quad \ldots \quad \cdots \quad \ldots \quad \cdots \quad \ldots \quad \cdots \quad \ldots \quad \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{N}(x_{ni}-\overline{x}_n)[y_i-b_0\cdot b_1(x_{1i}-\overline{x}_1)-\ldots-b_n(x_{ni}-\overline{x}_n)]=0 \end{cases}$$

Решением этой системы однородных линейных уравнений и будут оценки искомых коэффициентов b_i.

Представив результаты наблюдения в матричной форме в соответствии с формулами ((22)—(23)), можно осуществить решение системы линейных уравнений (26), вычислив произведение (24) в определенной последовательности.

Обе части уравнения (24) умножим на транспонированную матрицу X^T:

(27) $$X^T XB=X^T\mathrm{Y}.$$

Если в матрице $X = (x_{ij})$ переставлены местами строки и столбцы, то полученная матрица $(x_{ji}) = X^T$ называется транспонированной к X ней.

Обозначим матрицей $C = X^T X = (c_{\text{ij}})$, c_{ij} – элементы матрицы C.

В соответствии с алгоритмом нахождения обратных матриц (см. например [11]) вычислив определитель этой матрицы и алгебраических дополнений, находим обратную матрицу:

$$(*) \qquad \mathrm{C}^{-1} = \frac{1}{\Delta}(C_{ij})^{\mathrm{T}}.$$

Здесь C_{ij} — алгебраические дополнения элементов c_{ij}, $\Delta = \det(C) = |C| -$ определитель матрицы C и этот определитель должен быть отлично от нуля. (Проверьте!)

Окончательно расчетное выражение для вычисления коэффициентов регрессии имеет вид:

$$(28) \qquad B = C^{-1} X^T Y .$$

После определения коэффициентов регрессии необходимо установить правильность выбора регрессионной модели, т.е. проверить адекватность полученного уравнения регрессии. Такая проверка позволяет установить правомерность ограничения полинома регрессии выбранной степенью m. Например, сначала необходимо использовать линейное уравнение регрессии, затем уравнение 2-й степени и т.д.

Проверка адекватности осуществляется путем сопоставления расчетного значения критерия Фишера с критическим расчётным значением. Для этого, прежде всего, определяется дисперсия адекватности:

$$(29) \qquad S^2_{\text{ad}} = \frac{1}{N\text{-}n} \cdot \sum_{\text{j}=1}^{N} (\tilde{y}_j - y_j)^2 \ .$$

Здесь $\tilde{y}_j$ — расчетное значение отклика y; y_j — наблюдаемое в ходе эксперимента значение отклика; n – количество коэффициентов, включенных в уравнение регрессии; соответствует числу степеней свободы.

Следующим этапом проверки адекватности является сопоставление дисперсии адекватности с дисперсией эксперимента:

$$(30) \qquad S^2_{\text{y}} = \frac{1}{n\text{-}1} \sum_{\text{j}=1}^{\text{n}} (\mathrm{y}_{\text{j}} - \bar{\mathrm{y}})^2.$$

Здесь $\bar{y}$ — оценка математического ожидания наблюдений *y*.

Расчетный критерий Фишера вычисляется по следующей формуле:

$$(31) \qquad \mathrm{F}_{\text{наб}} = \frac{\mathrm{S}^2_{\text{ad}}}{\mathrm{S}^2_{\text{y}}}.$$

Наблюдаемое значение сопоставляется с критическим значением для выбранного уровня значимости q и соответствующих степеней свободы, выразятся как $\nu_1 = (N - n) -$ число степеней свободы для числителя, а для знаменателя как $\nu_2 = N - 1 : \mathrm{F}_Q$, где $Q = \{q, \nu_1, \nu_2\}$.

Если наблюдаемое значение меньше критического, то модель можно признать адекватной. Иначе необходимо увеличить степень полинома регрессии, *введя дополнительный член уравнения.* Кроме того, следует учесть, что оценки коэффициентов регрессии будут приближаться к истинным значениям *по мере увеличения числа опытов*. Поэтому в некоторых случаях за счет увеличения числа опытов можно достигнуть адекватности модели.

Рассмотрим следующий пример, который достаточно хорошо иллюстрирует матричный метод построения уравнения регрессии.

Пример 8.

Количество выпускаемой продукции y зависит от двух факторов: x_1 – количества бригад, занятых выпуском продукции, и x_2 – прибыли от реализации продукции (млн уч.ед.).

Требуется определить функцию зависимости $y = f(x_1, x_2)$ по результатам наблюдений, приведенных в таблице, и проверить адекватность полученной модели.

Исходные данные к примеру 8

Наблюдения	x_0 (фиктивная переменная)	x_1	x_2	y
1	1	1	2	4
2	1	3	3	3
3	1	2	4	3
4	1	1	3	2

Решение. Искомое уравнение будет иметь вид:

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

В начале при заданных условиях находим величин b_0, b_1, b_2.

Запишем исходные данные в виде матриц:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу C. Используя правило умножения матриц, получим

$$C = X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 \\ 7 & 15 & 22 \\ 12 & 22 & 38 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель $\Delta = \det C = |C|$ по известному правилу из курса линейной алгебры [11]

$$\Delta = 4(15 \cdot 38 - 22 \cdot 22) - 7(7 \cdot 38 - 12 \cdot 22) + 12((7 \cdot 22 - 15 \cdot 12) = 18 \neq 0$$

По формуле $(*)$ определим обратную матрицу. Для этой цели нужно находить алгебраические дополнения C_{ij} элементов c_{ij} матрицы C по известному правилу (см. например, [11]). Например, $C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 15 & 22 \\ 22 & 38 \end{vmatrix} = 570 - 484 = 86$, аналогично находятся остальные C_{ij}.

Таким образом, получим

$$\mathrm{C}^{-1} = \frac{1}{\Delta}(C_{ij})^T = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 86 & -2 & -26 \\ -2 & 8 & -4 \\ -26 & -4 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}778 & -0{,}111 & -1{,}444 \\ -0{,}111 & 0{,}444 & 0{,}333 \\ -1{,}444 & -0{,}222 & 0{,}611 \end{pmatrix};$$

Отсюда после умножения матриц $C^{-1}X^T$ будем иметь

$$C^{-1}X^T = \begin{pmatrix} 1{,}779 & 0{,}113 & -1{,}222 & 0{,}335 \\ -0{,}111 & 0{,}555 & -0{,}111 & -0{,}333 \\ -0{,}444 & -0{,}227 & 0{,}556 & 0{,}167 \end{pmatrix}.$$

Умножая, справа на матрицу Y получим явный вид матрицы коэффициентов B (см. равенство (28))

$$B = C^{-1}X^TY = \begin{pmatrix} 4{,}465 \\ 0{,}222 \\ -0{,}605 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем математическую модель задачи

$$\tilde{y} = 4{,}465\,x_0 + 0{,}222\,x_1 + (-605)\,x_2.$$

Теперь найдём координаты вектора $\tilde{Y}$ для чего воспользуемся данными для $\{x_0, x_1, x_2\}$.

$\tilde{y}_1 = 4{,}465\cdot 1 + 0{,}222\cdot 1 - 0{,}605\cdot 2 = 3{,}477; \tilde{y}_2 = 4{,}465\cdot 1 + 0{,}222\cdot 3 - 0{,}605\cdot 3 = 3{,}316;$

$\tilde{y}_3 = 4{,}465\cdot 1 + 0{,}222\cdot 2 - 0{,}605\cdot 4 = 2{,}486; \tilde{y}_4 = 4{,}465\cdot 1 + 0{,}222\cdot 1 - 0{,}605\cdot 3 = 2{,}872;$

Следовательно, значения $\tilde{y}$, полученные по модели,

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 3{,}477 \\ 3{,}316 \\ 2{,}486 \\ 2{,}872 \end{pmatrix}$$

Дисперсия адекватности (29) будет иметь вид:

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{4\text{-}3}\sum_{\mathrm{j}=1}^{4}(\tilde{y}_j - y_j)^2 = 1{,}395.$$

Дисперсия адекватности (30):

$$S_y^2 = \frac{1}{4\text{-}1}\sum_{j=1}^{4}(y_j - \bar{y}_j)^2 = 0{,}667\,,$$

где
$$\bar{y} = \frac{4+3+3+2}{4} = 3.$$

Расчетный критерий Фишера вычисляется по формуле:

$$\mathrm{F}_{\text{наб}} = \frac{\mathrm{S}_{\mathrm{ad}}^2}{\mathrm{S}_{\mathrm{y}}^2} = \frac{1{,}395}{0{,}667} = 2{,}091.$$

Критическое значение для $q = 0{,}5;\ \nu_1 = 1;\ \nu_2 = 3$ по таблице Фишера имеем

$$\mathrm{F}_{\mathrm{q}=0,05,\nu_1=1,\nu_2=3} = 10{,}13.$$

Так как $F_{наб} < F_{кр}$, то гипотеза об адекватности модели принимается.

Задание. В условиях примера 8 определите функцию зависимости $y = f(x_1, x_2)$ по результатам наблюдений, приведённым в следующей таблице, и проверьте адекватность полученной модели.

Исходные данные к заданию

Наблюдения	x_0 (фиктивная переменная)	x_1	x_2	y
1	1	1	2	4
2	1	3	3	3
3	1	2	4	3
4	1	2	3	1

В завершении данной тематики следует напомнить, что «Метод наименьших квадратов» ранее нами было использована в Теме19, пункт 2, Матричный метод построения уравнение регрессии по результатам наблюдений и процесс оптимизации сравнительно прост и в целом базируется на элементах курса линейной алгебры.

Далее кратко остановимся ещё на один метод построение регрессионной модели методом шаговой регрессии, в основе которого лежит метод наименьших квадратов.

9.3.Построение регрессивной модели методом шаговой регрессии.

Для обработки пассивного эксперимента (т.е. в ходе эксперимента экспериментатор не вмешивается активно в исследуемый процесс и обрабатывает полученные результаты шаг за шагом) часто применяются так называемый «***метод шаговой регрессии***» в основе которого лежит метод наименьших квадратов.

Суть метода заключается в следующем:

- в процессе пассивного эксперимента проведено N измерений n независимых переменных (факторов) и зависимой переменной y.

- по полученной выборке требуется построить функциональное уравнение регрессии вида:

(32) $$\tilde{y} = b_0 + \sum_{j=1}^{L} b_j F_j(x),$$

где L – число включённых в уравнение функций; $F_j(x)$ – система функций; x – вектор независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Чтобы построить уравнение регрессии, мы должны выбрать систему функций $F(x)$. Например, для $L = 5$ и $n = 2$ образующий полином будет иметь вид:

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2.$$

Задача заключается в том, что нужно выбрать те функции, которые будучи включенными, в уравнении регрессии, давали бы адекватное описание исследуемого объекта. В качестве характеристики адекватности объекта используется остаточная сумма квадратов.

(33) $$S_l^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \tilde{y}_j)^2,$$

где $\tilde{y}_j$ – значение y, найденное по модели; n – общее число наблюдений.

Для построения модели на каждом l – м шаге поочерёдно включается или исключается переменная x_j из общего множества факторов (переменных) в формуле

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^2, \cdots, x_1 x_2, \cdots)$$

и вычисляется остаточная сумма квадратов (33).

При включении на l – м шаге новой переменной остаточная сумма квадратов уменьшится на величину

(34) $$\Delta S_{l(+1)}^2 = S_l^2 - S_{l(+1)}^2; \; j = 1, 2, \cdots, k.$$

При исключении на шаге l новой переменной остаточная сумма квадратов увеличивается на величину

(34) $$\Delta S_{l(-1)}^2 = S_{l(-j)}^2 - S_l^2; \; j = 1, 2, \cdots, k..$$

Принятие решения о включении j – й функции в уравнение связано с выполнением условия

(35) $$F_{+j} = \frac{\Delta S_{l(+j)}}{S_{l(+j)}^2 \cdot (n - d_l - 2)} > F_Q; \quad Q = \{q, \nu_1, \nu_2\};$$

где d_l – число коэффициентов уравнения на l – м шаге.

При исключении j – й функции из уравнения проверяется условие

$$F_{-j} = \frac{\Delta S_{l(-j)}}{S^2_{l(-j)} \cdot (n - d_l - 2)} < F_Q; \quad Q = \{q, \nu_1, \nu_2\}; \tag{36}$$

где в формулах (35) и (36) величина F_Q – определяется таблицей критические точки распределения Фишера.

Если неравенства выполняется, то j – я соответственно функция включается или исключается. Процедура построения заканчивается, когда получено уравнение, в которое нельзя добавить x_j из предложенного множества $F(x)$ или из которого нельзя исключить ранее введённые переменных x_j. По модели может быть рассчитана средняя ошибка прогноза.

Следовательно, задача обработка результатов пассивного эксперимента методом шаговой регрессии сводится к следующему процессу:

- определению системы функций $F(x)$;
- сбору необходимых наблюдений;
- построению модели шаговой регрессии.

Ввиду значительной сложности численных расчётов для иллюстрации примера построения модели методом шаговой регрессии в дополнение 3 предлагается пакетом программы для статистической обработки данных в компьютере STATISTIC (пример5).

ДОПОЛНЕНИЕ 1

ГЛАВА VI

Прикладные вероятностные теории

<u>Тема 21</u>. Основы теории информации

Теория вероятностей, определившая как математический аппарат описания объектов и явлений, положила основу (стала фундаментом) целого ряда теорий, получивших весьма распространённый прикладной характер. Многие из этих теорий определили, в свою очередь, математические основы современных информационных технологий.

Среды этих теорий, важнейшее место занимает теория информации, в основе которой лежат труды К. Шеннона, где он интерпретирует ***количественную меру информации*** через вероятностной меры.

Характерно то, что первичным (изначальным) понятием или категорией, этой теории является *неопределённость*, а в качестве меры применяется понятие ***«энтропия».***

1. Энтропия как мера неопределённости

Неопределённость любого события определяется вероятностью его наступления (появления), неопределённость случайной величины определяется численной характеристикой функции плотности вероятностей, например, с помощью второго центрального момента или, дисперсией. Однако для случайных объектов или явлений, у которых состояния качественно различаются, в то время количественная характеристика не различаются, использование дисперсии представляется невозможным. В общем случае мера неопределённости, связанная с распределением вероятности, должна быть некоторой его числовой характеристикой, не зависящеё от того, в какой шкале измеряются реализации случайного объекта или явления. В качестве такой меры К. Шеннон предложил использовать ***энтропию*** H для случайного объекта

(или явления) α :

(1) $$H(\alpha) = H(p_1, p_2, \cdots, p_n) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \log p_j ,$$

где $p_{1,} p_2, \cdots, p_n$ – вероятности случайных событий $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, характеризующих возможные состояния случайного объекта или события. При этом выполняется «контроль»

(2) $$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1;$$

и

(3) $$\lim_{p\to 0}(-p\log p)=0,\ \lim_{p\to 1}(-p\log p)=0,$$

Из условий (2) и (3) следует, что неопределённость отсутствует в том и только в том случае, когда одно из p_j равно единице. Максимальная неопределённость достигается в случаях, когда все p_j равны между собой, т.е. все $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1/n$.

Примерами таких распределений: подбрасывание игральной косточки (шестигранный кубик) дискретный случай или любые равновозможные события; равномерное распределение в непрерывном случае, где функция плотности имеет постоянное значение. В то время для равносильного (например, равновероятного), распределения неопределённость возрастает с возрастанием количество выборки n.

Такая ситуация означает, что энтропия (1) является как <u>*мерой неопределённости*</u>, так и <u>*мерой разнообразия.*</u> Это означает, что чем *сложнее, и разнообразнее объект или явление*, тем с большей неопределённостью объект становится (обладает свойством) «*менее прогнозируемым*».

В случае, когда случайный объект α представляется как континиум, например, для случайной величины X, принимающей «*бесконечное несчётное*» множество значений, где $x \in X$, энтропия вычисляется по формуле

(4) $$H(\alpha) = H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\cdot \log p(x)dx;$$

при условии выполнении контроля: $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$

Следует заметить, что в формулах (1) и (4) основание логарифма не оказывает качественного влияния на оценку энтропии, а лишь определяет её размерность. При теоретическом анализе непрерывных случайных величин с использованием (включающем) дифференциального или интегрального исчисления, наиболее удобно использовать натуральные логарифмы (т.е. логарифмы с основанием $e \approx 2{,}71828182845$), при этом энтропия определяется в натуральных единицах измерения, называемыми «***Нити*** или ***Хартли***».

Число “ e ” было введено в 1736 году Леонардом Эйлером как предел числовой последовательности

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n;\ n = 1,2,3,4,\cdots$$

Вот несколько начальные значения этой последовательности:

$a_1 = 2;\ a_2 = 2{,}25;\ a_3 = 64/27 = 2{,}370370\cdots;\ a_4 = 625/256 = 2{,}4414062\cdots.$

В теории пределов показывается, что числовая последовательность a_n по мере возрастания n, монотонно возрастает и ограничена сверху числом **3**. *Поэтому имеет предел. Этот предел и обозначается числом*

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n,$$

Далее, на основании теории степенных рядов было доказано, следующая замечательная формула:

(*) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

справедливая, на всей числовой прямой $x \in (-\infty,+\infty)$, где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n.$ В частности, для $x = 1$ получаем равенство:

(**) $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Задание. *По формуле (**) вычислите число e и по формуле (*) вычислите $\sqrt{e}$ и e^{-1} с точностью до десяти знаков.*

При анализе цифровых машин и других подобных устройств, работающих в двоичном коде (т.е. в двоичной системе счисления), как правило, используются двоичные логарифмы (логарифмы с основанием 2) и соответственно *двоичные единицы* – ***биты.*** При анализе измерительных устройств, работающих в десятичной системе счисления (десятичном коде), удобнее применять десятичные логарифмы и *десятичные единицы* – ***диты.*** Между этими единицами измерений существуют следующие связи:

1 дит = 2,3 нит = 3,3 бит;

1 нит = 1,45 бит = 0,43 дит;

1 бит = 0,69 нит = 03 дит;

Разумеется, указанная ситуация в полной мере относится к единице измерения количества информации.

Рассмотрим примеры: такой объект как игра в орлянку (подбрасывание монеты), Для такого объекта характерны два равновероятных случайных результата: выпадение *решётки* или *орла*. Энтропия этого явления вычисляется по формуле

$$H(M) = -0{,}5 \cdot \log_2(0{,}5) - 0{,}5 \cdot \log_2(1-0{,}5) = -\log_2(0{,}5) = \log_2 2 = 1 \text{ бит}.$$

Другой пример: в урне имеются одни белые шары. Случайно извлекается один шар. Вероятность извлечения цветного шара равна 0, а белого шара равна 1.Энтропия этого явления равна

$$H(Ш) = -1 \cdot \log_2 1 - 0 \cdot \log_2 0 = 0$$

В этих двух примерах $n = 2$, при этом, (непредсказуемость) исхода в первом случае максимальна, а во втором случае неопределённость исхода отсутствует.

При увеличении числа n, например, $n = 6$, при подбрасывание шестигранного кубика, с учётом равновероятного распределения возможных состояний имеем

$$H(K) = -\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} \log_2 \frac{1}{6} \approx 2{,}58 \text{ бит}$$

Для задачи «бутерброда» также возможны два состояния: хлеб и масло. На основании известного в народе «*закона*» о том, что бутерброд всегда падает маслом вниз, имеем

$$H(Б) = -1 \cdot \log_2 1 - 0 \cdot \log_2 0 = 0$$

Для двух и более случайных объектов или явлений энтропия определяется аналогично как определение вероятности, т.е. с увеличением числа n энтропия возрастает.

Если α и β – независимые случайные объекты или явления, то для их суммы (совместного определения) имеет место равенство

(5) $$H(\alpha \cup \beta) = H(\alpha) + H(\beta),$$

т.е. *энтропия двух или нескольких независимых объектов или явлений равна сумме энтропий этих объектов или явлений. Это свойство называется свойством аддитивности энтропии.*

Если α и β – зависимые случайные объекты или явления, то для их суммы (совместного определения) имеет место равенство

(6) $$H(\alpha \cup \beta) = H(\alpha) + H(\beta/\alpha) = H(\beta) + H(\alpha/\beta),$$

где $H(\beta/\alpha)$ или $H(\alpha/\beta)$ определяется как «математическое ожидание энтропии» условного распределения.

Для всех случайных объектов или явлений имеет место неравенство $H(\alpha) \geq H(\alpha/\beta)$, это неравенство согласуется с интуитивным представлением о том, что знание (информация) о состояние β может только уменьшить неопределённость α, а если они независимы, т.е. $H(\alpha/\beta) = H\{\alpha)$, то энтропия останется неизменной.

Пример 1. Неопределённость даты проведения ежегодного мероприятия можно определить двумя способами:

1) $$H(\alpha) = \sum_{j=1}^{365} p_j \log p_j = -\frac{1}{365}\sum_{j=1}^{365} \log \frac{1}{365} = 8{,}54 \text{ бит},$$

где 365 – число дней в году, а для високосного года вместо 365 пишут 366;

2) $$H(\alpha) = H(\beta \cup \gamma) = \sum_{j=1}^{12} p'_j \log p'_j + \sum_{k=1}^{30} p''_k \log p''_k = -$$

$$= -\sum_{j=1}^{12} \frac{1}{12} \log \frac{1}{12} - \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{30} \log \frac{1}{30} = 3{,}6 + 4{,}94 = 8{,}54 \text{ бит},$$

где 12-число месяцев в году; 30-число дней в месяце.

Пример 2. Специалист, занимающийся проблемой B, для информационного обеспечения своей интеллектуальной деятельности воспользовался автоматизированной информационно – поисковой системой (АИПС). В базе АИПС содержится 2% (два процента) статей, непосредственно относящихся к данной проблеме. Система поиска в АИПС точно обнаруживает эти статьи по запросу. В то же время ввиду некоторой близости тематики других статей к проблеме B эта система с равной вероятностью может представить или не представить специалисту статьи, не относящиеся непосредственно к проблеме B.

Определить эффект системы поиска, используя меру снятия неопределённости по отношению к проблеме B.

Решение. Формализуем представленную ситуацию. Определение отношения той или иной статьи к проблеме B представим как опыт β, имеющий два возможных исхода:

B_1 – «не относится»;

B_2 – «относится».

Определение эффективности системы поиска представим как опыт α, также имеющий два возможных исхода:

A_1 – «определён признак»;

A_2 «не определён признак».

Вероятности определения и неопределения признака B соответственно равны:

$$P(A_1) = \left(\frac{98}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{100} \cdot 1\right) = 0{,}51; \quad P(A_2) = \left(\frac{98}{100} \cdot \frac{1}{2}\right) = 0{,}49.$$

Неопределённость отношения той или иной статьи к проблеме B вычисляется по формуле

$$H(\beta) = -0{,}98 \cdot \log(0{,}98) - 0{,}02 \cdot \log(0{,}98) = 014 \text{ бит}.$$

Это есть неопределённость базы АИПС по отношению к проблеме B. В целом, с учётом эффективности работы системы поиска, то есть опыта α, определённость АИПС можно вычислить через условную энтропию $H(\alpha/\beta)$. Для этого определим:

-условные вероятности исходов B_1 и B_2 опыта β при условии исходов A_1 и A_2 опыта α :

$$P(B_1/A_1) = \frac{49}{51}; P(B_2/A_1) = \frac{2}{51}.$$

Так как из 51 случая, когда система поиска давала положительный ответ, 49 статей не относились к проблеме B, а 2 статьи - относилась

$$P(B_1/A_2) = 1; P(B_2/A_2) = 0.$$

что вполне очевидно.

-условные энтропии АИПС (при условиях A_1 и A_2):

$$H(\beta/A_1) = -\frac{49}{51} \cdot \log \frac{49}{51} - \frac{2}{51} \cdot \log \frac{2}{51} = 0{,}24 \text{ бит}.$$

Тогда, средняя условная энтропия опыта β (неопределённость АИПС) при условии существования системы поиска (опыта) будет равна математическому ожиданию энтропии условного распределения:

$$H(\alpha/\beta) = P(A_1) \cdot H(\alpha/A_1) + P(A_2) \cdot H(\beta/A_2) =$$

$$= 0{,}51 \cdot 0{,}24 + 0{,}49 \cdot 0 = 0{,}12 \text{ бит}$$

Если сравнить значение с ранее полученным значением неопределённости базы АИПС, то можно констатировать, что система поиска в данном случае недостаточно эффективна, поскольку снимает неопределённость АИПС всего на 14%.

2. Характеристика (определение) количества информации

Пусть случайный объект или явление β имеет неопределённость $H(\beta)$. Любой целенаправленный опыт α, имеющий определённое количество исходов (сообщений, результатов, измерений), уменьшает степень неопределённости β. Разность

(7) $$I(\alpha,\beta) = H(\beta) - H(\beta/\alpha).$$

где $H(\beta)$ - априорная, а $H(\beta/\alpha)$ - апостериорная энтропия (неопределённости) объекта или явления β есть *количество информации* (или *числовое значение количества информации в битах*), об объекте или явлении β полученной в результате опыта α. В этом случае $I(\alpha,\beta)$ представляется как мера *снятия неопределённости*, а процесс получения информации об объекте или явлении называется *процессом снятия неопределённости*.

Если результат (исходы) опыта α полностью определяет все сведения, которыми обладает β, то $H(\beta/\alpha)$ становится равным 0, а

(8) $$I(\alpha,\beta) = H(\beta) = I(\beta).$$

В этом случае можно считать, что получена *полная информация* об объекте или явлении β, отражающая все его свойства и являющаяся *мерой разнообразия* объектов или явлений.
Так раскрывается атрибутивная концепция информации, которая определяет информацию как *атрибут материи*.

Если $H(\beta/\alpha) = H(\beta)$, то следует, что в результате опыта α (а фактически о любой информационной деятельности) не получено никакой информации об объекте или явлении β, то есть $I(\alpha,\beta) = 0$.

Из приведённых утверждений следуют важные практические выводы, определяющие эффективность информационной деятельности.

- *информационная деятельность считается эффективной, если она приводит к снятию неопределённости (7).*

-*эффективность информационной деятельности может быть оценена количественно; предел, к которому стремится эта оценка, определяется выражением (8).*

Значение $I(\alpha,\beta)$ определяется выражением (7) как количество информации по объекту или явления β, содержащейся в опыте α, а выражение (8) - как количество информации о β, полученной объектом α. Последние выводы свидетельствуют о том, что $I(\alpha,\beta)$ есть *мера сравнения двух объектов*.

В результате сравнения объекта β с объектами α и γ получим следующее количество информации (7) $I(\alpha,\beta) = H(\beta) - H(\beta/\alpha)$ и

(9) $$I(\gamma,\beta) = H(\beta) - H(\beta/\gamma).$$

Очевидно, при $H(\alpha) \neq H(\gamma)$ будет справедливо неравенство $H(\beta/\alpha) \neq H(\beta/\alpha)$, а следовательно, $H(\alpha,\beta) \neq H(\gamma,\beta)$. Это означает, что различные субъекты (α или γ), обладающей различной энтропией или информацией, при исследовании одного и того же объекта (β) могут получить различное количество информации. Разность

(10) $$I_\beta(\alpha,\gamma) = I(\alpha,\beta) - I(\gamma,\beta) = H(\beta/\gamma) - H(\beta/\alpha),$$

можно рассматривать как меру сравнения информированности объектов (или субъектов) α и γ об объекте или явлении β. Это обстоятельство является важной предпосылкой *семантической теории информации.*

Пример 3. В качестве объекта β возьмём русскую письменную речь. В русском алфавите 32 буквы (без различия «е» и «ё»). С первого взгляда для нас как субъектов наблюдения неопределённость русской письменной речи β. В результате опыта α_1 получим данные приведёны ниже в таблице:

Буква p_i	(-) 0,175	О 0,090	Е, Ё 0,072	А 0,062	И 0,062	Т 0,053	Н 0,053	С 0,045
Буква p_i	Р 0,040	В 0,038	Л 0,035	К 0,028	М 0,026	Д 0,025	П 0,023	У 0,021
Буква p_i	Я 0,018	Ы 0,016	З 0,016	Ь, Ъ 0,014	Б 0,014	Г 0,013	Ч 0,012	Й 0,010
Буква p_i	Х 0,009	Ж 0,007	Ю 0,006	Ш 0,006	Ц 0,004	Щ 0,003	Э 0,003	Ф 0,002

Эти данные на основании большого статистического материала $(n \to \infty)$ были получены со значениями вероятностей появления отдельных букв русского алфавита и пробела (–) в текстах».

Решение. Неопределенность в случае равномерного распределения букв алфавита:

$$H(\beta) = -\sum_{i=1}^{32} p_i \log p_i = \log 32 = 5 бит.$$

Проведем опыт α_1 в целях определения истинного (а не равновероятного) распределения вероятностей появления отдельных букв в русской речи.

На основании этих данных (этой информации) получим

$$H(\beta / \alpha_1) - 0{,}175 \log 0{,}175 - 0{,}090 \log 0{,}090 - \ldots - 0{,}002 \log 0{,}002 \approx 4{,}35 бит.$$

Тогда

$$I(\alpha_1, \beta) = H(\beta) - H(\beta / \alpha_1) = 0{,}65 бит.$$

Такое количество информации содержится в таблице или получено в результате опыта α_1. Далее проведем опыт α_2, определяющий возможные связи между парами отдельных букв русского алфавита в письменной речи. В результате получим

$$H(\beta / \alpha_1, \alpha_2) = H(\alpha_1, \alpha_2) - H(\beta / \alpha_1) = -p(--)\log(--) - p(-а) - p(-б)\log p(-б) - \ldots -$$
$$p(яя)\log p(яя) + p(-)\log(-) + p(а) + \ldots + p(я)\log p(я) = 3{,}52 бит$$

Тогда

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = H(\beta / \alpha_1) - H(\beta / \alpha_1, \alpha_2) = 4{,}35 - 3{,}52 = 0{,}83 бит.$$

Такое количество информации получено в результате опыта α_2, проведенного после опыта α_1.

3. Основы теории измерений

Измерение – это алгоритм, осуществляющий сопоставление наблюдаемых признаков или величин, характеризующих реальные объекты или явления, с некоторой шкалой (измерительной шкалой), посредством которой наблюдаемым признакам или величинам присваивается определенное обозначение: число, номер или символ.

Результат измерения, возникающий в процессе отражения объекта и субъекта наблюдения, направлен на снятие неопределенности субъекта по отношению к наблюдаемому объекту или явлению. При этом на результат измерения может оказать влияние случайность (неопределенность) как объекта, так и субъекта, а также случайные помехи, возникающие в среде (или канале) измерения. Эти случайности приводят к некоторой *остаточной неопределенности.*

Остаточная (апостериорная) неопределенность, получаемая в результате измерений, называется *погрешностью измерений* и является мерой *точности* измерения.

Измерение можно представить как способ снятия неопределенности. Суть измерения в полной мере описывается выражением (9), которое определяет количество информации, полученной в результате измерений. При измерении случайной величины X количество полученной информации

(11) $$I(\alpha, X) = H(X) - H(X, \alpha),$$

где $H(X)$ - энтропия (априорная неопределенность) измеряемой величины до измерения, т.е. до опыта α; $H(X/\alpha)$ - энтропия измеряемой величины после измерения, или энтропия погрешности измерения.

Значение энтропии $H(X)$ определяется начальными значениями субъекта измерения об объекте измерения. Обычно эти знания ограничиваются возможным диапазоном измерения $\Delta X = X_B - X_H$, где X_B, X_H - соответственно верхний и нижний пределы измерения, а также равновероятным представлением о возможном появлении значений измеряемой величины в установленном диапазоне .

Это явление (вероятность появления случайной величины в установленном диапазоне), можно представить в виде следующего рисунка:

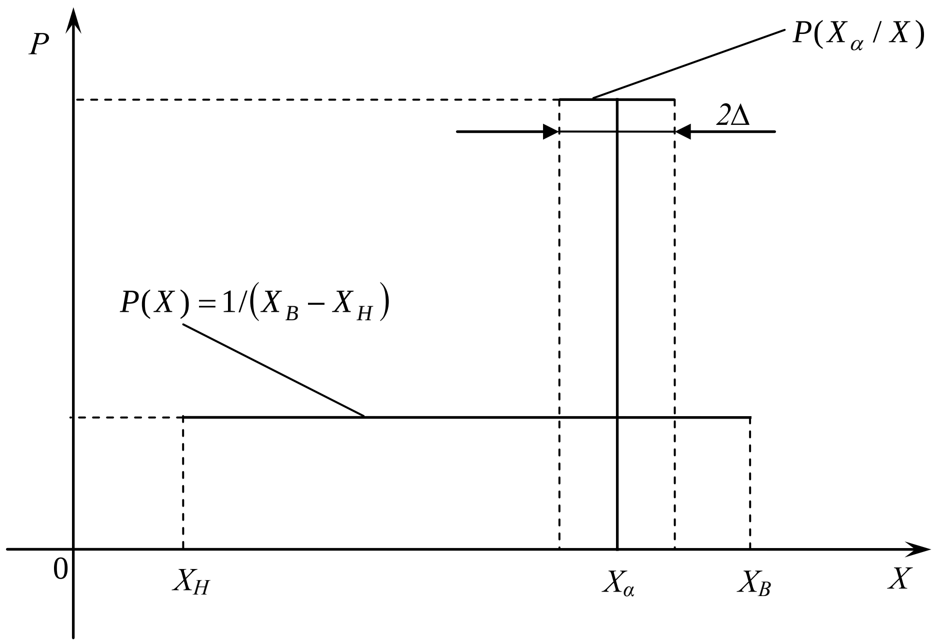


Рис.83

Вероятность появления СВ в установленном диапазоне

При этих условиях

$$P(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{X_B - X_H}, & если X_H < X < X_B; \\ 0, & если X < X_H или X > X_B; \end{cases}$$

(12) $$H(X) = -\int_{X_H}^{X_B} \frac{1}{X_B - X_H} \ln \frac{1}{X_B - X_H} dx = \ln(X_B - X_H).$$

Энтропия погрешности полученного результата измерения X_α:

$$P(X_\alpha / X) = \frac{1}{2\Delta};$$

(13) $$H(X/\alpha) = -\int_{X_\alpha-\Delta}^{X_\alpha+\Delta} \frac{1}{2\Delta} \ln \frac{1}{2\Delta} dx = \ln(2\Delta) = \ln d,$$

где Δ - абсолютная погрешность измерения, зависит как от свойств субъекта измерения, так и от дезинформационного действия помех, возникающих при измерении или, другими словами, в процессе передачи информации от объекта к субъекту измерения. Выражение (13) показывает, что в результате измерения получается не истинное значение X_α, а лишь суженный в N раз интервал *неопределенности* $d = (X_\alpha + \Delta) - (X_\alpha - \Delta) = 2\Delta$, в котором может находится число X_α с равной вероятностью.

С учетом (12) и (13) количество информации, полученное в результате опыта α,

(14) $$I(\alpha, H) = \ln(X_B - X_H) - \ln(2\Delta) = \ln \frac{X_B - X_H}{2\Delta} = \ln N,$$

где число N показывает, сколько интервалов неопределенности длиной d укладывается во всем диапазоне, т.е. какое *число различимых градаций* возможно, получить при использовании данного средства измерений.

Величина d может быть определена строго математически для *любого закона распределения погрешности.*

Так, для нормально распределенной погрешности, т.е. для плотности нормального распределения

$$P(X_\alpha) = p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

имеем

$$\ln p(x) = -\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{x^2}{2\sigma^2},$$

Следовательно, получим

(15) $$H(X/\alpha) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left(\ln \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$

$$= \ln \sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \ln \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} =$$

$$= \ln \sigma\sqrt{2\pi} + \ln\sqrt{e} = \ln\left(\sqrt{2\pi e} \cdot \sigma\right)$$

Сопоставляя равенств (15) и (13), можно получить соотношение, прямо связывающее значение d с числовой характеристикой нормального распределения σ:

(16) $$d = \sqrt{2\pi e} \cdot \sigma \approx 4{,}133\sigma.$$

Аналогичным путем интервал неопределенности может быть найден для любого выраженного аналитически закона распределения погрешности.

При измерении различных физических величин с помощью автоматических устройств (измерительных приборов) величина d определяется исходя из метрологической характеристики так называемого прибора « *класса точности* γ ». Для большинства приборов γ вычисляется по формуле:

(17) $$\gamma = \frac{\Delta_\partial \cdot 100}{(X_B - X_H)},$$

где Δ_∂ - допустимая абсолютная погрешность прибора; $(X_B - X_H)$ - диапазон измерения прибора.

На основании (14) и (17) можно принять

$$N = \frac{50}{\gamma}, \quad H(X_H / \alpha) = \ln[\gamma(X_B - X_H)/50]. \tag{18}$$

Из второй формулы (18) следует, что при измерении одной и той же величины различные средства (или субъекты) измерения позволяют получить различное количество информации, т.е. обеспечивается различная степень снятия неопределенности об объекте измерения. В случае использования двух измерительных приборов с различным классом точности и различным диапазоном измерения эта разность составит

$$\Delta H(X / \alpha', \alpha'') = \ln[\gamma'(X'_B - X'_H)/50] - \ln[\gamma''(X''_B - X''_H)/50] = \tag{19}$$

$$= \ln \gamma'(X'_B - X'_H) - \ln \gamma''(X''_B - X''_H) = \ln \frac{\gamma'(X'_B - X'_H)}{\gamma''(X''_B - X''_H)}.$$

Пример 4. Отец принес из леса корзину белых грибов. Семью заинтересовало содержимое корзины. Младший сын подразделял грибы на «большие» и «небольшие», старшая дочь – на «большие», «средние» и «маленькие». Мать взвесила каждый гриб на весах с диапазоном измерения от 0 до 1 кг и классом точности 1. Следует определить, какое количество информации получили сын, дочь и мать, если известно, что самый маленький гриб весит около 30 г, а самый большой – около 800 г.

Решение. На основании выражения (14) получим:

$$I\langle сын \rangle = \ln \frac{X_B - X_H}{(X_B - X_H)/2} = \ln 2 = 0{,}69 \ нит.$$

$$I\langle дочь \rangle = \ln \frac{X_B - X_H}{(X_B - X_H)/3} = \ln 3 = 1{,}1 \ нит.$$

На основании (14) и второй формулы (8):

$$I\langle мать(весы) \rangle = \ln \frac{X_B - X_H}{(X'_B - X'_H)/50} = \ln \frac{(80-30)50}{100-0} = \ln 38{,}5 = 3{,}65 нит.$$

Здесь $X_B - X_H$ - приблизительный (априорный) вес соответственно самого большого и самого маленького грибов; $X'_B - X'_H$ - диапазон шкалы весов.

4. Основы теории кодирования и передачи информации

4.1. Основные понятия, формирование экономичного кода алфавита

В системе передачи информации *состояние* того или иного объекта отражается в форме сообщения, представленного в виде *символов.* Независимо от содержания сообщение обычно передается в виде последовательности электрических, звуковых, световых, механических или иных *сигналов,* характеризующих символы сообщений.

Операция перевода сообщения в последовательность различных сигналов называется ***кодированием.*** *Правило, ставящее в соответствие каждому передаваемому сообщению некоторую комбинацию сигналов, называется* ***кодом***. Если все комбинации кода имеют одну и ту же длину m ($m -$ число символов или разрядов в кодовой комбинации), т.е. $m = const$, то такие коды называют ***равномерными***. В остальных случаях, $m \neq const$ коды называют ***неравномерными.*** По *основанию* системы счисления коды делятся на *двоичные* $(K = 2)$, *троичные* $(K = 3)$ и т.д. Величина K определяет число значений сигнала, характеризующих каждый символ сообщений в данной системе счисления. Например, при $m = 2$ и $K = 2$ т.е. при делении любого натурального числа на 2 рассматривают только остатки $\{0;1\}$. Из них можно составить четыре комбинации: {00}, {01}, {10}, {11}. Количество возможных комбинаций сигналов N, при заданных m и K определяется равенством:

(20) $$N = K^m.$$

При наличии числа возможных событий M код называют ***неизбыточным,*** если $M = N$. В случаях, когда $N > M$ код называют ***избыточным.*** Переход от неизбыточного кода к избыточному осуществляют путем добавления некоторых контрольных позиций.

При кодировании информации, подлежащей передаче, нужно учитывать следующее:

1) *код должен быть экономичным, т.е. среднее число сигналов, необходимых для полной индексации каждого признака из M (например, каждой буквы алфавита), должно быть минимально;*
2) *в совокупности потоке сообщения, код должен быть однозначно декодирован*; *для равномерного кода эта задача решается элементарно без какого-либо разделения, (введение разделительных сигналов снижает экономичность кода), никакое кодовое обозначение не должно совпадать с началом какого-либо другого, более длинного кодового обозначения;*
3) *код должен быть помехоустойчивым, т.е. при передаче закодированного сообщения возможные в канале передачи помехи, шумы не должны искажать суть сообщения.*

Для наиболее распространенного двоичного кода среднее число двоичных элементарных сигналов $\overline{m}$, приходящихся в закодированном сообщении на одну букву исходного сообщения, не может быть меньше H, т.е. $\overline{m} \geq H$, где

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i$$

энтропия одной буквы (всюду рассматриваются логарифмы с основанием 2). Исходя из этого. при любом методе кодирования для записи длинного сообщения из M букв требуется не меньше чем MH двоичных знаков. Это обстоятельство вытекает из условия, что $p_1 = p_2 = \ldots = p_i = \ldots = p_N = 1/N$ и все буквы независимы между собой. В этом случае $H = \log N$. Если $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_i = \ldots \neq p_N$, то $H < \log N$. Отсюда следует, что учет *статических закономерностей сообщения* позволяет построить более экономичный, нежели равномерный код.

Для построения такого экономичного кода Р. Фано и К. Шенноном предложена следующая методика (код Шеннона-Фано):

Все M букв (или иных знаков, знаковых систем) располагают в столбик в порядке убывания вероятностей их появления в сообщении.

1. Разбивают все буквы на две группы: верхнюю и нижнюю так, чтобы вероятности для букв принадлежали к каждой из этих групп, были по возможности близки одна к другой.
2. Для букв первой группы в качестве первой цифры кодового обозначения используется цифра 1, а для букв второй группы — цифра 0.
3. Каждую из двух полученных групп снова делят на две части, возможно, более близкой к суммарной вероятности.
4. Присваивают буквам вторую цифру кодового обозначения: 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит буква к первой или ко второй из этих более мелких групп.
5. Каждую из содержащих более одной буквы групп снова делят на две части возможно более близкой суммарной вероятности и т.д.
6. Процесс повторяется до тех пор, пока каждая из групп не будет содержать одну единственную букву.
7. Процесс повторяется до тех пор, пока каждая из групп не будет содержать одну единственную букву.

Пример 5.

Возьмем алфавит, состоящий из 6 букв, вероятности которых равны 0.4: 0.2; 0,2: 0.1; 0.05 и 0.05. Необходимо составить код Шеннона Фано.

Решение. Представим решение в виде таблицы.

Номер буквы	Вероятность	Разбиение на группы	Кодовое обозначение
1	0,4	I	1
2	0,2	I	01
3	0,2	I	001
4	0,1	II I	0001
5	0,05	II II I	00001
6	0,05	II II	000000

Для данного примера наилучший равномерный код состоит из трехзначных кодовых обозначений, так как в соответствии с равенством $N = K^m \Rightarrow N = 2^2 = 4;\ 4 < 6 < 2^3$.

Поэтому в нем на каждую букву приходится три элементарных сигнала.

При использовании кода Шеннона Фано среднее число элементарных сигналов, приходящихся на одну букву равна,

$$\overline{m} = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0.1 + 5 \cdot (0.05 + 0.05) = 2{,}3.$$

Это значительно меньше 3 и очень близко к предельно минимальному значению:

$$H = 0{,}4 \cdot \log 0{,}4 - 2 \cdot 0.2 \cdot \log 0{,}2 - 0.1 \cdot \log 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}05 \cdot \log 0{,}05 \approx 2{,}2$$

Таким образом, получен экономичный код.

Еще более экономичным получается код, если по методу Шеннона-Фано кодировать не отдельные буквы, а блоки букв, n - буквенные блоки.

Пример 6. Возьмем алфавит, состоящий из двух букв: A и B. имеющих вероятности $p = p(A) = 0{,}7$ и $q = P(B) = 0{,}3$. Вычислим энтропию:

$$H = -0{,}7 \cdot \log 0{,}7 \quad 0{,}3 \cdot \log 0{,}3 = 0{,}881$$

Двухбуквенный алфавит можно привести к простейшему равномерному коду: 1 - для буквы A и 0 - для буквы B, требующему для передачи каждой буквы один двоичный знак. Это на 12% больше минимально достижимого значения H. Требуется определить среднее значение длины кода в двух и трехбуквенных сообщениях.

Решение. Представим коды двух и трехбуквенных комбинаций, построенные по методу Шеннона-Фано в следующей таблице

Результаты решения к примеру 6

Комбинация букв	Вероятность	Кодовое обозначение	Комбинация букв	Вероят-ность	Кодовое обозначение
n=2			n=3		
AA	0,49	1	*AAA*	0,343	11
AB	0,21	01	*AAB*	0,147	10
BA	0,21	001	*ABA*	0,147	011
BB	0,09	000	*BAA*	0,147	010
			ABB	0,063	0010
			BAB	0,063	0011
			BBA	0,063	0001
			BBB	0,027	0000

Среднее значение длины кода для $n = 2$:

$$\overline{m}(n) = 1 \cdot 0{,}49 + 2 \cdot 0{,}21 + 3 \cdot (0{,}21 + 0{,}09) = 1{,}81$$

или на одну букву $\overline{m}(2) = 1{,}81/2 = 0{,}905$, что на 3% отличается от минимально достижимого значения H. Среднее значение длины кода для $n = 3$:

$$\overline{m}(n) = 2 \cdot (0{,}343 + 0{,}147) + 3 \cdot (0{,}147 + 0{,}147) + + 4 \cdot (3 \cdot 0{,}063 + 0{,}027) = 2.726$$

или на одну букву $\overline{m}(3) = 0{,}909$, что на 3% отличается от минимально достижимого значения H.

Представленные примеры отражают суть основной теоремы Шеннона о кодировании при отсутствии помех:

При кодировании сообщения, разбитого на n*- буквенные блоки, можно, выбрав число* n *сколь угодно большим, добиться того, чтобы среднее число двоичных элементарных сигналов, приходящихся на одну букву исходного сообщения, было сколь угодно близко к* H.

Другими словами:

Любое достаточно длинное сообщение из М букв может быть закодировано при помощи сколь угодно близкого к МН числа элементарных сигналов, если только предварительно разбить это сообщение на достаточно большие блоки из n *букв и сопоставлять отдельные кодовые обозначения сразу целым блокам.*

Самым экономичным из всех возможных является код Хафмана: *ни для какого, другого метода кодирования букв некоторого алфавита среднее число элементарных сигналов, приходящихся на одну букву, не может быть меньше того, какое поручается при кодировании, но методу Хафмана.* Построение этого кода опирается на простое преобразование, называемое *сжатием* алфавита. Суть этого метода такова.

1. Буквы $a_1, a_2, ..., a_{N-1}, a_N$ алфавита A располагают в порядке убывания вероятностей их появления: $p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_{N-1} \geq p_N$.

2. Две последние буквы принимают за одну букву b получая новый алфавит A_1, состоящий из букв $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{N-2},\ b$ с вероятностями $p_1,\ p_2, ..., p_{N-2}, (p_{N-1} + p_N)$. Эта операция называется ***однократным сжатием***. Буквы алфавита A_1, располагают в порядке убывания вероятностей.

3. Аналогичным образом подвергается сжатию алфавит A_1. Эта операция по отношению к алфавиту A называется двукратным сжатием, а по отношению A_1 называется однократным сжатием. В результате этой операции получается алфавит A_2, содержащий $(N-2)$ буквы, который также располагают в порядке убывания вероятностей.

4. Операция сжатия продолжается до тех пор, пока не образуется алфавит A_{N-2}, содержащий всего две буквы $(N-(N-2)) = 2$. Этим буквам присваиваются кодовые обозначения 1 и 0.

5. Если кодовое обозначение уже приписано всем буквам алфавита A_j, то буквам предыдущего алфавита, A_{j-1} сохранившимся и в алфавите A_j, приписываются те же кодовые обозначения, которые они имели в алфавите A_{j-1}, двум буквам a' и a'' алфавита A_j, слившимся в букву b алфавита A_{j-1}, приписываются обозначения, получающиеся из кодового обозначения буквы b добавлением цифр 1 и 0 в конце.

Пример 7. Исходный алфавит A состоит из 6 букв с вероятностями использования 0.4, 0.2, 0.2, 0.1, 0.05, 0.05 соответственно. Требуется осуществить кодирование алфавита по методу Хафмана.

Решение. Представим решение этой задачи в виде следующей таблицы

Результаты решения к примеру 7

Номер буквы	Вероятности и кодовые обозначения				
	Исходный Алфавит	Сжатые алфавиты			
	A	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0.4 0	0.4 0	0.4 0	0.4 0	0.6 1
2	0.2 10	0.2 10	0.2 10	0.4 11	0.4 0
3	0.2 111	0.2 111	0.2 111	0.2 10	
4	0.1 1101	0.1 1101	0.2 110		
5	0.05 11001	0.1 1100			
6	0,05 11000				

По заданной таблице легко заметить, что столбец A_1 получен путём объединения строки 5 и 6 из столбца A, путём сложения вероятностей и для двух последних букв, столбец A_2 получен путём объединения строки 4 и 5 из столбца A_1, путём сложения вероятностей и для двух последних букв, и т.д.

Среднее число элементарных сигналов, приходящихся на одну букву:

$$\overline{m} = 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}1 + 5\cdot(0{,}05 + 0{,}05) = 2{,}3$$

Для кодов с основанием K основная теорема о кодировании при отсутствии помех может быть представлена следующим образом.

При любом методе кодирования, использующем код с основанием K,

$$\overline{m} \geq H/\log K = m_{\min},$$

где H — энтропия одной буквы сообщения. При этом $\overline{m} \to m_{\min}$, если кодировать сразу блоки, состоящие из n букв.

4.2. Определение характеристики канала передачи информации

Из теоремы Шеннона следует, что *если по линии связи* (*или каналу передачи информации) за единицу времени можно передать* L *элементарных сигналов, принимающих* K *различных значений, то скорость передачи сообщений по такой линии не может быть большей, чем*

(21) $$V = \frac{L\log K}{H} = \frac{C}{H}.$$

Величина

(22) $$C = L\cdot\log K,$$

независящая от самой линии связи, указывает наибольшее количество единиц информации, которое можно передать по данной линии за единицу времени, и называется *пропускной способностью* линии связи.

Выражения (21) и (22) характеризуют линию связи без помех, т.е. идеализированную линию. В отличие от нее *линия связи с помехами* может быть математически описана заданием не только L и V, но K^2 и неотрицательных чисел $p_{ij}(\alpha)$, представляющих вероятность трансформации элементарного сигнала α_i, в сигнал α_j, вызванную влиянием помех.

Пропускная способность линии связи с помехами:

(23) $$C = L\cdot c = L\cdot I_{\max}(\alpha,\ \beta),$$

где

(24) $$I_{\max}(\alpha,\beta) = H_{\max}(\beta) - H_{\min}(\beta/\alpha)$$

Для дискретного канала с основанием K величина $H_{\max}(\beta) = \log K$, что показывает неопределенность некоторого опыта β. При передаче информации об этом опыте в результате действия помех возникает дополнительная неопределенность $H(\beta/\alpha)$, снижающая получаемую на выходе линии связи информацию об этом опыте. Для дискретного симметричного канала с основанием K, $(K_{вых} = K_{вход})$ вероятность трансформации любого символа:

(25) $$P = \sum_{i=1}^{K} p_{ij}(\alpha)$$

а вероятность трансформации символа α_i, в символ α_j (при $i \neq j$):

(26) $$p_{ij}(\alpha) = \frac{P}{K-1}.$$

Тогда вероятность прохождения символа (при $i = j$):

(27) $$p_{ij}(\alpha) = 1 - P.$$

а дополнительная неопределенность:

(28) $$H(\beta/\alpha) = -(1-P)\log(1-P) - P \cdot \log\frac{P}{K-1}\ .$$

В этом случае

(29) $$C = L \cdot \left[\log K + (1-P)\cdot\log(1-P) + P\cdot\log\frac{P}{K-1}\right].$$

В частном случае, когда $K = 2$ (двоичный симметричный канал), пропускная способность линии связи

(30) $$C = L \cdot [1 + (1-P)\cdot\log(1-P) + P\cdot\log P].$$

Основная теорема о кодировании при наличии помех формулируется следующим образом:

Для любой линии связи с помехами всегда можно подобрать специальный код, позволяющий передавать сообщения по этой линии с заданной скоростью, сколь угодно близкой к V, определённой формулой (21), *так, чтобы вероятность ошибки в определении каждой переданной буквы оказалась меньше любого заранее заданного числа* $\varepsilon > 0$.

Из формул (21) и (30) следует, что скорость передачи информации при $L = const$ зависит от величины $C = f(K,\ p)$ и экономичности кода(H). В свою очередь, число p зависит от величины и характера помех. Поэтому при наличии помех и заданного K можно достичь необходимой скорости передачи информации путем ее соответствующего кодирования.

Пример 8.

Определить влияние вероятности трансформации символа p (влияние помех), характеристик кодирования (K и H) на пропускную способность линии связи и скорость передачи сообщения, в частности:

1) $C = f(K)$ при $p = 0$, $K = \{2, 3{,}4\}$;
2) $C = f(p)$ при $K = 2$, $P = \{0{,}01,\ 0{,}1,\ 0.25,\ 0{,}5,\ 0{,}75,\ 0{,}9,\ 0{,}99\}$;
3) $V = f(p,\ H)$ при $K = 2$, $L = 100$ симв/с,

$P = \{0{,}01,\ 0.1.\ 0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}75,\ 0{,}9\ 0{,}99\}$ и H_1 - равномерный код, H_2 - код Шеннона-Фано.

Решение. Первую задачу решим на основании выражения (21), и результат представим в виде графика (рис. 84, а)), вторую задачу - на основании (30) и графика (рис. 84, б)).

а)

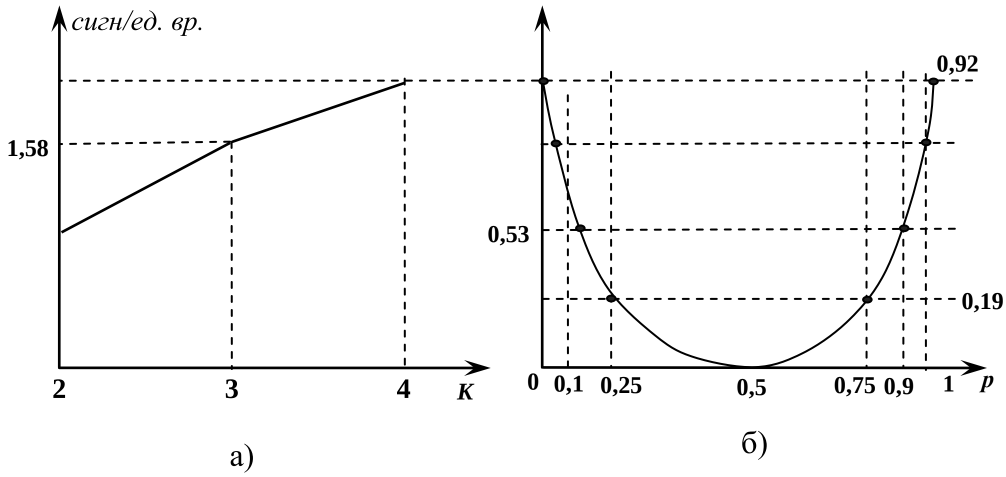


Рис.84

Зависимость $C = f(K)$ при $p = 0$ (рис.84,а)) по равномерный показывает, что с увеличением основания кода пропускная способность растет, однако при этом усложняется схемная реализация. Зависимость $C = f(p)$ при $K = 2$ (рис. 84, б)) показывает, что уже при $p = 0{,}1$ пропускная способность падает почти вдвое, а при $p = 0{,}5$ она практически пропадает (при $K = 2$). Это вполне очевидно, поскольку при равновероятном появлении сигнала 0 или 1 возникает полная неопределенность. При дальнейшем увеличении p наблюдается симметричное возрастание C: здесь вступает в силу инверсия 0 и 1. Зависимости $V = f(p, H)$ приведены на (рис. 85), а расчетные значения приведены в в таблице

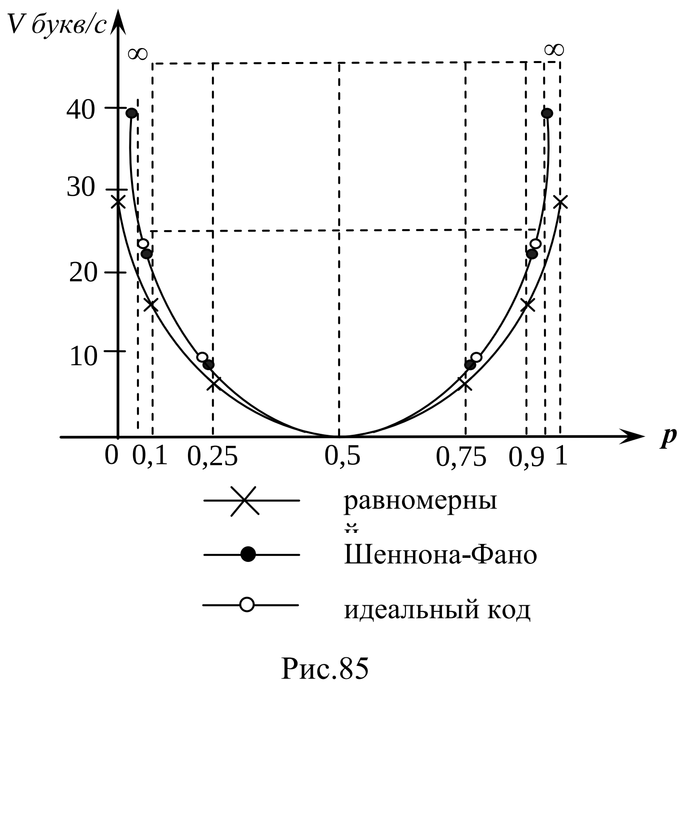


Рис.85

Скорость передачи сообщения

Вид кода	Вероятность трансформации символа						
	0, 01	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	1
Равномерный	30,7	17,7	6,3	0	6,3	17,7	30,7
Шеннона-Фано	40,0	23,0	8,3	0	8.3	23,0	40,0
Идеальный	41,8	24,0	8,6	0	8,6	24, 0	41,8

Если принять во внимание, что реальные системы работают при $P = 10^{-3} \div 10^{-5}$, то можно отметить существенное влияние метода кодирования на скорость передачи сообщений.

5. Основы теории надежности

Функционирование системы S, имеющей состав $C = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ - компоненты, элементы системы, и структуру $L = \{l_1, l_2, ..., l_m\}$ где $l_1, l_2, ..., l_m$ - связи между компонентами, определим выражением

(31) $$(F_S / F(C \,\&\, L)) \to Z,$$

где F - функциональные возможности; F_S - алгоритм функционирования; Z - цель системы. В процессе функционирования системы, т.е. в процессе целенаправленного изменения ее *состояний* по алгоритму F_S, выполняется преобразование

(32) $$F_S : X \to Y,$$

где X, Y - входные и выходные потоки (координаты) системы, например входная и выходная информация в процессе информационной деятельности. Для того чтобы

(33) $$Y \to Z,$$

Элементы и связи системы $(C \,\&\, L)$, должны иметь соответствующие параметры, совокупность которых для системы определяется областью или множеством G. Множество параметров G подразделяется на подмножества G_C и $G_L : G_C \subset G_L$ - множество параметров компонентов или элементов системы (состава); $G_L \subset G$ - множество параметров связей (структуры).

Состояние системы, при котором значения основных ее параметров соответствуют требованиям, характеризующим способность выполнять заданные функции, называется *работоспособным*.

Состояние, при котором значение хотя бы одного параметра не соответствует требованиям, характеризующим способность выполнять заданные функции, называется *неработоспособным*.

Событие, при котором система переходит из работоспособного в неработоспособное состояние, называется *отказом*. Обратное событие называют *восстановлением*.

Если каждому параметру $q \in G$ или $q \in G_C$ и $q \in G_L$ дать количественную оценку θ, то получим пространство значений основных параметров Θ. Требования работоспособности количественно могут быть заданы в виде двусторонних допусков $[\theta_H, \theta_B]$ на основные параметры, т.е.

(34) $$\theta_{H_i} \le \theta_i < \theta_{B_i},$$

где i - индекс параметра объекта (системы, ее элемента или связи), $i \in I$. Требования работоспособности (34) определяют область Θ_p работоспособных состояний объекта в пространстве Θ. Согласно понятию работоспособности область Θ_p является декартовым произведением допусков $[\theta_H, \theta_B]$, т.е.

(35) $$\Theta_p = \prod_{i \in I} [\theta_H, \theta_B].$$

Дополнением Θ_p к Θ будет область неработоспособных состояний $\Theta_{отк}$:

(36) $$\Theta_{отк} = \overline{\Theta}_p \text{ или } \Theta_{отк} = \Theta \setminus \Theta_p.$$

При этом под отказом объекта понимается переход вектора θ в область $\Theta_{отк}$, а под изменением функциональных возможностей $F(C \,\&\, L)$ процесс изменения вектора параметров $\theta(t)$. Продолжительность или объем работы объекта, при которых вектор $\theta(t)$ будет находиться в области Θ_p, называется *наработкой.*

Процесс $\theta(t)$ имеет случайный характер, поэтому отказ есть случайное событие, а наработка – случайная величина.

Свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение наработки называется *надежностью* или *безотказностью* объекта. *Количественные характеристики* в силу вышеуказанного являются *вероятностными.* Если характеристики надежности рассматривать как математическое ожидание некоторого функционала Φ, определенного на траекториях процесса $\theta(t)$, то некоторый показатель надежности

(37) $$h = M\{\Phi[\theta(t)]\},$$

где M - оператор математического ожидания. Так, например, задавая функционал Φ в виде

$$\Phi[\theta(t)] = \begin{cases} 1, если\,\theta(t) \in \Theta_p\, при\, T \le t \le T + \sigma, \\ 0, если\,\theta(t) \in \Theta_{отк}, хотя\_бы\_при\_одном\_значении\, t \in [T, T + \sigma], \end{cases}$$

Получим вероятность безотказной работы объекта на интервале наработки $[T, T + \sigma]$:

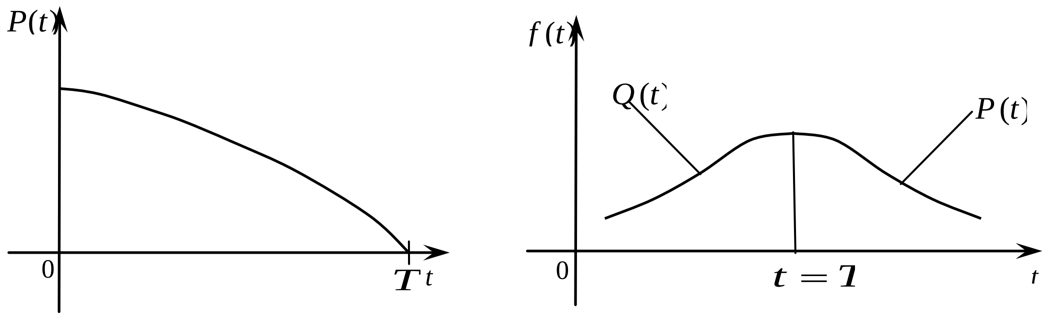
(38) $$M\{\Phi[\theta(t)]\} = P(T, T + \sigma).$$

6. Определение количественных характеристик надежности элементов

Допустим, что при отсчете времени работы элемента от $t = 0$ при $t = T$ произойдет отказ. Тогда T определим как время *отказа.* представим $P(t)$ как вероятность того, что в течение времени $t \le T$ отказа не произойдет. $P(t)$ называют *вероятностью безотказной работы.* Вероятность события, противоположного рассмотренному и несовместимого с ним, называют *вероятностью отказа* $Q(t)$:

(39) $$Q(t) = 1 - P(t).$$

Вероятность безотказной работы $P(t)$ является непрерывной убывающей функцией времени, вид которой определяется условиями возникновения отказа в системе, т.е. траекторией $\theta(t)$.



Вероятность безотказной работы

Вероятность отказа

Рис.86

Очевидно лишь, что $P(0)=1, P(\infty)=0$. Тогда из второй рисунке следует, что отказ исключен лишь при $t=0$, когда $P(t)=1$и $Q(t)=0$. Отказ возможен при всех значениях $t>0$, хотя при малых t вероятность его мала.

Время отказа работы элемента как непрерывная случайная величина характеризуется функцией плотности вероятности функцией плотности вероятности $\varphi(t)$. При этом вероятность безотказной работы элемента при $T \le t$ определяется формулой:

(40) $$P(t)=\int_t^\infty \varphi(\tau)d\tau,$$

а вероятность отказа элемента равна

(41) $$Q(t)=\int_0^t \varphi(\tau)d\tau,$$

Площадь под кривой $\varphi(t)$ (см.рис. вероятность отказа), равна 1, разделена на две части ординатой, соответствующей абсциссе t. Площадь слева от t численно равна $Q(t)$, а справа равна $P(t)$.

Из равенства (41) следует, что вероятности отказа элемента является функцией распределения T, т.е.

(42) $$Q(t)=\Phi(t),$$

тогда получим дифференциальное равенство

(43) $$\varphi(t)=\frac{d}{dt}Q(t)=\frac{d}{dt}\Phi(t).$$

Из равенства (39) и (43) находим следующее равенство

(44) $$\varphi(t)=\frac{d}{dt}(1-P(t)=-\frac{d}{dt}P(t).$$

Таким образом, время отказа элемента характеризуется средним из всех значений, которые оно может получать при наблюдении множества однотипных элементов. В свою очередь среднее время безотказной работы элемента при $t \ge 0$ есть математическое ожидание

(45) $$\overline{T}=\int_0^{+\infty} t\varphi(t)dt=\int_0^{+\infty} P(t)dt,$$

где для выполнения предельного перехода (45) нужно потребовать выполнение условия $\lim_{t\to\infty} tP(t)=0$.

Далее, определим средний функциональный ресурс невосстанавливаемых элементов. Представим себе, что группа однотипных элементов входящие в состав одной системы и отказы в этой системе не устраняются, то ***интенсивность отказов*** этих элементов определятся равенством

(46) $$\lambda(t)=-\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{d}{dt}P(t)=\frac{\varphi(t)}{P(t)}=-\frac{d}{dt}\ln P(t).$$

Из (46) следует, что

(47) $$P(t)=\exp\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right).$$

В случае, когда $\lambda(t) = const,$ что соответствует режиму нормального функционирования системы, получим

(48) $$P(t) = e^{-\lambda t},$$

и

(49) $$\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

то-есть имеет место экспоненциальное распределение времени. На основании (48) и (45) олучим

(50) $$\overline{T} = \int_0^{+\infty} P(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Это означает, что постоянная интенсивность отказов $\lambda = const,$ равна средней частоте отказов:

(51) $$\lambda = \frac{1}{T},$$

Из равенств (49) и (51) выводится равенство

(52) $$P(t) = \exp(-\frac{t}{\overline{T}}).$$

В частности, в этом равенстве $t = \overline{T}$ получим, $P(\overline{T}) = e^{-1} \approx 0{,}37,$ т.е. математическое ожидание времени отказа для экспоненциального распределения определится как время, в течение которого вероятность безотказной работы уменьшится до величины $e^{-1} \approx 0{,}37$, т.е. в e раз.

Следует заметить, что среднее время безотказной работы $\overline{T}$ является лишь одной из числовых характеристик случайной величины «*времени безотказной работы* T » (*наработки*).

Для исчерпывающей характеристики величины T необходимо знать еще и дисперсию $D(T) = \sigma_T^2$ – времени отказа или его среднее квадратичное отклонение σ_T. Эта величина находится по вычислительной формуле

(53) $$D(T) = \sigma_T^2 = M\left(T^2\right) - \left(MT\right)^2 = 2\int_0^{\infty} t\,P(t)dt - (\overline{T})^2.$$

Отсюда, при условии, когда $\lambda = const$ имеем (с учётом (48), (50) и дважды интегрирования по частям)

(54) $$D(T) = \sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

Откуда следует, что

(55) $$\sigma_T = \frac{1}{\lambda} = \overline{T}.$$

Таким образом, при *экспоненциальном законе надёжности* среднее квадратичное отклонение времени отказа равно среднему времени безотказной работы элемента. Это свойство экспоненциального закона надёжности позволяет считать, что при его наличии величина $\overline{T}$ является достаточно полной характеристикой надёжности.

Для определения характеристик надёжности элементов обычно проводят специальные испытания при условиях, близких к условиям функционирования этих элементов в системе. При этом исследуется N образцов элемента. На временной шкале откладываются равные интервалы времени $\Delta t.$ В каждом $i-$м интервале времени определяется число отказавших элементов n_i. Испытания продолжается до тех пор (t_k), пока не выйдут из строя все элементы.

Среднее время безотказной работы на основании (в соответствии) опытных данных определяют по формуле

(56) $$\bar{T} = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \frac{\bar{t}_i}{N},$$

где $k = \frac{t_k}{\Delta t}$, а $\bar{t}_i = \frac{(t_{i-1} + t_i)}{2}$ для $t_i = i \cdot \Delta t$. Статистическая оценка $\lambda(t)$ получается из выражения

(57) $$\lambda^{\bullet}(t) = \frac{\Delta n}{\Delta t} \cdot \frac{1}{m},$$

где $\Delta n -$ число отказавших элементов за промежуток времени от $(t - 0{,}5 \cdot \Delta t)$ до $(t + 0{,}5 \cdot \Delta t)$; $m = \frac{(m_{i-1} + m_i)}{2} -$ среднее число исправно работающих элементов в интервале Δt, а $(m_{i-1}, m_i -$ число исправно работающих элементов в начале и в конце интервала).

Вышеприведённые характеристики являются показателями надёжности невосстанавливаемых объектов. При этом не учитывается возможность их восстановления в процессе функционирования системы. В практических условиях такая возможность чаще всего присутствует; более того, для этих целей создаются специальные службы.

Полагая, что каждый отказ каким-либо способом устраняется, восстанавливаемый элемент можно характеризовать числом отказов n, происходящих в течение промежутка времени t, и средним временем между двумя соседними отказами $\bar{t}$, называемым *«наработкой на отказ»*

(58) $$\bar{t} = \sum_{i=1}^{n} t_i \Big/ n$$

где $n -$ число отказов элемента за время испытаний t; $t_i -$ время исправной работы элемента между $(i-1)-$м и $i-$м отказами.

В тех случаях, когда испытания производились не с одним, а с m аналогичными элементами, то формула (58) выглядит так:

(59) $$\bar{t} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} t_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{m} n_j,$$

где $n_j -$ число отказов $j -$го образца; $t_{ij} -$ время исправной работы между $(i-1)-$м и $i-$м отказами $j-$го образца.

Пример 9. На основании данных технических паспортов установлены, что вероятность отказа первого прибора в течении 6000 часов составляет $0{,}95$, а вероятность второго прибора в течении 10000 часов составляет $0{,}90$.

Определить, какой из этих приборов более надёжен.

Решение. В соответствии с равенством (39) вероятность безотказной работы приборов за соответствующие периоды времени следующая:

$$P_1(t) = 1 - Q_1(t) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05; \qquad P_2(t) = 1 - Q_2(t) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10.$$

На основании равенства (52) имеем

$$\ln P(t) = -\frac{t}{\bar{T}} \Rightarrow \bar{T} = -\frac{t}{\ln P(t)}.$$

Для первого и второго приборов соответственно находим:

$$\bar{T}_1 = -\frac{6000}{\ln[0{,}05]} = 2003ч. \quad \bar{T}_2 = -\frac{10000}{\ln[0{,}10]} = 4343ч.$$

Поскольку $\bar{T}_2 > \bar{T}_1$, можно считать, что второй прибор более чем в два раза надежнее, чем первого прибора.

Пример 10. На основании проведённых испытаний N образцов элемента A, получены следующие данные:

Результаты испытаний

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n_i	2	11	23	40	56	66	75	81	79	69	53	45	25	18	11	6

Здесь число $i-$выражает номер интервала испытаний, число n_i $-$выражает количество отказавших образцов на $i-$м интервале времени. Общее число образцов элемента A определяется по формуле $N=\sum_{i=1}^{16} n_i$. В нашем примере $N=660$. Длительность интервала $\Delta t=200$ч. Нужно определить среднее время безотказной работы.

Решение. По формуле (56) $\overline{T}=\sum_{i=1}^{k} n_i\cdot\frac{\overline{t}_i}{N}$ получим

$$\overline{T}=\frac{2\cdot100+11\cdot300+23\cdot500+40\cdot700+56\cdot900+66\cdot1100}{660}+$$

$$+\frac{75\cdot1300+81\cdot1500+79\cdot1700+69\cdot1900+53\cdot2100+45\cdot2300}{660}+$$

$$+\frac{25\cdot2500+18\cdot2700+11\cdot2900+6\cdot31000}{660}=1556\text{ч.}$$

Задание. На основании данных испытаний, проведённых в примере 10, определите:
- функцию плотности вероятности $\varphi(t)$;
- функцию распределения $\Phi(t)=Q(t)$;
- функцию вероятности безотказной работы $P(t)$;
- вероятность безотказной работы $P(t)$ какого-то значения $t=T$ по графику функции $P(t)$ и представьте аналитически на основании полученного значения $\overline{T}=1556$ч.

7. Определение надёжности системы по схеме

В этом пункте кратко остановимся на построения и анализа надежностно – функциональной схемы (НФС). Определение надёжности системы состоящей из элементов, необходимо начинать с построения и анализа надежностно – функциональной схемы (НФС), отражающей так называемой алгоритмы Φ_S. Как правило, эта схема отражает последовательность выполнения функции плотности вероятности φ_i:

$$\Phi_S \stackrel{\Delta}{=} \{\varphi_1\rightarrow\varphi_2\rightarrow\cdots\rightarrow\varphi_i\rightarrow\cdots\rightarrow\varphi_n\}\rightarrow W, \tag{60}$$

где $W-$поставленная цель.

В этом случае вероятность безотказной работы некоторой системы S сосчитывается на основании формулы

$$P_S(t)=\prod_{i=1}^{n} p_i(t)\,. \tag{61}$$

В некоторых случаях в целях повышения надёжности системы отдельные элементы (функции φ_i) или группы элементов (функций φ_i) резервируют. Как правило, такой подход применяют к тем элементам системы, которые обладают невысокой надёжностью и (или) обладают очень ответственной функцией (предназначением). При резервировании $i-$ элемента (функции φ_i) в надежностно – функциональной схемы (НФС) появляются параллельные соединения , для которых вероятность отказа

(62) $$Q_p(t) = \prod_{j=1}^{m} q_{ij}(t),$$

а вероятность безотказной работы в соответствии формулы (39)

(63) $$P_p(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m} q_{ij}(t),$$

где $j-$число резервированных (параллельных соединения в НФС) элементов, т.е. кратность резервирования функции φ_i. В результате резервирования отдельных элементов или групп элементов могут возникнуть m путей функционирования системы S, т.е. достижение заданной цели W системы станет возможным по m цепочкам типа (60). Тогда $S : X \overset{m}{\to} Y$. Для подобных сложных систем вероятность безотказной работы можно определить по формуле (выражению)

(64) $$P(t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-k} a_{ij} \prod_{i=1}^{k+l} p_i(t) \prod_{i=k+l+1}^{n} q_i(t).$$

где $j-$номер пути; $k-$число элементов на $j-$м пути; $l-$количество безотказно функционирующих элементов, не входящих в путь, для которых определяется произведение вероятностей, т.е. члены внутренней суммы. Каждый элемент имеет переменный номер i. При вычислении каждого из членов внешней суммы нумерация изменяется таким образом, чтобы элементы, образующие соответствующий путь, имели бы номер от l до k. Номера этих k элементов не изменяются в пределах внутренней суммы, но при вычислении каждого ее члена изменяется нумерация остальных $(n-k)$ элементов. Коэффициент a_{ij} равен 1 или 0:

$a_{ij} = 1$; для $j = 1$; то есть при суммировании по первому пути, а для остальных путей следует принимать $a_{ij} = 0$ для всех слагаемых, которые уже встречались на предыдущих путях.

Пример 11. Пусть на следующей схеме (рисунке 87)

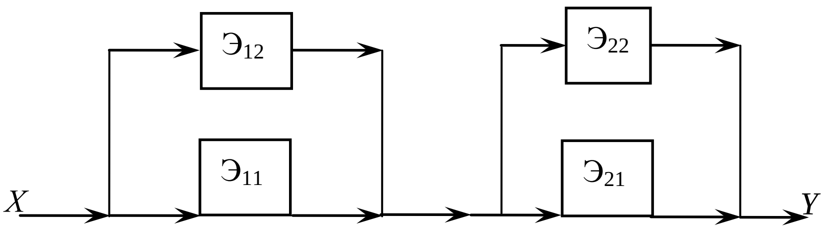


Рис.87

представлена НФС системы, состоящей из двух основных $(Э_{11}, Э_{21})$ и двух их резервирующих $(Э_{12}, Э_{22})$ элементов. Всего в схеме четыре элемента, т.е. $n = 4$. Характеристики надёжности для этих элементов определены через вероятности безотказной работы $P_{11}(t) = P_{12}(t)$ и $P_{21}(t) = P_{22}(t)$ и соответственно вероятности отказов $Q_{11}(t) = Q_{12}(t)$ и $Q_{21}(t) = Q_{22}(t)$. Требуется оценить надёжность системы.

Решение. Представленная схеме имеет четыре пути функционирования:

$j=1-$ через элементы $Э_{12}$ и $Э_{22}$;

$j=2-$ через элементы $Э_{11}$ и $Э_{22}$;

$j=3-$ через элементы $Э_{11}$ и $Э_{21}$;

$j=4-$ через элементы $Э_{12}$ и $Э_{21}$.

Таким образом, в этом примере $m=4; k=2; l=0+2=2$. Рассмотрим состояние функционирования системы по первому пути;

В случае $j=1$, при этом обязательно должны работать элементы $Э_{12}$ и $Э_{22}$, но могут работать и элементы $Э_{11}$ и $Э_{21}$ или один из них. Вычислим члены внутренней суммы в равенстве (64), полагая $a_{i1}=1,$ так как $j=1$. Эти слагаемые имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} P_{11}P_{22}Q_{11}Q_{21} & \text{при } l=0, \\ \left.\begin{array}{l} P_{12}P_{22}P_{11}Q_{21} \\ P_{12}P_{22}P_{21}Q_{11} \end{array}\right\} & \text{при } l=1, \\ P_{12}P_{22}P_{11}P_{21} & \text{при } l=2. \end{array}$$

Ради краткости в этих формулах будут опущены обозначения зависимости функций от t. Аналогичным образом при $j=2$ находим членов внутренней суммы, для которых $a_{i2}=1,$ так как их не было при $j=1$:

$$P_{11}P_{21}Q_{12}Q_{22}+P_{11}P_{21}P_{12}Q_{22}+P_{11}P_{21}P_{22}Q_{12}.$$

Для повторяющегося на этом пути члена $P_{11}P_{21}P_{12}P_{22};\ a_{ij}=0.$ Для $j=3$ и $j=4$ имеется лишь по одному члену внутренней суммы с коэффициентами $a_{ij}=1.$ Это члены соответственно равны $P_{11}P_{22}Q_{12}Q_{21}$ и $P_{12}P_{21}Q_{11}Q_{22}$.

Осуществляя внешнее суммирование в выражении (64) получим

$$\begin{aligned} P_{SP}(t) = P_{12}P_{22}\cdot(Q_{11}Q_{21}+P_{11}Q_{21}+P_{21}Q_{11}+P_{11}P_{21}) &+ \\ + P_{12}P_{21}\cdot(Q_{12}Q_{22}+P_{12}Q_{22}+P_{22}Q_{12}) &+ \\ + P_{11}P_{22}Q_{12}Q_{21}+P_{12}P_{21}Q_{11}Q_{22}&. \end{aligned}$$

Далее на основании формулы (39) (вероятности отказа $Q(t)=1-P(t)$), после соответствующих преобразований и упрощений получим

$$P_{SP}(t)=\{1-Q_{11}(t)\cdot Q_{12}(t)\}\cdot\{1-Q_{21}(t)\cdot Q_{22}(t)\},$$

что вполне согласуется с равенствами (61) и (63).

Если принять, что при $t=T,$ соответственно $Q_{11}=0{,}9$ и $Q_{21}=0{,}95$, то без резервирования функций φ_{11} и φ_{21} получим, $P_S(T)=0{,}005,$ а с резервированием имеем $P_S(T)=0{,}0185$ {где соответственно $Q_S(T)=0{,}995$ и $Q_{SP}(T)=0{,}9815$ }.

Это свидетельствует о том, что резервирование существенно повышает надёжность системы.

Пусть дана некоторая система, $S-$ состоящая из n элементов, и пусть λ_i выражает интенсивность безотказной работы $i-$го элемента этой системы. Обозначим через Λ_S

(65) $$\Lambda_S=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

Λ_S- называется *интенсивностью отказов системы*, состоящей из n элементов в соответствии со схемой (60).

Вероятность безотказной работы системы $P_S(t)$ можно найти исходя из формулы (48):

(66) $$P_S(t) = e^{-\Lambda_S \cdot t}\ .$$

Среднее время отказов такой системы будет

(67) $$\overline{T}_S = \frac{1}{\Lambda_S} = \left(\sum_{i=1}^{n}(\overline{T}_i)^{-1}\right)^{-1},$$

где $\overline{T_i}$ – среднее время безотказной работы i – го элемента системы S.

Вероятность безотказной работы системы, состоящей из m однотипных элементов, соединённых неразрывно, при условии $\lambda_i = const$ определяется равенством

(68) $$P_p(t) = 1-(1-e^{-\lambda_i \cdot t})^m\ .$$

При этом, можно использовать приближённое равенство

(69) $$\overline{T}_p(t) = \int_0^\infty [1-(1-e^{-\lambda_i \cdot t})^m]dt \approx \frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\cdot$$

Когда числа λ_i различны, в равенстве (69) вместо λ_i выбирают (подставляют) число $\overline{\lambda}$, равное среднему арифметическому этих чисел: $\overline{\lambda} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j$.

Интенсивность отказов такой системы определяется через величины $\overline{T}_p$:

(70) $$\Lambda_p = \frac{1}{\overline{T}_p}.$$

Рассмотрим один пример и на этом ограничимся в этой тематике.

Пример 12. Определить среднее время безотказной работы $\overline{T}_{SP}$ системы НФС, которая представлена на рисунке 87 примера 11 если выполнены условия:

$P_1 = P_{11} = P_{12} = 0{,}9; P_2 = P_{21} = P_{22} = 0{,}95$ при $t = T = 1000$ ч.

Решение. На основании формулы (48) $\{P(t) = e^{-\lambda t}\}$ для элементов $э_{11}$ и $э_{12}$ имеем

$$\lambda_1 = \frac{\ln P_1(T)}{T} = \frac{\ln(0{,}9)}{1000} = \frac{1{,}05}{1000ч}.$$

Тогда на основании формулы (69) получим

$$\overline{T}_{p1}(t) = \frac{1}{1{,}05\cdot 10^{-4}}(1+\frac{1}{2}) = 14286\,ч.$$

а $\Lambda_{P_1} = (\overline{T}_{P_1})^{-1} = 0{,}70\cdot 10^{-4}\,1/ч$.

Для элементов $э_{21}$ и $э_{22}$ имеем

$$\lambda_2 = \frac{\ln P_2(T)}{T} = \frac{\ln(0{,}95)}{1000} = \frac{0{,}51}{1000ч}.$$

Тогда на основании формулы (69) получим

$$\overline{T}_{p2}(t) = \frac{1}{0{,}51\cdot 10^{-4}}(1+\frac{1}{2}) = 29244ч,$$

а $\Lambda_{P_2} = (\overline{T}_{P_2})^{-1} = 0{,}34\cdot 10^{-4}\,1/ч$.

В соответствии формулы (65) имеем

$$\Lambda_{SP} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = (0{,}70+0{,}34)\cdot 10^{-4} = 0{,}104\cdot 10^{-3}\,1/ч,$$

а величина $\overline{T}_{SP} = (\Lambda_{SP})^{-1} = 9575$ ч.

В условиях нормального функционирования система после отказов её элементов имеет способность восстанавливаться. Для восстановления системы требуется определённое время. В связи с этим показателями функциональной надёжности могут служить:

- суммарная продолжительность безотказной работы (суммарная наработка)

(71) $$T_\phi = \sum_{i=1}^{r}T_{\phi_i};$$

(72) $$T_B = \sum_{i=1}^{r}T_{B_i},$$

где r – число отказов системы в рассматриваемый период функционирования системы;

T_{ϕ_i} – отрезки времени безотказной времени между двумя отказами;

T_{ϕ_i} – отрезки времени восстановления системы после каждого отказа.

T_ϕ и T_B – случайные величины, зависящие от множества различных факторов. Для невосстанавливаемых систем $T_\phi = T$, а $T_B = \infty$.

Значения математических ожиданий соответственно $MT_\phi = \overline{T}_\phi$ и $MT_B = \overline{T}_B$, определённых в процессе работы (функционирования) системы для специальных испытаний по выборкам T_{ϕ_i} и T_{B_i}, позволяют получить один из возможных показателей надёжности так называемый *«коэффициент готовности»* работающей (функционирующей) системы:

$$K_{\text{гот.}} = \frac{\overline{T}_\phi}{\overline{T}_\phi + \overline{T}_B}, \tag{73}$$

а также «*коэффициент внутреннего простоя*»

$$K_{\text{прос.}} = \frac{\overline{T}_B}{\overline{T}_B + \overline{T}_\phi}, \tag{74}$$

и «*коэффициент профилактики*»

$$K_{\text{проф.}} = \frac{\overline{T}_B}{\overline{T}_\phi} = \frac{K_{\text{прос.}}}{K_{\text{гот.}}} = \frac{1 - K_{\text{гот.}}}{K_{\text{гот.}}} = \frac{1 - K_{\text{прос.}}}{K_{\text{прос.}}}, \tag{75}$$

Пример 13. Для системы НФС, которая представлена на рисунке 87 в примере 11 установлено, суммарное время восстановления $\overline{T}_B = 724$ч. Найти коэффициенты готовности, внутреннего простоя и профилактики.

Решение. Приняв за величину м.о. суммарной продолжительностью безотказной работы системы $\overline{T}_\phi = \overline{T}_{SP} = 9575$ ч. (см. пример 12), на основании равенств (73) – (75) получим:

$$K_{\text{гот.}} = 0{,}994;\ K_{\text{прос.}} = 0{,}608 \cdot 10^{-2};\ K_{\text{проф.}} = 0{,}612 \cdot 10^{-2}.$$

На этом ограничимся относительно данной тематики. Для более обстоятельного изучения этих вопросов рекомендуем обратиться к специальным источникам, посвящённые прикладным вопросам теории вероятностей. В следующей теме мы будем рассматривать некоторые вопросы системы массового обслуживания.

ГЛАВА VII

Элементы теории массового обслуживания

Тема 22. Системы массового обслуживания

В этом разделе кратко рассмотрим элементы системы массового обслуживания (СМО). Нередко возникает необходимость в решении вероятностных задач, связанных с работой систем массового обслуживания (СМО), примерами которых могут служить информационные системы, вычислительные устройства, торговые, транспортные, энергетические системы, системы связи, билетные кассы, ремонтные мастерские, и др.

Общность таких систем выявляется в единстве математических методов и моделей, применяемых при исследовании их профессиональной деятельности. Здесь мы кратко остановимся на основные моменты этой весьма важной и нужной практической части науки теории вероятностей и математической статистики.

В последнее время в связи с широким развитием различных предприятий, производящих продукцию массового потребления, достижения науки теории вероятностей не только успешно используется для качественного отбора уже произведённой продукции, но и для организации самого процесса производства (статистический контроль в производстве).

Большое значение в этом круге проблем имеет правильная разработка статистических методов управления качеством выпускаемой продукции массового характера. Для всего инженерного корпуса (дела) серьёзную роль приобрела теория надёжности «массового обслуживания населения планеты во всём», широко использующая методы теории вероятностей и математической статистики.

Здесь уместно напомнить, что в свою очередь «теория надёжности массового обслуживания» выдвинула перед математикой в целом, а в частности, перед теорией вероятностей (равным образом это относится и к многим фундаментальным наукам) ряд новых теоретических вопросов (задач). Связь теории вероятностей с практическими потребностями была основной причиной её бурного развития в последнее столетие: крупные достижения в области теоретической физики, генетики, микрохирургии, микробиологии, военной технике, компьютерной технологии, освоение космоса и др.

Многие её разделы были развиты как раз в связи с ответами на запросы практиков. Здесь кстати вспомнить замечательные слова великого учёного П.Л. Чебышева: «…**сближение теории с практикой даёт самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает: сами науки развиваются под влиянием её, она открывает им предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных….»**

1. Основные понятия, используемые в системах массового обслуживания

Каждая СМО состоит из определенного количества обслуживающих единиц – *каналов* обслуживания. Каналами могут быть: линий связи, кассиры, продавцы, устройства ЭВМ и др. СМО могут быть одноканальными и многоканальными.

Всякая СМО предназначена для обслуживания *потока заявок* (*или требований*), поступающих от одного или нескольких источников в случайные моменты времени, например звонков в справочную службу телефонной станции. Обслуживание заявки происходят в определённые моменты времени, и продолжается некоторое случайное время $t_{об}$, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. *Случайный характер потока заявок и времени обслуживания* приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается большое число заявок, (они будут становиться в очередь, либо покидают СМО не обслуженными, т.е. получать отказ); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

СМО можно представить в виде следующей схемы

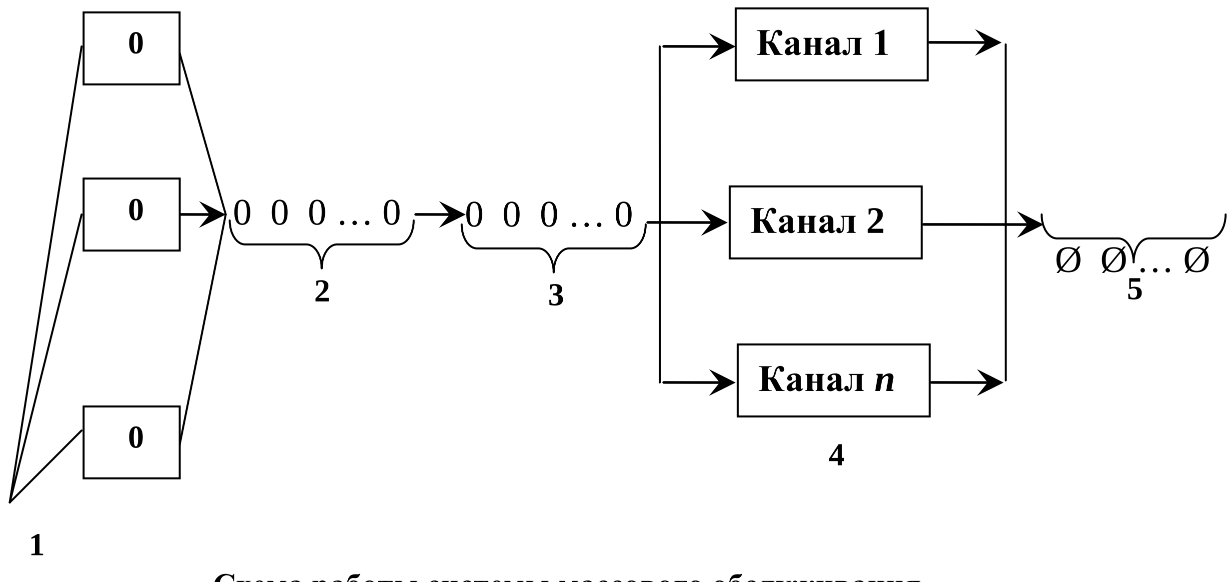


Схема работы системы массового обслуживания

в соответствии с представленной схемой СМО включает в себя следующие элементы:

- 1- источники заявок;
- 2- входной поток заявок;
- 3- очередь заявок на обслуживание, которых может быть одна или несколько;
- 4- узел обслуживания, включающий один или несколько параллельно работающих каналов;
- 5- выходящий поток обслуженных заявок.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты прихода новой заявки или окончания обслуживания очередной.

Системы массового обслуживания делятся на типы по ряду признаков.

1. По условию ожидания начала обслуживания заявки:

- СМО *с отказами*, у которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему, будучи необслуженной;
- СМО *с очередью*, у которых заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной;
- СМО *с ограниченной длиной очереди*, у которых заявки на обслуживание исчерпано;
- СМО *с ограниченным временем ожидания*, у которых срок пребывания каждой заявки в очереди ограничен.

2. По дисциплине обслуживания заявок:

- в порядке поступления;
- в случайном порядке;
- обслуживание с приоритетом, когда заявки определенного типа обслуживаются вне очереди.

3. По месту нахождения источников заявок:

- открытые СМО, в которых характеристики потока заявок не зависят от того, в каком состояния СМО (т.е. сколько каналов занято).
- замкнутые СМО, в которых характеристики потока заявок зависят от состояния СМО;
- обычно это происходит, когда источники заявок находятся внутри самой СМО.

Для описания СМО введем следующие обозначения:

k - число заявок в СМО (в очереди и узле обслуживания);

s - число заявок в очереди;

l - число заявок в узле обслуживания;

n - число каналов (устройств обслуживания);

r - число незанятых каналов.

Легко заметить, что $k = l + s,\ n = l + r.$

2. Структура и классификация систем массового обслуживания

На вход в СМО поступает поток требований на обслуживание. Например, клиенты или пациенты, поломки в оборудовании, телефонные вызовы и т.д. Требования поступают *нерегулярно, в случайные моменты времени*. Также случайный характер носит и продолжительность обслуживания. Это обстоятельство создает нерегулярность в работе СМО, служит причиной ее перегрузок или недогрузок.

Системы массового обслуживания обладают различной структурой, но обычно в них можно выделить четыре основных элемента: *входящий поток требований, накопитель, каналы обслуживания, выходящий поток.*

В зависимости от правил образования очереди различают следующие СМО:

1) ***системы с отказами***, в которых при занятости всех каналов обслуживания, заявка покидает систему *без обслуживания (необслуженной)*; *системы с неограниченной очередью*, в которых заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы обслуживания были заняты;

2) *системы с ожиданием и ограниченной очередью,* в которых время ожидания ограничено какими-либо условиями или существуют ограничения на число заявок, стоящих в очереди.

Характеристики входящего потока требований.

- *поток требований называется* ***стационарным****, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени определенной длины зависит только от длины этого участка.*

- *поток событий называется* ***ординарным****, если невозможно одновременное наступление двух или более событий на участок.*

- *поток событий называется* ***потоком без последствий****, если число событий, попадающих на некоторый участок времени, не зависит от числа событий, попадающих на другие участки.*

- *поток требований называется* ***пуассоновским*** *(или простейшим), если он обладает тремя свойствами*: ***стационарен, ординарен и не имеет последствий.***

Название связано с тем, что при выполнении указанных условий число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, будет распределено по закону Пуассона.

- *интенсивностью потока заявок называется среднее число заявок, поступающих из потока за единицу времени.*

Для стационарного потока интенсивность является постоянной. Если *m* - среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками, то $\lambda = 1/t$.

В случае *пуассоновского потока* вероятность поступления на обслуживание *m* заявок за промежуток времени *t* определяется по закону Пуассона:

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t} .$$

Время между соседними заявками распределено по экспоненциальному закону с плотностью вероятности $\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Время обслуживания $t_{обсл.}$ является случайной величиной и подчиняется показательному закону распределения Пуассона с плотностью вероятности $\varphi(t) = \lambda\, e^{-\lambda\, t}$, где λ является интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени, $t_{обсл.} = 1/\mu$.

- *отношение интенсивности входящего потока к интенсивности потока обслуживания называется загрузкой системы* $\rho = \lambda/\mu$.

- *загрузка — это среднее число заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки.*

Если узел обслуживания состоит из $n > 1$ одинаковых устройств, то $\mu_n = \mu \cdot n$ — математическое ожидание числа требований, обслуженных *n* каналами за единицу времени.

Отношение $\alpha = \lambda/\mu_n$ называют коэффициентом загрузки системы (или приведенной интенсивностью потока заявок).

Согласно формуле Литта среднее время пребывания заявки в системе $W_{сис}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{сис}$, деленному на интенсивность потока заявок:

(1) $$\mathrm{W}_{\text{сис}} = \frac{L_{сис}}{\lambda} .$$

Точно таким же образом среднее время пребывания заявки в очереди $\mathrm{W}_{\text{очер}}$ связано со средним числом заявок в очереди $L_{\text{очер}}$:

(2) $$\mathrm{W}_{\text{очер}} = \frac{L_{очер}}{\lambda} .$$

Формальное описание СМО можно выполнить с помощью цепи Маркова, соответствующей схеме гибели и размножения. Расчет финальных вероятностей цепи Маркова позволяет определить P_{k} - вероятность того, что в системе находится k заявок. Для систем с отказами вероятность того, что число заявок в системе равно числу каналов обслуживания, соответствует вероятности отказа очередной заявки:

$$P_n = P_{отк} .$$

3. Марковский случайный процесс с отказами

Система массового обслуживания представляет собой систему дискретного типа с конечным или счетным множеством состояний, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачкообразно, когда осуществляется какое-нибудь событие.

Процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если его возможные состояния $S_1, S_2, S_3, \cdots$ можно заранее перенумеровать, и переход системы из одного состояния в другое состояние происходит практически мгновенно. Такие процессы бывают двух типов: с *дискретным или непрерывным* временем. В случае дискретного времени, переходы из одного в другое состояние могут происходить в строго определенные моменты времени. Процессы с непрерывным временем отличаются тем, что переход системы в новое состояние возможен в любой момент времени.

Случайный процесс называется марковским, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Переходы системы из одного состояния в другое состояние происходят под действием каких-то потоков событий (поток заявок, поток отказов). Если все потоки событий, переводящие систему в новое состояние *простейшие пуассоновские*, то процесс, протекающий в системе будет марковским. Поскольку, простейший поток не обладает последствием: в нем будущее не зависит от прошлого.

В системах с отказами заявок, поступившая информация в момент времени, когда все каналы обслуживания заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и в дальнейшем в процессе обслуживания не участвует. Имеется n каналов обслуживания, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.

Поток обслуживания имеет интенсивность μ (величина, обратная среднему времени обслуживания $t_{обсл.}$). Требуется найти вероятности состояний СМО и характеристики ее, эффективности. Так как оба потока: заявок и освобождений — простейшие, то процесс протекающий в системе, будет Марковским.

Рассмотрим ее как систему с конечным множеством состояний:

S_0 — свободны все каналы;

S_1 — занят ровно один канал;

S_k — занят ровно k каналов;

S_n — заняты все n каналов.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_k. Для любого t выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1.$$

Требуется определить вероятности состояний системы для любого момента времени t.

Составим дифференциальные уравнения для всех вероятностей. Начнем с $P_0(t)$. Зафиксируем момент времени t, и дадим t малое приращение Δt и найдем вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ система находится в состоянии S_0. Это процесс может осуществляться двумя способами: либо в момент времени t система будет находиться в состоянии S_0, а за прошедшее время не вышла из него, либо в момент времени t система будет находиться в состоянии S_1, а за время Δt перейдет в состояние S_0.

Вероятность первого способа найдем по теореме умножения вероятностей. Вероятность того, что в момент времени *t* система была в состоянии S_0, равна $P_0(t)$, вероятность того, что за время Δt не поступит ни одной заявки, равна $e^{-\lambda\Delta t} \approx 1-\lambda\Delta t$.

Вероятность первого способа равна $P_0(t)(1-\lambda\Delta t)$. Найдем вероятность второго способа. Вероятность того, что в момент времени *t* система была в состоянии S_1, равна $P_1(t)$. Вероятность того, что за время Δt канал освободится, равна $1-e^{-\mu\Delta t} \approx \mu\Delta t$.

Вероятность второго способа составит $P_1(t)\mu\Delta t$.

По теореме сложения вероятностей имеем

$$P_0(t+\Delta t) \approx P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t.$$

Отсюда получается дифференциальное уравнение для определения $P_0(t)$:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)$$

Аналогично составляются дифференциальные уравнения для вероятностей других состояний. Пусть 0 < *к* < *n*. (См. также 17.5). Вычислим $P_k(t+\Delta t)$ - вероятность того, что в момент времени $t+\Delta t$ система будет в состоянии S_k. Эта вероятность вычисляется как вероятность суммы трех событий:

1) в момент *t* система была в состоянии S_k и не вышла из него за время Δt;
2) в момент *t* система была в состоянии S_{k-1}, а за время Δt перешла в состояние S_k
3) в момент *t* система была в состоянии S_{k+1}, а за время Δt перешла в состояние S_k.

Тогда

$$P_k(t+\Delta t) \approx P_k(t)(1-(\lambda+\kappa\mu)\Delta t)+P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t.$$

Дифференциальное уравнение для вероятности $P_k(t)$:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t)-(\lambda+\kappa\mu)P_k(t)+(\kappa+1)\mu P_{k+1}(t).$$

Уравнение для вероятности $P_n(t)$:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t)-n\mu P_n(t) \qquad .$$

Получена система уравнений для вероятностей:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)P_k(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t)-n\mu P_n(t) \end{cases}$$

Эти уравнения называются уравнениями Эрланга. А полученная система (3) будет называться системой Эрланга.

Нас интересует вопрос: что будет происходить с вероятностями состояний при больших t, т.е. $t \to \infty$. Будут ли вероятности стремиться к конечным пределам? В тех случаях, *когда эти пределы существуют и не зависят от начального состояния системы, то их называют* ***финальными вероятностями состояний.***

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них за конечное число шагов можно перейти в любое другое состояние, то финальные вероятности существуют. При $t \to \infty$ в системе устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого система меняет свои состояния случайным образом, но их вероятности уже не зависят от пройденного времени. Финальную вероятность состояния S_k можно истолковать как среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Если финальные вероятности постоянны, то их производные равны нулю. Чтобы найти финальные вероятности, заменим в системе дифференциальных уравнений (3) все вероятности $P_k(t)$ их пределами p_k, а все производные полагаем равными нулю. Получаем систему алгебраических уравнений:

$$(4) \qquad \begin{cases} -\lambda P_0 + P_1 = 0, \\ -\lambda P_0 - (\lambda + \mu) P_1 + 2\mu P_2 = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ -\lambda P_{k-1} - (\lambda + k\mu) P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0 \quad (0 < k < n), \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ -\lambda P_{n-2} - (\lambda + (n-1)\mu) P_{n-1} + n\mu P_n = 0, \\ -\lambda P_{n-1} - n\mu P_n = 0 \end{cases}$$

Для этих вероятностей должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Вводим обозначение $\rho = \lambda/\mu$ и решаем систему относительно неизвестных вероятностей:

$$P_1 = \rho\, P_0$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2} P_0$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P$$

для всех $k \le n$.

Чтобы выразить вероятности непосредственно через p и n, используем условие (контроль)

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} = 1,$$

отсюда получим

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}$$

получаем итоговые вероятности

$$p_k = \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}; \qquad (0 \le k \le n).$$

Полученные формулы называют формулами Эрланга. Эти формулы позволяют получить показатели эффективности работы СМО.

Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок, получается из формул Эрланга для итоговых вероятностей:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}$$

Требование, поступающее в систему, получает отказ в том случае, когда все каналы обслуживания заняты. Поэтому вероятность отказа равна:

$$p_{отк} = p_n = \left(\frac{\rho^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} = \rho^n \frac{p_0}{n!},$$

Отсюда находим относительную пропускную способность системы, т.е. среднюю долю поступивших заявок, обслуживаемых системой. Вероятность того, что заявка будет обслужена равна:

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 1 - \rho^n \frac{P_0}{n!},$$

Абсолютную пропускную способность системы, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени, получим, когда умножаем величину интенсивности потока заявок на относительную пропускную способность:

$$A = \lambda \cdot P_{обсл}.$$

Абсолютная пропускная способность системы — это интенсивность потока обслуженных системой заявок, а каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок. Значит, среднее число занятых каналов равно

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot P_{обсл}$$

Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$q = \frac{\bar{k}}{n}.$$

Теория массового обслуживания позволяет установить зависимость вероятностных характеристик СМО от интенсивности потока заявок, производительности и числа каналов и т.д. и часто включает экономический аспект. Например, стремятся найти наименьшую полную стоимость потерь C, связанных со временем ожидания заявок на обслуживание в очереди и временем простоя каналов обслуживания:

$$C = c_1 M(s) + c_2 M(r).$$

где c_1 - стоимость единицы времени ожидания одной заявки;

c_2 - стоимость единицы времени простоя одного канала.

Характеристиками эффективности СМО являются:

- A - абсолютная пропускная способность, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
- Q - относительная пропускная способность, т.е. средняя доля пришедших заявок, и они полностью обслужены системой:
- $\bar{k}$ - среднее число занятых каналов.

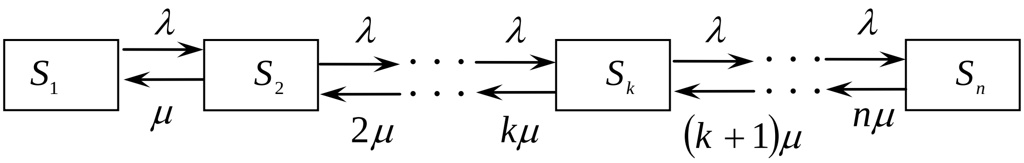
На базе введенных обозначений рассмотрим расчёты СМО.

4. Расчет системы массового обслуживания

Рассмотрим основные типы систем массового обслуживания.

1. *Многоканальная* (n*-канальная*) *СМО с отказами.* Граф состояний СМО показан ниже на схеме.

Пусть узел обслуживания СМО имеет n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуженных заявок имеет интенсивность μ. Требуется найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности: A, Q и $\overline{k}$.



Расчет финальных вероятностей выполняется в соответствии с формулами Эрланга:

(5) $$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1},$$

$$p_k = p_0 \frac{\rho^k}{k!}, \; 0 \le k \le n,$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu_n}$ - приведенная интенсивность потока заявок;

p_0 - вероятность отсутствия заявок в системе;

p_k - вероятность поступления k заявок

Вероятность отказа:

(6) $$p_{отк} = p_n = p_0 \frac{\rho^n}{n!}.$$

Отсюда находим относительную пропускную способность:

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - p_0 \frac{\rho^n}{n!}.$$

Для величины абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q:

(7) $$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - p_0 \frac{\rho^n}{n!} \right).$$

Среднее число занятых каналов $\overline{k}$ можно найти «впрямую» как математическое ожидание числа заявок в системе:

$$\overline{k} = M(k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_0 \frac{\rho^n}{n!}.$$

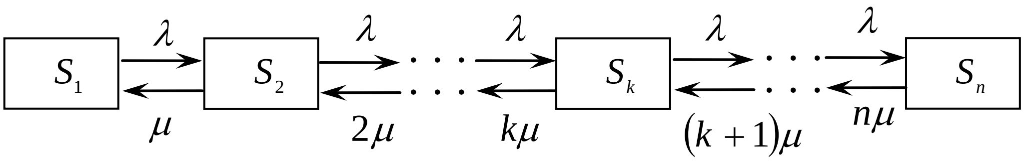
Однако, зная абсолютную пропускную способность, можно найти $\overline{k}$ проще:

$$\overline{k} = \frac{A}{\mu}$$

или с учетом (7)

$$\overline{k} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right)$$

2. *Многоканальная* ($n-$ *канальная*) *СМО с неограниченной очередью.* Граф состояний показан ниже на рисунке



Предлагаем самостоятельно обосновать значения интенсивностей проставленных у стрелок. Вероятность перехода системы в k-е состояние, т.е. вероятность наличия в системе k заявок,

$$p_k = p_0 \frac{\rho^n}{n!},\ n \geq k > 0,$$

если число заявок не превышает числа каналов обслуживания, и

$$p_k = p_0 \frac{\rho^n}{n!} \cdot n^{n-k},\ k \geq n$$

в противном случае. Вероятность отсутствия заявок в системе

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}, \quad (\lambda < \mu \cdot n).$$

Математическое ожидание числа заявок в очереди:

$$M(s) = L_{очер} = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) \cdot p_k = p_0 \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! (1 - \rho / n)^2}. \qquad (8)$$

Среднее число занятых каналов:

$$\overline{k} = \lambda / \mu$$

Тогда среднее число заявок в системе:

$$L_{сис} = L_{очер} + \rho,$$

а время ожидания в очереди:

$$W_{очер} = \frac{1}{\lambda} L_{очер}.$$

3. *Система массового обслуживания с очередью и одним каналам.*

Этот пункт является частный случаи предыдущей системы для $n = 1$.Для нее выполняются равенства:

$$P_k = \rho^k (1-\rho), \quad P_0 = 1 - \rho.$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{сис} = \frac{\rho}{1-\rho},$$

а в очереди

$$L_{очер} = L_{сис} - \rho.$$

4. *Одноканальная СМО с ограниченной очередью.*

Задача отличается от задачи 3только тем, что число заявок в очереди ограничено и не может превосходить некоторого числа ν.

Финальные вероятности системы находятся по формулам:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{s+1}},\ (\rho < 1);\ p_k = \rho^k \cdot p_0.$$

Математическое ожидание числа требований в системе:

$$M(k) = \sum_{k=0}^{s} k \cdot p_k = L_{сис}$$

Вероятность того, что требование получит отказ:

$$p_{отк} = p_v = \rho^v \frac{1-\rho}{1-\rho^{s+1}}.$$

Пример 1. Справочное бюро имеет 5 линий связи. В систему поступает поток заявок с математическим ожиданием (интенсивностью) $\lambda = 2$ (заявок в минуту). Заявка, поступившая в момент, когда все линии заняты, получает отказ. Средняя продолжительность удовлетворения заявки $t_{обс} = 2$ мин . Вычислить основные вероятностные характеристики системы.

Решение. Имеем математическое ожидание (интенсивность) потоков заявок $\mu = 1/t_{обс} = 0{,}5$ и $\lambda = 2$ заявок в минуту. Приведенная интенсивность:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_n} = \frac{2}{0{,}5 \cdot 5} = 0{,}8.$$

Вероятность отсутствия; заявок в СМО согласно (4);

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{5} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1} = 0{,}45\,.$$

Вероятность отказа на обслуживание согласно (5):

$$p_{отк} = p_5 = 0{,}45 \cdot \frac{0{,}8^5}{5!} = 0{,}0012 \cdot$$

Абсолютная пропускная способность справочного бюро:

$$A = \lambda(1 - p_{отк}) = 2 \cdot (1 - 0{,}0012) = 1{,}997$$

- справок в минуту.

Среднее число занятых линий определяется равенством:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{1{,}997}{0{,}5} \approx 4.$$

Пример 2. В инструментальное отделение сборочного цеха за 10 минут, обратились за инструментом 16 рабочих, т.е. интенсивность потока заявок $\lambda = 1{,}6$. Обслуживание одного рабочего занимает в среднем $t_{обс} = 1{,}1$ минута. Известно, что стоимость минуты работы рабочего и кладовщика соответственно равны: c_1 = 6 денеж. ед., c_2 = 4 денеж. ед. Сколько должно быть кладовщиков (n), чтобы стоимость: времени, потерянного рабочими в очереди и кладовщиками при отсутствий обращений к ним, была минимальной?

Решение. По условию примера имеем $\mu = 1/1{,}1 \approx 0{,}91,\ \rho = \lambda/\mu_n$. Среднее число рабочих в очереди вычисляем по формуле

$$L_{очер} = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) \cdot p_k = p_0 \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! (1 - \rho / n)^2}\,.$$

Среднее количество занятых кладовщиков вычисляем по формуле $\bar{k} = A/\mu = 1{,}997/0{,}5 \approx 4$,

а простаивающих без работы находится по формуле, $M(r) = n - \bar{k}$. Стоимость простоя рабочими в очереди и кладовщиками при отсутствии обращений к ним определим по формуле

$$C = 6M(s) + 4M(r)\,.$$

Аналогично проведем расчет для других значений n. Полученные значения сведем в следующей таблице

n	ρ	P_0	$L_{очер}$	$M(r)$	C
2	0,88	0,39	0,12	1,12	5,19

3	0,59	0,56	0,0045	2,41	9,68
4	0,44	0,64	0,00012	3,56	14,24
5	0,35	0,70	2,4E-06	4,65	18,59

Из таблицы видно, что функция стоимости достигает минимума при $n = 2$.

Задание. В автоматизированную информационную систему поступают запросы с интенсивностью $\lambda = 2$ (запросов в минуту). Средняя время продолжительность ответа могут бить соответственно: $t_{\text{отв}}^{(1)} = 10; t_{\text{отв}}^{(2)} = 15; t_{\text{отв}}^{(3)} = 20$; сек. Встроенный буфер позволяет хранить информацию о двух запросах. Если в буфере уже хранятся два запроса, то очередной запрос получает отказ.

1. Определите основные вероятностные характеристики эффективности системы.

2. Сравните полученные результаты между собой и преложите наилучший вариант ответа.

5. СМО с неограниченным ожиданием и ограниченной длиной очереди

Пусть имеется n - канальная СМО с очередью, на которую не наложено ограничений ни по длине очереди, ни по времени ожидания. В силу неограниченности очереди каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому $P_{обсл} = 1$, $P_{отк} = 0$. Для СМО с неограниченной очередью накладывается ограничение $p/n < 1$. Если это условие нарушено, то очередь растет до бесконечности, наступает явление «**взрыва**». Вероятность простоя каналов равна

$$P_0 = \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\rho^j}{j!} \right) + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}$$

Вероятность занятости обслуживанием k каналов равна

$$P_k = \rho^k \frac{P_0}{k!}, 1 \le k \le n.$$

Вероятность занятости обслуживанием всех каналов при отсутствии очереди равна

$$P_n = \rho^n \frac{P_0}{n!}$$

Вероятность наличия очереди есть вероятность того, что число требований в системе больше числа каналов:

$$P_{оч} = \rho^{n+1} \frac{P_0}{n!(n-\rho)}.$$

Вероятность попадания заявки в очередь есть вероятность занятости всех каналов. Эта вероятность равна сумме вероятностей наличия очереди и занятости всех n каналов при отсутствии очереди:

$$P_{зан} = P_n + P_{оч} = \rho^n \frac{p_0}{(n-1)!(n-\rho)}.$$

Среднее число занятых обслуживанием каналов равна

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Доля каналов, занятых обслуживанием равна,

$$q = \frac{\bar{k}}{n}.$$

Среднее число заявок в очереди (длина очереди) равно

$$L = \rho^{n+1} \frac{P_0}{(n-1)!(n-\rho)^2}$$

Среднее число заявок в системе равно

$$M = L + T = L + p.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди равно

$$t = \frac{L}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе равно

$$T = t + \frac{1}{\mu},\ T = \frac{M}{\lambda}.$$

Имеется n-канальная система с ожиданием, в которой количество заявок, стоящих в очереди, ограничено числом m, т.е. заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь, только если в ней находится менее m заявок. Если число заявок в очереди равно m, то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему необслуженной.

Системы с ограниченной очередью являются обобщением двух рассмотренных ранее СМО: при $m = 0$ получаем СМО с отказами, при $m = \infty$ получаем СМО с ожиданием.

Вероятность простоя каналов

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}.$$

Вероятность отказа в обслуживании равна вероятности p_{n+m} того, что в очереди уже стоят m заявок:

$$P_{отк} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m} P_0}{n! n^m}.$$

Относительная пропускная способность есть величина, дополняющая вероятность отказа до 1, т.е. вероятность обслуживания

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк}.$$

Абсолютная пропускная способность определяется равенством

$$A = \lambda(1 - P_{отк}) = \lambda P_{обсл},$$

Среднее число занятых каналов определяется равенством

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho P_{обсл},$$

Средняя длина очереди системы, т.е. среднее число заявок в очереди определяется равенством

$$L = \frac{P_0 \rho^n \left(\frac{\rho}{n} - (m+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1} + m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+2}\right)}{n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}.$$

Среднее время ожидания обслуживания в очереди равно

$$t = \frac{L}{\lambda}.$$

Среднее число заявок в СМО равно

$$M = L + к.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО равно

.

$$T = t + \frac{1}{\mu},\ T = \frac{M}{\lambda}$$

6. Замкнутые системы массового обслуживания

До сих пор мы рассматривали СМО, в которых входящий поток никак не связан с выходящим. Такие системы называются *разомкнутыми*. В некоторых же случаях требования, которые были обслужены, после задержки опять могут поступать на вход.

Такие *системы массового обслуживания* называются ***замкнутыми.*** Например, такие объекты, как, поликлиника, обслуживающая данную территорию, бригада рабочих, закрепленная за группой станков, являются примерами замкнутых систем. В замкнутой СМО циркулирует одно и то же конечное число потенциальных требований. Пока потенциальное требование не реализовалось в качестве требования на обслуживание, считается, что оно находится в блоке задержки. В момент реализации оно поступает в саму систему. Например, рабочие обслуживают группу станков. Каждый станок является потенциальным требованием, превращаясь в действующее в момент своей поломки. Пока станок работает, он находится в блоке задержки, а с момента поломки до момента окончания ремонта — в самой системе. Каждый рабочий является каналом обслуживания.

Пусть $n-$общее число каналов обслуживания, $s-$число потенциальных заявок, $n<s$, λ- интенсивность потока заявок каждого потенциального требования, $\mu-$интенсивность обслуживания. Тогда, в соответствии наших обозначений коэффициент загрузки системы равна $\rho=\lambda/\mu.$ Вероятность простоя системы определяется формулой

$$P_0=\left(s!\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\rho^j}{(s-j)!\,j!}+\sum_{j=n+1}^{s}\frac{\rho^j}{(s-j)!\,n^{j-n}n!}\right)\right)^{-1}$$

Финальные вероятности состояний системы определяются в виде:

$$P_k=\frac{s!\rho^k P_0}{(s-k)!k!},\qquad k<n,$$

$$P_k=\frac{s!\rho^k P_0}{(s-k)!n^{k-n}\,n!},\qquad n\le k\le s.$$

Через эти вероятности выражается среднее число занятых каналов

$$\bar{k}=P_1+2P_2+\ldots+n(P_n+P_{n+1}+\ldots+P_s)$$

Через $\bar{k}$ находим абсолютную пропускную способность системы

$$A=\bar{k}\cdot\mu,$$

а также среднее число заявок в системе

$$M=s-\frac{\mu\bar{k}}{\lambda}=s-\frac{\bar{k}}{\rho}.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 3. На вход трехканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью равной 4 заявки в минуту, время обслуживания заявки одним каналом $t_{обсл}$ = $1/\mu$ = 0,5 мин. Выгодно ли с точки зрения пропускной способности СМО заставить все три канала обслуживать заявки сразу, при этом среднее время обслуживания уменьшается втрое? Как это скажется на среднем времени пребывания заявки в СМО?

Решение. Вероятность простоя трехканальной СМО согласно формуле равна

$$\rho=\lambda/\mu=4/2=2,\ n=3$$

$$P_0=\frac{1}{1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}}\approx 0{,}158$$

Вероятность отказа определяем по формуле вероятности отказа:

$$P_{отк} = \frac{2^3 P_0}{3!} \approx 0,21$$

Относительная пропускная способность системы равна

$$P_{обсл} = 1 - 0,21 = 0,79$$

Абсолютная пропускная способность системы равна

$$A = \lambda P_{обсл} \approx 3,16 .$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k} \approx 1,58$, доля каналов, занятых обслуживанием равно,

$$q = \frac{\bar{k}}{n} \approx 0,53$$

Среднее время пребывания заявки в СМО находим как вероятность того, что заявка принимается к обслуживанию, умноженную на среднее время обслуживания: $t_{СМО} \approx 0,395$ мин.

Объединяя все три канала в один, получаем одноканальную систему с параметрами μ = 6, ρ = 2/3. Для одноканальной системы вероятность простоя равна

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho} = 0,6 .$$

вероятность отказа равна

$$P_{отк} = \rho P_0 = 0,4 ,$$

относительная пропускная способность равна

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 0,6 ,$$

абсолютная пропускная способность равна

$$A = \lambda P_{обсл} \approx 2,4 .$$

Среднее время пребывания заявки в СМО равно

$$t_{СМО} = P_{обсл} \frac{1}{\mu} = 0,1\,мин .$$

В результате объединения каналов в один, пропускная способность системы снизилась, так как увеличилась вероятность отказа. Тем самым, среднее время пребывания заявки в системе уменьшилось.

Пример 4. На вход трехканальной СМО с неограниченной очередью поступает поток заявок с интенсивностью λ = 4 заявки в час, среднее время обслуживания одной заявки t= 1/μ 0,5 ч. Найти показатели эффективности работы системы.

Решение. Для рассматриваемой системы n = 3, λ= 4, μ = 1/0,5 = 2, ρ = λ /μ = 2, ρ /n = 2/3 < 1. Определяем вероятность простоя системы:

$$P_0 = \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4 \frac{2}{3}}{3!(1-2/3)}\right)^{-1} = 1/9 .$$

Среднее число заявок в очереди находим по формуле:

$$L = \frac{2^4 \cdot \frac{1}{9}}{3 \cdot 3! \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{8}{9} .$$

Среднее время ожидания заявки в очереди определяется по формуле:

$$t = \frac{L}{\lambda} = 0,22 \text{ ч.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе равно

$$T = t + \frac{1}{\mu} \approx 0{,}22 + 0{,}5 = 0{,}72\,.$$

Пример 5. В парикмахерской работают 3 мастера, а в зале ожидания расположены 3 стула. Поток клиентов имеет интенсивность X = 12 клиентов в час. Среднее время обслуживания $t_{обсл}$ = 20 мин. Определить относительную и абсолютную пропускную способность системы, среднее число занятых кресел, среднюю длину очереди, среднее время, которое клиент проводит в парикмахерской.

Решение. Для данной задачи n = 3, m = 3, λ = 12, μ= 3, ρ = 4, ρ/n = 4/3.
Вероятность простоя равна:

$$P_0 \approx 0{,}012\,.$$

Вероятность отказа в обслуживании определяем по формуле:

$$P_{отк} = P_{n+m} \approx 0{,}307\,.$$

Относительная пропускная способность системы, т.е. вероятность обслуживания

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 0{,}693\,.$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda P_{обсл} \approx 12 \cdot 0{,}683 \approx 8{,}32\,.$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} \approx 2{,}78\,.$$

Средняя длина очереди $L \approx 1{,}56$.

Среднее время ожидания обслуживания в очереди $t \approx 0{,}13$ ч.

Среднее число заявок в СМО

$$M = L + \bar{k} \approx 4{,}34\,.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО

$$T = M / \lambda \approx 0{,}36 \text{ ч.}$$

Пример 6. Рабочий обслуживает 4 станка. Каждый станок отказывает с интенсивностью λ = 0,5 отказа в час, среднее время ремонта $t_{рем}$ = 1/μ = 0,8 ч. Определить пропускную способность системы.

Решение. Эта задача рассматривает «замкнутую СМО», μ = 1,25, ρ = 0,5/1,25 = 0,4. Вероятность простоя рабочего:

$$P_0 = \frac{1}{4!\left(\frac{1}{4!} + \frac{0{,}4}{3!} + \frac{0{,}4^2}{2!} + 0{,}4^3 + 0{,}4^4\right)} = \frac{1}{6{,}66} \approx 0{,}15\,.$$

Вероятность занятости рабочего $P_{зан} = 1 - P_0 \approx$ *0,85.* Если рабочий занят, он налаживает μ станков в единицу времени, пропускная способность системы $A = (1 - P_0)\mu = 0{,}85\mu \approx 1{,}06$ станков в час.

В заключении читателю рекомендуется обратиться к более обстоятельным источникам, с целью получения углубленного знания по этому разделу [12]

<u>Тема 23</u>. Моделирование случайных величин методом Монте – Карло

1. Предмет метода Монте-Карло

Датой рождения метода Монте – Карло принято считать 1949 год, когда учёные Н. Метрополис и С.Улам опубликовали статью под названием «Метод Монте – Карло», в которой изложили суть своего метода. Название метода связано с названием города Монте – Карло, где в игорных домах (казино) играют в рулетку, которая является одним из простейших устройств для получения, так называемых, «***случайных чисел***», на использование которых основан данный метод.

ЭВМ позволяют легко получать, так называемые, «***псевдослучайные числа***» (при решении задач их часто применяют вместо случайных чисел). Это привело к широкому внедрению метода во многие области науки и техники (статистическая физика, теория массового обслуживания, теория игр и др.). Метод Монте – Карло используют для вычисления интегралов, в особенности многомерных, для решения систем алгебраических уравнений высокого порядка, для исследования различного рода сложных систем (автоматического управления, экономических, биологических и т.д.).

Сущность метода Монте – Карло состоит в следующем: *требуется найти значение числа* a некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно a: $MX = a$, т.е. решит указанное функциональное уравнение. Эта задача в общем случае весьма сложная и трудная.

Практически же поступают так: производят n испытаний, в результате которых получают n возможных значений $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$; вычисляют их среднее арифметическое

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

и принимают $\overline{x}$ в качестве оценки (приближённого значения) $a^\bullet$ искомого числа a: $a^\bullet \approx a = \overline{x}$.

Поскольку метод Монте – Карло требует проведения большого числа испытаний, его часто называют *методом статистических испытаний*. Теория этого метода указывает, как наиболее целесообразно выбрать случайную величину X, как найти её возможные значения. В частности, разрабатываются способы уменьшения дисперсии используемых случайных величин, в результате чего уменьшается ошибка, допускаемая при замене искомого математического ожидания числа a его оценкой $a^\bullet$.

Отыскание возможных значений случайной величины X (моделирования) называют «*разыгрыванием случайно величины*». Здесь мы изложим лишь некоторые способы разыгрывания с.в. X и укажем, как оценить допускаемую при этом ошибку.

2. Случайные числа, оценка погрешности метода Монте – Карло

Как уже отметили, метод Монте – Карло основан на применении случайных чисел; приведём определение этих чисел. Обозначим через R н.с.в., распределённую равномерно в интервале $(0;1)$.

Случайными числами называют возможные значения непрерывной случайной величины R*, распределённой равномерно в интервале* $(0,1)$.

В действительности пользуются неравномерно распределённой с.в. R, возможные значения которой, вообще говоря, имеют бесконечное число десятичных знаков, а *квазиравномерной случайно величиной* $R^{\bullet}$, возможное значение которой имеют конечное число знаков. В результате замены R на $R^{\bullet}$ разыгрываемая величина имеет не точно, а приближённо заданное распределение.

В конце книги приведена таблица случайных чисел, заимствованную из книги [10] (приложение 10).

Пусть для получения оценки $a^{\bullet}$ математического ожидания числа a случайной величины X было произведено n независимых испытаний (разыграно n возможных значений) и по ним была найдена выборочная средняя $\bar{x}$, которая принята в качестве искомой оценки $a^{\bullet} = \bar{x}.$.

Ясно, что, если повторить опыт, то будут получены другие возможные значения X. Следовательно, другая средняя и другая оценка числа $a^{\bullet} = \bar{x}.$. Уже отсюда следует, что получит в общем случае точную оценку МО невозможно.

Естественно, возникает вопрос о величине допускаемой ошибки. Ограничимся здесь отысканием лишь верхней границы ε допускаемой ошибки с заданной вероятностью (надёжностью) γ; $P\{|\bar{x} - a| \le \varepsilon\} = \gamma$

Интересующая нас верхняя граница ошибки ε есть не что иное, как «*точность оценки*» математического ожидания по выборочной средней при помощи доверительных интервалов уже шла речь в разделе дополнение 1, тема 21. В связи с этим воспользуемся полученные ранее результатами, и рассмотрим здесь три случая:

2.1 Случайная величина X распределена нормально и ее среднее квадратическое отклонение σ известно. В этом случае с надёжностью γ верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

где $n-$число испытаний (разыгранных значений X); $t-$значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \gamma/2$, $\sigma-$известное среднее квадратическое отклонение X.

Пример 1. С надёжностью $\gamma = 0{,}95$ найти верхнюю границу ошибки δ, если для оценки математического ожидания, нормально распределённой сл. величины X с известным (заданным) средним квадратическим отклонением σ, равным $0{,}5$ было разыграно 100 возможных значений величины X.

Решение. По условию данного примера, $n = 100, \sigma = 0{,}5; \Phi(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475.$ По таблице функции Лапласа находим $t = 1{,}96$. Искомая верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}098.$$

2.2 Случайная величина X распределена нормально и ее среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. В этом случае с надёжностью γ верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{t_{\gamma} \cdot s}{\sqrt{n}}, \qquad (2)$$

где $n-$число испытаний (разыгранных значений X); $t_{\gamma}-$значение аргумента функция Лапласа, которое находят по таблице функции Лапласа, $\Phi(t) = \gamma/2$, $s-$неизвестное «исправленное» среднее квадратическое отклонение X.

Пример 2. С надёжностью $\gamma = 0{,}95$ найти верхнюю границу ошибки δ, если для оценки математического ожидания, нормально распределённой случайной величины X было разыграно 100 её возможных значений и по ним найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s, равным $0{,}5$.

Решение. По условию данного примера, $n = 100, s = 0{,}5;$ По таблице определения значений величины t_{γ} находим: $t_{\gamma} = 1{,}984$. Искомая верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{1{,}984 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}099.$$

2.3 Случайная величина X распределена по закону, отличному от нормального закона.

В этом случае при достаточно большом количестве испытаний $(n > 30)$ с надёжностью, приближённо равной γ, верхняя граница ошибки может быть вычислена по формуле (1), если среднее квадратическое отклонение σ случайной величины X известно; если же σ неизвестно, то можно в формуле (1) величина σ заменяется либо «исправленной» оценкой s, либо воспользуются равенством (2).

Следует заметить, что чем больше n, тем меньше различие между результатами, которые дают обе формулы. Это явление объясняется тем, что при $n \to \infty$ распределение Стьюдента стремится к нормальному закону. В частности, в примерах 1 и 2, в случае $n = 100$ и $\gamma = 0{,}95$ по формуле (1) верхняя граница ошибки равна $0{,}098$, а по формуле (2) она равна в $0{,}099$. Как видим, результаты отличаются незначительно (на одну тысячную).

Замечание. Для того чтобы найти (определить) наименьшее число испытаний, которые обеспечат наперёд заданную (заранее намеченную) границу верхнюю границу ошибки δ, надо выразить число n на формул (1) и (2):

(3)
$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}, \quad n = \frac{t_\gamma^{\,2}\sigma^2}{\delta^2},$$

Например, для наших примеров, если $\delta = 0{,}0098, t = 1{,}96, \sigma = 0{,}5,$ то минимальное число испытаний, при которых ошибка не превысит 0,098, равно

(4)
$$n = \frac{(1{,}96)^2 \cdot (0{,}5)^2}{(0{,}098)^2} = 100.$$

3. Разыгрывание дискретной случайной величины

Пусть требуется разыграть дискретную случайную величину X, т.е. нужно получить последовательность её возможных значений $x_j \ (j = 1, 2, \cdots, n)$, зная закон распределения X:

(5)
$$\begin{array}{llll} X: & x_1 & x_2 \ \cdots & x_n, \\ P: & p_1 & p_2 \ \cdots & p_n. \end{array}$$

Обозначим через R непрерывную случайную величину, распределённую равномерно в интервале $(0,1)$, а через $r_j \ (j = 1, 2, \cdots)$ – ее возможные значения, т.е. случайные числа.

Разобьём интервал $0 \le R \le 1$ на оси Or точками с координатами

$$p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \cdots, p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{n-1}$$

на n частичных интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$:

Дл. $\Delta_1 = p_1 - 0 = p_1$

Дл. $\Delta_2 = (p_1 + p_2) - p_1 = p_2$

....

....

Дл. $\Delta_n = 1 - (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) = p_n.$

Таким образом, видим, что длина частичного интервала с индексом i равна вероятности с тем же индексом:

(6) Дл. $\Delta_i = p_i$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если каждому случайному числу* r_j $(j = 1,2,\cdots)$, *которое попало в интервал* Δ_i,*ставить в соответствие возможное значение* x_i, *то разыгрываемая величина будет иметь заданный закон распределения* (4).

Доказательство. Поскольку при попадания случайного числа r_j в частичный интервал Δ_i, разыгрываемая величина принимает возможное значение x_i, а таких интервалов всего n**,** то разыгрываемая величина имеет те же возможные значения, что и X , а именно $x_1, x_2, \dots x_n$.

Вероятность попадания случайной величины R в интервал Δ_i равна его длине, а в силу (1) Дл. $\Delta_i = p_i$. Таким образом, вероятность попадания R в интервал Δ_i равна p_i. Следовательно, вероятность того, что разыгрываемая величина примет возможное значение x_i, также равна p_i

(поскольку мы условились в случае попадания случайного числа r_j в интервал Δ_iсчитать, что разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i). Итак, разыгрываемая величина имеет заданный закон распределения и справедливо **ПРАВИЛО:**

- для того чтобы разыграть дискретную случайную величину X **, заданную законом распределения**

$$X: \quad x_1, \quad x_2, \cdots, x_n,$$
$$P: \quad p_1, \quad p_2, \cdots, p_n,$$

нужно поступать следующим образом:

1) разбить интервал $(0,1)$ оси $0r$ на n частичных интервалов:

$$\Delta_1 = (0, p_1), \quad \Delta_2 - (p_1, p_1 + p_2), \quad \Delta_n = (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1};1);$$

2) выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число r_j

Если r_j попало в частный интервал Δ_i, то разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_i.

Пример 3. Разыграть восемь значений дискретной случайной величины X , закон распределения которой задан в виде таблицы

$$X: \quad 3 \quad 11 \quad 24$$
$$P: \quad 0{,}25 \quad 0{,}16 \quad 0{,}59$$

Решение. 1. Разобьём интервал $(0,1)$ оси Or точками с координатами $0{,}25$; $0{,}25 + 016 = 0{,}41$ на три равных частичных интервала:

$$\Delta_1 = (0;0{,}25), \Delta_2 = (0{,}25;0{,}41), \Delta_3 = (0{,}41;1).$$

2. Выпишем из таблицы случайных чисел (см. приложения) восемь случайных чисел, например первых восемь чисел: $0{,}10; 0{,}37; 0{,}08; 0{,}99; 0{,}12; 0{,}66; 0{,}31; 0{,}85$.

Случайное число $r_1 = 0{,}10$ попадает частичному интервалу Δ_1, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение $x_1 = 3$. Случайное число $r_2 = 0{,}37$ принадлежит частичному интервалу Δ_2, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение $x_2 = 11$. Аналогично получим остальные возможные значения . Таким образом, разыгранные возможные X таковы: 3; 11; 3; 24; 3; 24; 11; 24.

Замечание. Далее будет показано, что в общем случае, разыгрывание событий можно свести к разыгрыванию ***дискретной случайной величины***.

4. Разыгрывание противоположных событий

Пусть требуется разыграть испытания, в каждом из которых событие A появляется с известной вероятностью p и не появляется с вероятностью $q = 1 - p.$ То-есть $P(\overline{A}) = q$.

Рассмотрим дискретную случайную величину X с двумя возможными значениями (пусть для определённости будут $x_1 = 1; x_2 = 0$) и соответствующими им вероятностями $p_1 = p$ и $p_2 = q$.

Итак, разыгрывание противоположных событий A и $\overline{A}$ сведено к разыгрыванию д.с.в. X с заданным законом распределения

$$X: \quad x_1, \quad x_2, \cdots, x_n,$$
$$P: \quad p_1, \quad p_2, \cdots, p_n,$$

с $MX = p; DX = pq; \sigma_X = \sqrt{pq}$.

Для разыгрывания случайной величины X надо (по правилу пункта **3.)** интервал $(0;1)$ разбить точкой p на два частичных интервала: $\Delta_1 = (0, p)$ и $\Delta_2 = (p, 1)$. Затем выбирают случайное число r_j. Если r_j попадает в интервал Δ_1, то $X = x_1 = 1$ (наступило событие A); если же r_j попадает в интервал Δ_2, то $X = x_2 = 0$ (событие A не наступило).

Правило. Для того чтобы разыграть испытания, в каждом из которых вероятность наступления события A равна p или вероятность не наступления события A равна

$1 - p = q$ (т.е. наступления противоположного события $\overline{A}$), надо выбрать случайное число

$r_j; (j = 1, 2, \cdots)$; если $r_j < p$, то событие A наступило; если же $r_j \geq p,$ то событие A не наступило, т.е. наступило противоположное событие $\overline{A}$.

Пример 4. Разыграть шесть испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p = 0{,}35$.

Решение. Выберем из таблицы случайных чисел (см. приложения) шесть случайных чисел, например: $0{,}10; 0{,}36; 0{,}08; 0{,}99; 0{,}12; 0{,}06$. Считая при $r_j < 0{,}35$ событие A появилось, а при $r_j \geq 0{,}35$ событие A не появилось, т.е. наступило противоположное событие $\overline{A}$. Итак, получим искомую последовательность событий: $A, \overline{A}, A, \overline{A}, A, A.$

5. Разыгрывание полной группы событий

Разыгрывание полной группы n $(n > 2)$ несовместных событий. $A_1, A_2, \cdots, A_n$, вероятности которых $p_1, p_2, \cdots, p_n$ известны, можно свести к разыгрыванию дискретной случайной величины X со следующим законом распределения (для определенности примем $x_1 = 1, x_2 = 2, \cdots, x_n = n)$:

$$\begin{array}{cccccc} X & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ P & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{array}$$

Действительно, достаточно считать, что если в испытании величина X приняла значение $x_j = j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, то наступило событие A_j. Справедливость этого утверждения выводится из того, что число n возможных значений X равно числу событий полной группы и вероятности возможных значений x_j и соответствующих им событий A_j одинаковы: $P(X = x_j) = P(A_j) = p_j$. Таким образом, появление в испытании события A_j равносильно событию, состоящему в том, что дискретная случайная величина X приняла возможно значение x_j.

Правило. Для того чтобы разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий полной группы событий $A_1, A_2, \cdots, A_n$ вероятности которых $p_1, p_2, \cdots, p_n$ известны, достаточно разыграть (по правилу пункта 3) дискретную случайную величину X со следующим законом распределения

X	1	2	3	$\cdots$	n
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Если в испытании величина X приняла возможное значение $x_j = j$, то считается наступило событие A_j.

Пример 5. Заданы вероятности четырех событий, обозначающих полную группу:

$$p_1 = P(A_1) = 0{,}19;\ p_2 = P(A_2) = 0{,}21;\ p_3 = P(A_3) = 0{,}34;\ p_4 = P(A_4) = 0{,}26.$$

Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из четырех заданных событий A_1, A_2, A_3, A_4.

Решение. В соответствии с правилом, приведенным в этом параграфе, надо разыграть дискретную случайную величину X, закон распределения которой задается в виде:

X	1	2	3	4
P	0,19	0,21	0,34	0,26

Согласно правилу пункта 3, разобьем интервал (0; 1) на четыре частичных интервала: $\Delta_1 = (0; 0{,}19), \Delta_2 = (0{,}19; 0{,}40), \Delta_3 = (0{,}40; 0{,}74), \Delta_4 = (0{,}74; 1).$ Выберем из таблицы случайных чисел пять случайных чисел. Например: 0,66; 0,31; 0,85; 0,63; 0,73. Так как случайное число $r_1 = 0{,}66$ принадлежит интервалу Δ_3, то $X = 3,$ следовательно, наступило событие A_3 . Аналогично найдем остальные события.

Итак, искомая последовательность событий такова: $A_3, A_2, A_4, A_3, A_3.$

Пример 6. События A и B независимы и совместны. Разыграть шесть испытаний в каждом из которых, вероятность появления события A равна 0,6, а вероятность появления события B равна 0,2.

Решение. Возможны четыре исхода испытания: (с учётом независимости A и B)

$A_1 = AB,$ причем, $P(AB) = P(A)p(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12;$

$A_2 = A\overline{B},$ причем, $P(A\overline{B}) = P(A)p(\overline{B}) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48;$

$A_3 = \overline{A}B,$ причем, $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})p(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08;$

$A_1 = \overline{A}\overline{B},$ причем, $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})p(\overline{B}) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32.$

Таким образом, задача сведена к разыгрываю полной группы четырех событий: A_1 с вероятностью $p_1 = 0{,}12$; A_2 с вероятностью $p_2 = 0{,}48$; A_3 с вероятностью $p_3 = 0{,}08$; A_4 с вероятностью $p_4 = 0{,}32$.

В свою очередь, в соответствии с правилом настоящего параграфа эта задача сводится к разыгрыванию дискретной случайной величины X , закон распределения которой имеет вид:

X	1	2	3	4
P	0,12	0,48	0,08	0,32

Используем правило пункта 3. Выберем шесть случайных чисел. Например: 0,45; 0,65; 0,06; 0,59; 0,33; 0,70. Построим частичные интервалы: $\Delta_1 = (0; 0{,}12);\ \Delta_2 = (0{,}12; 0{,}60),$
$\Delta_3 = (0{,}60; 0{,}68), \Delta_4 = (0{,}68; 1).$ Таким образом, получим:

- случайное число $r_1 = 0{,}45$ принадлежит интервалу Δ_2, поэтому наступило событие $A_2 = A\overline{B}.$ Аналогично найдем исходы остальных испытаний (**найдите остальные исходы!**)

Итак, искомая последовательность исходов разыгранных испытаний такова: $A\overline{B}, \overline{A}B$, $AB, A\overline{B}, A\overline{B}, \overline{A}\overline{B}$.

Пример 7. События A и B зависимы и совместны. Разыграть четыре испытания, в каждом из которых заданы вероятности $P(A) = 0{,}8,\ P(B) = 0{,}6,\ P(AB) = 0{,}5.$

Решение. Возможны четыре исхода испытания:

$A_1 = AB$, причем, по условии, $P(AB) = 0{,}5;$

$A_2 = A\overline{B}$, причем, $P(A\overline{B}) = P(A) - p(AB) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3;$

$A_3 = \overline{A}B$, причем, $P(\overline{A}B) = p(B) - P(AB) = 0{,}6 - 05 = 0{,}1;$

$A_4 = \overline{A}\overline{B}$, причем, $P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1 - [0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}1] = 0{,}1.$

Таким образом, задача сведена к разыгрываю полной группы четырех событий: A_1 с вероятностью 0,5, A_2 с вероятностью 0,3, A_3 с вероятностью 0,1, A_4 с вероятностью 0,1.

Задание.

Рекомендуем самостоятельно закончить решение, считая для определенности, что выбраны случайные числа: 0,65; 0,06; 0,59; 0,33.

Ответ представляется в виде: $\overline{A}B, AB, A\overline{B}, \overline{A}\overline{B}.$

Указание. Так как $A = AB + A\overline{B}$, то $P(A) = P(AB + A\overline{B}).$

Следовательно

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB). .....$$

Аналогично получим, что

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB).$$

6. Разыгрывание непрерывной случайной величины, метод обратных функций

Пусть потребуется разыграть непрерывную случайную величину X, т.е. получить ее возможных значений, x_j $(j = 1,2,...)$, зная функцию распределения $\Phi(x)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Если r_j – случайное число, то возможное значение x_j разыгрываемой непрерывной случайной величины X с заданной функцией распределения* $\Phi(x)$, *соответствующее r_j, является корнем функционального уравнения*

$$\Phi(x_j) = r_j. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть выбрано случайное число r_j $(0 \le r_i < 1)$. Так как в интервале всех возможных значений X функция распределения $\Phi(x)$ монотонно возрастает от 0 до 1, то в этом интервале существует, причем только одно, такое значение аргумента x_j, при котором функция распределения $\Phi(x)$ примет значение r_j. Другими словами, уравнение (7) имеет единственное решение

$$x_j = \Phi^{-1}(r_j),$$

где Φ^{-1} – функция, обратная функции.

Докажем теперь, что корень x_j, уравнения (7) есть возможное значение такой непрерывной случайной величины (временно обозначим ее через ξ, а потом убедимся что X принимает это значение, т.е. $\xi = X$). С этой целью докажем, что вероятность попадания ξ в интервал, например (c, d), принадлежащий интервалу всех возможных значений X, равна приращению функции распределения $\Phi(x)$ на этом интервале:

$$P(c < \xi < d) = \Phi(d) - \Phi(c).$$

В самом деле, так как $\Phi(x)$ – монотонно возрастающая функция в интервале всех возможных значений случайной величины X, то в этом интервале большим значением аргумента соответствуют большие значения, и обратно. Поэтому, если $c < x_j < d$, то $\Phi(c) < r_j < \Phi(d)$ и обратно (с учетом того, что в силу формулы (7) имели $\Phi(x_j) = r_j$).

Из этих неравенств следует, что случайная величина ξ заключена в интервале

(8) $$c < \xi < d,$$

то случайная величина X заключена в интервале

(9) $$\Phi(c) < X < \Phi(d),$$

и обратно. Следовательно, неравенства (8) и (9) равносильны, а значит, и равновероятны:

(10) $$P(c < \xi < d) = P\{\Phi(c) < X < \Phi(d)\}.$$

Так как величина R распределена равномерно в интервале (0; 1), то вероятность попадания R в некоторый подинтервал, принадлежащий интервалу (0; 1), равна его длине. В частности,

$$P\{\Phi(c) < X < \Phi(d)\} = \Phi(d) - \Phi(c).$$

Таким образом, соотношение (10) можно переписать в виде

$$P(c < \xi < d) = \Phi(d) - \Phi(c).$$

Итак, вероятность попадания ξ в подинтервал (c, d) равна приращению функции распределения $\Phi(x)$ на этом подынтервале, а это означает, что. Другими словами, числа x_j, определяемые формулой (7), есть возможные значения случайной величины X с заданной функцией распределения $\Phi(x)$, что и требовалось доказать.

Правило 1. Для того чтобы найти возможное значение x_j непрерывной случайной величины X, зная ее функцию распределения $\Phi(x)$, надо выбрать случайное число r_j, приравнять его функции распределения и решить относительно x_j полученное уравнение

$$\Phi(x_j) = r_j.$$

Замечание 1. Если решить это уравнение в явном виде не удается, то применяют графический или численный методы.

Пример 8. Разыграть три возможных значения непрерывной случайной величины X распределенной равномерно в интервале (2; 10).

Решение. Напишем функцию распределения величины X, распределенной равномерно в интервале (a, b), в виде:

$$\Phi(x) = \frac{(x-a)}{(b-a)}.$$

По условию, $a = 2$, $b = 10$, следовательно,

$$\Phi(x) = \frac{(x-2)}{8}.$$

Используя правило 1 данного параграфа, напишем уравнение для отыскания возможных значений x_j. Для этой цели приравниваем значение функции распределения $\Phi(x)$ случайному числу r_j:

$$\frac{(x_j - 2)}{8} = r_j$$

Отсюда получим: $x_j = 8r_j + 2.$

Выберем три случайных числа, например, $r_1 = 0{,}11$; $r_2 = 0{,}17$; $r_3 = 0{,}66$. Подставим эти числа в уравнение, разрешенное относительно x_j; в итоге получим соответствующие возможные значения случайной величины X:

$$x_1 = 8\cdot 0{,}11 + 2 = 2{,}88;\ x_2 = 8\cdot 0{,}17 + 2 = 3{,}36;\ x_3 = 8\cdot 0{,}66 + 2 = 7{,}28.$$

Пример 9. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному функцией распределения:

$$\Phi(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (x > 0),$$

где параметр $\lambda > 0$ считается известным.

Требуется найти явную формулу для разыгрывания возможных значений X.

Решение. Используя правило 1 данного параграфа, напишем уравнение

$$1 - e^{-\lambda x_j} = r_j.$$

Решим это уравнение относительно x_j:

$$e^{-\lambda x_j} = 1 - r_j \quad \text{или} \quad -\lambda x_j = \ln(1 - r_j).$$

Отсюда

$$x_j = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_j).$$

Случайное число r_j заключено в интервале (0; 1); следовательно, число $1 - r_j$ также случайное и принадлежит интервалу (0; 1). Другими словами, величины R и $1 - R$ распределены одинаково. Поэтому для отыскания x_j воспользоваться более простой формулой

$$x_j = -\frac{1}{\lambda}\ln r_j.$$

Замечание 2. На основании определения функции распределения непрерывной случайной величины с заданной функцией плотности $\varphi(x)$ имеем:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt.$$

В частности,

$$\Phi(x_j) = \int_{-\infty}^{x_j} \varphi(t)dt.$$

Отсюда следует, что если известна плотность вероятности $\varphi(x)$, то для разыгрывания случайной величины X можно вместо уравнения $\Phi(x_j) = r_j$ решить относительно x_j интегральное уравнение

(11) $$\int_{-\infty}^{x_j} \varphi(t)dt = r_j.$$

Правило 2. Для того чтобы найти возможное значение x_j, непрерывной случайной величины X, зная ее функции плотности вероятности $\varphi(x)$, надо выбрать случайное число r_j и решить относительно x_j интегральное уравнение (11) или уравнение

$$\int_{a}^{x_j} \varphi(t)dt = r_j,$$

где a наименьшее конечное возможное значение случайной величины X.

Пример 10. Задан плотность $\varphi(x) = \lambda(1 - (0{,}5)\cdot \lambda x)$ вероятности непрерывной случайной величины X в интервале $(0; 0{,}5\cdot\lambda)$; вне этого интервала $\varphi(x) = 0$. Требуется найти явную формулу для разыгрывания возможных значений X.

Решение. Напишем в соответствии с правилом 2 уравнение

$$\lambda\int_{0}^{x_j} (1 - 0{,}5\cdot\lambda t)dt = r_j,$$

Выполнив интегрирование и решив полученное квадратное уравнение относительно x_j, окончательно получим $x_j = 2(1-\sqrt{1-r_j})\cdot\lambda^{-1}$.

7. Метод суперпозиции

Пусть функция распределения разыгрываемой случайной величины X может быть представлена в виде линейной комбинации двух функций распределения:

$$(*) \qquad \Phi(x) = C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x);\ (C_1 > 0; C_2 > 0).$$

При $x \to \infty$ каждая из функций распределения стремится к единице, поэтому должно выполняться условие, $C_1 + C_2 = 1$.

Введем вспомогательную дискретную случайную величину Z с законом распределения

Z	1	2
P	C_1	C_2

Мы видим, что

$$(12) \qquad P(Z=1) = C_1,\ P(Z=2) = C_2,$$

Выберем два независимых случайных числа r_1 и r_2. По числу r_1 разыгрываем возможное значение Z. Если окажется, что $Z=1,$то ищут искомое возможное значение X из уравнения $\Phi_1(x) = r_1;$ если $Z = 2,$, то решают относительно x уравнение $\Phi_2(x) = r_2$.

Докажем, что функция распределения разыгрываемой случайной величины равна заданной функции распределения. Воспользуемся формулой полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A).$$

Обозначим через Aсобытие $X < x;$ тогда

$$(13) \qquad P(A) = P(X < x) = \Phi(x).$$

Рассмотрим гипотезы $H_1:\ Z=1$ и $H_2:\ \ Z=2.$ Вероятности этих гипотез в силу (12) равна

$$(14) \qquad P(H_1) = P(Z-1) = C_1 \text{ и } P(H_2) = P(Z=2) = C_2.$$

Условные вероятности появления события A соответственно равны:

$$(15) \qquad P_{H_1}(A) = P_{H_1}(X < x) = \Phi_1(x) \text{ и } P_{H_2}(A) = P_{H_2}(X < x) = \Phi_2(x)$$

Представим (13), (14) и (15) в формулу полной вероятности, окончательно получим

$$\Phi(x) = C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x).$$

что и требовалось доказать.

Правило. Для того чтобы разыграть возможное значение случайное величины X , функция распределения которой

$$\Phi(x) = C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x).$$

где $C_1 > 0$; $C_2 > 0$ и $C_1 + C_2 = 1$, надо выбрать два независимых случайных числа r_1 и r_2.Затем по случайному числу r_1 разыграть возможное значение вспомогательной дискретной случайной величины Zпо правилу разыгрывания дискретных случайных величин (см. пункт 3):

Z	1	2
P	C_1	C_2

Если окажется, что $Z=1$, то решают относительно x уравнение, $\Phi_1(x) = r_1;$ если $Z=2$, то решают уравнение $\Phi_2(x) = r_2;$.

Пример 11. Найти явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X , заданной функцией распределения

$$\Phi(x) = 1 - 0{,}25\cdot(e^{-2x} + 3e^{-x});\ 0 < x < +\infty.$$

Решение. Воспользуемся методом суперпозиции, для этой цели представим заданную функцию в виде равенства

$$\Phi(x) = 0{,}25 \cdot (1 - e^{-2x}) + 0{,}75(1 - e^{-x}).$$

Таким образом, можно принять за значениями функции распределения и соответственно определяются константы:

$$\Phi_1(x) = (1 - e^{-2x});\ \Phi_2(x) = 1 - e^{-x});\ C_1 = 0{,}25,\ C_2 = 0{,}75.$$

Введем в рассмотрение вспомогательную дискретную случайную величину .. с заданным законом распределения

Z	1	2
P	0,25	0,75

Выберем независимые случайные числа r_1 и r_2. Разыграем Z по случайному числу r_1, с этой целью согласно пункту 3 построим частичные интервалы $\Delta_1 = (0; 0{,}25),\ \Delta_2 = (0{,}25; 1)$. Если

$r_1 < 0{,}25;$ то $Z = 1,$ если $r_1 \geq 0{,}25$, то $Z = 2$.

Итак, возможное значение с.в. X находят, решая относительно неизвестного x уравнение $1 - e^{-2x} = r_1;$ если $r_1 < 0{,}25;$ или $1 - e^{-x} = r_2;$ если $r_1 \geq 0{,}25;$

Используя способ решения примера 9 из пункта 6, в котором была найдена явная формула $x = -\lambda^{-1} \ln r$ для разыгрывания возможных значений показательного распределения с заданным параметром λ, окончательно получим:

$$x = -0{,}5 \cdot \ln r_1;\quad 0 < 0{,}25 \text{ и } x = -\ln r_2;\ 0{,}25 \leq r_1 < 1.$$

Замечание 2. Метод суперпозиции по аналогию рассмотренного случая обобщается на $n > 2$ слагаемых функций распределения.

Задание. Исследуйте формулу $(*)$ для трёх слагаемых. Проведите аналогичные рассуждения, рассмотренные в случае двух линейных комбинаций функции распределения, для случая трёх функций распределения. Рассмотрите вспомогательную дискретную величину $Z = \{1,2,3\}$ с вероятностями C_1, C_2, C_3, и т.д.

8. Приближенное разыгрывание нормальной случайной величины

Напомним предварительно, что если случайная величина X распределена равномерно в интервале (0; 1), то ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны:

$$MX = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \text{ и } DX = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}. \qquad (16)$$

Составим сумму n независимых, распределенных равномерно в интервале $(0;1)$ случайных величин $X_j \quad (j = 1,2,...,n)$:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = X_1 + X_2 + ... + X_n. \qquad (17)$$

Для нормирования этой суммы найдем предварительно ее математическое ожидание и дисперсию.

Поскольку, математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых, и так как сумма (17) содержит n слагаемых, то математическое ожидание каждого, из которых, согласно (16) равно $1/2$. Следовательно, математическое ожидание суммы (17) вычисляется по формуле

$$M\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \frac{n}{2}.$$

Известно, что дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых. Сумма (17) содержит n независимых слагаемых, дисперсия каждого из которых в силу (16) равна $1/12$; следовательно, дисперсия всей суммы равна

$$D\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \frac{n}{12}.$$

Отсюда извлекая, квадратный корень находим среднее квадратическое отклонение суммы (17)

$$\sigma = \sqrt{n/12}$$

Пронумеруем рассматриваемую сумму, для чего от выражения (17) вычтем математическое ожидание, а затем полученный результат разделим на среднее квадратическое отклонение, получим:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - (n/2)}{\sqrt{n/12}}.$$

В силу центральной предельной теоремы при $n \to \infty$ распределение этой нормированной случайной величины стремится к нормальному закону с параметрами $a = MX = 0$ и $\sigma = 1$. ***При конечном $n < \infty$ это распределение приближенно нормальное***. В частности, при $n = 12$ получим достаточно хорошее и удобное для расчета приближение

$$\sum_{j=1}^{12} X_j - 6.$$

Правило. Для того чтобы разыграть возможное значение x_j нормированной случайной величины X с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, надо сложить 12 независимых случайных чисел и из полученной суммы вычесть число 6, имеем:

$$x_j = \sum_{j=1}^{12} r_j - 6 = S_j - 6.$$

Пример 12.

а) Разыграть 100 возможных значений нормированной случайной величины X с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$.

б) оценить параметры разыгранной величины.

Решение. а) Выберем 12 случайных чисел из первой строки таблицы случайных чисел, затем сложим их и из полученного результата вычтем число 6; в итоге имеем

$$x_1 = (0{,}10 + 0{,}09 + ... + 0{,}67) - 6 = -0{,}99$$

Аналогично, выбирая из каждой строки таблицы случайных числе первые 12 чисел, найдем остальные возможные значения X.

Задание. Найти численные значения последующих значений случайной величины X: $x_2,\ x_3,\ \cdots, x_{12}$.

б) Выполнив расчеты, получим искомые оценки:

$a^* = \overline{x}_b \approx -0{,}05;\ \sigma^{\bullet} = \sqrt{D_b} \approx 1{,}04.$

Оценки удовлетворительные: a^* близко к нулю, σ^* мало отличается от единицы.

Замечание. Если требуется разыграть возможные значения z_j нормально распределенной случайной величины Z с математическим ожиданием $M(Z) = a$ и средним квадратическим отклонением σ_Z. Разыграв по правилу настоящего параграфа возможное значение z_j, находят искомое возможное значение x_j по формуле

$$z_j = \sigma_X \cdot x_j + a.$$

Эта формула получена из соотношения

$$\frac{z_j - a}{\sigma_Z} = x_j.$$

На этом мы завершим раздел разыгрывания случайных величин методом Монте-Карло.

9. Расчёт многоканальной СМО с отказами методом Монте – Карло

Пусть в систему массового обслуживания с отказами (заявка покидает такую систему, если все каналы заняты), состоящую из N каналов, поступает простейший поток заявок (см. пример 5, пункт 2, Т.6), при этом плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными заявками задана равенствами: при $\lambda > 0$,

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\tau}, & 0 \le \tau < \infty \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Каждая заявка поступает в первый канал. Если первый канал свободен, то он обслуживает поступившую заявку; если же первый канал занят, то заявка поступает во второй канал, и он обслуживает заявку (если канал в этот момент свободен) или заявка передаётся в третий канал (если первый и второй каналы заняты) и т.д.

В случае, если в момент поступления заявки все каналы заняты, наступает отказ и поступившая заявка не обслуживается и из дальнейшего рассмотрения исключается.

Ведётся подсчёт количества обслуженных заявок и количество отказов. Если заявка обслужена, то в «*счётчик обслуженных заявок*» добавляют единицу; при отказе единицу добавляют в «*счётчик отказов*».

Ставится задача: *найти математические ожидания количества **обслуженных заявок** и **количества отказов** за фиксированный промежуток времени T.*

Решение. Для решения этой задачи производят n; $(1 \le n \le N)$ испытаний, каждое длительностью времени T, и определяют в каждом испытании число «*обслуженных*» заявок и число «*отказов»*.

Обозначим:

n – число испытаний;

$t_{\text{обсл}}$ – обслуживания заявки каналом;

t_{j} – момент освобождения j – го канал;

T_{k} – момент поступления k – й заявки;

τ_k – длительность времени между поступлениями k – й и $(k+1)$ – й заявок;

$T_{r+1} = (T_k + \tau_k)$ – момент поступления $(k+1)$ – й заявки;

Пусть первая заявка поступила в момент времени, $T_1 = 0$, т.е. когда все каналы свободны. Эта заявка поступит в первый канал и будет им обслужена за время за время $t_{\text{обсл}}$. В счётчик обслуженных заявок надо записать единицу.

Моделируем (разыграем) момент T_2, поступления второй заявки, для чего выбираем случайное число r_1 и разыграем τ_1 (учитывая, τ распределено по показательному закону): по формуле

$$\tau_1 = -(1/\lambda)\ln r_1$$

(см. Пункт 7. пример 2). Следовательно, вторая заявка поступит в момент времени

$$T_2 = T_1 + \tau_1 = 0 + \tau_1 = \tau_1.$$

Если окажется, что $t_1 \le T_2$ (вторая заявка поступила после того, как первый канал освободился), то вторая заявка будет обслужена первым каналом и то первый канал занят, и заявка поступит во второй канал и будет им обслужена, и в счётчик обслуженных заявок надо добавить единицу.

Если же окажется, что $t_1 > T_2$ то первый канал занят, и заявка поступит во второй канал и будет им обслужена, поскольку расчёт начат в предположении, что все каналы свободны; в счётчик обслуженных заявок надо добавить единицу. и в счётчик обслуженных заявок надо добавить единицу.

Дальнейший расчёт производится аналогично. Если в некоторый момент времени поступления очередной заявки все каналы заняты, то наступает отказ и в счётчик отказов надо добавить единицу.

Испытание заканчивается, если очередная заявка поступит в момент времени, превышающий момент окончания испытания, т.е. если наступит момент $T_{k+1} > T$.

В итоге j – о испытания в счётчиках окажутся соответственно число обслуженных заявок $o_j = З_{\mathrm{j}}(обсл)$ – и число отказов $\overline{o}_j = З_{\mathrm{j}}(отк)$.

Пусть произведено всего n испытаний, каждое с временным интервалом T , причём в j – м испытании зарегистрировано $o_j = З_{\mathrm{j}}(обсл)$ обслуженных заявок и $\overline{o}_j = З_{\mathrm{j}}(отк)$ отказов. В качестве оценок искомых математических ожиданий принимают соответственно выборочные средние:

$$M^{\bullet}[З_{обсл}] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} З_j(обсл),\ M^{\bullet}[З_{отк}] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} З_j(\text{отк}).$$

Для вычисления наименьшего числа испытаний, которые с надёжностью γ_p заранее обеспечат заданную верхнюю границу ошибки $\varepsilon = t\sigma/\sqrt{n}$ (см. Т.19, формула (44)). Отсюда следует, что (см. замечание) $n = (t\sigma/\varepsilon)^2$, где t находят по формуле $\Phi_0(t) = \frac{\gamma_p}{2}$ (см.Т.19, (47)), а величина с.к.о для показательного распределения определяется равенством $\sigma = 1/\lambda$.

Пример 13. Предположим, что среднеквадратическое отклонение $\sigma = 4,$ и $\gamma_p = 0{,}95$; $\varepsilon = 0{,}7$. Тогда $\Phi_0(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$ и, по таблице значений функции $\Phi_0(t) = 0{,}475,\ t = 1{,}96$.

Следовательно, минимальное число испытаний равно

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{(1{,}96)^2 \cdot 4^2}{(0{,}7)^2} = [125{,}44] = 125.$$

В наших рассмотрениях предполагалось, что время обслуживания - неслучайная величина; если время обслуживания случайно, то расчёт производится аналогично. Разумеется, для моделирования (разыгрывания) случайного времени обслуживания надо знать закон его распределения для каждого канала. На практике обычно расчёт производят на ЭВМ.

10. Применение метода Монте-Карло к вычислению определённых интегралов

Рассмотрим один из способов вычисления определённых методом Монте-Карло, которая называется «**способ усреднения подынтегральной функции**. Требуется найти оценку интеграла $J^{\bullet}$ определённого интеграла

$$J = \int_a^b f(t)dt.$$

Пусть X случайная величина, распределённая равномерно в интервале интегрирования (a,b) с плотностью распределения $\varphi(x) = 1/(b-a)$.

Тогда математическое ожидание этого распределения вычисляется равенством

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{J}{b-a},$$

Отсюда получим

$$M[\varphi(X)]\cdot(b-a) = J = \int_a^b \varphi(t)dt.$$

Заменим математическое ожидание $M[\varphi(X)]$его оценкой, равной выборочной средней, получим оценку $J^\bullet$ искомого интеграла:

(!) $$J^\bullet = (b-a)\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(x_j),$$

где x_j – возможные значения случайной величины $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Так как величина X распределена равномерно в интервале (a,b) с плотностью распределения $\varphi(x) = 1/(b-a)$. то x_j в соответствии с формулой пункта 7. правило 2, *разыгрывают* по формуле $\frac{1}{b-a}\int_a^{x_j} dt = r_j$.

Отсюда следует, что $x_j = a + (b-a)\cdot r_j$.

Пример 14. Пусть задан определённый интеграл

$$J = \int_1^3 (x+1)dx.$$

Найти:

а) оценку $J^\bullet$;

б) абсолютную погрешность $|\, J - J^\bullet \,|$;

в) дисперсию усредняемой функции $\varphi(X) = X + 1$, учитывая, случайная величина X в интервале (1,3) распределена равномерно;

г) минимальное число испытаний, которые с надёжностью $\gamma_p = 0{,}95$ обеспечат верхнюю границу ошибки $\varepsilon = 0{,}1$.

Решение.

а)Используем формулу **(!)**. По условию примера, имеем

$$a = 1; b = 3;\ f(x) = x + 1.$$

Для простоты пример будем решать при $n = 10$. Тогда оценка $J^\bullet$определяется из равенства

$$J^\bullet = (3-1)\cdot\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(x_j + 1) = \frac{1}{5}\cdot\sum_{j=1}^{10}(x_j + 1).$$

Результаты десяти испытаний приведены в таблице

Номер опыта j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_j	0,100	0,973	0,253	0,376	0,520	0,135	0,863	0,467	0,354	0,876
$2r_j$	0,200	1,946	0,506	0,752	1,040	0,270	1,726	0,934	0,708	1,752
$x_j = 1 + 2r_j$	1,200	2,946	1,506	1,752	2,040	2,270	1,726	1,934	1,708	2,752
$\varphi(x_j) = 1 + x_j$	2,200	3,946	2,506	2,752	3,040	3,270	2,726	2,934	2,708	3752

Сложим все числа последней строки таблицы, находим

$$\sum_{j=1}^{10}\varphi(x_j) = 29{,}834.$$

Следовательно, искомая оценка интеграла равна $J^{\bullet} = 0{,}2 \cdot 29{,}834 = 5{,}967$.

б) Для оценки величины $|J - J^{\bullet}|$ вычислим интеграл J по формуле Ньютона-Лейбница, получим $J = 6$. Поэтому $|J - J^{\bullet}| = 6 - 5{,}967 = 0{,}033$.

в) Найдём дисперсию усредняемой функции плотности $\varphi(X) = X + 1$, с учётом того, что случайная величина X в интервале интегрирования (1,3) распределена равномерно и её дисперсия определяется по формуле $D(X) = (b-a)^2 / 12$ (см. Т.9,пункт 1.). Следовательно, с учётом свойства дисперсии $D(X+1) = D(X)$ получим

$D(X) = (3-1)^2 / 12 = 1/3$.

г) Найдём минимальное число испытаний n, которые с надёжностью 0,95 обеспечит верхнюю границу ошибки $\varepsilon = 0{,}1$. Из равенства $\Phi_0(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475$ и по таблице значений функции Лапласа находим $t = 1{,}96$. Искомое минимальное число испытаний n равно

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{(1{,}96)^2 \cdot 1/3}{(0{,}1)^2} = 128.$$

Дополнение 3

Примеры решения задач с использованием системы «STATISTICA»

1. Краткая характеристика системы

Рассмотрим приемы решения статистических задач с применением специализированной системы статистического анализа данных — STATISTICA. Мы будем использовать свободно-распространяемую версию с электронным учебником [1].

STATISTICA — это универсальная система, включающая расчет набора статистик и графиков, дисперсионный и непараметрический анализ, корреляционный и многомерный регрессионный анализ, кластерный и факторный анализ и т.д. В системе данные организованы в виде наблюдений и переменных. Наблюдения можно рассматривать как эквивалент записей в программе управления базами данных, а переменные — как эквивалент полей. Переменные могут иметь имя, например ВЕС, РОСТ (по умолчанию VAR1, VAR2, ...). Наблюдения (CASE) имеют порядковую нумерацию, но могут содержать имена наблюдений, например Иванов, Петров.

Файлы данных системы STATISTICA помимо исходных данных могут хранить и другую информацию, например:

- ☐ формат отображения;
- ☐ определенные значения, которые нужно пропускать при расчетах;
- ☐ длинные имена переменных и комментариев;

Наборы файлов данных системы STATISTICA (расширение *.sta) можно рассматривать как «рабочие книги», так как они содержат информацию о всех дополнительных файлах (например, графиках, отчетах и программах), которые используются с текущим набором данных.

2. Описательная статистика

Пример 1.

Требуется определить среднюю величину дневной выручки в магазине. Пусть мы располагаем выборкой этой величины, которая фиксировалась кассиром ежедневно в течение месяца. Эти данные приведены в нижеследующей таблице.

День	Выручка (у.е)	День	Выручка (у.е)	День	Выручка (у.е)
1	27479,27	11	38077,50	21	53686,90
2	39469,80	12	69720,76	22	69582,56
3	43501,55	13	38106,10	23	30865,84
4	39264,79	14	50553,20	24	44048,56
5	30043,48	15	43583,21	25	61449,22
6	67662,00	16	41282,52	26	53349,40
7	68987,42	17	46200.47	27	55048,30
8	35961,27	18	45346,07	28	39927,48
9	36232,53	19	54307,78	29	38368,89
10	50277,72	20	67304,06	30	31470,00

Для решения поставленной задачи необходимо будет по данным этой выборки определить математическое ожидание случайной величины (выручки), дисперсию и средне-квадратичное отклонение. Затем построить доверительный интервал на оценку математического ожидания, задавшись приемлемой доверительной вероятностью (например, 95%).

Решение

1. Запустите программу STATISTICA и в переключателе модулей системы (рис.1) выберите режим Основные статистики и таблицы (Basic Statistics). Нажмите клавишу Переключиться в (Switch To) – на экране появится основное окно системы. Как правило, в этом окне откроется таблица с раннее использовавшимся набором данных.

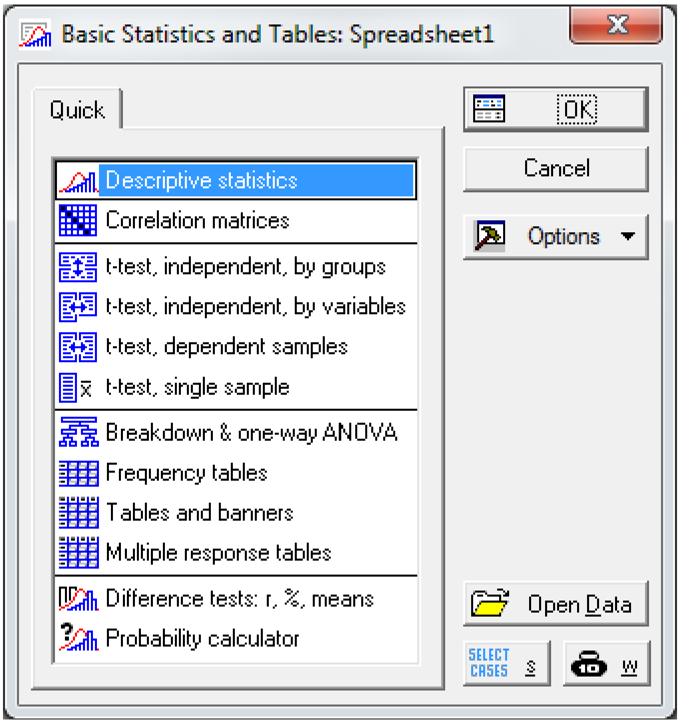


Рис.1. Окно переключателя модулей

2. Теперь нужно создать свою электронную таблицу данных. В основном окне системы выберите меню **Файл** (рис.2) и команду **Создать данные...** (New Data). В диалоговом окне **Открытие файла данных** (Open Data File) (рис.3) выберите нужный каталог и введите имя файла. По умолчанию файлам, содержащим таблицы данных, присваивается расширение *.sta.

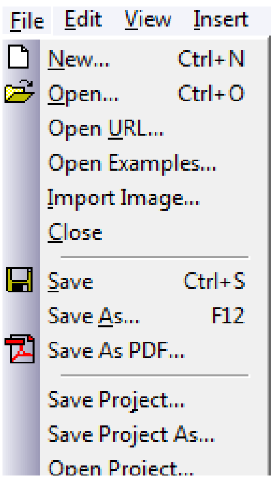


Рис.2. Меню команды файл

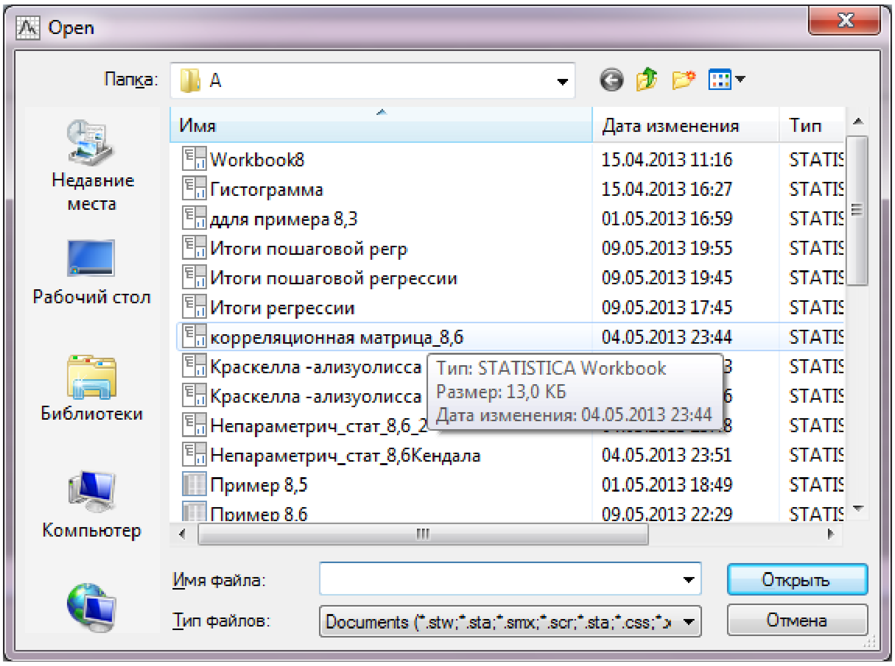


Рис.3. Открытие файла данных

После нажатия кнопки Сохранить (Save) появится пустая таблица данных по умолчанию размером 10 * 10, т.е. 10 **переменных** (VARIABLES) представлены значениями в 10 **наблюдениях** (CASE). В нашем случае имеется всего одна переменная и 30 наблюдений.

Поэтому с помощью меню **Переменные/удалить** (Vars/Deletc) удалите из таблицы переменные VAR2 — VAR10, а с помощью меню **Наблюдения/добавить** (Case/Add) добавьте еще 20 наблюдений после 10-го. Щелкните дважды по ячейке с именем VAR1, задайте имя переменной нашего примера — ВЫРУЧКА (рис. 4) и нажмите кнопку **ОК.**

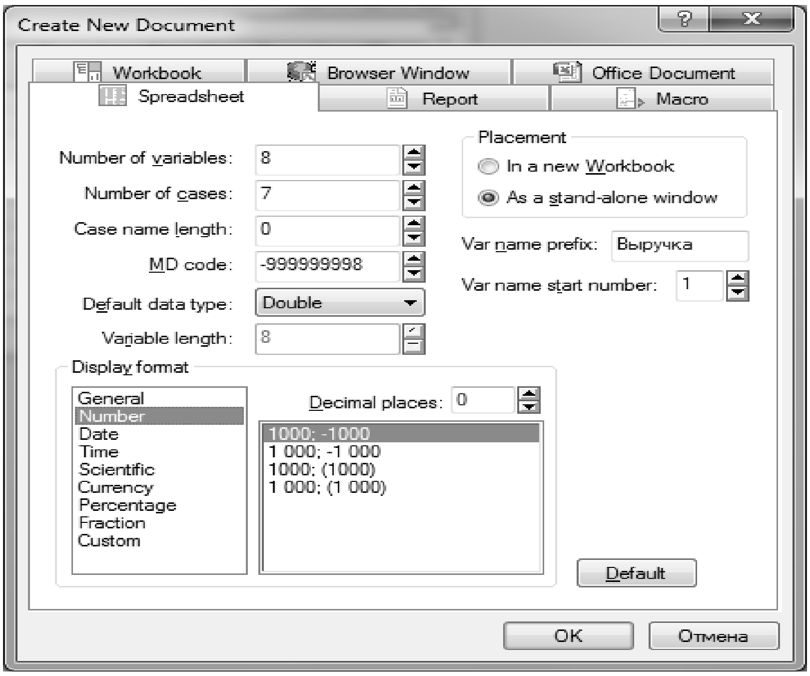


Рис.4. Задание формата для ввода переменной

В окне **Данные** (Data) введите значения выручки в магазине из таблицы 1 и сохраните данные с помощью команды меню **Файл/Сохранить** (File / Save).

3. Теперь можно приступить к расчету требуемых статистических характеристик. С помощью меню **Анализ/Описательная статистика** (Analysis/Decriptive Statistics) вызовите диалоговое окно **Основные статистики и таблицы** (Basic Statistics), выберите команду **Описательные статистики** (Decriptive Statistics) и нажмите **ОК.** В появившемся окне (рис. 5), нажав кнопку **Переменные** (Variables), укажите имя исследуемой переменной; в данном случае она единственная в списке — ВЫРУЧКА.

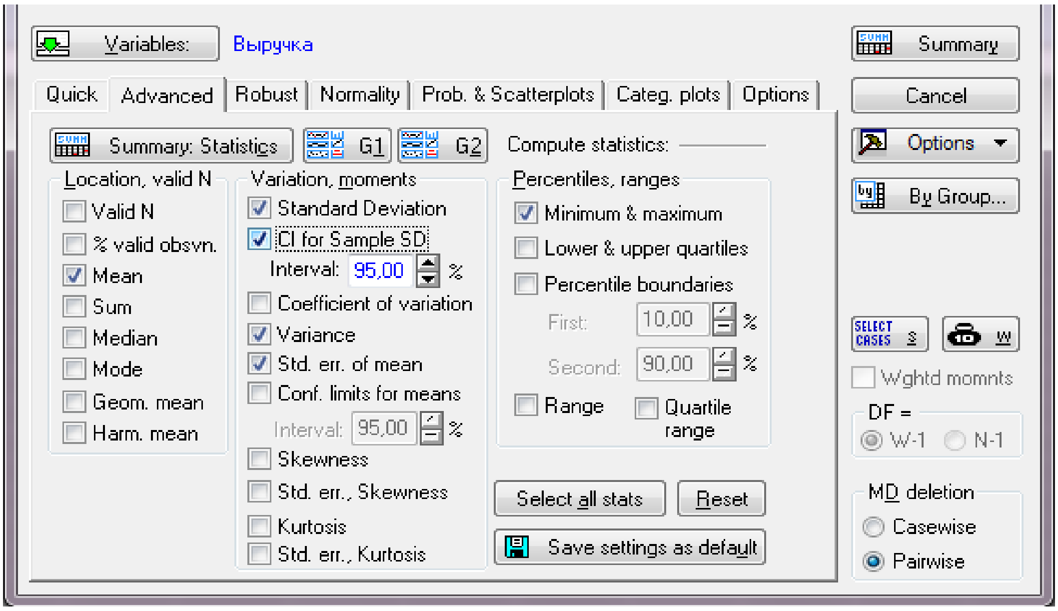
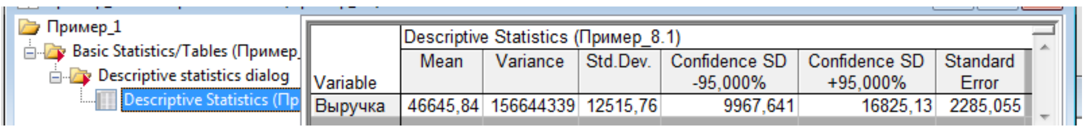


Рис. 5. Диалоговое окно описательной статистики

Вернувшись в окно **Описательные статистики** (Decriptive Statistics), нажмите кнопку **Другие статистики** (More statistics) и в появившемся списке укажите следующие статистические характеристики:

- математическое ожидание (Mean);
- стандартное отклонение (Standard Deviation);
- дисперсия (Variance);
- стандартная ошибка (Standard error of mean);
- доверительный интервал на математическое ожидание при доверительной вероятности 95% (95% confidence limits of mean).

Запустите вычислительную процедуру, нажав кнопку **ОК.** На экране появится следующая таблица результатов (рис. 6). Из этой таблицы можно легко увидеть, что величина ежедневной выручки в магазине с вероятностью 95% лежит в пределах от 42304,96 до 51772,28 (у.е.) и в среднем составляет 47038,62 (у.е.).



Descriptive Statistics (Пример_8.1)

Variable	Mean	Variance	Std.Dev.	Confidence SD -95,000%	Confidence SD +95,000%	Standard Error
Выручка	46645,84	156644339	12515,76	9967,641	16825,13	2285,055

Рис. 6. Результ ат

расчета основных характеристик случайной величины

Визуальную интерпретацию результатов можно представить с помощью двумерного графика. В диалоговом окне **Описательные статистики** нажмите клавишу **Графики «ящики с усами»** (Box & Wisker Type). В появившемся окне выберите тип графика: **Среднее/Стандартная ошибка/Стандартное отклонение** (Mean/SE/SD). Нажмите **ОК** и получите графическое окно (рис. 7).

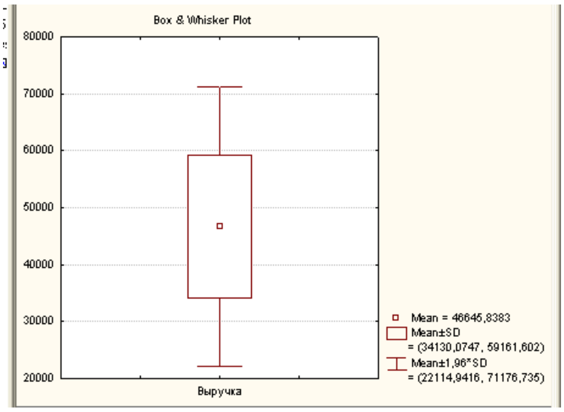


Рис. 7. Диаграмма размаха значений случайной величины

Смысл этого графика достаточно прост: точка в центре прямоугольника (ящика) соответствует среднему значению выручки. От этого значения откладываются положительная и отрицательная величины стандартной ошибки (ширина ящика) и положительная и отрицательная величины стандартного отклонения (усы)

3. Построение гистограммы и проверка закона распределения

Пример 2.

Во многих случаях, перед тем как проводить основной анализ данных, требуется установить: к какому из известных законов распределения вероятности принадлежит наблюдаемая величина? Исследуем прибыль от реализации товара на предприятии как непрерывную случайную величину, распределенную предположительно по нормальному закону. Исходные данные о прибыли, полученные при ее ежедневной регистрации в течение 100 дней (объем выборки n= 100), приведены в таблице ниже.

Исходные данные к примеру 2

День	Прибыль	День	Прибыль	День	Прибыль	День	Прибыль	День	Прибыль
1	47,00	21	43,10	41	46,73	61	66,61	81	35,56
2	37,22	22	33,10	42	46,30	62	33,88	82	41,53
3	52,44	23	31,53	43	63,43	63	55,39	83	34,78
4	62,76	24	40,22	44	49,15	64	59,02	84	46,37
5	61,98	25	42,26	45	48,14	65	69,19	85	49,68
6	67,33	26	28,82	46	44,87	66	49,15	86	50,28
7	28,16	27	44,32	47	69,72	67	44,76	87	46,77
8	47,66	28	45,96	48	58,66	68	56,75	88	71,95
9	60,95	29	51,35	49	73,76	69	46,19	89	32,58
10	39,13	30	46,35	50	43,45	70	57,58	90	42,64
11	24,22	31	56,94	51	50,72	71	72,06	91	54,44
12	64,48	32	53,23	52	58,30	72	64,44	92	56,18
13	37,20	33	40,60	53	58,62	73	63,04	93	52,13
14	43,46	34	47,59	54	43,63	74	51,13	94	39,73
15	57,58	35	51,32	55	40,77	75	50,02	95	62,38
16	54,67	36	55,58	56	61,11	76	54,54	96	46,89
17	58,75	37	51.39	57	37,99	77	49,74	97	41,60
18	55,96	38	40,89	58	34,41	78	39,45	98	41,79
19	36,28	39	68,85	59	57,11	79	32,25	99	45,71
20	38,84	40	54,87	60	56,38	80	58,28	100	45,47

Решение

1. Запустите программу STATISTICA и в окне **Переключателя модулей** (см. рис.1) выберите **Основные статистики и таблицы** (Basic Statistics). Введите исходные данные в

файл *Пример_2.sta* аналогично примеру 1, при этом таблица данных будет содержать одну переменную — ПРИБЫЛЬ и 100 наблюдений (рис. 8).

Задайте команду **Продолжить анализ** (Resume Analysis) и в появившемся окне **Описательные статистики** (Decriptive Statistics) (рис. 9)

	1 День	2 Прибыль
1	1	47
2	2	48,2
3	3	45,2
4	4	46,8
5	5	51,2
6	6	53,5
7	7	58,5
8	8	56,52
9	9	45,5
10	10	45,8
11	11	69,72
12	12	72,5
13	13	73,5
14	14	68,2
15	15	64,5
16	16	66,8
17	17	58,8

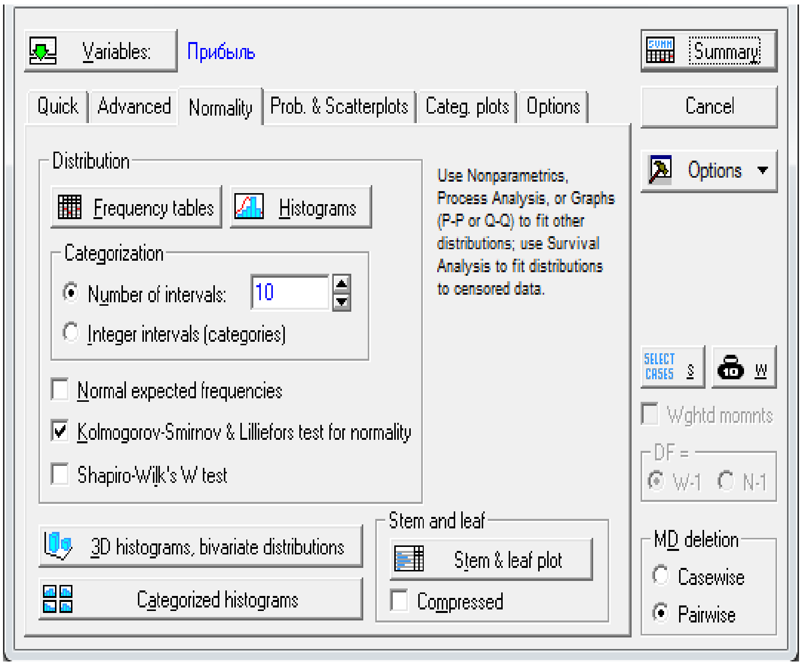


Рис.8. Исходные данные Рис.9. Окно описательной статистики

активизируйте метку **Крит, нормальности Колмогорова-Смирнова** (K-S and lilliefors test for normality), а также укажите число интервалов (Numbers of interval) для построения гистограммы.

2. Нажмите кнопку **Таблицы частот** (Frequency tables) и получите таблицу результатов (рис. 10).

В первом столбце таблицы показаны границы интервалов *Группа,* причем в некоторых случаях число интервалов может отличаться от заданного, так как программа автоматически контролирует минимальное значение. Для каждого интервала приводится число попаданий в интервал — *Частота (count)* и статистическая функция распределения — *Кумул. Частота (Cumul. count)*.

Frequency table: Прибыль (ПримерЯ_9.2)
K-S d=,09071, p> .20; Lilliefors p> .20

Category	Count	Cumulative Count	Percent of Valid	Cumul % of Valid	% of all Cases	Cumulative % of All
10,00000<x<=20,00000	0	0	0,00000	0,0000	0,00000	0,0000
20,00000<x<=30,00000	3	3	10,00000	10,0000	10,00000	10,0000
30,00000<x<=40,00000	5	8	16,66667	26,6667	16,66667	26,6667
40,00000<x<=50,00000	13	21	43,33333	70,0000	43,33333	70,0000
50,00000<x<=60,00000	4	25	13,33333	83,3333	13,33333	83,3333
60,00000<x<=70,00000	5	30	16,66667	100,0000	16,66667	100,0000
Missing	0	30	0,00000		0,00000	100,0000

Frequency table: Прибыль (ПримерЯ_9.2)

Рис. 10. Таблица частот

Гипотеза о нормальном законе распределения проверяется с помощью критерия Колмогорова-Смирнова. В информационной части окна приводится значение критерия К-С d = 0,055 при минимальном уровне значимости p > 0,20, что свидетельствует о возможности принятия гипотезы о нормальном законе распределения. Это наглядно видно на графике (рис. 11), который получится после нажатия кнопки **Гистограммы** (Histograms).

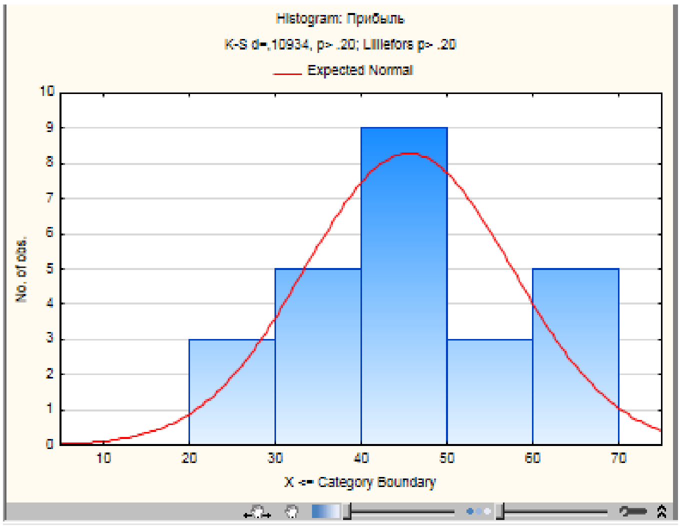


Рис.11. Гистограмма, полученная по выборке

(Decriptive Statistics) в заключение получим результирующую таблицу (рис.12), в которой приводятся основные статистические характеристики этой выборки.

	Descriptive Statistics (Пример 9.2)				
Variable	**Valid N**	Mean	Minimum	Maximum	Std.Dev.
День	100	50,50000	1,00000	100,0000	29,01149
Прибыль	100	51,84310	41,50000	73,5000	6,28895

Рис.12. Результат расчета основных статистик

4. Построение статистических регрессионных моделей

Пример 3.

Исходные данные примера 4 даны ниже в таблице 3. Требуется проанализировать зависимость величины **расходов на питание** от величины **душевого дохода** и **среднего размера семьи.** Построим регрессионное уравнение вида $y =\ y = f(x_1, x_2)$.

Исходные данные к примеру 3

Номер группы	Расход на питание y	Душевой доход x_1	Размер семей x_2
1	433	628	1,5
2	616	1577	2,1
3	900	2659	2,7
4	1113	3701	3,2
5	1305	4796	3,4
6	1488	5926	3,6
7	1645	7281	3,7
8	1914	9350	4,0
9	2411	18807	3,7

Решение

1. Для построения уравнения регрессии запустите пакет STATISTICA и в появившемся окне (см. рис. 1) выберите режим **Множественная регрессия** (Multiple Regression). Введите исходные данные в файл или откройте файл данных для нашего примера, содержащий три переменные **(РАСХ_ПИТ, ДОХОД, РАЗ_СЕМЬИ)** и 9 наблюдений (см. рис. 13).

	1 Расх_пит	2 Доход	3 Разм_семьи
1	433	628	1,5
2	616	1577	2,1
3	900	2659	2,7
4	1113	3701	3,2
5	1305	4796	3,4
6	1488	5926	3,6
7	1645	7281	3,7
8	1914	9350	4
9	2411	18807	3,7

Рис.13. Окно исходных данных

2. В строке команд выберите в команде **Анализ** (Analysis) режим **Продолжить анализ** (Resume Analysis), появится окно **Множественная регрессия** (Multiple Regression) (см. рис. 14). Задайтесь переменными: независимыми **ДОХОД, РАЗ_СЕМЬИ;** зависимой **— РАЗ_ПИТ.**

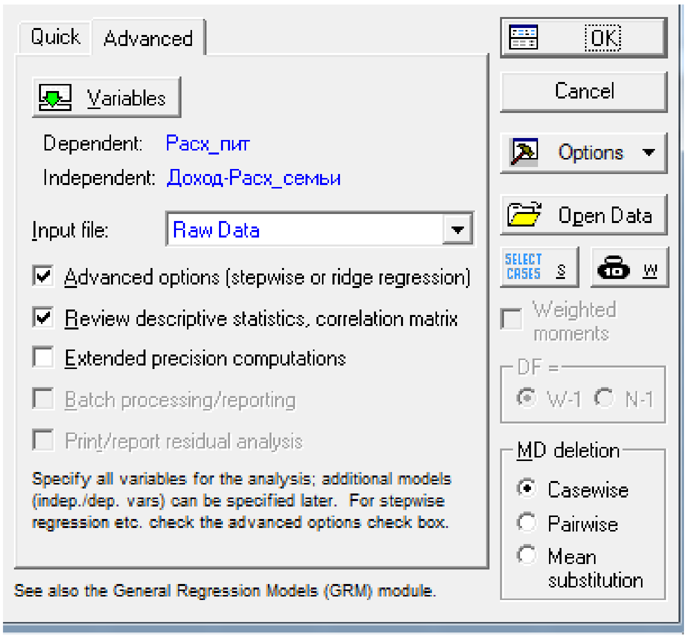


Рис.14. Окно множественной регрессии

3. Активизируйте метки:

- провести анализ по умолчанию (не пошаговый) (Perform default(non-stepwiss) analysis);

- показывать описательные статистики, корр. матрицы (Review descry, stats, corr. matrix).

Нажмите кнопку **ОК.** Получим окно **Просмотр описательных статистик** (Review Descriptive Statistics) (рис. 15).

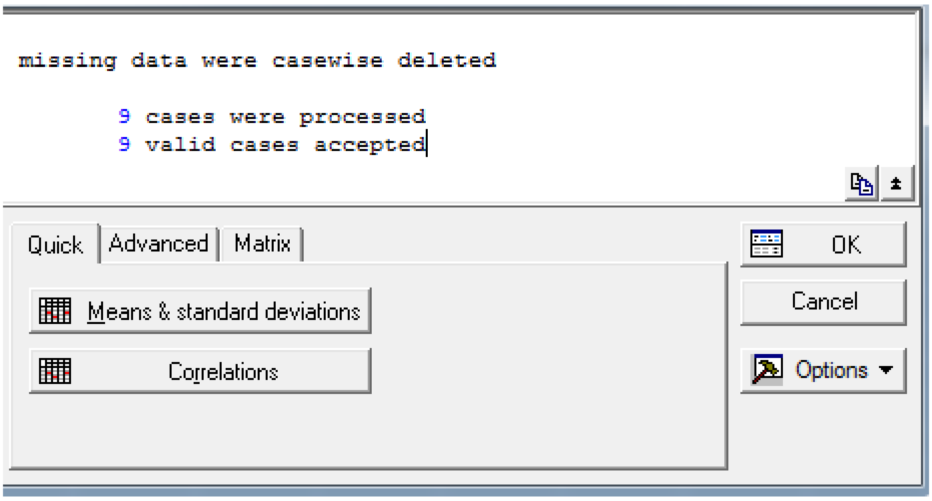


Рис.15. Окно просмотра описательных статистик

4. Нажав кнопку **ОК,** получим окно **Результаты множественной регрессии** (Multiple Regression Results) (рис. 16). Выбрав кнопку **Итоговая таблица регрессии** (Regression summary), получим модель регрессии (рис. 17). Модель имеет вид:

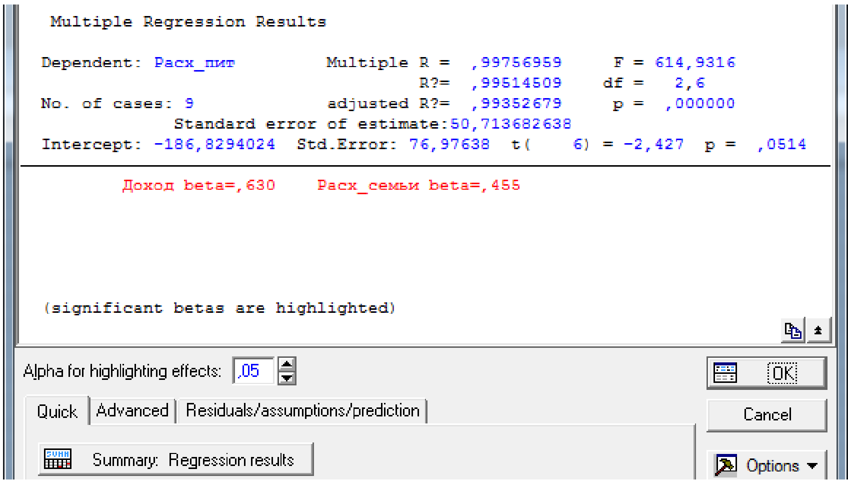


Рис.16. Главное окно результатов

Regression Summary for Dependent Variable: Расх_пит (Пример
R= ,99756959 R?= ,99514509 Adjusted R?= ,99352679
F(2,6)=614,93 p<,00000 Std.Error of estimate: 50,714

N=9	Beta	Std.Err. of Beta	B	Std.Err. of B	t(6)	p-level
Intercept			-186,829	76,97638	-2,42710	0,051365
Доход	0,629797	0,038933	0,072	0,00445	16,17658	0,000004
Расх_семьи	0,455097	0,038933	342,863	29,33121	11,68936	0,000024

Рис.17. Коэффициенты регрессии

Выполняются действия:

$\textit{РАСХ \_ ПИТ} = -186{,}829 + 0{,}072\,\textit{ДОХОД} + + 342{,}863А43\,\_\,\textit{СЕМЬИ}$

- Критерий Фишера

$$F = \frac{S_y^2}{S_{ad}^2} = 614{,}93$$

при минимальном уровне значимости p = 0,0000 и степенях свободы $n_1 = 2$ и $n_2 = 6$, что свидетельствует об адекватности модели.

5. Выбрав кнопку **Дисперсионный анализ** (Analysis of variance), получим суммы квадратов, степени свободы, среднеквадратические ошибки, критерий Фишера и уровень принятия гипотезы (рис. 18).

Effect	Analysis of Variance; DV: Расх_пит (Пример 8,6.sta) Sums of Squares	df	Mean Squares	F	p-level
Regress.	3163058	2	1581529	614,9316	0,000000
Residual	15431	6	2572		
Total	3178489				

Рис. 18. Проверка адекватности модели

Нажав кнопку Далее (Continue), вернемся в окно Результаты множественной регрессии (Multiple Regression Results) (см. рис. 19). Для выхода из метода следует нажать кнопку Отмена (Cancel).

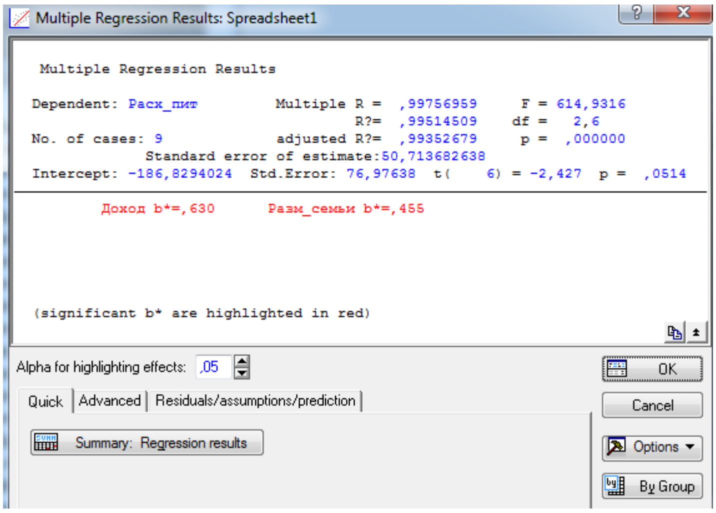


Рис.19.

5. Построение статистических моделей методом шаговой регрессии

Пример 4

Рассмотреть решение задачи по данным примера 3 методом шаговой регрессии. Исходные данные вводятся аналогично регрессионному анализу.

Решение:

1. Запустите пакет STATISTICA и в появившемся окне (см. рис. 1) выберите режим **Множественная регрессия** (Multiple Regression)

2. Откройте файл с данными регрессионного анализа, который содержит три переменные – **РАСХ_ПИТ**, **ДОХОД РАЗ_СЕМЬИ** – и 9 наблюдений (см. рис. 13). Введите новую переменную **КВАДР_Х2**, численно равную квадрату **РАЗ_СЕМЬИ** (рис. 20).

	1 Расх_пит	2 Доход	3 Разм_семьи	4 Квадр_X2
1	433	628	1,5	2,25
2	616	1577	2,1	4,41
3	900	2659	2,7	7,29
4	1113	3701	3,2	10,24
5	1305	4796	3,4	11,56
6	1488	5926	3,6	12,96
7	1645	7281	3,7	13,69
8	1914	9350	4	16
9	2411	18807	3,7	13,69

Рис.20. Окно исходных данных

3. Выберите в строке команд **Анализ** (Analysis) режим Продолжить анализ (Resume Analysis), получим окно **Множественная регрессия** (Multiple Regression) (см. рис.14). Необходимо задаться переменными: независимыми – **ДОХОД, РАЗ_СЕМЬИ** и **КВАДР_Х2**; зависимой – **РАСХ_ПИТ**. Отключите метку Провести анализ по умолчанию (не пошаговый) (Perform default (non-stepwiss) analysis) и нажмите кнопку ОК. Получим окно **Определение модели** (Model Definition) (рис. 21), в котором в списке Процедура (Method) выберите режим **Пошаговая с** включением (Forward stepwise). Измените порог **F-включить** (F to enter), например, на 0,80 или меньшее значение (назначение этой переменной см. Тема 20, раздел 9).

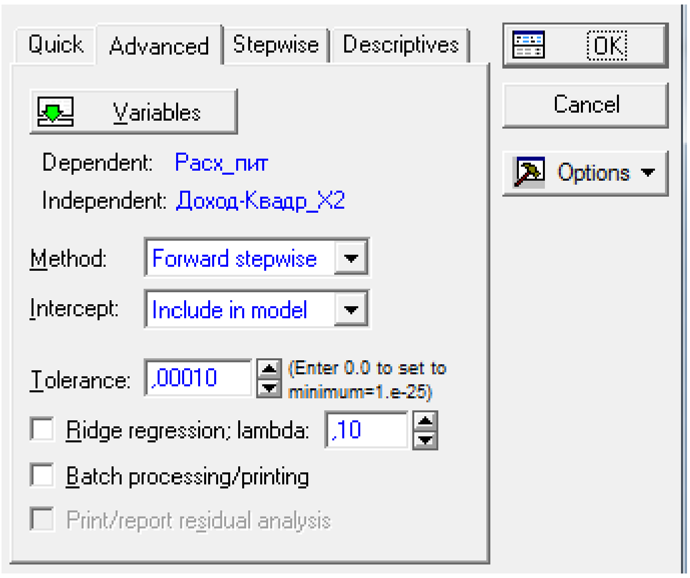


Рис.21. Задание параметров пошаговой регрессии

4. Нажав ОК, получим окно **Пошаговая** множественная **регрессия** (Stepwise Multiple Regression) (рис. 22), в котором указаны включенные переменные.

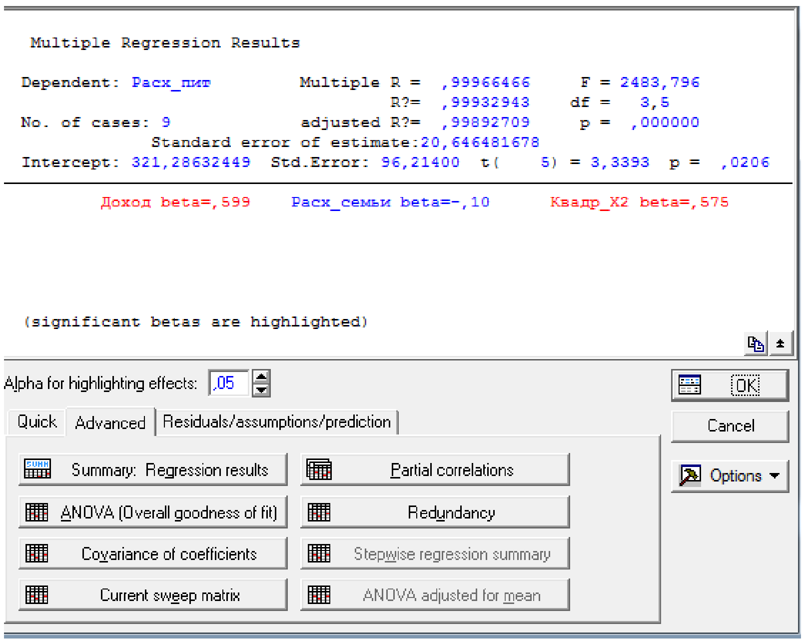


Рис.22. Главное окно результатов шаговой регрессии

Нажав **ОК**, получим окно **Результаты множественной регрессии** (Multiple Regression Results) (см. рис. 20). Выбрав кнопку **Итоги по шагам** (Stepwise (summary)), получим таблицу пошагового включения переменных (рис. 23).

/ariable	Variables currently in the Equation; DV: Расх_пит (Пример 8,8.sta) Beta in	Partial Cor.	Semipart Cor.	Tolerance	R-square	t(7)	p-level
Доход	0,940522	0,940522	0,940522	1,000000	0,00	7,324548	0,000159

Рис.23. Пошаговое включение переменных

5. Выбрав кнопку **Итоговая таблица регрессии** (Regression summary), получим модель регрессии (рис. 24). Модель имеет вид:

Variable	Summary of Stepwise Regression; DV: Расх_пит (Пример 8,8.sta) Step +in/-out	Multiple R	Multiple R-square	R-square change	F - to entr/rem	p-level	Variables included
Доход	1	0,940522	0,884582	0,884582	53,6490	0,000159	1
Квадр_X2	2	0,999603	0,999207	0,114625	867,0917	0,000000	2
Расх_семьи	3	0,999665	0,999329	0,000123	0,9142	0,382919	3

Рис.24. Модель шаговой регрессии

Выполним действия:

РАСХ_ПИТ=321,286 + 0,0685 ДОХОД – 71,91 РАЗ_СЕМЬИ + 78,068 КВАДР_X2

Критерий Фишера F = 2483,8 при минимальном уровне значимости p = 0,000 и степенях свободы n_1 = 3 и n_2 = 5, что свидетельствует об адекватности модели

Нажав на кнопку **Далее** (Continue), вернемся в окно **Результаты множественной регрессии** (Multiple Regression Results) (см.рис. 16). Для завершения работы с шаговым методом следует нажать кнопку **Отмена** (Cancel) активного окна.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = -2(m_Y - \alpha - \beta m_X) = 0\ , \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta\sigma_X^2 - 2r\sigma_X\sigma_Y = 0. \end{cases}$$

Решая систему линейных уравнений относительно неизвестных α и β получим:

$$\beta = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},\ \alpha = -r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X + m_Y\ .$$

Согласно общей теории функция $F(\alpha,\beta)$ при этих значениях α и β принимает своё наименьшее значение (**Убедитесь в этом**!).

Итак, линейная средняя квадратичная регрессия Y и X имеет вид

$$f(x) = \alpha + \beta X = m_Y - r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y\ .$$

Утверждение доказано.

Коэффициент $\beta = r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ называют коэффициентом регрессии Y на X, а прямую

$$y - m_Y = r\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X), \tag{23}$$

называют прямой среднеквадратической регрессии Y на X.

Подставляя найденные значения α и β в равенстве (23), получим минимальное значение функции $F(\alpha,\beta)$, равное $\sigma_Y^2(1-r^2)$, которую называют *остаточной дисперсией с.в.* Y *относительно с.в.* X; она характеризует величину ошибки, которую допускают при замене с.в. Y на линейной функцией $f(X) = \alpha + \beta X$. При $r = \pm 1$ остаточная дисперсия равна нулю; т.е. при этих крайних значениях коэффициента корреляции не возникает ошибки при замене Y в виде линейной функции от X. Следовательно, если $r = \pm 1$, то Y и X между собой связаны линейной функциональной зависимостью.

Аналогично, можно получить прямую линию среднеквадратичной регрессии с.в. X на Y:

$$x - m_X = r\cdot\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - m_Y) \tag{24}$$

($r\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ – коэффициент регрессии X на Y), а также остаточную дисперсию $\sigma_X^2(1-r^2)$ величины X относительно Y.

Если $r = \pm 1$, то обе прямые регрессии, как видно из (23) и (24) совпадают.

Из уравнений (23) и (24) вытекает, что обе прямые регрессии проходят через точку, (m_X, m_Y), которую называют ***центром совместного распределения величин X и Y.***

Важной характеристикой условного распределения вероятностей является условное математическое ожидание.

5. Условное математическое ожидание, линейная корреляция, теорема о нормальной корреляции

При изучении двумерной случайной величины рассматриваются не только числовые характеристики одномерных компонент X и Y, но и числовые характеристики условных распределений: условные м.о. и условные дисперсии.

Условным математическим ожиданием одной из случайной величины, входящих в систему (X,Y) называется её м.о., вычисляемое при условии, что другая с.в. приняла определенное значение (или попала в данный интервал). Обозначается: $M(Y\,|\,X=x)$ и $M(X\,|\,Y=y)$ или $M(Y\,|\,x)$ и $M(X\,|\,y)$. вычисляются соответственно (для д.с.в. и для н.с.в.) по формулам:

(25) $$M(X\,|\,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,p(x_i\,|\,y);\;\; M(X\,|\,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\,\varphi(x\,|\,y)dy,$$

где $\varphi(x\,|\,y)-$ условная вероятностная плотность случайной величины X при $Y=y$. Отметим, что условное математическое ожидание $M(X\,|\,y)$ есть функция от y: $M(X\,|\,y)=g(y)$, называют функцией *регрессии* с.в. X на Y.

Аналогично определяется условное математическое ожидание случайной величины Y

(26) $$M(Y\,|\,x)=\sum_{i=1}^{m}y_j\,p(y_j\,|\,x);\;\; M(Y\,|\,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\varphi(y\,|\,x)dx,$$ и функция *регрессии* Y на $X: M(Y\,|\,x)=f(x)$.

Графики этих функций называются соответственно линиями (или «кривыми») регрессии с.в. X на y и с.в. Y на x. Рассмотрим пример для случая д.с.в.

Пример 6. Дискретная двумерная случайная величина (X,Y) задана таблицей

Y \ X	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,30	0,10	0,03	0,07

Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X=x_1=1$.

Решение. Найдем $p(x_1)$, для этого сложим вероятности, помещенные в первом столбце таблицы.

$$p(x_1)=0{,}15+0{,}30=0{,}45.$$

Найдем условное распределение вероятностей величины Y при $X=x_1=1$.

$$p(y_1\,|\,x_1)=p(x_1,y_1)/p(x_1)=0{,}15/0{,}45=1/3;$$
$$p(y_2\,|\,x_1)=p(x_1,y_2)/p(x_1)=0{,}30/0{,}45=2/3;$$

Вычислим искомое условное математическое ожидание по первой формуле (34):

$$M(Y\,|\,X=x_1)=\sum_{i=1}^{2}y_j\,p(y_j\,|\,x)=3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{2}{3}=5\,.$$

Задание. а) Вычислите величины: $M(Y\,|\,x_i);\quad i=2,\,3,\,4$;

б) Вычислите величины: $M(X\,|\,y_j);\ j=1{,}2.$

Теперь рассмотрим важный случай, когда обе функции регрессии Y на X и X на Y линейны. В этом случае говорят, что с.в. X и Y связаны *линейной корреляционной зависимостью.*

Теорема 12.7. (Теорема о нормальной корреляции). *Если двумерная случайная величина* (X,Y) *распределена по нормальному закону, то с.в.* X *и* Y связаны линейной корреляционной зависимостью.

Доказательство. Найдём условное м.о. $M(Y\,|\,x)$ (т.е. функция регрессии Y на x), используя условный закон распределения с.в. Y при $X=x$, который определяется условной плотностью распределения $\varphi(y\,|\,x)$. На основании формулы (23) п.13.5

$$\varphi(y\,|\,x)=\varphi(x,y)/\varphi_X(x).$$

Совместная плотность $\varphi(x,y)$ задана формулой (40), а плотность распределения составляющей X равна (см.формулу(42))

$$\varphi_1(X)=\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Поэтому, имеем

$$\varphi(y\,|\,x)=\frac{1}{2\pi\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-r_{XY}^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2r_{XY}\cdot\frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]}:$$

$$:\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Произведём упрощения в экспоненте последней формулы, получим

$$-\frac{1}{2(1-r_{XY}^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2r_{XY}\cdot\frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]+\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\cdot\frac{1-r^2}{1-r^2}=$$

$$=-\frac{2}{(1-r^2)}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2r_{XY}\cdot\frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y}-\frac{(x-m_X)^2(1-r^2)}{\sigma_X^2}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)=$$

$$=-\frac{2}{(1-r^2)}\left(\frac{r^2(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2r_{XY}\cdot\frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y}-r\frac{(x-m_X)}{\sigma_X}\right)^2.$$

Следовательно,

(27) $$\varphi(y\,|\,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma_Y\sqrt{1-r^2}\right)}\cdot e^{-\frac{\left(y-[m_Y+r\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)]\right)^2}{2\left(\sigma_Y\sqrt{1-r^2}\right)^2}}.$$

Отсюда легко заметить, что условный закон распределения является нормальным с условным математическим ожиданием и условной дисперсией, определяемыми равенствами:

(28) $$M(Y\,|\,x)=m_Y+r\cdot\frac{\sigma_Y(x-m_X)}{\sigma_X}\ \text{ и }\ D(Y\,|\,x)=\sigma_Y^2(1-r^2).$$

Аналогично

(29) $$M(X\,|\,y)=m_X+r\cdot\frac{\sigma_X(y-m_y)}{\sigma_Y}\ \text{ и }\ D(X\,|\,y)=\sigma_Y^2(1-r^2).$$

Так как обе функции регрессии (28 и (29) линейны, то корреляция между с.в. X и Y линейная. Утверждение доказано.

Задача. Пусть (X,Y) – двумерная нормальная случайная величина с параметрами $m_X = m_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. Найти условную плотность распределения с.в. X при условии, $Y = y$ и с.в. Y при условии, $X = x$.

Указание. Воспользоваться формулами (16) и (17).

Рассмотрим пример, когда система с.в. подчинена линейному закону распределения.

Пример 7. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с функцией плотностью

$$\varphi(X,Y) = \begin{cases} C\cdot(x+y); & \text{в области } (D), \\ 0; & \text{вне области } (D). \end{cases}$$

Область (D) – квадрат, ограниченный прямыми линиями: $x=0, x=3; y=0, y=3$.

Требуется:

1) Определить коэффициент C;

2) вычислить вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрат $(Q)\subset(D)$, ограниченный прямыми линиями: $x=1, x=2; y=1, y=2$;

3) найти математические ожидания m_X и m_Y;

4) найти средние квадратичные отклонения $\sigma_X;\sigma_Y$.

Решение. 1) Коэффициент C находим из интегрального уравнения (контроль):

$$C\cdot\int_0^3\int_0^3 (x+y)dxdy = 1.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^3\int_0^3 (x+y)dxdy = \int_0^3 [(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^3]dx = \{\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\}\Big|_0^3 = 27.$$

Следовательно, $C = 1/27$.

2) $$P\Big\{(X,Y)\subset(Q) = \frac{1}{27}\int_1^2\int_1^2 (x+y)dxdy = \frac{1}{27}\int_1^2 [(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_1^2]dx = \{\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\}\Big|_0^3 = 27.$$

3) Находим математические ожидания m_X и m_Y; имеем

$$m_X = \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 x\cdot(x+y)dxdy = \frac{1}{27}\int_0^3 [(x^2y+\frac{xy^2}{2})\Big|_1^2]dx = \frac{1}{27}\int_0^3 (3x^2+\frac{9x}{2})dx = (27+\frac{81}{4}) = \frac{7}{4}.$$

Аналогично, находится и $m_Y = 7/4$.

4) Находим среднеквадратичные отклонения σ_X и σ_Y: имеем

$$DX = \sigma_X^2 = \iint_{(D)} (x-m_X)^2\varphi(x,y)dxdy = \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^2\cdot(x+y)dxdy = \frac{1}{27}.$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^2\cdot[(x-\frac{7}{4})+(y+\frac{7}{4})]dxdy = \frac{1}{27} = \frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^3\cdot dxdy +$$

$$+\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^2\cdot(y+\frac{7}{4})dxdy = \frac{1}{27}\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^2\cdot y\Big|_0^3 dx + \frac{1}{54}\int_0^3 (x-\frac{7}{4})^2\cdot(y+\frac{7}{4})^2\Big|_0^3 dx =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{(x-7/4)^4}{4}\Big|_0^3 + \frac{1}{27\cdot2\cdot3}\left(\frac{361}{16}-\frac{49}{16}\right)\cdot(x-\frac{7}{4})^3\cdot\Big|_0^3 = \frac{11}{16}.$$

Задание.

1. Найти в примере 7, ковариацию K_{XY} системы случайных величин (X,Y) и коэффициент корреляции r_{XY}.

2. Найти законы распределения составляющих дискретной двумерной случайной величины, заданной законом распределения

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,12	0,18	0,10
y_2	0,10	0,11	0,39

Ответ. $X:\ x_1,\ x_2,\ x_3;\quad Y:\ y_1,\ y_2,$

$P:\ 0{,}22;\ 0{,}29;\ 0{,}49;\quad P: 0{,}40;\ 0{,}60.$

3. Найти вероятность того, что составляющая X двумерной случайной величины примет значение $X<1/2$ и при этом составляющая Y примет значение $y<1/3$, если известна, что интегральная функция системы

$$\Phi(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg2x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg3y+\frac{1}{2}\right).$$

Ответ. $P\left(X<\frac{1}{2};Y<\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{16}.$

4. Найти вероятность попадания случайной точки *(X, Y)* в прямоугольник, ограниченный прямыми: $x=\pi/4;\ x=\pi/2;\ y=\pi/6;\ y=\pi/3;$ если известна интегральная функция

$$\Phi(x,y)=\sin x\sin y;\ \left(0<x<\frac{\pi}{2},0<y<\frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ. $$P\left(\frac{\pi}{4}<X<\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}<Y<\frac{\pi}{3}\right)=0{,}11.$$

5. Найти дифференциальную функцию системы двух случайных величин по известной интегральной функции

$$\Phi(x,y)=(1-e^{-2x})(1-e^{2y});\quad (x\geq 0, y\geq 0).$$

Ответ. $$\varphi(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=6e^{-(2x+3y)}.$$

6. Системы двух с.в. (X,Y) подчинена равенствами:

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} C\cdot\sin(x+y);\ в\quad области\ (D), \\ 0;\quad вне\,области\ (D). \end{cases}$$

Область (D), определяется неравенствами: $0\leq x\leq\pi/2;\quad 0\leq y\leq\pi/2.$

Найти:

1) определить коэффициент C.

2) $\Phi(x,y)=?$

3) математические ожидания m_X и m_Y;

4) средние квадратичные отклонения σ_X и σ_Y;

5) ковариацию K_{XY} системы случайных величин (X,Y) и коэффициент корреляции r_{XY}

Ответ 1) $C=0{,}5$; 2) $m_X=m_Y=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\Phi(x,y)=0{,}5[\sin x+\sin y-\sin(x+y)]$.

3) $\sigma_X=\sigma_Y=\dfrac{\sqrt{\pi^2+8\pi-32}}{4}\Rightarrow\sigma_X\cdot\sigma_Y=\sigma_X^2=\sigma_Y^2=(\pi^2+8\pi-32)/16$.

4) $K_{XY}=\dfrac{8\pi-16-\pi^2}{16}$; $r_{XY}=\dfrac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32}\approx-\dfrac{0{,}73688}{3{,}00232}\approx-0{,}2454.$

7. Система двух случайных величин распределена равномерно: в прямоугольнике (G), ограниченном прямыми линиями: $x=4; x=6; y=10; y=15$, дифференциальная функция сохраняет постоянное значение, а вне этого прямоугольника она равна нулю.

Найти: а) дифференциальную функцию, б) интегральную функцию системы

Ответы. а) $\varphi(x,y)=\begin{cases}0{,}1; & \textit{в области } (D),\\ 0; & \textit{вне области } (D),\end{cases}$

б) $\Phi(x,y)=\dfrac{(x-4)(y-10)}{10}$.

8. Пусть дифференциальная функция системы двух случайных величин имеет вид

$$\varphi(x,y)=\frac{C}{(4+x^2)(9+y^2)}.$$

Найти: а) величину C, б) интегральную функцию системы

Отв. *а*) $C=\dfrac{6}{\pi^2}$; *б*) $\Phi(x,y)=\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{y}{3}+\dfrac{1}{2}\right)$.

9. Двумерная случайная величина задана дифференциальной функцией

$$\varphi(x,y)=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}e^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Найти условные законы распределения составляющих

Отв. $\varphi(x\,|\,y)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2}$; $\varphi(y\,|\,x)=\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+3y)^2}$.

10. Система с.в. (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}C\cdot(x^2+y^2), & \textit{при } x^2+y^2\le r^2,\\ 0; & \textit{при } x^2+y^2>r^2,\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент C.

б) $\Phi(x,y)=?$

Указание. Коэффициент C следует определить из равенства

$$C\cdot\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy=1(\text{контроль}).$$

где (D) – круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=r^2$. Переходите к полярным координатам, тогда

$$C\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^r\rho^3d\rho d\theta=1,\ 2\pi C\cdot\frac{r^4}{4}=1\Rightarrow C=\frac{2}{\pi r^4}.$$

Функцию совместного распределения $\Phi(x,y)$ нужно определить из (12) (см. Т. 11.,п. 11.6).

<u>Тема 13</u>. Многомерная случайная величина (общие сведения)

1. Многомерная случайная величина

В этом разделе кратко рассмотрим систему n случайных величин, где $n-$любое натуральное число, большее 2. Система n случайных величин определяется аналогично, что и система двух случайных величин.

Систему n случайных величин называют $n-$*мерной (многомерной)* с.в. или случайным вектором $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Многомерная с.в. есть функция элементарного события ω: $(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \varphi(\omega)$. Каждому элементарному событию ω ставится в соответствие n действительных чисел $x_1, x_2, \cdots, x_n$, которые принимают соответственно случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ в результате некоторого испытания (опыта). Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ называется *реализацией* случайного вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \vec{X}$.

Закон распределения вероятностей $n-$мерной случайной величины задается её функцией распределения

(1) $$\Phi_{\vec{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1; X_2 < x_2; \ldots; X_n < x_n).$$

Функция распределения $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обладает такими же свойствами, как и функция распределения двух случайных величин $\Phi(x, y)$.

В частности, она принимает значения на отрезке $[0,1]$:

$$\Phi(-\infty, -\infty, \ldots, -\infty) = 0; \quad \Phi(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1;$$

$$\Phi_k(x_k) = \Phi(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty, x_k, +\infty, \ldots, +\infty); \quad 1 \le k \le n.$$

Если $x_k < x'_k$, то $\Phi_k(x_k) \le \Phi_k(x'_k)$, то есть монотонно возрастает по каждому аргументу и т.д.

Приводим для системы n случайных непрерывных величин основные требования к её функции плотности, функции распределения и определения вероятности попадания случайной n-мерной случайных точки $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ в заданной области из n-мерного вероятного пространства.

Плотностью распределения системы n н.с.в. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ определяется равенством

(2) $$\varphi_{\vec{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}.$$

При этом выполняется равенство $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ge 0$ и для $n-$кратного интеграла имеет место равенство

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 1$$ (**Контроль**).

Вероятность попадания случайной точки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *в область* (D) и $n-$мерного пространства выражается $n-$кратным интегралом

(4) $$P\{(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in D\} = \int \int_{(D)} \cdots \int \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Функция распределения $\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ выражается через плотность $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $n-$кратным интегралом

(5) $$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Необходимым и достаточным условием взаимной независимости n случайных величин $X_1, X_2, \cdots, X_n$ является равенство

(6) $$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Phi_{X_1}(x_1) \cdot \Phi_{X_2}(x_2) \cdots \Phi_{X_n}(x_n) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{X_k}(x_k),$$

(7) $$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi_{X_1}(x_1) \cdot \varphi_{X_2}(x_2) \cdots \varphi_{X_n}(x_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(x_k).$$

Основными числовыми характеристиками $n-$мерной с.в. $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ являются:

1. Общее число м.о. равно для всех n составляющих X_J, т.е. $a_j = MX_j;\ j = \overline{1,n};$

2. Общее число дисперсии равно для всех n составляющих X_J, т.е. $D_j = DX_j;\ j = \overline{1,n}$ при этом $DX_j = M[(X_j - a_j)^2];$

3. Общее число ковариаций равно $n(n-1); n \geq 2,$ т.е.

$$K_{ij} = M[(X_i - a_i) \cdot (X_j - a_j)], i \neq j \quad \text{при этом } K_{ij} = K_{ji},\ K_{ii} = D_i.$$

В общем случае ковариации образуют ковариационную (симметрическую) матрицу

$$K = \left(K_{ij}\right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & D_2 & \cdots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & D_n \end{pmatrix}$$

Примечание. На основании теории ковариационных матриц, можно создавать теорию систем линейных уравнений, матричных уравнений, спектральную ковариационную теорию матриц и их теорию квадратичных форм от многих переменных, а также закон инерции квадратичных форм и т.д. например, можно построить по схеме книги [13; гл.3., параграф 7].

2. Характеристическая функция и её свойства

С понятием характеристической функции связаны решение многих задач ряда аналитических разделов математики и её приложения (теоретической физики, механики, вариационное исчисление, теория суммирования арифметических функций и др.), в том числе, и в теории вероятностей.

На базе характеристических функций и с помощью теории, развитой в анализе (известная под названием *преобразование Фурье*), удаётся находить сравнительно простое решение многих задач теории вероятностей. Особенно тех, которые связанны с задачей распределения суммы независимых с.в. и вычисления числовых характеристик случайных величин.

Здесь мы рассмотрим определения, некоторые утверждения (свойства) общего характера, а также как теоретические примеры рассмотрим характеристические функции случайных величин, распределённых по наиболее часто применяемых законов в приложениях.

Определение. *Характеристической функцией случайной величины X называется комплекснозначная функция $\chi_X(t)$, равная математическому ожиданию случайной величины $e^{itX} = Cos(tX) + i\,Sin(tX)$, определённых для всех действительных значений $t \in (-\infty, +\infty)$, т.е. равенством*

(8) $$\chi_X(t) = M[e^{itX}],$$

где $t-$параметр, $i^2 = -1$.

Замечание. Математическое ожидание для комплексной случайной величины $w = \xi + i\eta$ определяется, как комплексная сумма математических ожиданий действительной и мнимой частей комплексного числа $M(\xi + \eta i) = M(\xi) + iM(\eta)$).

Для д.с.в. X, принимающая значения $x_1, x_2, \cdots$; с соответствующими вероятностями $p_j = P\{X = x_j\}$; $j = 1,2,3,\cdots$, характеристическая функция определяется формулой

(9) $$\chi_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j} p_j,$$

Следовательно, если с.в. X принимает целочисленные значения $0, 1, 2, \cdots$, то $\chi(t) = f(z),\ z = e^{it}$ и

(10) $$\chi(t) = \chi(e^{it}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} p_k.$$

Отсюда получим *важный вывод*: *для дискретной случайной величины* X имеет место равенство $\chi(2\pi k) = 1$ для любого целого числа k.

Для н.с.в. с плотностью $\varphi(x)$ характеристическая функция определяется формулой

(11) $$\chi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \varphi(x)dx,\ \ \chi(e^{2\pi k}) = 1;\ \ k \in Z.$$

Если вспомним дифференциальное равенство $\varphi(x)dx = \Phi'(x)dx = d(\Phi(x))$, то равенство (10) можно переписать в следующем виде (в форме интеграла Стилтьеса). Для случайной величины X с произвольной функцией распределения $\Phi(x)$ математическое ожидание $M[e^{itX}]$ задаётся с помощью интеграла Стилтьеса, т.е. формулой

($11^\bullet$) $$\chi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(\Phi(x)).$$

Для непрерывной ограниченной функции $g(x)$ и неубывающей ограниченной непрерывной слева функции $\Phi(x)$ интеграл Стилтьеса ($11^\bullet$) существует и его можно определить равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n^2}^{n^2} g\left(\frac{k}{n}\right)\left\{\Phi\left(\frac{k+1}{n}\right) - \Phi\left(\frac{k}{n}\right)\right\}.$$

Так, согласно определению интеграла Стилтьеса, для функции

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \Im_{(x_k,+\infty)}(x),$$

где величина $\Im_A(x) -$ индикатор множества A, определяемая равенствами:

$$\Im_A(x) = \begin{cases} 1,\ \textit{если}\ \ x \in A, \\ 0,\ \ \textit{если}\ \ x \notin A. \end{cases}$$

Из того, что $|e^{itx}| = 1$, то при всех вещественных t, следует существование интеграла (11) для всех функций распределения, следовательно, характеристическая функция может быть определена для каждой случайной величины.

Как уже было отмечено, если с.в. принимает целочисленные значения $0, 1, 2, \cdots$, то $\chi(t) = f(z)$, $z = e^{it}$, тогда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k$. Этот случай достаточно подробно рассматривался в п. 8.8.

По этой причине, здесь в основном рассмотрим непрерывные случайные величины X. При исследовании этого раздела будем ориентироваться на материалы учебника [1].

Теорема 13.1. *Характеристическая функция непрерывной случайной величины* X *равномерно непрерывна на всей прямой и удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$1.\ \chi(2\pi k) = 1,\ \ k \in Z, \qquad 2. |\chi(t)| \le 1;\ (-\infty < t < +\infty).$$

Доказательство. В равенстве (10) положим $t = 2\pi k,\ \ k \in Z$, тогда в силу того, что $\varphi(x)$ является плотностью вероятности распределения н.с.в. X, получим (*свойство - контроля*) и $e^{2\pi i k} = 1$, получим $\chi_X(2\pi k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$. Далее, по определению (11) имеем

$$|\chi(t)| = |\int e^{itx}\varphi(x)dx| \le \int \varphi(x)dx = 1.$$

Остаётся доказать равномерную непрерывность функции $\chi(t)$. С этой целью рассмотрим разность

$$\chi(t+h) - \chi(t) = \int [e^{i(t+h)x} - e^{itx}]\varphi(x)dx = \int e^{itx}[e^{ii\,hx} - 1]\varphi(x)dx,$$

и оценим её по модулю. Имеем $|\chi(t+h) - \chi(t)| \le \int |e^{ii\,hx} - 1|\, \varphi(x)dx$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число, выберем достаточно большое положительное число A такое, чтобы $\int\limits_{|x|>A} \varphi(x)dx < \varepsilon/4$ и подберём столь малое приращение h такое, чтобы для всех $|x| < A;\ |e^{ihx} - 1| < \varepsilon/2$. Тогда последнее неравенство завершает доказательство теоремы.

Теорема 13.2. *Если* $Y = \lambda X + \mu$, *где* λ *и* μ *- постоянные вещественные числа, то имеет место равенство* $\chi_Y(t) = e^{it\mu}\chi_X(\lambda t)$, *где* $\chi_Y(t)$ *и* $\chi_X(t)$ *обозначают характеристические функции с.в.* Y *и* X.

Доказательство. По определению (11) имеем цепочку равенств:

$$\chi_Y(t) = M[e^{itY}] = M[e^{it(\lambda X + \mu)}] = e^{it\mu}M[e^{itX}] = e^{it\mu}\chi_X(\lambda t).$$

Что и требовалась доказать.

В качестве приложения этой теоремы найдём характеристическую функцию случайной величины $X = \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}}$. По теореме 13.2. она равна

$$\chi_X(t) = e^{-it\sqrt{np/q}} \cdot \chi_X\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right) = e^{-it\sqrt{np/q}} \cdot (q + pe^{it/\sqrt{npq}})^n = [qe^{-it\sqrt{np/q}} + pe^{it\sqrt{np/q}}]^n.$$

Задание. На основании формул (12) - (15) найти MX и DX. Здесь p вероятность наступление события X.

Теорема 13.3. *Характеристическая функция суммы двух независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций.*

Доказательство. Пусть X и Y независимые случайные величины $Z = X + Y$. Тогда очевидно, что вместе с X и Y независимы также случайные величины e^{itX} и e^{itY}. Отсюда следует, что

$$\chi_Z(t) = M[e^{itZ}] = M[e^{it(X+Y)}] = M[e^{itX}e^{itY}] = M[e^{itX}] \cdot M[e^{itX}] = \chi_X(t) \cdot \chi_Y(t).$$

Это равенство доказывает теорему. Отметим, что эта теорема значительно упрощает сложение независимых случайных величин.

Следствие 1. Если $Z = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ и каждое слагаемое независимо от суммы предыдущих, то характеристическая функция величины Z равна произведению характеристических функций слагаемых, т.е. $\chi_Z(t) = \prod\limits_{j=1}^{n} \chi_{X_j}(t)$.

Упражнение. Докажите, что если $C_1, C_2, \cdots, C_n$ – постоянные числа и $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j X_j$, где $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, тогда справедливо равенство

$$\chi_Z(t) = \prod_{j=1}^{n} \chi_{X_j}(C_j t).$$

Теорема 13.4. *Если случайная величина X имеет абсолютный момент $n-$го порядка, то характеристическая функция величины X дифференцируема n раз, а также при $1 \le k \le n$ имеет место формула*

(12) $$\chi_X^{(k)}(t) = \varepsilon_k M[X^k] = \varepsilon_k \int x^k e^{itx} \varphi(x)dx,$$

где $$\varepsilon_k = i^k = \begin{cases} 1, \text{ если } k = 4m; m \in Z_+, \\ i, \text{ если } k = 4m+1; m \in Z_+, \\ -1, \text{ если } k = 4m+2; m \in Z_+, \\ -i, \text{ если } k = 4m+3; m \in Z_+. \end{cases}$$

Далее по условию теоремы с.в. X имеет абсолютный момент $n-$го порядка, поэтому он (абсолютный момент) ограничен, т.е. $|\int x^k e^{itx}\varphi(x)dx| \le \int |x|^k \varphi(x)dx < +\infty$. Следовательно, можно обе части равенства (11) дифференцировать. Тогда получим (12).

Равенство (12) также называют «*формулой вычислении моментов*» При помощью этой формулы легко вычислить математическое ожидание и дисперсию н.с.в. X .

Следствие 2. *Математическое ожидание и дисперсия выражается формулами:*

(12) $$M[X] = \frac{1}{i}\chi_X'(0) = -i\,\chi_X'(0);\ DX = -\chi_X''(0) + [\chi_X'(0)]^2.$$

Задание. Докажите равенство $\chi(-t) = \overline{\chi(t)}$.

Замечание. Введём обозначение

(13) $$\eta(t) = \ln[\chi(t)],$$

(равенство рассматривается для фиксированной ветви логарифмической функции). Тогда на основании (13) можно проверить следующие равенства

(14) $$\eta'(t) = \frac{\chi'(t)}{\chi(t)},\ \ \eta''(t) = \frac{\chi''(t)\cdot\chi(t) - [\chi'(t)]^2}{\chi^2(t)};$$

и с учётом $\chi(0) = 1$, из равенство (11), находим $\eta'(0) = iM[X]$, $\eta''(0) = i^2 M[X^2]$.

Следовательно, $\eta''(0) = \chi''(0) - [\chi'(0)]^2 = i^2 M[X^2] - [i^2 MX]^2 = -DX$,

Отсюда, получим ещё одну формулу для вычисления математического ожидания и дисперсии случайной величины.

(15) $$M[X] = \frac{1}{i}\eta'(0) = -i\,\eta'(0); \qquad DX = -\eta''(0).$$

Производная $k-$го порядка функции логарифма характеристической функции (т.е. функция $\eta^{(k)}(t) = \{\ln[\chi(t)]\}^{(k)}$) в точке $t = 0$, умноженная на число $\varepsilon_k = i^k$, называется ***семиинвариантом $k-$го порядка*** случайной величины. Первыми двумя семиинвариантами являются математическое ожидание и дисперсия, т.е. момент первого порядка и некоторая рациональная функция моментов первого и второго порядков (см. равенство (14)).
Из теоремы 13.3. непосредственно выводится.

Следствие 3. *При сложении суммы двух независимых с.в. их семиинварианты складываются, т.е.*

(16) $$\varepsilon_k \eta_{X+Y}^{(k)}(0) = \varepsilon_k \eta_X^{(k)}(0) + \varepsilon_k \eta_Y^{(k)}(0);\quad k = 1,2,\cdots.$$

Упражнение. Покажите, что справедливы равенства:

1. $\varepsilon_3 \eta'''(0) = \{-MX^3 + 3M(X^2)\cdot MX - 2[MX]^3\}$

2. $\varepsilon_4 \eta^{iv}(0) = \{MX^4 - 4M(X^3)\cdot MX - 3[MX^2]^2 + 12MX^2 \cdot [MX]^2 - 6[MX]^4\}$.

3. Примеры вычисления характеристических функций

3.1. Характеристическая функция биномиального закона.

Пусть с.в. X распределена по биномиальному закону. Найти $\chi_X(t)$, а затем выразить, $MX; DX$, через $\eta'(0);\ \eta''(0)$. Имеет место утверждение.

Теорема 13.5. *Для характеристической функции $\chi(t)$ д.с.в. X, распределённой по биномиальному закону справедлива формула*

(17) $$\chi(t) = [e^{it}p + q]^n \Rightarrow \chi(2\pi k) = 1.$$

Доказательство. По определению случайная величина X принимает целочисленные значения $\{0,1,2,\cdots,n\}$, с вероятностями $p_k = P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$. На основании формулы (9) и формулы бинома Ньютона, находим

$$\chi(t) = \sum_{r=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{it}p)^k q^{n-k} = [e^{it}p + q]^n,$$

и с учётом $e^{2\pi ik} = 1;\ t = 2\pi k; k \in Z$, равенство (17) доказано.

Упражнение. Для математического ожидания и дисперсии биномиального распределения и при любом целом k, $t = 2\pi k$ вывести на основании равенства (12) формулы:

1. $MX = np,$

2. $DX = npq.$

3.2. Характеристическая функция закона Пуассона.

Теорема 13.6. *Для характеристической функции $\chi(t)$ д.с.в. X, распределённой по закону Пуассона справедлива формула*

(18) $$\chi(t) = e^{\lambda[z-1]} = \exp[\lambda(z-1)];\ z = e^{it}.$$

Доказательство. Согласно условию теоремы с.в. X принимает только неотрицательные целые значения, при этом

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!};\ \lambda = np_n \approx const,\ k = 0,1,2,\cdots$$

Найдём характеристическую функцию с.в. X

$$\chi(t) = M[e^{itk}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda + \lambda e^{it}} = \exp[\lambda(e^{it} - 1].$$

Следовательно, теорема доказана.

Упражнение. Для математического ожидания и дисперсии распределения Пуассона при любом целом k, и $t = 2\pi k$ на основании равенства (12) – (15) вывести формулы:

1. $MX = -i\eta'(2\pi k) = \lambda,$ **2.** $DX = -\eta''(2\pi k) = \lambda.$

Рассмотрим следующую теоретическую задачу, которая раскрывает ещё одну сторону закона Пуассона, где распределение происходит с параметром, равным произведению λp.

Задача [6]. *Число космических частиц, попадающих в аппаратный отсек ракеты за время её полёта распределено по закону Пуассона с параметром λ. При этом условная вероятность для каждой из этих частиц попасть в уязвимый блок равна p.*

Найти закон распределения количества частиц, попадающих в уязвимый блок.

Решение. Пусть $U_{уязб}$ обозначает уязвимый блок ракеты, а A_k выражает наступление события, когда в уязвимый блок ракеты попало k частиц, и $O_{апо}$ обозначает аппаратный отсек ракеты, а H_l выражает наступления событий, когда в аппаратный отсек ракеты попало l частиц. Тогда события H_l, $l = 0,1,2,\cdots$, составляют полную группу событий, по формуле полной вероятности $(n \to \infty)$ и с учётом того, что для $l < k$; $P(A_k \mid H_l) = 0$, имеем

$$P(A_k) = \sum_{l=0}^{\infty} P(H_l) \cdot P(A_k \mid H_l) = \sum_{l=0}^{k} 0 \cdot P(H_l) + \sum_{l=k}^{\infty} P(H_l) \cdot P(A_k \mid H_l) =$$

$$= \sum_{l=k}^{\infty} P(H_l) \cdot P(A_k \mid H_l).$$

Далее, т.к. вероятности гипотез согласно условию задачи равны $P(H_l) = \lambda^l e^{-\lambda} / l!$, $l = 0,1,2,\cdots$, а для случаев $0 \le k \le l$, величина $P(A_k \mid H_l)$ определяется по биномиальному закону с вероятностью «успеха» (частица попала в уязвимый блок) p. Поэтому, согласно формуле, $P(A_k \mid H_l) = C_l^k p^k (1-p)^{l-k}, l = \overline{0,k}.$ Таким образом, окончательно получим

$$P(A_k) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} C_l^k p^k (1-p)^{l-k},$$

отсюда на основании значения биномиальных коэффициентов $C_l^k = l! / k!(l-k)!$, получим

$$P(A_k) = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{l-k}}{(l-k)!} (1-p)^{l-k} = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!} (1-p)^m =$$

$$= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}.$$

Таким образом, количество частиц, попадающих в уязвимый блок ракеты также распределены по закону Пуассона, но с параметром, равным произведению $\lambda_1 = \lambda p$.

Напомним, что аналогичными формулами мы раньше встречались в пунктах 6.2. и 9.2. в связи вероятностью наступления потока события в случайные моменты времени (простейшие потоки событий).

3.3. Характеристическая функция геометрического закона.

Пусть проводится неограниченное число независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью $p = P(A) > 0$ и пусть X обозначает с.в. равная числу испытаний до момента первого наступления события A. Тогда эта вероятность как мы уже знаем (см. п.9.3.) равна

$$P\{X = k\} = (1-p)^k p = q^k p, \; k = 0,1,2,\cdots.$$

Это распределение называется **геометрическим,** так как вероятность $P\{X = k\}$, как числовая последовательность образуют геометрическую прогрессию. Тогда вероятность того, что событие A наступит не раньше момента m, задаётся формулой

$$P(X \ge m) = \sum_{k=m}^{\infty} (1-p)^k p = (1-p)^m p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^m.$$

Так как производящая функция данного распределения (см.п.8.8.) равна $pz/(1-zq)$, то согласно равенству (10) для $z = e^{it}$ будем иметь

$$\chi(t) = pz \sum_{m=1}^{\infty} (zq)^{m-1} = \frac{pe^{it}}{1-e^{it}q}.$$

Упражнение. Для математического ожидания и дисперсии геометрического закона распределения на основании формул (12) – (15) вывести равенства:

1. $MX = -i\eta'(0) = \dfrac{1-p}{p}$, **2.** $DX = -\eta''(0) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

3.4. Характеристическая функция равномерного закона.

Вспомним, что равномерное распределение для любых вещественных чисел $a < b$ задается плотностью

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{для } x \in [a;b], \\ 0, & \text{для } x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Характеристическая функция равномерного распределения вычисляется следующим образом:

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\varphi(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}.$$

В частности, для центрально - симметрического отрезка $(-a\,;a)$ получим

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\varphi(x)dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{itx}dx = \frac{Sin(at)}{at}.$$

Следствие 4. В частности, справедливы равенства

$$\chi\left(\frac{\pi(4k+1)}{2a}\right) = \frac{2}{\pi(4k+1)},\ \chi\left(\frac{2\pi k}{a}\right) = 0;\quad k \in Z$$

Упражнение. Для математического ожидания и дисперсии равномерного распределения на основании формул (12) – (15) вывести равенства:

1. $MX = -i\eta'(0) = \dfrac{a+b}{2}$, **2.** $DX = -\eta''(0) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Для случая $(-a\,;a)$ вывести формулы: **3.** $MX = -i\eta'(0) = 0$. **4.** $DX = -\eta''(0) = \dfrac{a^2}{3}$.

3.5. Характеристическая функция показательного закона.

Как было показано в.9.6. плотность с.в. X , распределённая по показательному закону имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda}, & \text{для } x \ge 0, \\ 0, & \text{для } x < 0, \end{cases}$$

Характеристическая функция показательного распределения вычисляется следующим образом:

$$\chi(t) = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\varphi(x)dx = \lambda\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Упражнение. Для математического ожидания и дисперсии показательного распределения на основании формул (12) – (15) вывести равенства:

1. $MX=-i\eta'(0)=\dfrac{1}{\lambda}$, **2.** $DX=-\eta''(0)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

3.6. Характеристическая функция нормального закона ($X\approx N_{\{\sigma,a\}}$).

Теорема 13.7. *Для характеристической функции* $\chi(t)$ *с.в.* $X\approx N_{\{\sigma,a\}}$, *распределённой по нормальному закону справедлива формула*

(19) $$\chi(t)=\frac{e^{ita}}{e^{0,5(t\sigma)^2}}=e^{ita-\frac{(t\sigma)^2}{2}}.$$

Доказательство. Согласно формулы (29), пункта 9.9 функция плотности с.в. $X\approx N_{\{\sigma,a\}}$ определена равенством $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$; $\qquad \forall x\in R$

Характеристическая функция нормального распределения вычисляется следующим образом:

$$\chi(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2-2(a+it\sigma^2)\ x+a^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2-2x(a+it\sigma^2)+(a+it\sigma^2)^2+a^2-(a+it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$e^{ita}\quad=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{2ait\sigma^2+(it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-(a+it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{iat-\frac{(t\sigma)^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{x-(a+it\sigma^2)}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2}d\left(\frac{x-(a+it\sigma^2)}{\sigma\sqrt{2}}\right)..$$

Воспользуемся интегралом Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$, в итоге для характеристической функции с.в. $X\approx N_{\{\sigma,a\}}$ получим равенство

$$\chi(t)=\frac{e^{ita}}{e^{0,5(t\sigma)^2}}=e^{ita}\cdot e^{-\frac{(t\sigma)^2}{2}}.$$

Следствие 5. *Для целых значений* a *и всех значения параметра* $t=2\pi k;\ k\in Z$ *справедлива формула*

$$\chi(2\pi k)=e^{-\frac{(2\pi k\sigma)^2}{2}}.$$

Пример 1. Для математического ожидания и дисперсии с.в. $X\approx N_{\{\sigma,a\}}$, на основании формул (12) – (15) выведем равенства:

$$\textbf{1.}\ \ M[X]=\frac{1}{i}\chi'_X(0)=-i\,\chi'_X(0)=a;\quad .$$

$$\textbf{2.}\ \ DX=-\chi''_X(0)+[\chi'_X(0)]^2=\sigma^2\textbf{.}$$

Применим формулу (12):

1. $MX=[-i\chi'(0)]=-ie^{iat-\frac{(t\sigma)^2}{2}}(ia-t^2\sigma^2)\Big|_{t=0}=-i\cdot1\cdot ia=a$, т.е. $MX=a$.

2. $$DX=\{-\chi''_X(0)+[\chi'_X(0)]^2)=$$

$$= -\left(-\sigma^2 e^{iat - \frac{(t\sigma)^2}{2}} + (ia - t\sigma^2)^2 \right)\Big|_{t=0} + (ia)^2 = = \sigma^2 - i^2a^2 + i^2a^2 = \sigma^2,$$

т.е. $DX = \sigma^2$. Получили известные нам результаты. Следовательно, с учётом с.к.о. σ эти параметры полностью определяют случайные величины, распределённые по нормальному закону.

Из рассмотренных примеров на предмет нахождения характеристических функций случайных величин (дискретных и непрерывных) непосредственно следует, что по законам распределения и функциям плотности, а следовательно, по функциям распределения с.в. X всегда можно найти её характеристическую функцию.

Оказывается, имеет место и обратное предположение: а именно по характеристической функции однозначно определяется функция распределения. Рассмотрим ещё два утверждения, относящиеся к формулам «***обращения и единственности***».

Теорема 13.8 (***формулы обращения***). *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Если с.в. X принимает целочисленные значения $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, то*

(20) $$p_k = P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \chi(t) dt,$$

где $i -$*мнимая единица,* $i^2 = -(1,0) = -1$.

2. *Если характеристическая функция $\chi(t)$ случайной величины X абсолютно интегрируема, то существует плотности распределения $\varphi(x)$, определяемая формулой*

(21) $$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \chi(t) dt.$$

Доказательство. Заметим, что для любого целого числа m и вещественного $l \neq 0$, имеют место равенства

(22) $$I_l(\alpha) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} e^{it\alpha} dt = \begin{cases} 1; & \alpha = 0 \\ \dfrac{Sin(\alpha l)}{\alpha l}; & \alpha \neq 0; \end{cases}$$

Действительно, пусть α любое вещественное число. Для $\alpha = 0$, равенство очевидно. При любом $\alpha \neq 0$ имеем

$$I_l(\alpha) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} e^{it\alpha} dt = \frac{1}{2l\alpha i} \int_{-l}^{+l} d(e^{it\alpha}) = \frac{e^{il\alpha} - e^{-il\alpha}}{2l\alpha i} = \frac{Sin(l\alpha)}{l\alpha},$$

где мы воспользовались равенством $\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = Sinx; \ \forall x \in R.$

Используя наше равенство для случая $l = \pi$, и $\alpha = m \in Z$ согласно, определению характеристической функции с.в. X с целыми значениями, получим (с учётом того, что для отрицательных индексов вероятности p_k определены)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{itm} \chi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{itm} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{itk} p_k dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it(m-k)} dt \right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k I_\pi(m-k) = p_k I_\pi(0) \quad + \sum_{k=-\infty, m\neq k}^{+\infty} p_k I_\pi(m-k) = p_k.$$

Тем самым первый пункт теоремы доказан. Перейдём к доказательству второго пункта.

Так как функция $\chi(t)$ абсолютно интегрируема, то для любых $a < b$ с учётом формулы (22) имеем

(23) $$\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi(t)\left(\int\limits_a^b e^{-itx}dx\right)dt = \lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-c}^{+c}\chi(t)\left(\int\limits_a^b e^{-itx}dx\right)dt\,.$$

Используя определение характеристической функции (см. формулу (11•)), получим

(24) $$\int\limits_{-c}^{+c}\chi(t)\left(\int\limits_a^b e^{-itx}dx\right)dt = \int\limits_{-c}^{+c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}d\Phi(y)\int\limits_a^b e^{-itx}dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\Phi(y)\int\limits_a^b e^{-itx}\,\frac{e^{ic(y-x)} - e^{-ic(y-x)}}{i\,(y-x)}dx =$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,\Phi(y)\int\limits_a^b \frac{Sin(c(x-y))}{(x-y)}dx = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,\Phi(y)\int\limits_{c(a-y)}^{c(b-y)}\frac{Sinu}{u}du.$$

(23) $$\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi(t)\left(\int\limits_a^b e^{-itx}dx\right)dt = \lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-c}^{+c}\chi(t)\left(\int\limits_a^b e^{-itx}dx\right)dt\,.$$

Используя определение характеристической функции (см. формулу (11•)), получим

(24) $$\int\limits_{-c}^{+c}\chi(t)\left(\int\limits_a^b e^{-itx}dx\right)dt = \int\limits_{-c}^{+c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}d\Phi(y)\int\limits_a^b e^{-itx}dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\Phi(y)\int\limits_a^b e^{-itx}dx\,\frac{e^{ic(y-x)} - e^{-ic(y-x)}}{i(y-x)} =$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,\Phi(y)\int\limits_a^b dx\,\frac{Sin(c(x-y))}{(x-y)} = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,\Phi(y)\int\limits_{c(a-y)}^{c(b-y)}\frac{Sinu}{u}du.$$

На основании значения интеграла [14]

$$D(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{Sin\,(\alpha\,x)}{x}dx = (\pi/2)\cdot Sign(\alpha)\ ,$$

где функция определяется равенствами:

$$Sign\,(\alpha) = \begin{cases} 1\ , & \alpha > 0, \\ 0\ , & \alpha = 0, \\ -1\ , & \alpha < 0. \end{cases}$$

Следовательно, получим равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{Sin\,u}{u}du = \frac{\pi}{2};\quad \int\limits_0^{+\infty}\frac{Sin\,u}{u}du = \frac{\pi}{2};\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Sin\,u}{u}du = \pi\,.$$

Поэтому, по отдельности рассматривая случаи $0 \le a - y < b - y;\, a - y < b - y \le 0;$ и $a - y < 0 < b - y$, получим

$$\lim_{c\to+\infty}\int_{c(a-y)}^{c(b-y)}\frac{Sin\,u}{u}du=\begin{cases}\pi, & y\in(a,b),\\ 0, & y\notin\{a,b],\\ \pi/2, & y=a,\ y=b.\end{cases}$$

Пусть a и b точки непрерывности функции $\Phi(y)$. Тогда при $c\to\infty$ правая часть равенства (24) стремится к равенству

$$2\pi\int_a^b d\Phi(y)=2\pi[\Phi(b)-\Phi(a)]$$

Учитывая это равенство и на основании (23) и (24), имеем

$$\int_a^b \varphi(x)dx=[\Phi(b)-\Phi(a)]. \qquad (25)$$

Поскольку функция распределения непрерывна слева, то с помощью предельного перехода из последовательности точек непрерывности $a_n\uparrow a$ и $b_n\uparrow b$ функции $\Phi(x)$, равенство (25) распространяется на произвольные точки a и b. Теперь из (25) по определению следует, что $\varphi(x)$ является плотностью функции распределении $\Phi(x)$. В итоге, из равенства (23) получим предельное равенство.

В точках x_1 и x_2 непрерывности функции $\Phi(x)$ справедливо равенство

$$\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{Q\to\infty}\int_{-Q}^{+Q}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\chi(t)dt. \qquad (26)$$

Равенство (26) носит название «**формулы обращения**». Она используется для вывода весьма важного утверждения - ***теорема единственности***.

Упражнение. Пусть $\tau,\ Jm\tau>0,\ s-$ натуральное число, $m-$ целое число. Докажите, что справедливы равенства

$$\frac{1}{s}\cdot\int_{\tau}^{\tau+s}e^{2\pi i\frac{m\alpha}{s}}d\alpha=\begin{cases}1, & m=0,\\ 0, & m\neq 0.\end{cases}$$

Теорема 13. 9 (*единственности*). *Функция распределения однозначно определяется своей характеристической функцией.*

Доказательство. Действительно, из равенства (26) непосредственно следует, что в каждой точке непрерывности функции $\Phi(y)$ применима формула

$$\Phi(y)=\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to-\infty}\lim_{Q\to\infty}\int_{-Q}^{+Q}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\chi(t)dt.$$

В последнем интеграле предел по y берётся относительно множества точек y, являющихся точками непрерывности функции $\Phi(x)$.

Рассмотрим некоторые примеры приложения последней теоремы.

Пример 2. Пусть независимые случайные величины X_1 и X_2 распределены по закону Пуассона, причём

$$P\{X_1=k\}=\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!};\quad P\{X_2=k\}=\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}.$$

Покажем, что с.в. $X=X_1+X_2$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.

В теореме 13.6 мы показали, что (см. (18)) $\chi(t)=e^{\lambda[z-1]}=\exp[\lambda(z-1)];\ z=e^{it}$. Отсюда имеем

$$\chi_1(t)=e^{\lambda_1[z-1]}=\exp[\lambda_1(z-1)];\ z=e^{it},\ \chi_2(t)=e^{\lambda_2[z-1]}=\exp[\lambda_2(z-1)];\ z=e^{it}.$$

В силу теоремы 13.6. характеристическая функция суммы с.в. $X=X_1+X_2$ равна

$$\chi(t)=\chi_1(t)\cdot\chi_2(t)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot[z-1]},z=e^{it},$$

т.е. является характеристической функцией некоторого закона Пуассона. Согласно теореме 13.9 единственное распределение, имеющее $\chi(t)$ своей характеристической функцией, есть закон Пуассона, для которой вероятность определена равенством

$$P\{X = k\} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}; \quad k \geq 0, k \in Z.$$

Замечание. Математиком Д. А. Райковым была доказана более глубокое (обратное) утверждение: *если сумма двух независимых с.в. распределена по закону Пуассона, то каждое слагаемое также распределена по закону Пуассона, т.е. верно и обратное утверждение.*

Пример 3. *Если независимые с.в.* X_1 *и* X_2 *распределены по нормальному закону, то их сумма* $X = X_1 + X_2$ *также распределена нормально.*

Действительно, если $MX_1 = a_1; MX_2 = a_2;\ DX_1 = \sigma_1^2; DX_2 = \sigma_2^2$, то соответствующие их характеристические функции определяются (см. (19)) равенствами

$$\chi_1(t) = e^{ita_1 - \frac{(t\sigma_1)^2}{2}}; \quad \chi_2(t) = e^{ita_2 - \frac{(t\sigma_2)^2}{2}},$$

На основании теоремы 13.7 имеем

$$\chi_X(t) = \chi_1(t) \cdot \chi_2(t) = e^{it(a_1+a_2) - 0,5\cdot(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}.$$

Это выражение является характеристическая функция нормального закона с математическим ожиданием $a = a_1 + a_2$ и дисперсией $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. На основании теоремы единственности заключаем, что функция распределения с.в. $X = X_1 + X_2$ нормальна.

В качестве следующего примера без доказательства сформулируем ещё одно важное свойство характеристических функций.

Пример 4. *Характеристическая функция вещественна тогда и только тогда, когда соответствующая ей функция распределения симметрична, другими словами, когда при любом* x *функция распределения удовлетворяет равенству* $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x + 0)$.

Доказательство (см. [1], глава 7, параграф 33]).

Теория характеристических функций весьма интересная и имеет множество изящных применений в математике и её приложениях.

<u>Тема 14</u>. Функции случайных величин

Часто возникают задачи, в которых по известному закону распределения (или числовым характеристикам) одной (или нескольких) случайной величины требуется определить распределение другой (или нескольких) с.в., функционально связанные между собой.

1. Функция одного случайного аргумента

Если каждому возможному значению с.в. X по определённому правилу соответствует одно возможное значение с.в. Y, то Y называют функцией случайного аргумента X, записывают $Y = f(X)$.

Пусть X – д.с.в. с возможными значениями $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ с соответствующими вероятностями, $p_j = P(X = x_j);\ j = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что с.в. $Y = f(X)$ является также д.с.в. с возможными значениями, $y_j = f(x_j); j = \overline{1, n}$; вероятности которых равны соответственно $p_j = P\{Y = y_j\} = P\{X = x_j\}; j = \overline{1, n}.$

Отметим, что различным значениям с.в. X могут соответствовать одинаковые значения с.в. Y. В этом случае вероятности повторяющихся значений нужно складывать и это число будет вероятностью этой повторяющееся значения случайной величины.

Математическое ожидание и дисперсия функции $Y = f(X)$ определяется соответственно равенствами:

$$MY = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) p_k; \quad DY = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - m_Y]^2 p_k.$$

Пример 1. Задан закон распределения д.с.в. X :

X	-1	1	2
P	0, 1	0,3	0,6

Найти MY, если: 1) $Y = X^2$; 2) $Y = 2X + 10$.

Решение. 1) Перечислим значения с.в. $Y = X^2 = \{1, 4\}$; Отсюда получим соответствующие вероятности

$p_1 = P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = +1) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$; $p_2 = P(Y = 4) = P(X = 2)$ =0,6.

Найдём закон распределения функции $Y = X^2$:

Следовательно, $MY = 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}8$.

Для сравнения найдём $MX = (-1) \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}4$;

2) Найдём закон распределения $Y = 2X + 10$:

Y	8	12	14
P	0, 1	0,3	0,6

Следовательно, $MY = 8 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}3 + 14 \cdot 0{,}6 = 12{,}8$.

Задание. Найти $DX; DY = DX^2; DY = D(2X + 10)$.

Пусть X – непрерывная с.в. с плотностью распределения $\varphi_X(x) = \varphi(x)$, а с.в. Y есть функция от с.в. X *т.е.* $Y = f(X)$. Найдём закон распределения с.в. $Y = f(X)$.

Для дальнейшего будем считать функцию $Y = f(X)$ непрерывной, строго возрастающей и дифференцируемой в интервале (a, b) (отрезок может быть вся числовая прямая $(-\infty, +\infty)$) всех возможных значений с.в. X.

Тогда существует функция $x = g(y)$, обратная к функции $y = f(x)$ (случайная точка (X, Y) лежит на графике кривой $y = f(x)$).

Определим функцию распределения с.в. Y, $G_Y(x) = P(Y < y)$. Или можно пользоваться и другими обозначениями: $G(y); \Phi_Y(y)$ *или* $\Phi_Y(x)$.

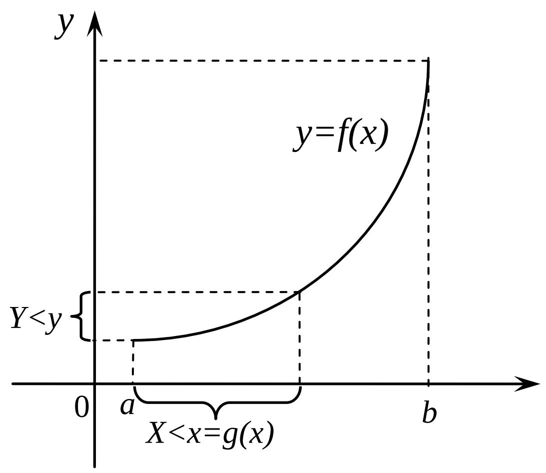


Рисунок 53

Поскольку событие $\{Y < y\}$ эквивалентно событию $\{X < g(y)\}$, то

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{X < g(y) = \Phi_X(g(y)) = \int_a^{g(y)} \varphi(x)dx, \text{ т.е.}$$

$$G(y) = \int_a^{g(y)} \varphi(x)dx.$$

Дифференцируя это равенство по y, найдём плотность распределения с.в. Y:

$$h(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \varphi[g(y))] \cdot \frac{d}{dy}(g(y)) = \varphi[g(y)] \cdot g'(y), \text{т.е.}$$

(1) $$\varphi_Y(y) = f(g(y) \cdot g'(y).$$

Если функция $y = f(x)$ в интервале (a,b) строго убывает, то событие $\{Y < y\}$ эквивалентно событию $\{X > g(y)\}$. Поэтому

$$G(y) = \int_{g(y)}^{b} \varphi(x)dx = -\int_b^{g(y)} \varphi(x)dx.$$

Отсюда следует, что

(2) $$\varphi_Y(y) = -\varphi_X[g(y)] \cdot g'(y).$$

Учитывая, что плотность распределения не может быть отрицательной, формулы (1) и (2) можно объединить в одну

(3) $$\varphi_Y(y) = \varphi_X[g(y)] \cdot |\, g'(y)\,|.$$

Эта формула верна и для взаимно однозначных (для них существует обратная функция) кусочно монотонных функций $f(x)$. Тот факт, что для счётного числа точек (концов интервалов монотонности) формулой (3) значение функции плотности не определяются, не является принципиальным. Плотности на выделенном счётном множестве можно придать любое значение, при этом функция распределения не изменится в силу свойства интеграла.

Пример 2. Найти плотность распределения функции $Y = -5X + 2,$ при условии, что с.в. X имеет плотность $\varphi(x)$.

Решение. Функция $y = -5x + 2,$ монотонно убывает в интервале $(-\infty;+\infty)$. Обратная функция есть $x = \frac{1}{5}(2 - y) = g(y),\ g'(y) = -\frac{1}{5}.$

На основании формулы (3)получим:

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X(\frac{2-y}{5})\cdot|-\frac{1}{5}| = \frac{1}{5}\varphi_X(\frac{2-y}{5}),\ y\in(-\infty;+\infty).$$

Покажем на этом примере как выводится формула для плотности и функции распределения с.в. Y:

$$G(y) = P\{Y<y\} = P\{-5X+2<y\} = P\left\{X>\frac{2-y}{5}\right\} =$$

$$1-P\left\{X\le\frac{2-y}{5}\right\} = 1-P\left\{X<\frac{2-y}{5}\right\} - P\left\{X=\frac{2-y}{5}\right\} = 1-P\left\{X<\frac{2-y}{5}\right\}$$

$$=1-\Phi_X\left\{\frac{2-y}{5}\right\};\ \textit{так как}\ P\left\{X=\frac{2-y}{5}\right\} = 0.$$

Далее вычислим функцию плотности с.в. Y. Имеем по определению

$$\varphi_Y(y) = G'_Y(y) = \left\{1-\Phi_X(\frac{2-y}{5}\right\}'_y = -\varphi_X\left(\frac{2-y}{5}\right)\cdot\left(\frac{2-y}{5}\right)' = -\varphi_X\left(\frac{2-y}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right),$$

Следовательно, $\varphi_Y(y) = \frac{1}{5}\varphi_X\left(\frac{2-y}{5}\right);\ y\in(-\infty;+\infty).$

Замечание. Если функция $Y = f(X)$ не монотонна в интервале (a,b), то для нахождения функции плотности с.в. Y следует разбить интервал на n участков монотонности, затем найти обратную функцию на каждом из них и воспользоваться формулой

(4) $$\varphi_Y(y) = \sum_{k=1}^{n} f(g_k(y))\cdot|g'(y)|.$$

Существует широкий класс функций $f(x)$, не обязательно монотонных, для которых $Y = f(X)$ будет случайной величиной. К нему относятся, например, все непрерывные функции.

Если с.в. X является непрерывной и $\varphi_X(x)$ её плотность распределения, то для нахождения числовых характеристик с.в. $Y = f(X)$ необязательно находить закон её распределения, можно воспользоваться формулами:

(5) $$MY = M[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx;\ DY = \int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-m_X]^2\varphi(x)dx.$$

Обсуждение общей проблемы выходит за рамки нашей книги (В общем случае к этим вопросам довольно плодотворно применяется теория суммируемых функций и интегралов Стилтьеса), и мы рекомендуем читателям обратиться к фундаментальным книгам ([1], [7]).

В частности, отметим, что линейное преобразование $Y = kX + b$ не меняет характера распределения, т.е. из нормальной с.в. получается нормальная случайная величина, а из равномерной - получается равномерная. Рассмотрим пример на равномерное распределение.

Пример 3. Пусть с.в. X имеет равномерное распределение в интервале $\{-\pi/2;\pi/2\}$.

Найти математическое ожидание с.в. $Y = CosX$:

1) найти плотность $\varphi_Y(y)$;

2) не вычисляя функцию $\varphi_Y(y)$ найти математическое ожидание с.в. X.

Решение. 1) Легко заметить, что функция плотности $\varphi_X(x)$ с.в. X определяется равенствами (воспользуемся свойством функции плотности)

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x\in\left\{-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\},\\ 0, & x\notin\left\{-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\}.\end{cases}$$

В интервале $\{-\pi/2;\pi/2\}$. функция $Y=CosX$ не монотонна: в интервале $\{-\pi/2;0\}$. функция возрастает, в $\{0;\pi/2\}$ – убывает. На первом участке обратная функция $x_1=g_1(y)=-arcCosy$, на втором $x_2=g_2(y)=arcCosy$. На основании формулы (4) имеем

$$\varphi_Y(y)=f[g_1(y)]\cdot|g_1'(y)|+f[g_2(y)]\cdot|g_2'(y)|=$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot|(1-y^2)^{-1/2}|+\frac{1}{\pi}\cdot|-(1-y^2)^{-1/2}|=\frac{2}{\pi}\cdot(1-y^2)^{-1/2},$$

т.е.

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot(1-y^2)^{-1/2}; & 0<y<1,\\ 0, & y\notin(0,1).\end{cases}$$

Тогда

$$MY=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi_Y(y)dy\right]=\int_0^1 y\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-y^2\right)^{-1/2}d(1-y^2)=-\frac{1}{\pi}\cdot2\sqrt{1-y^2}\,\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

т.е. $MY=2/\pi$.

2) Воспользуемся непосредственно формулой (5)

$$MY=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx=\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}Cosx\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}Sinx\,\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2}=\frac{1}{\pi}(1-(-1)=\frac{2}{\pi},$$

т.е. $MY=2/\pi$, оба результата одинаковые.

Задание. 1. Вычислить дисперсию и стандарт с.в. Y.

Рассмотрим следующую классическую задачу.

Задача (обратное распределение Коши). Случайная величина X имеет распределению Коши с плотностью распределения. Имеем

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad при\ -\infty<x<+\infty.\qquad \text{(см. пункт 7.4. пример 8.)}$$

Вычислить плотность распределения обратной случайной величины $Y=X^{-1}$.

Решение. Функция $y=x^{-1}$ не определена в нуле, убывает на интервалах $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$ имеет однозначную обратную функцию $x=y^{-1}$. Применяя формулу $(*)$ получим

$$\varphi_Y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^{-2})y^2}=\frac{1}{\pi(1+y^2)},\quad при\ -\infty<y<+\infty,$$

Следовательно, величина, обратная величине, распределённой по закону Коши, также имеет распределение Коши.

2. Функция двух случайных аргументов

При рассмотрении данного раздела в основном будем следовать изложению из книги [8].

Для успешного решения ряда практических задач нужно знать закон распределения (или числовые характеристики) следующих случайных величин: $Z = X \pm Y$; $Z = X \cdot Y$; $Z = \max\{X, Y\}$ $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$; и других.

Приведём общее определение функции для двух случайных величин.

Каждой паре с.в. $X; Y$ по заданному правилу f, ставим в соответствие вполне определённое значение с.в. Z, то Z называется функцией *двух случайных аргументов* X и Y, и обозначают в виде: $Z = f(X, Y)$.

Рассмотрим закон распределения с.в. $Z = X + Y$, наиболее часто встречающийся на практике. Пусть система двух непрерывных с.в. (X, Y) имеет совместную плотность распределения $\varphi(x, y)$. Тогда в соответствии со свойствами плотности двумерной с.в. (X, Y) (см.11.6. равенство (11)) найдём функцию распределения с.в. $Z = X + Y$.

$$\Phi_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = \iint_{D_z} \varphi(x, y)dxdy.$$

Здесь D_z – множество точек плоскости $0xy$, координаты которых удовлетворяют неравенству $x + y < z$, (см. рис. 54).

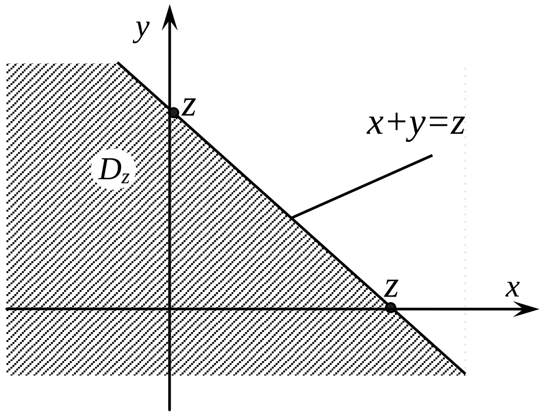


Рисунок 54

Следовательно, имеем

$$\Phi_Z(z) = P\{X + Y < z\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} \varphi(x, y)dy \right) dx.$$

Дифференцируя полученное равенство по переменной z, входящей в верхний предел внутреннего интеграла, получаем выражение для плотности распределения с.в. $Z = X + Y$:

(6) $$\Phi'_Z(z) = \varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, z - x)dx.$$

Если с.в. X и Y являются *независимыми*, то согласно равенству $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$, то из (6) получим

(7) $$\varphi_Z(z) = \varphi_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(z - x)dx.$$

Закон распределения суммы независимых с.в. называется *композицией* или *свёрткой* законов распределения слагаемых. Для них принято специальное обозначение: $\varphi_{X+Y} = \varphi_X * \varphi_Y$, где $*$ – знак свёртки, а формул (7) называют формулой свёртки или формулой композиции двух распределений. В равенстве (6) записав Z в виде $Z = Y + X$, можно получить и другое представление для $\varphi_Z(z)$, а именно

$$\varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z-y, y)dy,$$

и для независимых случайных величин Y и X формулу (7) можно переписать в виде

$$\varphi_Z(z) = \varphi_{Y+X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(z-y)\varphi_2(y)dy. \quad (8)$$

Аналогично решаются задачи нахождения законов распределения с.в. $Z = X - Y$, $Z = X \cdot Y$ и других. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 4. Независимые с.в. X и Y распределены равномерно $X \approx \Re[0;4]$ и $Y \approx \Re[0;1]$. Найти плотность распределения вероятностей с.в. $Z = X + Y$ (рис. 55)

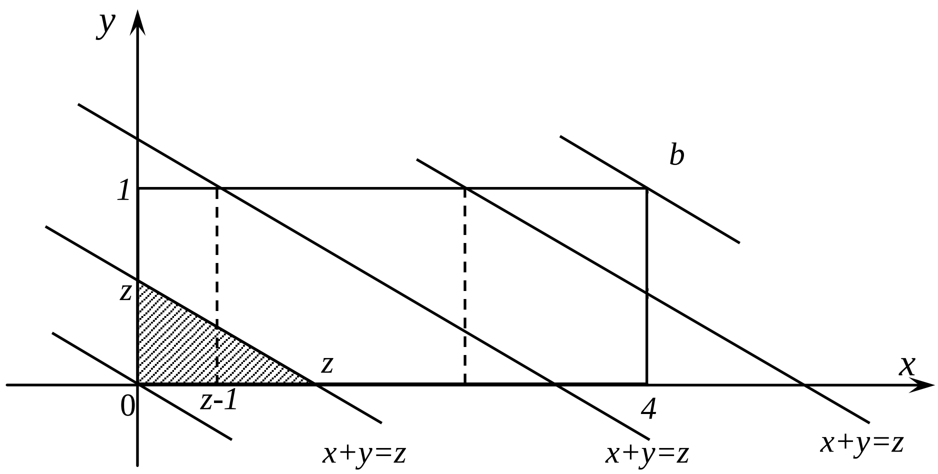


Рисунок 55

Решение. По условию система случайных величин (X, Y) равномерно распределена в прямоугольнике $D = \{0 \le x \le 4 : 0 \le Y \le 1\}$, следовательно,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1/4; & x \in [0;4], \\ 0: & x \notin [0;4], \end{cases} \qquad \varphi_2(y) = \begin{cases} 1; & y \in [0;1], \\ 0; & y \notin [0;1]. \end{cases}$$

По условию с.в. X и Y являются независимыми, то $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) = 1/4 \cdot 1 = 1/4$, и

$$\Phi_Z(z) = P\{X + Y < z\} = \iint_{(x+y<z)} \frac{1}{4} dxdy = \frac{1}{4} S_{D_z},$$

где S_{D_z} – площадь области D_z – части прямоугольника, лежащей ниже прямой $x + y = z$: т.е.

1. если $z \le 0$, то $\Phi(z) = 0$;
2. если $0 < z \le 1$, то $\Phi(z) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 z^2$ (так как $S_{D_z} = 0{,}5z^2$);
3. если $0 < z \le 1$, то $\Phi(z) = 0{,}25 \cdot \big(0{,}5 \cdot (z - 1 + z) \cdot 1\big) = 0{,}125(2z - 1)$;
4. если $4 < z \le 5$, то $\Phi(z) = 0{,}25 \cdot \big(1 \cdot 4 - 0{,}5 \cdot (5 - z)(5 - z)\big) = 0{,}125(8 - (5 - z)^2)$;
5. если $5 < z$, то $\Phi(z) = 0{,}25 \cdot 4 = 1$.

Итак,

$$\varphi(z) = \Phi'_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0,\ z > 5, \\ 0{,}25z, & 0 < z \le 1, \\ 0{,}25, & 1 < z \le 4, \\ 0{,}25 \cdot (5 - z), & 4 < z \le 5. \end{cases}$$

Проверим контроль:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)dz = \int_0^1 0{,}25zdz + \int_1^4 0{,}25dz + \int_4^5 0{,}25 \cdot (5 - z)dz = 1.$$

Полученную плотность распределения $\varphi_Z(z)$ можно найти другим способом, используя формулу (7), т.е. на основании равенства

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(z - x)dx.$$

Имеем

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \varphi_2(z - x)dx = \frac{1}{4} \int_0^4 \varphi_2(z - x)dx.$$

Функция под знаком интеграла отлична от нуля лишь в случаях

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 0 \le z - x \le 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ z - 1 \le x \le z, \end{cases}$$

Решение системы зависит от значения z.

1. Если $z \le 0$, то система не имеет решений, так как отрезки $[0; 4]$ и $[z - x; z]$ не пересекаются. Следовательно, $\varphi_2(z - x) = 0$ и $\varphi_{X+Y}(z) = 0$.

2. Если $0 < z \le 1$, то система (9) эквивалентна неравенству $0 \le x < z$, поэтому

$$\varphi(z) = \varphi_{X+Y}(z) = \frac{1}{4} \int_0^z 1 \cdot dx = \frac{1}{4} x \Big|_0^z = \frac{z}{4}.$$

3. Если $0 < z \le 1$, то система (9) эквивалентна неравенству $z - 1 \le x < z$, поэтому

$$\varphi(z) = \varphi_{X+Y}(z) = \frac{1}{4} \int_{z-1}^z 1 \cdot dx = \frac{1}{4} x \Big|_{z-1}^z = \frac{1}{4}(z - z + 1) = \frac{1}{4}.$$

4. Если $4 < z \le 5$, то система (9) эквивалентна неравенству $z - 1 \le x < 4$, поэтому

$$\varphi(z) = \varphi_{X+Y}(z) = \frac{1}{4} \int_{z-1}^4 1 \cdot dx = \frac{1}{4} x \Big|_{z-1}^4 = \frac{1}{4}(4 - z + 1) = \frac{(5 - z)}{4}.$$

5. Если $5 < z$ то система (9) не имеет решений, поэтому $\varphi_{X+Y}(z) = 0$.

Таким образом, на основании 1.-5. получим

$$\varphi(z) = \Phi'_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0,\ z > 5, \\ 0{,}25z, & 0 < z \le 1, \\ 0{,}25, & 1 < z \le 4, \\ 0{,}25 \cdot (5 - z), & 4 < z \le 5. \end{cases}$$

Задание. Изобразите на отрезках прямых линий (на разных параллельных линиях) интервалы изменения переменных x и z заштриховывая их в каждом из пяти случае.

Пример 5. Совместное распределение с.в. X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$\text{(10)} \qquad \varphi(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{при } x \in [0;1];\ y \in [0;1], \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1];\ y \notin [0;1]. \end{cases}$$

Найти функцию распределения и с помощью дифференцирования плотность распределения вероятностей с.в. $Z = X - Y$.

Решение. Сначала найдём функцию распределения $\Phi(z)$ с.в. $Z = X - Y$, а затем вычислим её производную $\Phi'(z) = \varphi_Z(z)$. В соответствии с формулой (11) пункта 11.6 имеем

$$\Phi_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X - Y < z\} = \iint\limits_{D_z} (x+y)\,dxdy,$$

где D_z выражает множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x - y < z$, т.е. $x - z < y$ (эти точки находятся выше прямой $y = x - z$), где z – произвольное число. Ясно, что если $z \le -1$, то $\Phi(z) = 0$; так как по условию примера вне единичного квадрата $\varphi(x, y) = 0$ Область интегрирования D_z при $-1 < z \le 0$ изображена на рис. 56, при $0 < z \le 1$ – на рис. 57.

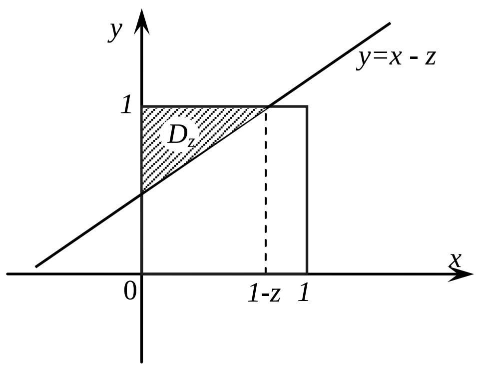


Рисунок 56

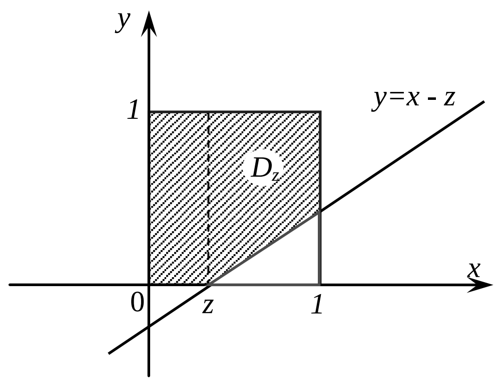


Рисунок 57

При $-1 < z \le 0$ имеем

$$\Phi_Z(z) = \iint\limits_{D_z} (x+y)\,dxdy = \int_0^{1+z} dx \int_{x-z}^{1} (x+y)dy = \int_0^{1+z} dx\ (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{x-z}^{1} =$$

$$= \int_0^{1+z} [x + \frac{1}{2} - x^2 + xz - \frac{(x-z)^2}{2}]dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} + z\frac{x^2}{2} - \frac{(x-z)^3}{6}\right)\Big|_0^{1+z} =$$

$$= \frac{(1+z)^2}{2} + \frac{1+z}{2} - \frac{(1+z)^3}{3} + \frac{z(1+z)^2}{2} - \frac{1}{6} - \frac{z^3}{6} = \frac{(1+z)^3}{2}.$$

При $0 < z \le 1$ имеем

$$\Phi_Z(z) = \iint\limits_{D_z} (x+y)\,dxdy = \int_0^{z} dx \int_{x}^{1} (x+y)dy + \int_z^{1} dx \int_{x-z}^{1} (x+y)dy =$$

$$= \int_0^{z} dx \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \int_z^1 dx \int_z^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x-z}^{1} =$$

$$= \int_0^{z} (x + \frac{1}{2})dx + \int_z^1 [x + \frac{1}{2} - x^2 + xz - \frac{(x-z)^2}{2}]dx =$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^z+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}+z\frac{x^2}{2}-\frac{(x-z)^3}{6}\right)\Big|_z^1.$$

После стандартных подсчётов и упрощений окончательно получим

$$\Phi(z)=\frac{-z^2+2z+1}{2}.$$

Остаётся случай $z>1$, имеем

$$\Phi_Z(z)=\iint_{D_z}(x+y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1(x+y)dy=$$

$$=\int_0^1 (x+0{,}5)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1=1.$$

Таким образом, для функции распределения с.в. X получим

$$\Phi_Z(z)=\begin{cases}0\,, & при \quad z\le -1,\\ \dfrac{(z+1)^2}{2}\,, & при \quad -1<z\le 0,\\ \dfrac{(-z^2+2z+1)}{2}\,, & при \quad 0<z\le 1,\\ 1\,, & при \quad z>1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\Phi'_Z(z)=\varphi_Z(z)=\begin{cases}0, & при \ z\le -1;\ z>1,\\ z+1, & при \ -1<z\le 0,\\ 1-z, & при \ 0<z\le 1,\end{cases}$$

Проверим контроль.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)dz=\int_{-\infty}^{-1}0dz+\int_{-1}^{0}(z+1)dz+\int_{0}^{1}(1-z)dz+\int_{1}^{+\infty}0dz=1.$$

Упражнение. На основании условии (10) примера 5 найти функции и плотности распределения вероятностей случайных величин:

1. $Z=X+Y$, **2.** $Z=Y\cdot X^{-1}$**.**

Пример 6. Пусть X и Y независимые случайные величины, при этом $X\approx N_{(0,1)}$ и $Y\approx N_{(0,1)}$. Найти закон распределения с.в. $Z=X+Y$.

Решение. На основании формулы (7) получим

$$\varphi_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2x^2-2xz+z^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2\{(x-\frac{z}{2})^2+2xz+\frac{z^2}{4}\}}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^4}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-[x-\frac{z}{2}]^2}d(x-\frac{z}{2}).$$

На основании интеграла Пуассона $\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}\right)$ получим

$$\varphi_{X+Y}(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}.$$

Следовательно, сумма $Z = X + Y$ двух независимых нормальных с.в. X и Y с числовыми характеристиками: $m_X = 0; m_Y = 0;$ $\sigma_X = 1;$ $\sigma_Y = 1;$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m_Z = 0,$ $\sigma_Z = \sqrt{2}.$

Тема 15. Распределение функций нормальных случайных величин

Рассмотрим распределения некоторых случайных величин, представленные функцией нормально распределённых с.в., часто используемые в математической статистике.

1. Распределение «χ^2 – хи-квадрат или распределения Пирсона»

Пусть $X_j; (j = 1, 2, \cdots, n)$ – независимые случайные величины, распределённые по нормальному закону, при этом предполагается, что математическое ожидание и дисперсия каждого из них равны: $MX_j = 0;$ $DX_j = 1;$ $\sigma_{X_j} = 1;$ $j = \overline{1, n}.$.

Распределением χ_n^2 *с* n ***степенями свободы*** *называется распределение суммы*

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2;\ X_j \approx N_{(0;1)}.$$

Плотность вероятности с.в. χ^2 *зависит только от числа слагаемых* n. *Например, если* $n = 1$*, то* $\chi^2 = X^2$*, где* $X \approx N_{(0;1)}$*, а плотность распределения равна*

$$f_X(t) = \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Плотность вероятности с.в. χ^2 *при* $n \geq 2$ *определяется равенствами*

(1) $$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}, & при\ x > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ – гамма - функция Эйлера, $\operatorname{Re} z > 0$, в частности, $\Gamma(n+1) = n!$

С возрастанием числа n- степени свободы распределение χ^2 приближается к нормальному закону распределения (при $n > 30$ распределение χ^2 практически не отличается от нормального распределения), причём выполняются равенства:

(2) $$M\chi_n^2 = n,\ D\chi_n^2 = 2n.$$

На практике, как правило, используют не плотность вероятности, а квантили (Т.8.) распределения χ_n^2.

Квантилю распределения χ_n^2, соответствующей уровню значимости α, называется такое значение, $\chi_n^2 = \chi_{\alpha,n}^2$ при котором выполняется равенство

(3) $$P\left\{\chi_n^2 > \chi_{\alpha,n}^2\right\} = \int_{\chi_{\alpha,n}^2}^{+\infty} f_{\chi_n^2}(x)dx = \alpha .$$

С геометрической точки зрения нахождение квантили $\chi_{\alpha,n}^2$ заключается в выборе такого значения $\chi_n^2 = \chi_{\alpha,n}^2$, чтобы площадь заштрихованной области на рис.58 фигуры была равна α .

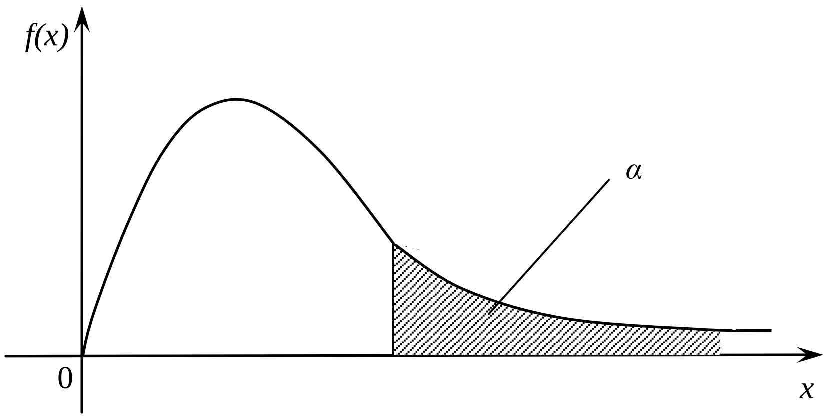


Рисунок 58

Значения квантилей $\chi_{\alpha,k}^2$ приводятся в специальных таблицах - приложениях

Для стандартного нормального распределения квантили уровня α обозначаются через $\pm u_\alpha$, при этом u_α является решением интегрального уравнения

(4) $$\Phi(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Следует заметить, что распределение χ^2 определяется одним параметром – числом степеней свободы n и с увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному закону. Распределение χ^2 так же называют критерием согласия Пирсона [10]. Оно позволяет проверить статистических гипотез о распределении вероятностей случайной величины.

2. Распределение Стьюдента

Пусть $Z \approx N_{(0;1)}$ - стандартная нормальная случайная величина, независящая от χ_n^2 – распределения, а V – независимая от Z случайная величина, распределённая по закону χ_n^2.

Распределением Стьюдента (*или* t *–распределением*) *с* n степенями свободы называется распределение случайной величины

(5) $$T_n = \frac{Z\sqrt{n}}{\chi_n}.$$

(Стьюдент-псевдоним английского статистика В. Госсета).

Плотность вероятности Стьюдента имеет вид

(6) $$f_{T_n}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}; \quad -\infty < t < +\infty.$$

При $n \to \infty$ распределение Стьюдента приближается (начиная уже с $n > 30$ почти совпадает) к нормальному закону с математическим ожиданием и дисперсией:

(7) $$MT_n = 0; \quad DT_n = \frac{n}{n-2}; \quad n > 2\,.$$

На практике используют квантили $t-$распределения. Это такое значение $t = t_{(\alpha/2;\, n)}$, что

(8) $$P\left\{ \,|\, t \,|> t_{(\alpha/2;\, n)} \right\} = 2 \int\limits_{t_{(\alpha/2,\, n)}}^{\infty} f(t)dt = \alpha.$$

С геометрической точки зрения задача нахождение квантилей заключается в выборе такого значения $t = t_{(\alpha/2;\, n)}$, чтобы площадь заштрихованной фигуры на рис. 59 была равна α.

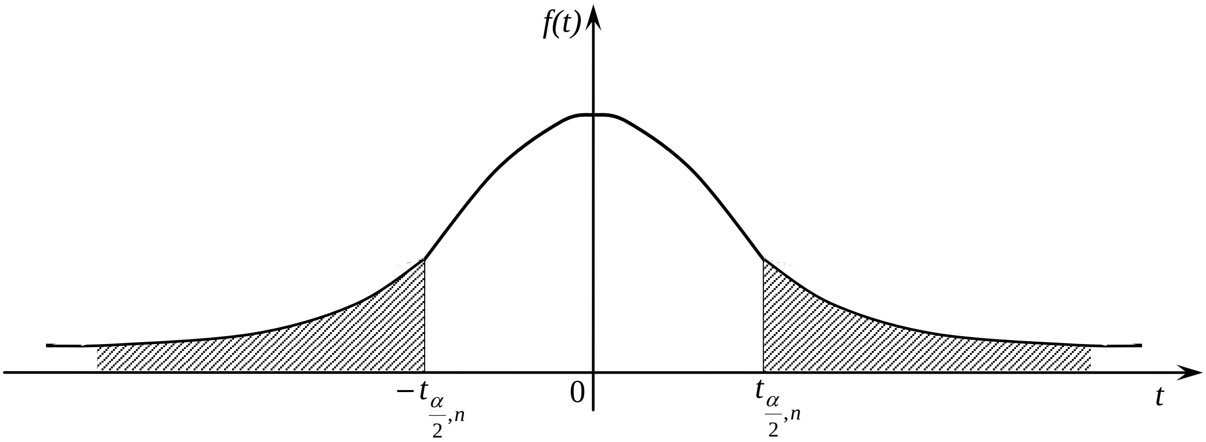


Рисунок 59

Мы ещё вернёмся к этому распределению в разделе «Математическая статистика».

3. Распределение Фишера – Снедекора (F – распределение)

Пусть $X = \chi^2_m$ и $Y = \chi^2_n$ – два независимые случайные величины, распределённые по закону χ^2 со степенями свободы соответственно m и n.

Распределением Фишера – Снедекора (или $F-$*распределением*) с m и n *степенями свободы* называется распределении с.в.

(9) $$F = \frac{m^{-1}\chi^2_m}{n^{-1}\chi^2_n},$$

где χ^2_m и χ^2_n – независимые с.в., имеющие χ^2 – распределение соответственно с m и n степенями свободы. Плотность этого распределения равна

(10) $$f(x) = \begin{cases} C_{m;n} \cdot \dfrac{x^{(m-2)/2}}{(n+mx)^{(m+n)/2}}, & при \;\; x > 0, \\ 0, & при \;\; x \le 0, \end{cases}$$

где $$C_{m;n} = \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right) m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}.$$

При $n \to \infty$ $F-$распределение стремится к нормальному закону с числовыми характеристиками:

(11) $$MF = \frac{n}{n-2}; \quad n > 2; \qquad DF = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}; \quad n > 4.$$

Обычно на практике используют квантили распределения в случаях, когда значение функции распределения $F = t_{\alpha,m,n}$ такое, что

$$P\left\{F > F_{(\alpha,m,n)}\right\} = \int_{F_{(\alpha,m,n)}}^{+\infty} f(F)\,dF = \alpha. \tag{12}$$

С геометрической точки зрения задача нахождение квантилей заключается в выборе такого значения величины $F = t_{\alpha,m,n}$, чтобы площадь заштрихованной области на рис. 60 была равна α.

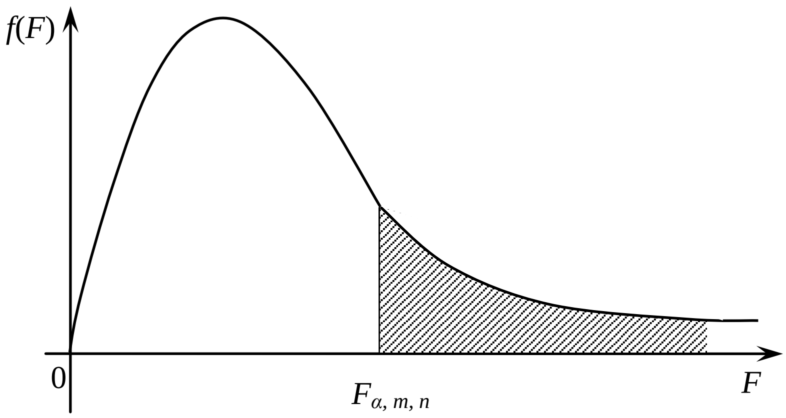


Рисунок 60

К этой теме мы ещё вернёмся более подробно в Т.20, (пункт 8.2).

ГЛАВА IV

Теория случайных процессов

Тема 16. Основы теории случайных процессов

1. Понятие случайной функции, стохастические процессы

При изучении многих явлений систематически приходится иметь дело со случайными величинами, изменяющимися в процессе проведения испытания в течение определённого времени. Мы уже встречались с примерами таких явлений в пунктах 6.2. и 9.2. в связи с законом распределения Пуассона.

Примерами таких с.в. являются: распад радиоактивного вещества при химической реакции, сигнал на выходе радиоприёмника под воздействием помех, длина очереди за билетом на футбольный матч, колебания цен в системе торговли товаров первой необходимости, загруженность студентов в течение учебного семестра, траектория частиц в броуновском движении, рейтинг претендентов в избирательных процессах, число вызовов поступающих на телефонную станцию, и т.д.

Такие случайные величины, изменяющиеся в процессе опыта (наблюдения, испытания) называют *случайными процессами* (*случайными функциями*). В настоящее время ряд отраслей техники и науки (физическая статистика, процесс диффузии, процессы химической реакции и т.д.) поставило перед теорией вероятностей новые задачи, не укладывающиеся в рамки классической теории вероятностей. В то время многие отрасли человеческой деятельности интересуют изучение процессов, то есть явлений, протекающих во времени. Они потребовали от науки теории вероятностей разработку общей теории, так называемых, случайных процессов. Другими словами, разработки теории, которая изучала бы случайные величины, зависящие от одного или нескольких непрерывно изменяющихся временных параметров. Приведём примеры таких задач, иллюстрирующих необходимость построения теории случайных процессов.

Представим себе, что мы хотим проследить за движением какой-либо молекулы газа или жидкости. Эта молекула в случайные моменты времени сталкивается с другими молекулами и меняет при этом свои скорость и положение. Очевидно, что состояние молекулы подвержено случайным изменениям в каждый момент времени. Многие явления природы требуют для своего изучения умения вычислять вероятности того, что определённое число явлений (молекул, изменение цен, поступление радиосигналов и т.д.) изменяет то или иное положение. На все эти и многие другие вопросы даёт ответ статистическая теория случайных процессов или, как принято её называть «***теория стохастических процессов***». Очевидно, что подобные задачи возникают в физике, химии, астрономии, экономике, генетике и др. Например, когда изучают процесс химической реакции, возникает законный вопрос:

- какая часть молекулы уже вступила в реакцию,
- как происходит эта реакция во времени,
- когда практически реакция уже закончилась?

Большое число явлений протекает по принципу радиоактивного распада. Суть этого явления состоит в том, что атомы радиоактивного вещества распадаются мгновенно, превращаясь в атомы другого химического элемента. Распад каждого атома происходит по времени быстро и с большой скоростью, подобно взрыву, с выделением определённого количества энергии. Как правило, многочисленные наблюдения показывают, что распад различных атомов для наблюдателя происходит в случайно взятые моменты времени. При этом расположение этих моментов времени не зависят друг от друга в смысле теории вероятностей. Для изучения процесса радиоактивного распада существенно определить какова вероятность того, что за определённый промежуток времени распадётся некоторое количество атомов? Формально, если задаваться только выяснением математической картины подобных явлений, то можно найти простое решение таких математических задач, к которым приводят подобные явления.

Вкратце изложим как, исходя из рассмотрения проблемы блуждания частиц по прямой, учёными Планком и Фоккером было получено дифференциальное уравнение в теории диффузии.

Пусть частица в момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$, в моменты $k\tau$; $(k = 1,2,3\cdots)$ испытывает случайные толчки, в результате которых она каждый раз перемещается с вероятностью p на величину h вправо и с вероятностью $q = 1 - p$ также на величину h влево.

Обозначим через $P(x,t)$ вероятность того, что частица в результате n толчков окажется в момент времени t, $(t = n\tau)$ в положении x (ясно, что при чётном числе толчков величина x может равняться лишь чётному числу шагов h, а при n нечётном – лишь нечётному числу шагов h). Если через m обозначить число шагов, сделанных частицей вправо (тогда $k = n - m$ есть число шагов, которые частица совершила влево), то согласно формуле Бернулли эта вероятность равна

$$P(x,t) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Ясно, что эти величины связаны между собой равенством $m - (n - m) = x/h.$ Непосредственно, можно убедиться, что функция $P(x,t)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$P(x,t+\tau) = p \cdot P(x-h,t) + q \cdot P(x+h,t). \tag{1}$$

с начальными условиями $P(0,0) = 1$, и при $x \neq 0$ $P(x,0) = 0$. Физическая природа задачи заставит нас пойти, на определённые естественные ограничения по отношению параметров x, h, τ, p, q. Несоблюдение некоторых необходимых условий, о которых далее пойдёт речь, может привести к тому, что за конечный промежуток времени частица с вероятностью равной единице может уйти в бесконечность. Для того чтобы исключить такую возможность, накладываем на параметры следующие условия при $h \to \infty$

$$x = nh, \quad t = n\tau, \; \frac{h^2}{\tau} \to 2D, \; \frac{p-q}{h} \to \frac{c}{D}, \tag{2}$$

где величина c выражает *скорости течения*, а $D -$ *коэффициент диффузии.*

Отнимем от обеих частей равенства (1) величину $P(x,t)$, получим

$$P(x,t+\tau) - P(x,t) = p[P(x-h,t) - P(x,t)] + q[P(x+h,t) - P(x,t)]. \tag{3}$$

Предположим, что функция $P(x,t)$ дифференцируема по x дважды и один раз по t. Тогда имеем

$$P(x,t+\tau) - P(x,t) = \tau \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + o\ (\tau),$$

$$P(x+h,t) - P(x,t) = h\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + 0{,}5 \cdot h^2\ \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} + o\ (h^2),$$

$$-P(x,t) + P(x-h,t) = -h\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + 0{,}5 \cdot h^2\ \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} + o\ (h^2),$$

где $\{g(u) = o(u)$ *при* $u \to 0$, *означает, что* $\lim\limits_{u \to 0}[g(u)/u] = 0\}$.

После подстановки полученных равенств в (3) имеем

$$\tau \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + o\ \ (\tau) = -(p-q)h\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + 0{,}5 \cdot h^2\ \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} + o\ \ (h^2).$$

Отсюда, переходя к пределу $h \to \infty$ и на основании условий (2) получим окончательно

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -2c\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (4)$$

Таким образом, мы получили известное уравнение, носящее в теории диффузии название *уравнения Фоккера – Планка*.

Начало общей теории стохастических процессов было положено в фундаментальных работах А.Н. Колмогорова и А.Я. Хинчина в начале 30 – х годов. В статье А.Н. Колмогорова «Об аналитических методах теории вероятностей» было дано систематическое и строгое построение основ теории стохастических процессов *без последействия* или, как часто говорят, процессов Марковского типа. В ряде работ Хинчина была создана теория, так называемых, стационарных процессов.

Таким образом, раздел математики, изучающий случайные явления в динамике их развития, называется *теорией случайных процессов* (*случайных функций*). Эти методы часто используются: в теории автоматического управления, при анализе и планировании финансовой деятельности предприятий и хозяйств, при обработке и передаче необходимых информаций (сигналов в радиотехнических устройствах, спутниковых связей и др.), в экономике и в теории массового обслуживания.

Кратко рассмотрим основные понятия теории случайных процессов (СП).

Если каждому значению $t \in T$, где T обозначает некоторое множество действительных чисел, поставлена в соответствие с.в. $X(t)$, то говорят, что на множестве T задана случайная функция (с.ф.) $X(t)$. Случайные процессы, у которых $T = [0,+\infty)$, особенно важны в приложениях. В тех случаях, когда параметр t интерпретируется как временной параметр, то случайная функция называется *случайным процессом, т.е. случайным процессом* называется семейство с.в. $X(t,\omega)$, зависящих от параметра $t \in T$ и заданных на одном и том же пространстве элементарных событий Ω. Обозначается $X(t,\omega)$ или $X(t), X_t$.

Случайный процесс можно задать в виде формулы (аналитической записи), если вид случайной функции известен. Например, с.ф. $X(t) = Y \cdot S\,\mathrm{int},\ t \ge 0,$ является с.п., где случайная величина $Y \approx \Re_{[0,1]}$ имеет равномерное распределение. При фиксированном значении $t,\ (t = t_0 \in T)$, с.п. $X(t,\omega)$,то с.п. обращается в с.в. $X(t_0,\omega)$, которую называют сечением случайного процесса.

Реализацией или *траекторией* случайного процесса $X(t,\omega)$ называется *неслучайная* функция времени $x(t) = X(t,\omega_0)$ при фиксированном $\omega = \omega_0 \in \Omega$, т.е. в результате испытания с.п. принимает конкретный вид $X(t,\omega_0)$, при этом реализации с.п. обозначают через $x_1(t), x_2(t),$ $,\cdots,$ где индексы указывают на номер испытания.

На рис.61 показаны три реализации $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ случайного процесса при $\omega = \omega_1$; $\omega = \omega_2$; $\omega = \omega_3$. Они напоминают виды трёх синусоидальных колебательных явлений в некотором механическом процессе, при этом каждая такая реализация (траектория) является обычной функцией $x(t)$.

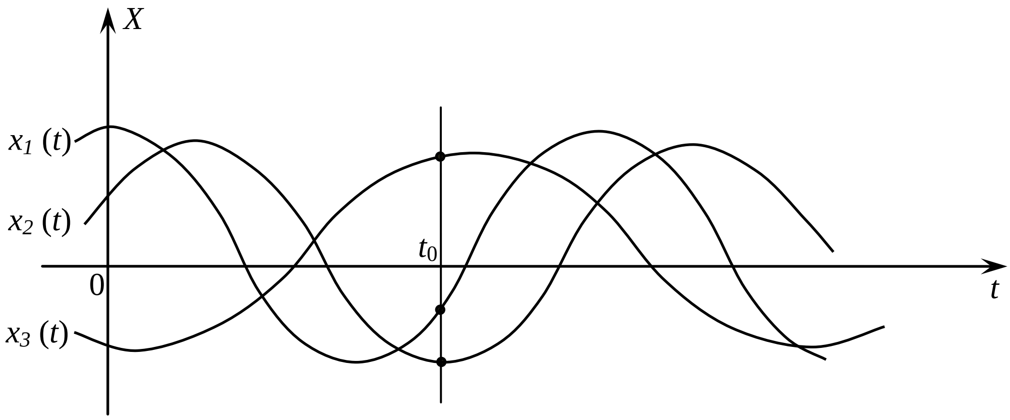


Рис унок 61

В данном примере с.в. Y в трёх опытах приняла соответственно три значения: 1, 2, 0,5, т.е. констатируется три реализации СП: $x_1(t) = Sint$, $x_2(t) = 2Sint$, $x_3(t) = 0{,}5 \cdot Sint$. Все три функции являются неслучайными. Если в этом примере зафиксировать момент времени, при $t = \pi/2$, то получим сечение: $X(\pi/2) = Y$ - случайная величина или при $t = \pi/4$, $X(\pi/4) = (\sqrt{2}/2) \cdot Y, \cdots$ - случайные величины. Отметим, что $\Phi_t(x) = P\{X(t) < x\}$ – так называемый *одномерный закон распределения случайного процесса* $X(t)$ не является *исчерпывающей характеристикой с.п.* Случайный процесс $X(t)$ представляет собой совокупность всех сечений при различных значениях $t \in T$, поэтому для полного его описания следует рассматривать совместную функцию распределения сечений процесса:

$$\Phi_{(t_1, t_2, \cdots, t_n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \cdots, X(t_n) < x_n\} -$$

так называемый конечномерный закон распределения с.п. в моменты $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$. Другими словами возникают многомерные с.в. $\{X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)\}$.

Таким образом, понятие с.п. является прямым обобщением понятия системы случайных величин, когда этих величин – бесконечное множество.

2. Процесс Пуассона

Распределение Пуассона как один из предельных законов подробно рассматривали в пунктах 6.2, 9.2. В этом разделе ещё раз возвращаемся к этому закону уже с точки зрения теории случайных процессов. В пункте 6.2. было введено некоторые предварительные понятия относительно простейшего потока событий. Кратко напомним о них ещё раз.

Потоком событий называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени.

Рассмотрим процесс без последействия, имеющий важное значение в современной физике, теории связи, теории надёжности и в теории массового обслуживания. Предполагают, что этот процесс был впервые подвергнуть исследованию в начале XX века физиками А. Эйнштейном и М. Смолуховским в связи с задачами броуновского движения.

Предположим, что в случайные моменты времени происходит некоторое событие. Нас интересует число появления этого события в промежуток времени от 0 до *t*. Относительно процесса появления события предполагается выполнение трёх условий, о которых ниже напомним ещё раз.

Среди основных свойств, которыми могут обладать потоки, выделяются три свойства: ***стационарности, ординарности*** и ***отсутствия последействия.***

1. ***Стационарность*** означает, что для любой группы из конечного числа между собой непересекающихся промежутков времени вероятность появления определённого числа

событий на протяжении каждого из них зависит только от этих чисел и от длительности промежутков времени, и не зависит от сдвига всех отрезков времени на одну и ту же величину. В частности, вероятность появления k событий в течении промежутка времени от τ до $\tau + t$ не зависит от τ и является функцией только величин k и τ.

Поэтому *среднее число событий, появляющихся в единице времени,* так называемая *интенсивность* потока, есть постоянная $\lambda(t) = \lambda$.

2. ***Отсутствие последействия*** означает, что вероятность появления k событий в течение промежутка времени $(\tau, \tau + t)$ на любом участке времени длины t не зависит от того, сколько событий появилось ранее. Это предположение означает, что условная вероятность появления событий за промежуток времени $(\tau, \tau + t)$ при любом предположении о наступлении событий до момента τ совпадает с безусловной вероятностью. В частности, отсутствие последействия означает взаимную независимость того или иного количества событий в непересекающиеся промежутки времени.

3. ***Ординарность*** выражает требование практической невозможности появления двух или нескольких событий за малый промежуток времени Δt, то есть события появляются не группами, а поодиночке. Иначе говоря, вероятность появления более одного события на малом участке времени Δt пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью появления только одного события, т.е. имеет место $P_{k>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$.

Итак:

- *если поток обладает свойством* <u>*стационарности*</u>*, то вероятность появления k событий за промежуток времени длительностью t есть функция, зависящая только от k и t*;

- *если поток обладает свойством* <u>*отсутствия последействия*</u>*, то имеет место взаимная независимость появлений того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени;*

- *если поток обладает свойством* <u>*ординарности*</u>*, то за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события.*

Поток событий, обладающий указанными свойствами *стационарности, отсутствия последействия и ординарности* называется *простейшим* (*пуассоновским) потоком*.

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Процесс Пуассона удовлетворяет трём условиям: *стационарности, без последействия и ординарности* . Докажем утверждение.

Теорема 16.1. *Для вероятностей $P_k(t)$ наступления события за промежуток времени t произойдут k событий, $k = 1, 2, 3, \cdots$ справедлива формула*

$$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}. \tag{5}$$

Доказательство. Сначала покажем, что величина $P_k(t)$ за промежуток времени длительности t, если произойдёт k событий, эти вероятности не зависят от того, что где расположен этот отрезок времени. С этой целью в соответствии наших предположений обнаружим, что при малых Δt имеет место $P_1(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, $\lambda -$ постоянное.

Действительно, рассмотрим промежуток времени длительности равное единице и обозначим через p вероятность того, что за этот срок больше не наступит ни одно событие. Разобьем наш промежуток на n равных непересекающихся частей. В силу первого и второго предположений имеет место равенство $p = [p_0(1/n)]^n$, откуда следует, что $p_0(1/n) = p^{1/n}$. Отсюда при любом натуральном числе k получим равенство $p_0(k/n) = p^{k/n}$. Пусть теперь $t -$ некоторое неотрицательное число. При любом n можно найти такое k, что будет иметь место неравенства: $(k-1)/n \le t < k/n$. Поскольку вероятность $P_0(t)$ есть убывающая функция времени, то

$$P_0((k-1)/n)) \geq P_0(t) \geq P_0(k/n).$$

Таким образом, $p_0(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$p^{(k-1)/n} \geq P_0(t) \geq p^{k/n}.$$

Пусть n и k стремятся к бесконечности так, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = t.$$

Так как величина $P_0(t)$, как вероятностное число удовлетворяет, неравенствам $0 \leq P_0(t) \leq 1,$ то могут представиться три следующих случая: $1. p=0;$ $2. p=1;$ $3. 0<p<1.$ Первые два случая малоинтересны. В первом из них при любом $t,$ $P_0(t)=0$. Следовательно, вероятность за промежуток времени любой длительности произойти хотя бы одному событию равна единице.

Другими словами, с вероятностью равной единице за промежуток времени любой длительности происходит бесконечно много событий. Во втором случае $P_0(t)=1$, следовательно, в этом случае ни одного события не происходят. Представляет лишь интерес третий случай, в котором положим $p=e^{-\lambda}$, где $\lambda = \ln\frac{1}{p}$ – некоторое положительное число.

Итак, из определений стационарности и отсутствия последействия мы вывели, что при любом $t>0$

(6) $$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

В соответствии с определением вероятности понятно, что

$$P_0(t) + P_1(t) + P_{>1}(t) = 1.$$

Из формулы (6) вытекает, что при малых значениях t

$$P_0(t) = 1 - \lambda t + o(t).$$

Следовательно, в силу условия ординарности, получим

(7) $$P_1(t) = \lambda t + o(t).$$

Теперь можем приступить к выводу формул для вероятностей $P_k(t),$ *для* $k \geq 1.$ С этой целью определим вероятность того, что за время $t+\Delta t$ событие наступит ровно k раз. Это может осуществиться $k+1$ различными способами, а именно:

1) за промежуток времени длительности t произойдут k событий, а за время Δt – ни одного события;

2) за промежуток времени длительности t произойдут $k-1$ событие, а за время Δt – одно;

3) за промежуток времени длительности t произойдут $k-2$ событие, а за время Δt – два и так далее; за (k+1) промежуток времени длительности t не наступит ни одного события, а за время Δt произойдут k событий.

По формуле полной вероятности (с учётом условий стационарности и отсутствия последействия) имеем равенство

$$P_k(t+\Delta t) = \sum_{m=0}^{k} P_m(t) \cdot P_{k-m}(\Delta t).$$

Обозначим

$$R_k = \sum_{m=0}^{k-2} P_m(t) \cdot P_{k-m}(\Delta t).$$

Отсюда с учётом условия ординарности имеем цепочку неравенства:

$$R_k \leq \sum_{m=0}^{k-2} P_{k-m}(\Delta t) = \sum_{S=2}^{k} P_S(\Delta t) \leq \sum_{S=2}^{\infty} P_S(\Delta t) = P_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t).$$

Таким образом,

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)P_0(\Delta t) + P_{k-1}(t)P_1(\Delta t) + o(\Delta t).$$

Далее, согласно формуле (7)

$$P_0(\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t),\ P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

Поэтому

$$P_k(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)P_k(t) + \lambda\Delta t P_{k-1}(t) + o(\Delta t)$$

Отсюда

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t),$$

Поскольку при $\Delta t \to 0$ предельное значение правой части равенства существует, то существует и предел левой части. В результате для определения $P_k(t)$ получаем уравнение

(8) $$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t).$$

Выберем начальные условия такие:

(9) $$P_0(0) = 1;\quad P_k(0) = 0 \ \ \textit{при}\ \ k \geq 1.$$

Для решения дифференциального уравнения (9) введём функцию

(10) $$Q_k(t) = P_k(t)e^{\lambda t}, k = 0,1,2\cdots \Leftrightarrow P_k(t) = e^{-\lambda t}Q_k(t).$$

Поставляя $Q_k(t)$ в (9), получаем

(11) $$Q_k'(t) = \lambda Q_{k-1}(t);\ k = 1,2,3,...,$$

где $Q_0(t) \equiv 1;$ начальные условия остаются теми же: $Q_k(0) = 0,\ k = 1,2,3,...$ Последовательно решая уравнения (11), с учётом начальных условий последовательно получаем

$$Q_1'(t) = \lambda \ \textit{или}\ Q_1(t) = \lambda t + C \Rightarrow Q_1(t) = \lambda t;$$

$$Q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} + C \quad \Rightarrow \quad Q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!};$$

$$Q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} + C \quad \Rightarrow \quad Q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Следовательно, на основании (10),

$$P_k(t) = \frac{\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},$$ получим доказательство теоремы 16.1.

Таким образом, мы доказали, что при каждом t случайная величина $X(t)$ починяется распределению Пуассона с параметром λt. В частности, среднее количество наступлений события за время t равно $\lambda t.$

Следствие. В условиях теоремы 16.1 при любом номере n для вероятностей $P_n(t)$ с начальными условиями $P_0(0) = 1;\quad P_n(0) = 0 \ \textit{при}\ n \geq 1$, имеют место равенства

1. $P_n'(t) + \lambda\Delta_1[P_{n-1}(t)] = 0,$ (разностно-дифференциальное уравнение)

2. $P_n(t) + \dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=1}^{n} P_k'(t) = P_0(t)$ (свойство последовательности «наследия»).

3. На основании равенства $P_0'(t) + \lambda P_0(t) = 0$, имеет место равенство

$$P_n(t) + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n} P_k'(t) = 0$$

Заметим, что теория развитая, в настоящем пункте, может быть применена не только в предположении, что параметр t играет роль временного параметра, но и других объектов. Чтобы убедится в этом, рассмотрим следующий пример.

Пример 1. В пространстве разбросаны точки, для которых выполнены следующие требования:

1. Пусть $P_k(v)$ обозначает вероятность того, что k точек окажется в заданной области G, зависит лишь от объёма v этой области, но никак не зависит ни от её формы, ни от её положения в пространстве;

2. Количество точек, попавших в неперекрывающиеся области, являются независимыми случайными величинами:

3. Потребуем, чтобы $\sum_{k=2}^{\infty} P_k(\Delta v) = o(\Delta v)$.

Эти требования удовлетворяют условиям: стационарности, отсутствия последействия и ординарности. Поэтому существует положительная постоянная $a,$ такая, что для вероятности $P_k(v)$ будет иметь место равенство

$$P_k(v) = \frac{(a \cdot v)^k \cdot e^{-at}}{k!}.$$

Если в жидкости взвешены (выпали в осадок) мельчайшие частицы какого-либо вещества, то под воздействием ударов окружающих молекул эти частицы находятся в непрерывном хаотическом движении (броуновское движение). В результате в каждый момент времени мы имеем случайное распределение частиц в пространстве, о чем говорилась в рассмотренном примере.

Согласно теории стохастических процессов следует считать, что такое распределение частиц, попадающих в определённую область пространства, будет подчинено закону Пуассона. Ниже рассмотрим таблицу, заимствованную из книги [1], где расчёты приводятся из статьи физика Смолуховского, и результаты вычислений проведены по закону Пуассона.

Число частиц	Число наблюдавшихся случаев	Число $\frac{m}{518}$	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	Вычисленное Число случаев
0	112	0,216	0,213	110
1	168	0,325	0,328	173
2	130	0,251	0,253	131
3	69	0,133	0,130	67
4	32	0,062	0,050	26
5	5	0,010	0,016	8
6	1	0,002	0,004	2
7	1	0,002	0,001	1

Постоянное число, $\lambda = av$ которым определяется закон Пуассона, выбрано равным среднему арифметическому из наблюдавшегося количества частиц, т.е.

$$\lambda \approx \frac{0{,}112 + 1{,}168 + 2{,}130 + 3{,}69 + 4{,}32 + 5{,}5 + 6{,}1 + 7{,}1}{518} \approx 1{,}54.$$

3. Классификация случайных процессов

Здесь, коротко рассмотрим основные вопросы систематизации (классификации) случайных процессов.

Случайный процесс, протекающий (проходящей) в любой физической системе S, представляет собой случайные переходы системы из одного состояния в другое. В зависимости от множества этих состояний W, от множества T значений аргумента t все случайные процессы делят на классы (группы):

1. Дискретный процесс **(**дискретное состояние) с дискретным временем.

2. Дискретный процесс с непрерывным временем.

3. Непрерывный процесс (непрерывное состояние) с дискретным временем.

4. Непрерывный процесс с непрерывным временем.

В 1-м 3-м случаях множество T дискретно, т.е. аргумент t принимает дискретные значения $t_0, t_1, \cdots$, обычно $t = 0,1,2,\cdots$; в 1-м случае множество значений случайной функции $X(t)$ определяются равенствами: $X(t_k) = x_k; k = 0,1,2,\cdots$, является дискретное множество W (множество W конечно или счетное).

В третьем случае множество W несчётно, т.е. сечение случайного процесса в любой момент времени t представляет собой непрерывную случайную величину.

Во 2-м и 4-м случаях множество T непрерывно, во втором случае множество состояний системы W конечно или счетное, а в четвёртом случае множество W – несчётное.

Приведём некоторые примеры случайных процессов 1-4 классов соответственно:

1. Хоккеист может забить или не забить один или несколько шайб в ворота соперника во время матчей, проводимых в определенные моменты (согласно расписанию игр) времени

$t_1, t_2 \cdots$. Случайный процесс $X(t)$ есть число забитых шайб до момента t.

2. Случайный процесс $X(t)$ - количество просмотренных фильмов в кинотеатре «Звезда» от начала работы кинотеатра до момента времени t.

3. В определённые моменты времени $t_0, t_1, t_2 \cdots$, измеряется температура $Y(t)$ больного в некотором лечебном центре. $Y(t)$ - является случайный процесс непрерывного типа с дискретным временем.

4. Показатель уровня влажности воздуха в течение сутки в городе А.

Можно рассматривать и другие более сложные классы случайных процессов. Для каждого класса случайных процессов разрабатываются соответствующие методы их изучения.

Можно найти ряд разнообразные и интересные примеры случайных потоков в учебниках [1], [7] и в монографии [12] .

Для случайных процессов также вводятся простеющие функциональные характеристики, зависящие от параметра t, аналогичные основным числовым характеристикам случайных величин.

Знание этих характеристик, достаточно для решения многих задач. Напомним, что полная характеристика случайного процесса даётся её многомерным (конечномерным) законом распределения.

В отличие числовых характеристик случайных величин в общем случае функциональные характеристики представляют собой определённые функции.

4. Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса

Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $m_X(t)$, определённая при любом фиксированном значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса:

(12) $$m_X(T) = M[X(t)].$$

Для краткого обозначения математического ожидания с.п. применяют также обозначение $m(t)$.

Функция $m_X(t)$ характеризует поведение случайного процесса в среднем. Геометрический смысл математического ожидания $m(t)$ истолковывается как «средняя кривая», около которой расположены кривые-реализации.

На основании свойства математического ожидания случайной величины и учитывая, что $X(t)-$ случайный процесс, а $g(t)-$неслучайная функция, получаем *свойства* математического ожидания *случайного процесса:*

1. Математическое ожидание неслучайной функции равно самой функции: $M[g(t)] = g(t)$.

2. Неслучайный множитель (неслучайную функцию) можно выносить за знак математического ожидания случайного процесса, т.е. $M[g(t)\cdot X(t)] = g(t)\cdot m_X(t)$.

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных процессов равно сумме (разности) математических ожиданий слагаемых, т.е.

$$M[X(t)\pm Y(t)] = m_X(t)\pm m_Y(t).$$

Отметим, что если зафиксируем аргумент (параметр) t, то переходим от случайного процесса к случайной величине (т.е. переходим к сечению случайного процесса), можно найти м.о. этого процесса при этом фиксированном t.

Поскольку, если сечение с.п. $X(t)$ при заданном t есть непрерывная с.в. с плотностью $\varphi(t,x),$ то его математическое ожидание можно вычислить по формуле

(13) $$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\varphi(t,x)dx.$$

Пример 2. Пусть с.п. определяется формулой $Y(t) = X\cdot e^{-t}$, $t>0$; $X\approx N_{(3;1)}$, т.е. $X-$с.в., распределена по нормальному закону с $a = MX = 3,\ \sigma = 1.$

Найти математического ожидания случайного процесса $Y(t)$.

Решение. По свойству 2. имеем

$$m_Y(t) = M[X\cdot e^{-t}] = e^{-e}MX = 3e^{-e}\ ,$$

так как $X\approx N_{(3,1)}$ и следовательно, $MX = 3$.

Упражнение. Вычислить математическое ожидание воспользуюсь, равенствами

$$\varphi(x) = \frac{1}{1\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 1^2}}, \qquad m_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\varphi(t,x)dx,$$

а затем на основании формулы (13) вычислить интеграл и убедиться, что результат будет тот же самый.

Указание. Воспользоваться равенством

$$m_Y(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(-\int_{-\infty}^{+\infty}(x-3)\cdot e^{-\left(\frac{(x-3)^2}{\sqrt{2}}\right)}dx + 3\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot e^{-\left(\frac{(x-3)^2}{\sqrt{2}}\right)}dx\right).$$

Дисперсия случайного процесса.

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция

(14) $$D_X(t) = DX(t) = MX^2(t) - [m_X(t)]^2.$$

Дисперсия $D_X(t)$ с.п. рассматривается, также характеризуют разброс (рассеяние) возможных значений с.п. относительно его математического ожидания.

Наряду с дисперсией с.п. рассматривается также среднее квадратическое отклонение $\sigma(t)$ (коротко с.к.о.), которое определяется равенством

(15) $$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}.$$

Размерность функции $\sigma_X(t)$ равна размерности с.п. $X(t)$.

Значения реализаций с.п. при каждом t отклоняется от математического ожидания $m(t)$ на величину порядка $\sigma_X(t)$ (см. рис 60).

Отметим простейшие свойства дисперсии случайных процессов.

1. Дисперсия неслучайной функции $g(t)$ равна нулю, т.е.

$$D[g(t)] = 0$$

2. Дисперсия случайного процесса $X(t)$ неотрицательна т.е.

$$D_X(t) = \sigma_X^2(t) \geq 0.$$

3. Дисперсия произведения неслучайной функции $g(t)$ на случайную функцию $X(t)$ равна произведению квадрата неслучайной функции на дисперсию случайной функции, т.е.

$$D_X[g(t) \cdot X(t)] = g^2(t) \cdot D_X[X(t)].$$

4. Дисперсия суммы с.п. $X(t)$ и неслучайной функции $g(t)$ равна дисперсии с.п., т.е.

$$D_X[X(t) \pm g(t)] = D_X[X(t)].$$

Пример 3. Пусть с.п. определяется формулой $Y(t) = X \cdot e^{-t},\ t > 0;\ \ X \approx N_{(3;1)}$, т.е. X – с.в. распределена по нормальному закону с $a = MX = 3,\ \sigma = 1$.

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение с.п. $Y(t)$.

Решение. Вычислим дисперсию на основании формулы из свойства 3. Имеем $D_Y(t) = D(e^{-t} \cdot X) = e^{-2t}DX$, но $X \approx N_{(3;1)}$, следовательно, по определению дисперсии с.в. X

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-3)^2 \frac{1}{1\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 1^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2u^2 e^{-u^2}\sqrt{2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}u \cdot e^{-u^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 1^2 = 1$$

Следовательно, $D_Y(t) = e^{-2t} \cdot 1 = e^{-2t}$; т.е. $D_Y(t) = e^{-2t}$ и $\sigma_Y = e^{-t}$.

5. Корреляционная функция случайного процесса

При исследовании вопросов *зависимости или независимости* двух или более сечений случайных процессов знание лишь математического ожидания и дисперсии с.п. не достаточно.

Для определения связи между различными случайными процессами используется понятие корреляционной функции – аналог понятия ковариации случайных величин (см. Т.8)

$$K_{XY} = M[(X - m_X)\cdot(Y - m_Y)] = M[XY] - m_X m_Y,$$

Корреляционной (ковариационной, автоковариационной, автокорреляционной) функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_X(t_1;t_2)$, которая при каждой паре значений $\{t_1, t_2\}$ равна корреляционному моменту соответствующих сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$:

$$K_X(t_1;t_2) = M[(X(t_1) - m(t_1))\cdot(X(t_2) - m(t_2))]$$

или (с учётом обозначения центрированной случайной функции $\breve{X}(t) = X(t) - m_X(t)$) имеем

$$K_X(t_1;t_2) = M[\breve{X}(t_1)\cdot(\breve{X}(t_2)] = M[X(t_1)\cdot X(t_2)] - m_X(t_1)m_X(t_2).$$

Приведём основные *свойства корреляционной функции* $K_X(t_1;t_2)$ случайного процесса $X(t)$.

1. Корреляционная функция при одинаковых значениях аргументов равна дисперсии с.п.

$$K_X(t;t) = D_X(t) = \sigma^2{}_X(t).$$

Действительно,

$$K_X(t;t) = Cov[X(t);X(t)] = M\left(\breve{X}(t)\cdot\breve{X}(t)\right) =$$
$$= M[(\breve{X}(t))^2] = M[(X(t)-m_X(t))^2] = D_X(t).$$

Доказанное свойство позволяет вычислить м.о. и корреляционную функцию являющимися основными характеристиками случайного процесса, необходимость в подсчёте дисперсии отпадает.

2. Корреляционная функция не меняется относительно замены аргументов, т.е. является симметрической функцией относительно своих аргументов: $K_X(t_1;t_2) = K_X(t_2;t_1)$.

Это свойство непосредственно выводится из определения корреляционной функции.

3. Если к случайному процессу прибавить неслучайную функцию, то корреляционная функция не меняется, т.е. если $Y(t) = X(t) + g(t)$, то $K_Y(t_1;t_2) = K_X(t_1;t_2)$. Другими словами является периодической функцией относительно любой неслучайной функции.

Действительно, из цепочки рассуждений

$$m_Y(t) = m_X(t) + g(t) \Rightarrow Y(t) - m_Y(t) = X(t) + g(t) - m_X(t) - g(t),$$

следует, что $Y(t) - m_Y(t) = X(t) - m_X(t)$. Отсюда получим требуемое свойство 3.

4. Модуль корреляционной функции не превосходит произведения с.к.о., т.е.

$$|K_X(t_1,t_2)| \le \sqrt{D_X(t_1)\cdot D_X(t_2)} = \sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2).$$

Доказательство свойства 4. проводится аналогично как в пункте 12.2., с учётом первого свойства корреляционной функции с.п. $X(t)$.

5. При умножении с.п. $X(t)$ на неслучайный множитель $g(t)$ её корреляционная функция умножится на произведение $f(t_1)\cdot f(t_2)$, т.е., если $Y(t) = X(t)\cdot g(t)$, то

$$K_Y(t_1;t_2) = g(t_1)g(t_2)K_X(t_1;t_2).$$

5.1. Нормированная корреляционная функция

Наряду с корреляционной функцией с.п. рассматривается также *нормированная корреляционная функция* (*или автокорреляционная функция*) $r_X(t_1;t_2)$, определяемая равенством

$$r_X(t_1;t_2) = \frac{K_X(t_1;t_2)}{\sigma_X(t_1)\cdot\sigma_X(t_2)}.$$

Следствие. На основании свойства 1 имеет место равенство

$$r_X(t_1;t_2) = \frac{K_X(t_1;t_2)}{\sqrt{K_X(t_1;t_1)}\cdot\sqrt{\cdot K_X(t_2;t_2)}}.$$

По своему смыслу величина $r_X(t_1;t_2)$ аналогична коэффициенту корреляции для с.в., но не является постоянной, а зависит от аргументов t_1 и t_2.

Перечислим *свойства нормированной корреляционной функции*:

1. $|r_X(t_1;t_2)| \le 1;$
2. $r_X(t_1;t_2) = 1;$
3. $r_X(t_1;t_2) = r_X(t_2;t_1)$.

Пример 4. Пусть с.п. определяется формулой $Y(t) = X\cdot e^{-t}$, $t>0$; $X \approx N_{(3;1)}$, т.е. X – с.в., распределена по нормальному закону с $a = MX = 3$, $\sigma = 1$.

Найти корреляционную и нормированную функции случайного процесса $Y(t)$.

Решение. По определению имеем

$$K_Y(t_1,t_2) = M[(X\cdot e^{-t_1} - 3\cdot e^{-t_1})\cdot(X\cdot e^{-t_2} - 3\cdot e^{-t_2})] =$$
$$= M[X^2\cdot e^{-(t_1+t_2)} - 6X\cdot e^{-(t_1+t_2)} + 9\cdot e^{-(t_1+t_2)}] = M[e^{-(t_1+t_2)}\cdot(X-3)^2] =$$
$$= M[e^{-(t_1+t_2)}\cdot(X-3)^2] = e^{-(t_1+t_2)}\cdot DX = e^{-(t_1+t_2)}\cdot 1^2 = e^{-(t_1+t_2)},$$

т.е. $K_Y(t_1,t_2)=e^{-(t_1+t_2)}$. Отсюда с учётом определения нормированной корреляционной функции и результатов решения предыдущих примеров получим $r_Y(t_1,t_2)=\dfrac{e^{-t_2}\cdot e^{-t_2}}{e^{-t_2}\cdot e^{-t_2}}=1$, т.е. $r_Y(t_1,t_2)=1$.

5.2. Взаимная корреляционная функция случайного процесса

Для определения степени зависимости *сечений* двух случайных процессов используют корреляционную функцию связи или взаимную корреляционную функцию.

Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называется неслучайная функция $G_{XY}(t_1;t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту двух сечений $X(t_1)$ и $Y(t_2)$;

$$G_{XY}(t_1;t_2)=M[\breve{X}(t_1)\cdot Y(t_2)];\ \breve{X}(t)=X(t)-m_X(t),\ \breve{Y}(t)-m_Y(t).$$

Два с.п. $X(t)$ и $Y(t)$ называются *некоррелированными,* если их взаимная корреляционная функция тождественно равна нулю, т.е. если для любых t_1 и t_2 имеет место $G_{XY}(t_1;t_2)=0$. Если же для любых t_1 и t_2 окажется $G_{XY}(t_1;t_2)\neq 0$, то случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *коррелированными* (или *связанными*).

Рассмотрим свойства взаимной корреляционной функции, которые непосредственно выводятся из её определения и свойств корреляционного момента (см. 12.2):

1.При одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не меняется, то есть $G_{XY}(t_1;t_2)=G_{YX}(t_2;t_1)$.

2. Модуль взаимной корреляционной функции двух случайных процессов не превышает произведения их средних квадратичных отклонений, то есть $|G_{XY}(t_1;t_2)|\leq\sigma_X(t_1)\cdot\sigma_Y(t_2)$.

3. Корреляционная функция не изменится, если к случайным процессам $X(t)$ и $Y(t)$ прибавить неслучайные функции $g(t)$ и $h(t)$ соответственно, то есть $G_{X_1Y_1}(t_1;t_2)=G_{XY}(t_1;t_2)$, где соответственно $X_1(t)=X(t)+g(t)$ и $Y_1(t)=Y(t)+h(t)$.

4. Неслучайные множители $Y_1(t)=h(t)\cdot Y(t)$ можно вынести за знак корреляции, то есть, если $X_1(t)=g(t)\cdot X(t)$ и, то $G_{X_1Y_1}(t_1;t_2)=[g(t)\cdot h(t)]\cdot G_{XY}(t_1;t_2)$.

5. Если $Z(t)=X(t)+Y(t)$, то $K_Z(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)+K_Y(t_1,t_2)+G_{XY}(t_1,t_2)+G_{YX}(t_1,t_2)$.

6. Если случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ *некоррелированные*, то корреляционная функция их суммы равна сумме их корреляционных функций, то есть $K_{X+Y}(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)+K_Y(t_1,t_2)$.

Для оценки степени зависимости сечений двух с.п. используют также *нормированную взаимную корреляционную функцию* $r_{XY}(t_1,t_2)$, определяемую равенством:

$$r_{XY}(t_1,t_2)=\frac{G_{XY}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)\cdot D_Y(t_2)}}=\frac{G_{XY}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_X(t_1;t_1)\cdot K_Y(t_2;t_2)}}.$$

Функция $r_{XY}(t_1,t_2)$ обладает теми же свойствами, что и функция $G_{XY}(t_1,t_2)$, но свойство 2
заменяется на следующее двойное неравенство $|r_{XY}(t_1,t_2)|\leq 1$, т.е. модуль нормированной взаимной корреляционной функции не превышает единицы.

Пример 5. Найти взаимную корреляционную функцию двух с.п. $X(t)=t\cdot V$ и $Y(t)=(t+l)\cdot V$, где $l>0$; V – случайная величина, при этом $DV=q,\ q>0$.

Решение. Так как $m_X(t)=M[tV]=t\cdot MV=t\cdot m_V$, $m_Y(t)=M[(t+l)V]=(t+l)\cdot m_V$.

То $G_{XY}(t_1,t_2)=M[(t_1(V-m_V))\cdot((t_2+l)(V-m_V))]=t_1\cdot(t_2+l)\cdot M[(V-m_V)^2]=$

$$=t_1\cdot(t_2+l)DV=q\cdot t_1\cdot(t_2+l),\text{ т.е. } G_{XY}(t_1,t_2)=q\cdot t_1\cdot(t_2+l).$$

6. Стационарный случайный процесс в широком и узком смысле

Важным классом случайных процессов являются *стационарные* случайные процессы, то есть, случайные процессы, не изменяющие свои характеристики с течением времени. Они имеют вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения. Таковыми являются: давление газа в газопроводе, колебания самолёта при «автополёте», колебания напряжения в электрической сети и т.д.

*Случайный процесс $X(t)$ называется **стационарным в широком смысле**, если его математическое ожидание $m_X(t)$ есть постоянное число, а корреляционная функция $K_X(t_1,t_2)$ зависит только от разности аргументов, т.е.*

$$m_X(t) = m = const; \; K_X(t_1,t_2) = K_X(t_2 - t_1).$$

Из этого определения следует, что корреляционная функция стационарного процесса есть функция одного аргумента: $K_X(t_1,t_2) = K_X(\tau),\ \tau = t_2 - t_1$. Это обстоятельство часто упрощает операции над стационарными случайными процессами.

*Случайный процесс называют **стационарным в узком смысле**, если его характеристики зависят не от значений аргументов, а лишь от их взаимного расположения. То есть, для функции распределения сечений процесса должно выполняться равенство:*

$$\Phi_{t_1+h,\, t_2+h,, \cdots, t_n+h,}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Phi_{t_1, t_2,, \cdots t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

при любых $h > 0, n \ge 1;\ t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$.

Отметим, что из стационарности СП в узком смысле следует стационарность его в широком смысле, обратное утверждение неверно.

В дальнейшем мы будем рассматривать только стационарные случайные процессы в широком смысле. Далее приведем основные свойства корреляционной функции случайного стационарного процесса (с.с.п.).

1. Дисперсия с.с.п. постоянна и равна значению корреляционной функции в нуле, т.е. $D_X(t) = K_X(0) = const$, то есть в начале координат $D_X(t) = K_X(t;t) = K_X(t-t) = K_X(0)$.

2. Корреляционная функция с.с.п. является чётной функцией, т.е. $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$.

3. Абсолютное значение корреляционной функции с.с.п. не превосходит её значение при $\tau = 0$, т.е. $|K_X(\tau)| \le K_X(0)$.

Нормированная корреляционна функция с.с.п. является неслучайная функция аргумента τ, т.е.

$$r_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{K_X(0)} = \frac{K_X(\tau)}{\sigma_X^2};$$

при этом в соответствии свойство 3 имеет место неравенство $|r_X(\tau)| \le 1$.

Пример 6. Задана случайная функция, $X(t) = Cos(t+\varphi),\ \varphi -$ равномерно распределённая случайная величина, в интервале $(0,\pi)$.

Доказать, что $X(t) -$ случайная стационарная функция.

Решение. Найдём математическое ожидание

$$m_X(t) = M[Cos(t+\varphi)] = M[Cost \cdot Cos\varphi - S\,\text{int} \cdot Sin\varphi] =$$
$$= Cost \cdot M[Cos\varphi] - S\,\text{int} \cdot M[Sin\varphi].$$

На основании определения м.о. получим (с учётом равномерной распределённости с.в. φ, по условию контроля $c = 1/2\pi$)

$$M[Cos\varphi] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Cos\varphi\, d\varphi = 0 \text{ и } M[Sin\varphi] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Sin\varphi\, d\varphi = 0.$$

Следовательно, $m_X(t) = 0$.

Найдём корреляционную функцию. Учитывая, что центрированная и случайная функция равны (т.к. $m_X(t)=0$), т.е. $\breve{X}(t)=X(t)=Cos(t+\varphi)$, то согласно определению корреляционной функции (см. пункт 16.5) имеем

$$K_X(t_1,t_2)=M[\breve{X}(t_1)\breve{X}(t_2)]=M[Cos(t_1+\varphi)\cdot Cos(t_2+\varphi)]=$$

$$=M[\frac{Cos(t_2-t_1)+Cos(t_2+t_1+2\varphi)}{2}]=\frac{Cos(t_2-t_1)}{2}+\frac{1}{2}M[Cos(t_2+t_1+2\varphi].$$

$$=\frac{Cos(t_2-t_1)}{2},$$

поскольку $M[Cos(t_2+t_1+2\varphi)]=0$).

Задание. Покажите, что в условиях нашего примера имеет место $M[Cos(t_2+t_1+2\varphi)]=0.$

Итак, математическое ожидание с.в. $X(t)$ есть постоянное число при всех значениях аргумента, и её корреляционная функция зависит только от разности аргументов. Следовательно, $X(t)-$ случайная стационарная функция.

Отметим что, положив $t_1=t_2=t$ в корреляционной функции, найдём дисперсию

$$D_X(t)=K_X(t,t)=\frac{Cos(t-t)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, дисперсия сохраняет постоянное значение при всех значениях аргумента, как и должно, быть при случайной стационарной функции.

Большинство случайных стационарных процессов обладают важным для практики, так называемым, ***«эргодическим свойством»***, сущность которого состоит в том, что по одной, достаточно длинной отдельной реализации данного процесса можно судить обо всех свойствах процесса также как по любому количеству реализаций.

Другими словами, отдельные характеристики с.с.п. $\{m_X,\ K_X(\tau)\}$ могут быть определены как соответствующие средние по времени для одной реализации достаточно большой продолжительности.

Связь между классами стационарных и случайных эргодических процессов можно охарактеризовать, например, как на рисунке 62.

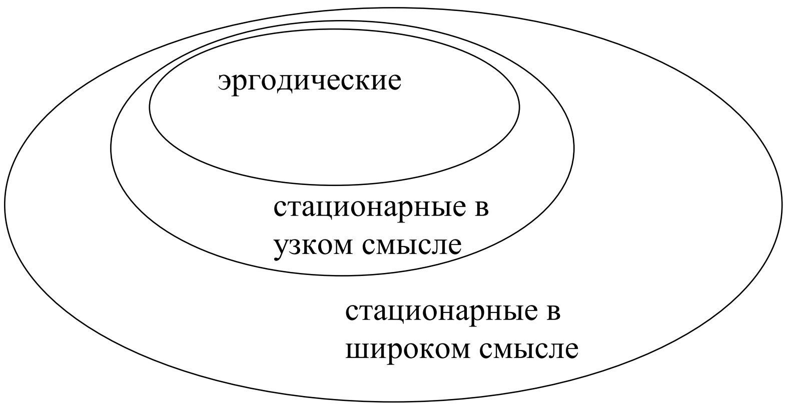


Рис.62

Достаточным условием эргодического с.п. $X(t)$ относительно математического ожидания и корреляционной функции является стремление к нулю его корреляционной функции при $\tau\to\infty$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}K_X(\tau)=0$.

В качестве оценок характеристик эргодических с.с.п. принимают усреднённое по времени значение:

$$\tilde{m}_X(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt,\ \tilde{K}_X(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}(x(t+T) - \tilde{m}_X(t))\cdot(x(t) - \tilde{m}_X(t))dt.$$

Интегралы, в правых частях равенств, на практике вычисляют приближённо.

Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *стационарно связанными*, если их взаимно корреляционная функция $K_{XY}(t_1;t_2)$ зависит только от разности $\tau = t_1 - t_2$. В качестве примера стационарного процесса можно взять с.п. $X(t) = A\cdot Cos(\omega t + \varphi) -$ гармоническое колебание. Можно показать, что $m_X(t) = 0,$ а

$$K_X(t_1,t_2) = \frac{1}{2}M(A^2)\cdot Cos\omega(t_1 - t_2) = \sigma_X^2 \cdot Cos(\omega\tau).$$

7. Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов

При проектировании различных систем (систем автоматического управления или регулирования некоторыми процессами и т.д.) и других практических задач возникает следующая задача:

- на вход некоторой системы S подаётся «*входной сигнал*» - с.п. $X(t)$ с известными характеристиками; система преобразует этот сигнал, в результате чего на выходе системы S получается случайный процесс $Y(t)$, называемый «*выходным сигналом*»; требуется определить характеристики с.п. $Y(t)$ на выходе системы S

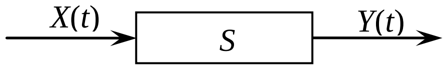


Рис. 63

Преобразование случайного процесса $X(t)$ в случайную величину, $Y(t)$ осуществляемое системой (прибором) S, обычно записывается в виде $Y(t) = A\{X(t)\},$ где A- называют преобразованием или оператором системы S. Оператор A может иметь любой вид: оператор сложения или умножения, оператором дифференцирования или интегрирования и т.д. Так. например, если $x(t) = Sin2t$, и оператор A есть оператор интегрирования

$$A(x,t) = \int_0^t x(\tau)d\tau \text{, то } y(t) = A\{Sin2\omega,t\} = \int_0^t Sin2udu = \frac{1}{2}(1 - Cos2t).$$

Все виды подобных преобразований (операторов) можно разделить на две различные группы: линейные L и нелинейные N. В свою очередь линейные преобразования линейные однородные L_0 и линейные неоднородные L_H. Преобразование (оператор) называется линейным однородным, если оно (он) обладает двумя свойствами:

1. Оператор суммы функций (с.п.) равен сумме операторов от каждой функции, входящих в сумму, т.е. $L_0\{X(t) + Y(t)\} = L_0\{X(t)\} + L_0\{Y(t)\}$.

2. Постоянную величину можно выносить за знак оператора: $L_0\{C\cdot X(t)\} = C\cdot L_0\{X(t)\}$. Другими словами оператор удовлетворяет свойствам аддитивности и однородности.

Преобразование (оператор) L_H называется линейным неоднородным, если оно состоит из суммы однородного линейного преобразования L_0 с прибавлением заданной неслучайной функции $g(t)$, то есть $L_H\{X(t)\} = L_0\{X(t)\} + g(t)$.

Примерами однородных линейных операторов являются оператор дифференцирования $Y(t) = \frac{DX(t)}{dt}$, оператор интегрирования $Y(t) = \int_0^t X(u)du$, оператор умножения на заданную функцию $Y(t) = g(t) \cdot X(t)$. Все преобразования, не являющиеся линейными, называются *нелинейными*. Примерами неоднородных линейных операторов являются:

$$Y(t) = \frac{DX(t)}{dt} + g(t);\ \ Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau + g(t);\ \ Y(t) = g(t) \cdot X(t) + h(t),\ \ \textit{и т.д.}$$

Примерами нелинейных операторов являются: $Y(t) = X^3(t); Y(t) = \dfrac{DX(t)}{dt} + SinX(t)$, и т.д.

8. Дифференцирование и интегрирование случайных процессов (функций)

Пусть заданы характеристики $m_X(t)$ и $K_X(t_1, t_2)$, некоторого случайного процесса $X(t)$ и он подвергается действию *дифференцирования, т.е. следует определить* случайный процесс $Y(t) = A\{X(T)\} -$ *«выходного сигнала»,* где $A -$ оператор дифференцирования. Имеем

$$Y(t) = \frac{DX(t)}{dt}.$$

Требуется определить характеристики $m_Y(t)$ и $K_Y(t_1, t_2)$ с.п. $X'(t) = Y(t) -$ *«выходного сигнала».*

Теорема 16.2. *Математическое ожидание производной* $X'(t)$ *от с.п.* $X(t)$ *равно производной от её математического ожидания*

(16) $$m_Y = m'_X(t).$$

Доказательство. Предполагая, что с.п. $X(t)$ является непрерывным, производная от него существует, а математическое ожидание предела равенства

$$Y(t) = X'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t},$$

также существует. Приравниваем м.о. обеих частей равенства, а затем изменим, порядок нахождения м.о. и предела (законность изменения порядка этих операций примем без доказательства). С учётом сказанного приходим к равенству

$$M[Y(t)] = M[X'(t)] = m_Y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_X(t + \Delta t) - m_X(t)}{\Delta t}$$

т.е. $m_Y(t) = \dfrac{dm_X(t)}{dt} = m'_X(t)$. Теорема доказана.

З**амечание 1.** Последняя формула показывает, что для среднеквадратических дифференцируемых случайных функций операции нахождения м.о. и дифференцирования можно менять местами, т.е.

$$M[X'(t)] = [M(X(t))']).$$

Пример 6. Пусть математическое ожидание $m_X(t) = Q(t) = at^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_{m-1} t + a_m$.

Решение. Искомое математическое ожидание получим из формулы (16)

$$m_{X'}(t) = mat^{m-1} + (m-1)a_1 t^{m-2} + \cdots + a_{m-1}.$$

Замечание 2. Если первая производная дифференцируема, то производную от первой производной называют второй производной и обозначают, через $X''(t)$. Аналогично определяют производные более высоких порядков.

Задание. Найти в нашем примере $m_{X''}(t),\ m_{X'''}(t)$ и т.д. $m_{X^{(n)}}(t)$.

Можно показать, что *корреляционная функция производной от случайной функции* $X(t)$ *равна второй смешанной производной от её корреляционной функции*

$$K_{X'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Пример 7. Пусть задана корреляционная функция $K_X(t_1,t_2)=5t_1t_2+t_1^5t_2^5$ с.п. $X(t)$. Найти корреляционную функцию его производной.

Решение. Найдём частные производные от корреляционной функции по аргументам t_1 и t_2

$$\frac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1}=5t_2+5t_1t_2^5,\ \frac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}=5t_1+5t_1^5t_2.$$

Отсюда следует, что искомая корреляционная функция равна

$$K_{X'}(t_1,t_2)=5(1+5t_1t_2).$$

Перейдём к рассмотрению понятие интеграла от случайной функции.

Пусть заданы характеристики $m_X(t)$ и $K_X(t_1,t_2)$, некоторого случайного процесса $X(t)$, а линейное преобразование случайного процесса состоит в том, что он подвергается действию *интегрирования в отрезке* $[0,t]$*, т.е. следует определить характеристики* $m_Y(t)$ и $K_Y(t_1,t_2)$, с.п. $Y(t)$, где $Y(t)=A\{X(T)\}-$ *«выходного сигнала»,* где $A-$ оператор интегрирования. Положим

(17) $$Y(t)=\int_0^t X(s)du.$$

Требуется найти характеристики с.п. $Y(t)$. Обычно (см. например, [Гмурманн]) определение интеграла от случайной функции даётся с помощью предельного соотношения, а именно:

Интегралом от случайной функции $X(t)$ по отрезке [0, t] называют предельное значение среднеквадратического интегральной суммы при стремлении к нулю частичного интервала $|\Delta s_i|$ максимальной длины, т.е.

$$Y(t)=\lim_{|\Delta s_i|\to 0}\sum X(s_i)\cdot\Delta s_l=\int_0^t X(s)ds.$$

Ниже приведём два утверждения, относящихся к характеристикам с.п. без доказательства.

Теорема 16.3. *Математическое ожидание интеграла от случайной функции* $X(t)$ *равно интегралу от её математического ожидания, то есть справедливо равенство*

(18) $$m_Y(t)=\int_0^t m_X(s)ds,$$

и корреляционная функция интеграла от случайной функции $X(t)$ *равна двойному интегралу от её корреляционной функции, если* (17)*, то*

(19) $$K_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}K_X(s_1,s_2)ds_1ds_2.$$

Эти равенства доказываются стандартным путём на основании свойств м.о. и функции корреляции с.п. $X(t)$ (см. [Гмурманн] гл.23).

Рассмотрим примеры на применении равенств (18) и (19).

Пример 8. Пусть м.о. $m_X(t)=10t^9+13\cdot e^{-t}$ и корреляционная функция $K_X(t_1,t_2)=e^{-(t_1+t_2)}$, найти м.о. и корреляционную функцию с.п. $Y(t)$, определённую равенством (17).

Решение. Искомое м.о. $m_Y(t)=\int_0^t\{10s^9+13e^{-s}\}ds=t^{10}+13[e^{-t}-1]$. Далее

$$K_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}e^{-s_1-s_2}ds_1ds_2=\int_0^{t_1}e^{-s_1}\ ds_1\int_0^{t_2}e^{-s_2}ds_2=$$

$$=\int_0^{t_1}e^{-s_1}\left(-e^{-s_2}\Big|_0^{t_2}\right)ds_1=(1-e^{-t_2})\cdot(1-e^{-t_1}).$$

Упражнение. Известны характеристики двух некоррелированных с.п. $X(t)$ и $Y(t)$, если

$$X(t): m_X(t) = 3t + 7,\ K_X(t_1, t_2) = t_1 t_2;$$

$$Y(t): m_Y(t) = -3t + 3; K_X(t_1, t_2) = 5e^{-(t_1+t_2)}.$$

Найти математическое ожидание и корреляционную функцию с.п. $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

9. Элементы спектральной теории стационарных случайных процессов (функций)

В этом пункте кратко ознакомимся с новой характеристикой случайной функции, с понятием «*спектральная плотность*».

Из курса математического анализа известно, что неслучайную функцию $x(t)$, удовлетворяющую определённым условиям (условиям Дирихле) можно разложить в некотором промежутке $[-l;+l]$ в ряд Фурье. Важность теории рядов Фурье обусловлена той большой ролью, которую играют её приложения не только в математике, но и в механике, физике и ряде других научных дисциплин. Во многом это предопределено тем, что тригонометрические ряды Фурье соединяют в себе особенности, как тригонометрических рядов, так и общих рядов Фурье. С теорией рядов Фурье и интегралах Фурье можно ознакомиться, например, в учебнике [15].

Аналогичную теорию можно применять и в теории случайных функций (процессов), т.е. любой с.п. $X(t)$ можно представить (разложить) в виде суммы так называемых «***элементарных случайных процессов***». А именно, в функциональный ряд вида

(20) $$X(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot x_k(t),$$

где V_k – случайные величины, $x_k(t)$ – неслучайные функции времени. Метод разложения СП в ряды вида (20) упрощает различные преобразования СП (линейных и нелинейных), в частности используя её можно найти характеристики «*выходного процесса*» стационарной линейной динамической системы по известным характеристикам «*входного процесса*». Вообще говоря, стационарную случайную функцию можно представить в виде гармонических колебаний со случайными амплитудами и случайными фазами. Рассмотрим два класса случайных функций:

А. Пусть $X(t)$ случайная функция вида (локальный случай)

(21) $$X(t) = UCos(\omega t) + VSin(\omega t),$$

где ω – действительное число, U и V – некоррелированные случайные величины с математическим ожиданием, равными нулю и одинаковыми дисперсиями, или коротко:

$$\omega = const;\ m_U = m_V = 0; D_U = D_V = D; K_{UV} = M[(U - m_U)\cdot(V - m_V) = M[\breve{U}\cdot\breve{V}] = 0.$$

Напомним, что в наших условиях с.п. $X(t) = \breve{X}(t) = X(t) - m_X(t)$, т.е. $X(t)$ центрированный случайный процесс. Следовательно, такой случайный процесс является центрированным.
Покажем, что этот случайный процесс является ***стационарным***.

Действительно, вычислим $M[X(t)]$:

$$M[X(t)] = m_X(t) = m_U \cdot Cos\omega t + m_V \cdot Sin\omega t = 0\cdot Cos\omega t + 0\cdot Sin\omega t = 0.$$

Вычислим корреляционную функцию. С учётом равенства:

$$X(t) = \breve{X}(t), M(U^2) = M(V^2) = D; m_X(t_1) = m_X(t_2) = 0,$$

и определения корреляционной функции имеем

$$K_X(t_1, t_2) = M[X(t_1)\cdot X(t_2)] = M[X(t_1)]\cdot M[X(t_2)] =$$
$$= M[(U\cdot Cos(\omega t_1) + V\cdot Sin(\omega t_1))\cdot(U\cdot Cos(\omega t_2) + V\cdot Sin(\omega t_2))] =$$
$$= M(U^2)Cos(\omega t_1)\cdot Cos(\omega t_2) + M(V^2)Sin(\omega t_1)\cdot Sin(\omega t_2) + 0 =$$
$$= D(U)Cos(\omega t_1)\cdot Cos(\omega t_2) + D(V)Sin(\omega t_1)\cdot Sin(\omega t_2) =$$
$$= D[Cos(\omega t_1)\cdot Cos(\omega t_2) + Sin(\omega t_1)\cdot Sin(\omega t_2)] = D\cdot Cos\omega(t_1 - t_2).$$

Следовательно, мы доказали, что $X(t)$ является стандартным случайным процессом.

Б. Рассмотрим теперь СП $X(t)$, являющейся суммой бесконечного числа слагаемых вида (21) (общий случай)

(22) $$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\{U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t),$$

где выполнены следующие условия:

(23) $$m_{U_k} = m_{V_k} = 0; D_{U_k} = D_{V_k} = D_k;\ M[U_k \cdot U_l] = M[U_k \cdot V_k] = 0; M[V_k \cdot V_l] = 0;$$

при любых $k \neq l$, $\omega_k -$ постоянные числа.

Покажем, что случайный процесс $X(t)$, *определённый равенством* (22) *с условиями* (23) *также является стационарным.*

Действительно, с учетом свойства м.о. имеем

$$M\{X(t)\} = M[m_X(t) + M\left(\sum_{k=1}^{\infty}\{U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t)\right) =$$

$$= m_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty} M\{U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t)\} = m_X(t) + 0 = m_X(t).$$

Следовательно, $X(t) = \breve{X}(t)$.

Поскольку слагаемые в равенстве (22) некоррелированные, то с учётом формулы для корреляционной функции с.п. (21) и свойства 6, пункта 16.5, т.е. с учётом равенства

$$K_{X+Y}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2)$$

получаем

(24) $$K_X(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k Cos\omega_k(t_2 - t_1),$$

Итак, с.п. (23) является *стационарным* случайным процессом.

Отметим, что равенство (24) можно рассматривать как разложение корреляционной функции $K_X(t_1, t_2)$ на промежутке $[-T; +T]$ и ряд Фурье по косинусам: $K_X(t_1, t_2) = K_X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k Cos\omega_k \tau$,

где

(25)
$$\omega_k = k \cdot \omega_1 = k\frac{\pi}{T},\quad D_0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} K_X(\tau) d\tau,$$

$$D_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} K_X(\tau) Cos(\omega_k \tau) d\tau = \frac{2}{T}\int_{0}^{+T} K_X(\tau) Cos(\omega_k \tau) d\tau$$

Можно доказать, что $D_k \geq 0$ для любой корреляционной функции стационарного случайного процесса $X(t)$.

Разложение (22) обычно называется *каноническим* или *спектральным разложением стационарного случайного процесса*. А разложение (24) для которого выполнены равенства (25) называется *спектральным разложением корреляционной функции СП* $X(t)$ *с равноотстоящими частотами*.

Отметим, что спектральное разложение (22) с.с.п. можно представить в виде суммы гармонических колебаний со случайными амплитудами A_k, и фазами φ_k и частотами ω_k:

(26) $$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot Sin(\omega_k t + \varphi_k),$$

где $A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}$; $\varphi_k = arctg\dfrac{U_k}{V_k}$.

Кратко наметим схему получения представление (26) на основании равенства (22), где $X(t) = UCos(\omega t) + VSin(\omega t)$ и выполнены условий: $m_U = m_V = 0; D_U = D_V = D; \omega = const.$

Очевидно, $X(t) = V\left[\dfrac{U}{V}Cos(\omega t) + Sin(\omega t)\right]$. Обозначим $tg\varphi = \dfrac{U}{V}$ и выполнив стандартные выкладки, получим $X(t) = \sqrt{U^2 + V^2} \cdot Sin(\omega t + \varphi)$, где $\varphi = arctg(U/V)$.

Отсюда вытекает, что каждую случайную функцию $X_k(t) = U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t)$ в правой части (26) можно истолковать как гармоническое колебание со случайной амплитудой $A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}$, частотой ω_k и *случайной фазой* $(\omega_k t + \varphi_k)$. Отметим, что согласно условиям (23) величины U_k и V_k будут центрированные случайные величины, т.е. $U_k = \breve{U}_k; V_k = \breve{V}_k$.

9.1. О дисперсии стационарного случайного процесса.

Имеет место, следующее утверждение.

Теорема 16.4. *Дисперсия стационарного случайного процесса, представленного в виде равенства*

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\{U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t),$$

где выполнены следующие условия:

$$m_{U_k} = m_{V_k} = 0; D_{U_k} = D_{V_k} = D_k;\ M[U_k \cdot U_l] = M[U_k \cdot V_k] = 0; M[V_k \cdot V_l] = 0;$$

при любых $k \neq l$, ω_k *– постоянные числа, равно сумме дисперсий всех гармоник его спектрального разложения:*

$$D_X = \sum_{k=0}^{\infty} D_k\,. \qquad (27)$$

Доказательство. В соответствии свойства 1, пункта 16.6 получим

$$D_X = [K_X(t;t)] = K_X(0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k Cos(\omega_k \cdot 0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k.$$

Заметим, что если сумма существует, то ряд сходится.

Множество значений дисперсии D_k ***называют спектром стационарного случайного процесса* (ССП)*, а ординаты этих величин – спектральными линиями, с соответствующими частотами*** ω_k.

Спектр можно представить графически

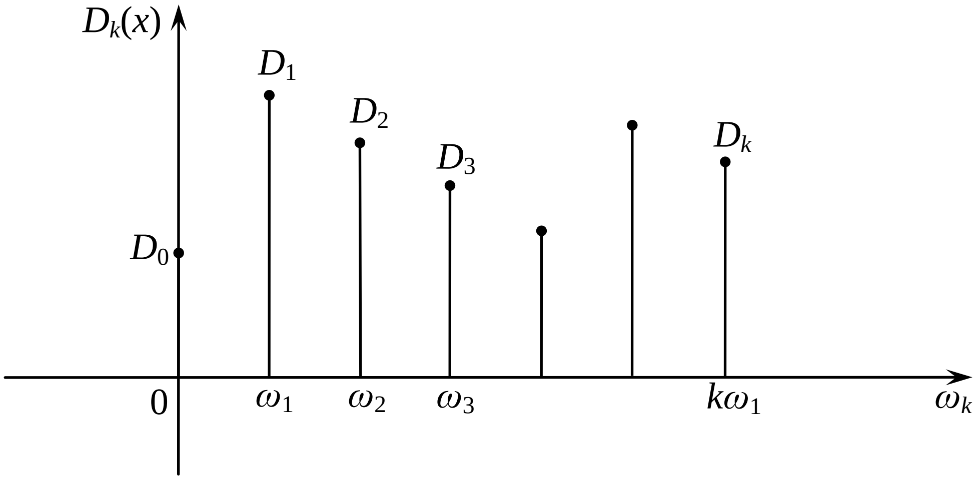


Рис.64

Сумма всех ординат спектра равна дисперсии случайного процесса $X(t)$. Спектр случайного процесса определённый равенством (22) называется *линейчатым дискретным* с бесконечным числом равноотстоящих спектральных линий. Расстояние между соседними линиями по частоте равно $\omega_1 = \dfrac{\pi}{T} = \Delta\omega.$

9.2. Дискретный спектр, с произвольным конечным числом частоты.

Пусть стационарная случайная функция $X(t)$ представлена в виде конечного спектрального разложения

$$(28) \qquad X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{n} X_k(t) = m_X + \sum_{k=1}^{n} [U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t)],$$

с условиями $m_{U_k} = m_{V_k} = 0; D_{U_k} = D_{V_k} = D_k$; при этом как уже было показано $X(t) = \breve{X}(t)$.

Найдём дисперсию одной гармоники $X_k(t)$, учитывая, что случайные величины U_k и V_k не коррелированны и дисперсии этих величин с одинаковыми индексами равны между собой, $D(U_K) = D(V_K) = D_k$.

$$D[X_k(t)] = D[U_k Cos(\omega_k t) + V_k Sin(\omega_k t)] =$$
$$D[U_k Cos(\omega_k t)] + D[V_k Sin(\omega_k t)] =$$
$$= Cos^2 \omega_k t \cdot D(U_k) + Sin^2 \omega_k t \cdot D(V_k) =$$
$$= (Cos^2 \omega_k t + Sin^2 \omega_k t) \cdot D_k = D_k.$$

Следовательно, с учётом свойства 2, дисперсии случайного процесса, т.е. $D(m_X(t) = 0$, и приняв во внимание, что слагаемые $X_k(t)$ не коррелированны и потому дисперсия их суммы равна сумме дисперсий слагаемых, получим

$$(29) \qquad D[X(t] = \sum_{k=1}^{n} D_k .$$

Итак, дисперсия с.с.п. представляемая в виде суммы конечного числа гармоник с произвольными частотами, равна сумме дисперсий составляющих её гармоник.

Пример 9. Построить дискретный спектр стационарного случайного процесса

$$X(t) = \sum_{k=1}^{4} [U_k Cos(k+1)t + V_k Sin(k+1)t],$$

если случайные величины $U_k; V_k, k = 1,2,3,4.$ не коррелированны, их математические ожидания равны нулю и заданы их дисперсии равенствами:

$$(30) \qquad DU_1 = DV_1 = 3; DU_2 = DV_2 = 5; DU_3 = DV_3 = 4; DU_4 = DV_4 = 6;$$

$\omega_k = (k+1); k = 1,2,3,4;$ а на вертикальной оси – соответствующие им дисперсии (30).

Решение. В прямоугольной системе координат отложим по горизонтальной оси частоты,

Задание. 1. Найти $D[X(t)] = ?$

2. Постройте график изображения спектра.

10. Спектральная плотность случайного процесса, теорема Винера – Хинчина

Выше, когда частоты гармоник спектрального разложения стационарной случайной функции были дискретными и равноотстоящими, и был получен дискретный линейчатый спектр, причём соседние частоты отличались друг от друга на величину $\Delta\omega = \pi/T$.

Спектральное разложение с.п. на промежутке $[-T;+T]$ даёт приближённое его описание. Более полное представление о случайных процессах при спектральном разложении может быть получено при $T \to \infty$. Также отметим, что при неограниченном увеличении промежутка разложения ($T \to \infty$) число слагаемых в равенстве (29) неограниченно увеличивается, а коэффициенты D_k в разложении корреляционной функции (см.(24)) неограниченно уменьшается, но сумма остаётся постоянной. Интервал между частотами будет стремиться к нулю, т.е. $\omega_1 = \Delta\omega = \pi/T \to 0.$ Ясно, что при этом частота изменяется непрерывно (поэтому обозначим её через ω без индекса), соседние ординаты спектра сближаются и в пределе вместо дискретного спектра получим *непрерывный* (сплошной) спектр, т.е. каждой частоте ω $(\omega \geq 0)$ соответствует ордината, которую обозначим через $S_X(\omega)$.

Среднюю плотность дисперсии $D_k/\Delta\omega$ обозначают через $S_X(\omega)$, т.е.

$$S_X(\omega) = \frac{D_k}{\Delta\omega} = \frac{D_k}{\omega_1}. \tag{31}$$

Спектральной плотностью $S_X(\omega)$ *стационарного случайного процесса* $X(t)$ *называется предел отношения дисперсии приходящийся на интервал частот* $\Delta\omega$
к длине этого интервала, когда длина $\Delta\omega$ *стремится к нулю*

$$S_X(\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{D_k}{\Delta\omega},. \tag{32}$$

т.е. спектральная плотность с.с.п. есть предел средней плотности дисперсии (31), когда $\Delta\omega \to 0$.

Далее получим формулы, связывающую спектральную плотность $S_X(\omega)$ и корреляционную функцию $K_X(\tau)$ при условии $T \to \infty\ (\Delta\omega \to 0)$. С этой целью, найдём дисперсию D_k из равенства (31) затем, поставив её в равенства (24) и (25) (см. пункт 16.9) получаем: $D_k = S_X(\omega) \cdot \Delta\omega = S_X(\omega) \cdot \dfrac{\pi}{T}$.

$$K_X(t_1, t_2) = K_X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} S_X(\omega) \cdot Cos\omega_k\tau \cdot \Delta\omega, \tag{33}$$

$$D_k = \frac{\pi}{T} S_X(\omega) = \frac{2}{T} \int_0^T K_X(\tau) Cos(\omega\tau) d\tau,$$

т.е.

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^T K_X(\tau) Cos(\omega\tau) d\tau\,. \tag{34}$$

Переходя к пределу при $T \to \infty\ (\Delta\omega \to 0)$, из равенств (33) и (34) получаем известнее утверждение полученное, независимо друг от друга Винером и Хинчиным.

Теорема 16.5 (Теорема Винера - Хинчина). *Корреляционная функция и спектральная плотность стационарного случайного процесса* $X(t)$ *между собой связаны взаимно обратными косинус - преобразованиями Фурье:*

(35) $$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K_X(\tau) Cos(\omega\tau) d\tau; \quad K_X(\tau) = \int_0^{\infty} S_X(\omega) Cos(\omega\tau) d\omega;$$

Дискретный линейчатый спектр разложения переходит, при $T \to \infty$, в непрерывный спектр, в котором каждой частоте $\omega \geq 0$ соответствует неотрицательная ордината $S_X(\omega)$.

Кривая $S_X(\omega)$ изображает плотность распределения дисперсий по частотам непрерывного спектра относительно прямоугольной системы координат (см.рис. 65).

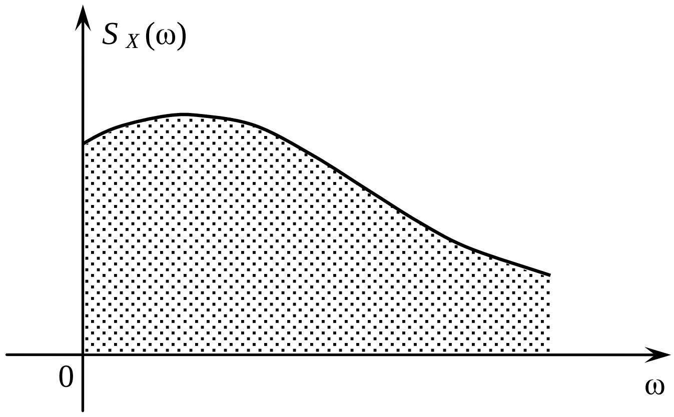


Рис.65

Свойства спектральной плотности стационарного случайного процесса.

Спектральная плотность $S_X(\omega)$ с.с.п. обладает следующими свойствами:

1. Спектральная плотность является неотрицательной функцией, т.е. $S_X(\omega) \geq 0$.
Это свойство выводится из определения (31) с учётом неравенства $D_k \geq 0; \ \Delta\omega \geq 0$.

2. Интеграл от спектральной плотности на полупрямой $[0,+\infty)$ равен дисперсию с.с.п., т.е.

$$\int_0^{+\infty} S_X(\omega) d\omega = D_X \ .$$

Равенство вытекает из второго равенства (35) с учётом первого свойства дисперсии (см.16.6);

$$D_X = K_X(0) = \int_0^{+\infty} S_X(\omega) Cos(\omega \cdot 0) d\omega = \int_0^{+\infty} S_X(\omega) d\omega,$$

Следует отметить, что часто для упрощения математических выкладок удобно использовать спектральное разложение с.с.п. в комплексной форме, при этом можно считать, что частоты изменяются в интервале $(-\infty,+\infty)$, (частоты $\omega < 0$ физического смысла не имеют).

Спектральной плотностью стационарного случайного процесса в комплексной форме называется функция

(36) $$S_X^{\bullet}(\omega) = \frac{1}{2} S_X(|\,\omega\,|).$$

Комплексная форма Винера -Хинчина имеют вид

(37) $$S_X^{\bullet}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau; \quad K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X^{\bullet}(\omega) e^{i\pi\omega} d\omega.$$

Доказательство этих равенств, проводится на основании спектрального разложения (24) с последующим использованием формулы Эйлера

$$Cos\omega_k\tau = \frac{e^{i\,\omega_k\tau} - e^{-i\,\omega_k\tau}}{2};\ Sin\omega_k\tau = \frac{e^{i\,\omega_k\tau} - e^{-i\,\omega_k\tau}}{2i},$$

и предельного перехода при $T \to \infty, (\Delta\omega \to 0)$.

Отметим, что спектральная функция $S_X^\bullet(\omega)$ является чётной функцией на всём интервале $(-\infty,+\infty)$, т.е. $S_X^\bullet(-\omega) = S_X^\bullet(\omega)$.

На участке полупрямой $[0,+\infty)$ имеем равенство $S_X^\bullet(\omega) = (0{,}5)\cdot S_X(\omega)$ (см. рис. 66).

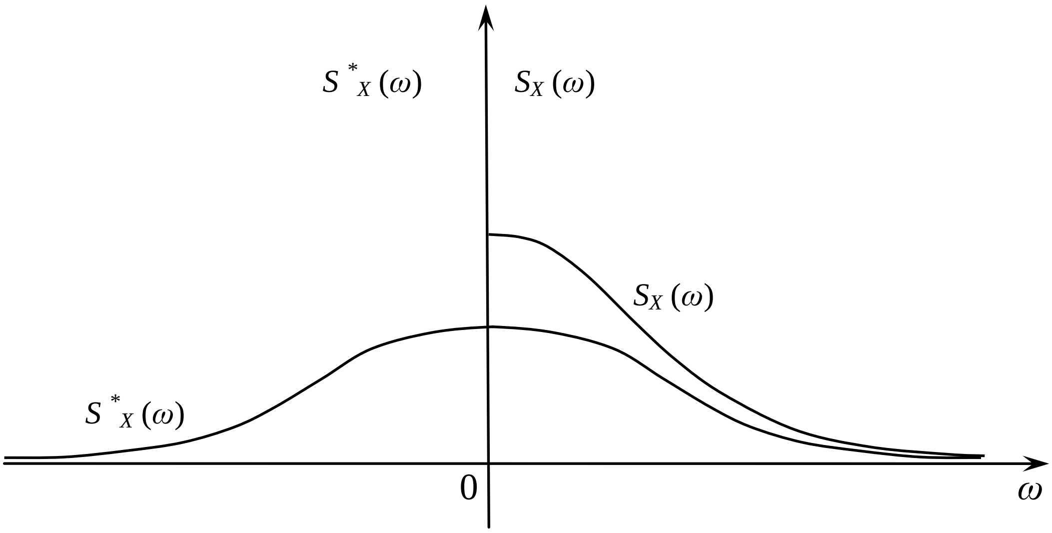


Рис. 66

Таким образом, значения функции $S_X^\bullet(\omega)$ в два раза меньше значения функции $S_X(\omega)$ при тех значениях аргумента ω.

Пример 10. Пусть корреляционная функция стационарного случайного процесса $X\{t\}$ задана равенством $K_X(\tau) = D\cdot e^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0$. Найти спектральную плотность ССП $X\{t\}$.

Решение. На основании первой формулы (37) получим

$$S_X^\bullet(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D\cdot e^{-\alpha|\tau|}\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau\right\} = \frac{D}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)\tau}\,d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\,d\tau\right\} =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left\{\frac{e^{(\alpha-i\omega)\tau}}{\alpha-i\omega}\cdot \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(\alpha+i\omega)\tau}}{\alpha+i\omega}\cdot \Big|_{0}^{+\infty}\right\} = \frac{D}{2\pi}\left\{\frac{1}{\alpha-i\omega} - \frac{(1-0)}{\alpha-i\omega}\right\} =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left(\frac{\alpha+i\omega+\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right) = \frac{D}{2\pi}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{D\cdot\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}.$$

Таким образом, $S_X^\bullet(\omega) = \dfrac{D\cdot\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$ или $S_X(\omega) = \dfrac{2D\cdot\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$.

Пример 11. Найдём спектральную плотность ССП $X(t)$, если её корреляционная функция задана в виде:

$$K_X(\omega)=\begin{cases}1-0{,}5\,|\,\tau\,|;\ |\,\tau\,|<2,\\ 0, \qquad\qquad |\,\tau\,|\geq 2.\end{cases}$$

Решение. Применяем первую формулу из равенства (35), и учитывая, что в интервале $(0,2)$, $|\,\tau\,|=\tau$, а вне этого интервала равно нулю, получим

$$S_X(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^2(1-0{,}5\tau)Cos(\omega\tau)d\tau.$$

Применяя метод, интегрирование по частям после стандартных подсчётов получим

$$S_X(\omega)=\frac{2\cdot Sin^2\omega}{\pi\omega^2}\ \text{ или }\ S_X^{\bullet}(\omega)=\frac{Sin^2\omega}{\pi\omega^2}.$$

Пример12. Найти корреляционную функцию СП., если её спектральная плотность задана в виде

$$S_X^{\bullet}=\begin{cases}S_0,\ |\,\omega\,|\leq\omega_0\\ 0, \quad |\,\omega\,|>\omega_0\end{cases}$$

$$K_X(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_0\cdot e^{i\omega\tau}d\omega=\int_{-\omega}^{+\omega}S_0\cdot e^{i\omega\tau}d\omega=S_0\cdot\frac{1}{i\,\tau}e^{i\omega\tau}\Big|_{-\omega}^{+\omega}=$$

$$=S_0\cdot\frac{1}{i\,\tau}e^{i\omega\tau}\Big|_{-\omega}^{+\omega}=\frac{2S_0}{\tau}\cdot\frac{e^{i\omega_0\tau}-e^{-i\omega_0\tau}}{2i}=2\cdot S_0\cdot\omega_0\cdot\frac{Sin(\omega_0\tau)}{\omega_0\tau}.$$

График корреляционной функции изображён на рис.67.

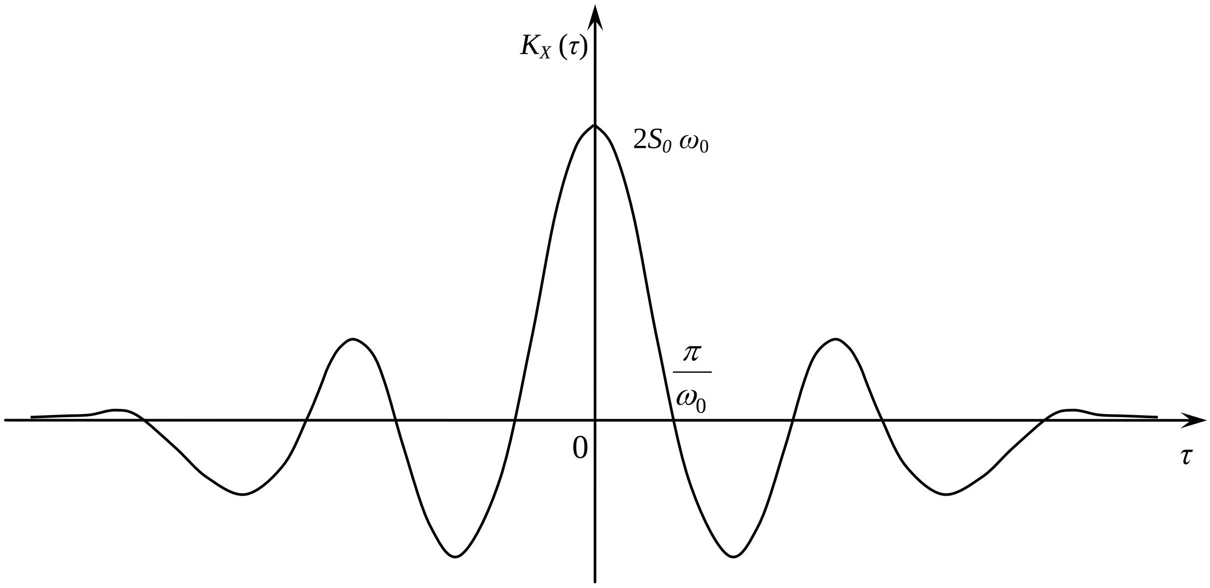


Рис.67

На практике часто с понятием спектральной плотностью также используют понятие нормированную спектральную плотность.

Нормированной спектральной плотностью с.с.п. $X(t)$ называют отношение спектральной плотности к дисперсии СП, т.е.

(38) $$S_{(X,N)}(\omega)=\frac{S_X^{\bullet}(\omega)}{D_X}=\frac{S_X^{\bullet}(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty}S_X^{\bullet}(\omega)d\omega}.$$

Пример 13. Задана спектральная плотность $S_X^\bullet(\omega) = S_0 \big/ [\pi(1+\omega^2]$ стационарной случайной функции $X(t)$, где S_0 – положительная постоянная. Найти нормированную спектральную плотность.

Решение. По второй формуле равенства (35) при $\tau = 0$ имеем (с учётом $S_X^\bullet(-\omega) = S_X^\bullet(\omega)$)

$$D_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X^\bullet(\omega)d\omega = \frac{S_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{1+\omega^2}d\omega = \frac{S_0}{\pi}[arctg\omega \Big|_{-\infty}^{+\infty} = S_0 .$$

Найдём искомую нормированную плотность, для этого достаточно воспользоваться формулой (38), получим

$$S_{(X,N)}(\omega) = \frac{1}{[\pi(1+\omega^2)]}$$

11. Стационарный белый шум, дельта функция

Одним из конкретных видов стационарного СП. является так называемый «***стационарный белый шум***». Кратко остановимся на это очень важное явление.

Стационарным белым шумом называется стационарный с.п. $X(t)$, спектральная плотность которого является постоянным числом:

$$S_X^\bullet(\omega) = S_0 = const \text{ для } \forall\omega \in (-\infty, +\infty).$$

Корреляционная функция белого шума, находится на основании второй формулы (35) с последующим использованием так называемой дельта функцией, определяемая равенством

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}d\omega \qquad (39)$$

где $\delta(t)$ – дельта функция Дирака. Кратко рассмотрим основные сведения об этой функции. Представление (39) выводится на основании теории интегралов Фурье.

Дельта функция Дирака.

Дельта – функция Дирака $\delta(t)$ является одним из первых примеров обобщённых функций. Обобщённая функция определяется, как предел последовательности однопараметрического семейства непрерывных функций, и удовлетворяет условию, что она ставит в соответствие всякой непрерывной функции $f(t)$ её значение в точке $t = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)dt = f(0). \qquad (40)$$

Правую часть равенства (40) можно представить в виде предела: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta_\varepsilon(t) f(t)dt . \qquad (41)$$

где

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } |t| \geq \varepsilon, \\ 1/(2\varepsilon), & \text{если } |t| < \varepsilon. \end{cases}$$

Таким образом, дельта – функцию можно рассматривать как предел последовательности функций $\delta_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая, что $\delta_\varepsilon(t) \to 0$ при $t \neq 0$, $\delta_\varepsilon(t) \to 0$ для $t \to 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\varepsilon}dt = 1$, условно пишут

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq 0, \\ \infty, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Наглядно график функции Дирака геометрически можно представить в виде графика, изображённого на рисунке 68.

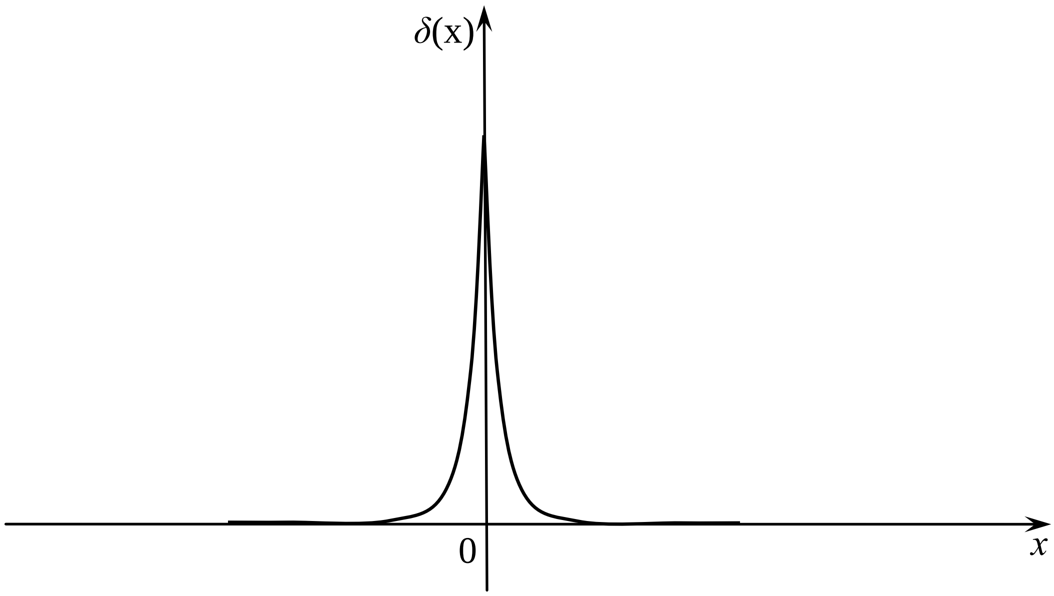


Рис. 68

Равенство (39) также пишут в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi \cdot \delta(t).$$

Физический смысл дельта – функции можно охарактеризовать как плотность единичной массы, сосредоточенный в нулевой точке, а в остальных точках она равна нулю.

Замечание. В приложениях равенство (39) часто применяют в форме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0),$$

которое выводится аналогично как выше (следует все рассуждения в окрестности точки $t = t_0$).

Далее продолжим изучение «стационарного белого шума». Вычислим корреляционную функцию белого шума. На основании второй формулы (35) с последующим использованием формулы (39) получим

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = S_0 \cdot \int_{-\omega}^{+\omega} \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = S_0 \cdot 2\pi \cdot \delta(\tau).$$

То есть

(42) $$K_X(\tau) = S_0 \cdot 2\pi \cdot \delta(\tau)$$

Равенство (42) означает некоррелированность любых двух различных сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ (поскольку $\delta(t) = 0,$ при всех значениях $t \neq 0$). В силу этого явления осуществить белый шум невозможно, т.е. белый шум - полезная математическая абстракция. В частности, явление белый шум используют для моделирования с.п., которые имеют постоянную спектральную плотность в определённом диапазоне частот, при этом поведение спектральной плотности вне его диапазона исследователя не интересует.

Пример 14. Спектральная плотность стационарной случайной функции $X(t)$ постоянна в диапазоне $(-\omega_0, +\omega_0)$, а вне этого диапазона равна нулю, т.е.

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_0 = const, & \omega \in (-\omega_0, \omega_0), \\ 0, & \omega \notin (-\omega_0, \omega_0). \end{cases}$$

Найти: 1. Корреляционную функцию;

2. Дисперсию случайного процесса $X(t)$.

Решение. 1. Найдём искомую корреляционную функцию:

$$K_X(\tau) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} S_0 Cos\omega\tau\, d\omega = 2S\int_0^{\omega_0} Cos\omega\,\tau\, d\omega = \frac{2S_0 Sin\omega_0\tau}{\tau},$$

Итак,

$$K_X(\tau) = \frac{2S_0 Sin\omega_0\tau}{\tau}.$$

2. Найдём искомую дисперсию:

$$D_X = \lim_{\tau\to 0} K_X(\tau) = \lim_{\tau\to 0}\frac{2S_0 Sin\omega_0\tau}{\tau} = 2S_0\omega_0 \lim_{\tau\to 0}\frac{Sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau}.$$

Следовательно, на основании первого замечательного предела получим

$$D_X == 2S_0\omega_0.$$

<u>Тема 17</u>. Марковские случайные процессы

1. Понятие Марковской цепи, марковские случайные процессы

Непосредственным обобщением схемы повторных независимых испытаний (схема Бернулли) является схема так называемых *цепей Маркова*, впервые систематически изученные известным математиком А.А.Марковым. Мы здесь ограничимся изложением элементов этой теории.

Представим себе, что проводится последовательность испытаний, в каждом из которых может осуществиться одно и только одно из k несовместных событий $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \cdots, A_k^{(s)}$, где верхний индекс обозначает номер испытания.

Говорят, что последовательность испытаний *образует цепь Маркова*, точнее, «*простую цепь Маркова*», *если условная вероятность события* $\mathrm{A}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{s+1})}$, *которое произошло в* $(s+1)-$*м испытании* $(\mathrm{s} = 1,2,3,\cdots)$ $(i = 1,2,\cdots,k)$ *зависит лишь от того, какое событие произошло при* $s-$*м испытании и не изменяется от добавочных сведений о том, какие события происходили в более ранних испытаниях.*

Часто при изложении теории цепей Маркова придерживаются и другой терминологии. При этом говорят о некоторой физической системе S, в которой в каждый момент времени может находиться система в одном из состояний $s_1, s_2, \cdots, s_k$ и меняет своё состояние только в моменты времени $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$. Для цепей Маркова вероятность перехода в какое либо состоянии система s_i, $(i = 1,2,\cdots,k)$ в момент $\mathrm{t_i}$, зависит только от s_i и того, в каком состоянии система находилась в момент t $(t_{s-1} < t < t_s)$, и не изменяется от того, что становятся известными её состояния в более ранние моменты.

Для иллюстрации этого понятия (цепей Маркова) рассмотрим примеры:

Пример 1. Представим, что частица, находящаяся на прямой, движется по этой прямой под влиянием случайных толчков, происходящих в моменты $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$. Частица может находиться в точках с целыми координатами $a, a+1, a+2, \cdots, b;$ при этом, в точках a и b находятся отражающие шкалы (стенки). Каждый толчок перемещает частицу в право с вероятностью p и влево с вероятностью $q = 1 - p$, если только частица не находится у стенки. Если же частица находится у стенки, то любой толчок переводит её на единицу внутрь промежутка между стенками. Легко видит, что приведённый пример «*блуждания частицы*» представляет собой типичный пример цепи Маркова. Аналогично можно было бы рассмотреть случай, когда частица прилипает к одной из стенок или к обеим стенкам.

Случайный процесс называется процессом с дискретными состояниями, если множество его возможных состояний $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_i, \cdots$ конечно или счетное (можно заранее перечислить), а переход из одного состояния в другое осуществляется скачком, переходы возможны только в определённые моменты времени $t_1, t_2, t_3, \cdots$.

Среди случайных процессов особое место занимают марковские случайные процессы.

Если переходы возможны в любой момент времени, т.е. моменты переходов из одного состояния в другое *случайны*, то такой процесс называется *процессом с непрерывным временем*.

Случайный *процесс с дискретным процессом называется* ***марковским,*** *если для любого момента времени* t_0 *условная вероятность каждого из состояний системы* S *в будущем (т.е. при* $t > t_0$*) зависит только от её состояния в настоящем (т.е. при* $t = t_0$*) и не зависит от того, когда и как система пришла в это состояние, т.е. каковы были предыдущие состояния, при* $t < t_0$.

Марковский процесс называют также *процессом без последействия*: будущее в нём зависит от прошлого только через настоящее, вероятность системы S попасть в состояние s_j в момент времени t_k ($S(t_k) = s_j$) зависит лишь от состояния, s_i в котором система находилась в предыдущий момент времени t_{k-1} ($S(t_{k-1}) = s_i$.

Другими словами, имеет место цепочка равенств:

$$P[S(t_k) = s_j \,|\, S(t_1) = x_1, S(t_2) = x_2, \cdots, S(t_{k-1}) = s_i] =$$
$$= P[S(t_k) = s_j \,|\, S(t_{k-1}) = s_i],$$

где $x_1, x_2, \cdots$ - возможные состояния системы $\{s_1, s_2, \cdots, s_i, \cdots, s_j, \cdots, s_n\}$.

Марковский процесс служит математической моделью для многих процессов в биологии (распределение эпидемий, рост популяции), в физике (распад радиоактивного вещества), в теории массового обслуживания (поток пассажиров в метро, поток поступлений звонков на телефонную станцию и др.).

Отметим, что в системе массового обслуживания множество состояний системы определяется числом каналов, т.е. линий связи, вычислительные машины, продавцы и т.д. Переходы между состояниями системы S происходят под воздействием потока событий (потока заявок, требований, отказов и т.д.), будут простейшими, пуассоновскими.

Случайные процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого «*графа состояний*». В нём состояния $s_1, s_2, \cdots$ системы S изображаются прямоугольниками (или кружками), а возможные непосредственные переходы из одного состояния в другое - стрелками (или ориентированными дугами), которые соединяют эти состояния с указанием их направлений.

Пример 2. Построим граф состояний следующего случайного процесса: некоторое устройство S в случайный момент времени, может выйти из строя, оно контролируется в моменты времени (к примеру, через каждый час) и в случае необходимости проводится либо ремонт, либо идёт на списание.

Решение. Возможные состояние системы (устройства) S: пусть s_1 – устройство исправно, s_2 – устройство неисправно, требуется ремонт, s_3 – устройство неисправно, ремонту не подлежит (на списание).

Процесс представляет собой случайное блуждание системы S по состояниям, время проверки 1 час, является шаг процесса. Граф системы представлен на рисунке 69

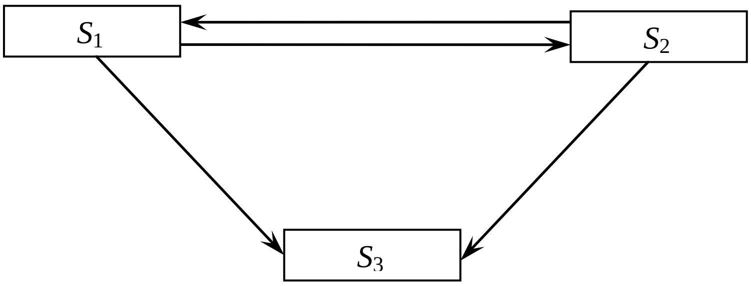


Рис.69

Одно из возможных реализация с.п. блуждания системы может иметь такой вид: $\{s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, s_1^{(3)}, s_2^{(4)}, s_1^{(5)}, s_1^{(6)}, s_3^{(7)}\}$, что означает: при 1-м, 2-м, 3-м осмотрах устройство исправно; при 4-м осмотре обнаружено неисправность, ремонтируется; при 5-м, 6-м осмотрах обнаружено исправность, при 7-м осмотре признано негодность, устройство списано. Процесс закончился.

Для описания с.п. с дискретными состояниями пользуются вероятностями состояний системы S, то есть значениями $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)$, где $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}$ выражает того, что в момент времени t система находится в состоянии s_i; $S(t)$ – случайное состояние системы в момент времени t.

Естественно, что для любого момента времени t сумма вероятностей всех состояний равна единице (как сумма вероятностей полной группы несовместных событий):

$$\sum_{л=1}^{n} p_k(t) = 1.$$

2. Дискретный Марковский процесс, цепь Маркова

Пусть в некоторой системе S происходит с.п. с дискретными состояниями $s_1, s_2, \cdots, s_n$ и дискретным временем, т.е. переход системы из одного состояния в другое происходит только в определённые моменты времени $t_0, t_1, t_2, \cdots$. Эти моменты называют *шагами* процесса (обычно разности смежных моментов наблюдения $t_i - t_{i-1}$ равны постоянному числу – длине шага, принимаемого в качестве единицы времени); t_0 – начало процесса.

Этот с.п. можно рассматривать как последовательность (цепь) событий $S(0), S(1), S(2), \cdots$. ($S(0)$ – начальное состояние системы, т.е. перед 1-м шагом; $S(1)$ – состояние системы после 1-го шага, $S(2)$ – состояние системы после 2-го шага и т.д.), т.е. событий вида $\{S(k) = s_i\}$; где $\mathrm{i} = 1,2,3,\cdots,\mathrm{n}$; $\mathrm{k} = 0,1,2,\cdots$.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют *марковской цепью* (цепь Маркова).

Отметим, что *марковский цепь*, в которой условные вероятности состояний в будущем зависят только от состояния на последнем этапе (и не зависят от предыдущих), называют *простой цепью Маркова*.

Примером такой системы S может служить техническое устройство, возможные состояния которого следующие:

s_1 – исправная работа;

s_2 – профилактический осмотр и обслуживание;

s_3 – ремонтная работа;

s_4 – списание за негодностью;

Граф состояние работы изображен на рисунке 70

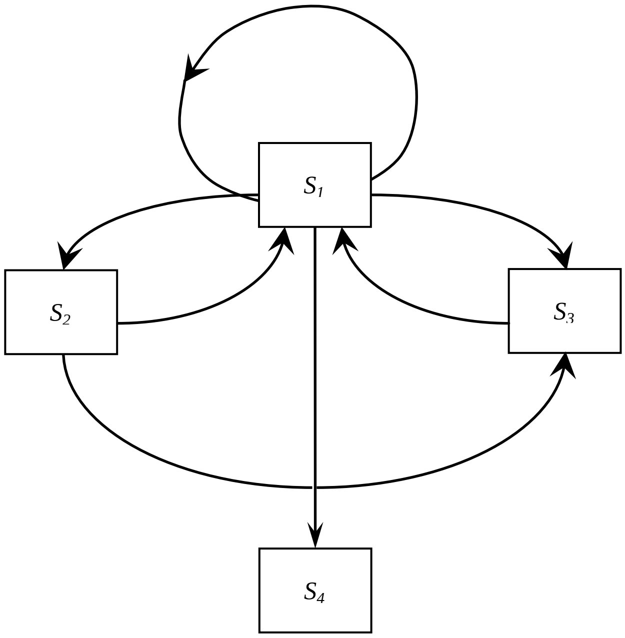


Рис.70

Из анализа графа видно, что из состояния нормальной работы вершины s_1 система может переходить в состояние профилактического обслуживания s_2, а затем опять возвращаться в s_1. Или переходить из s_1 в состояние ремонта s_3, после чего либо возвращается в s_1, либо переходить в состояние списания. Состояние s_4 является конечным, так как переход из него невозможен. Переход из s_1 опять в s_1 означает задержку в этом состоянии.

На практике часто встречаются системы, состояния которых образует цепь, в которой каждое состояние s_i (кроме крайних s_0 и s_n) связано прямой и обратной связи с двумя соседними, $s_{i-1}; s_{i+1}$, а крайние состояния – с одним соседним (см. рис.71)

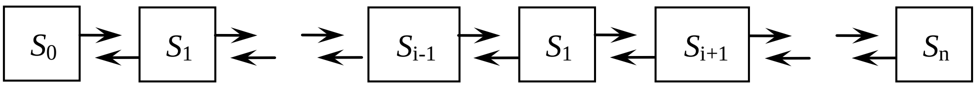


Рис.71 Цепь состояний

Примером такой системы может служить техническое устройство, состоящее из однотипных узлов. Каждое состояние системы характеризуется числом неисправных t узлов в момент проверки.

Основной задачей исследования является нахождение вероятностей состояния s_i на любом k – м шаге. Будем вычислять вероятности состояний дискретной системы

Мы здесь будем рассматривать только простые цепи Маркова. Далее, кратко будем также рассматривать понятия о непрерывных Марковских процессах.

При дискретном времени изменения состояний системы каждый переход от одного состояния к другому называют *шагом*.

Из определения марковской цепи следует, что для нее вероятность перехода системы S в состояние на $(k+1)-$м шаге зависит только от того, в каком состоянии s_j находилась система на предыдущем $k-$шаге.

$$p_i(k) = P\{S(k) = s_i\}, i = 1,2,3,\cdots,\text{n};\ \text{k} = 0,1,2,\cdots.$$

где $P\{S(k) = s_i\}-$безусловная вероятность того, что на $k-$м шаге система именно будет находиться в состояние s_i. Для нахождения этих вероятностей необходимо знать начальное распределение вероятностей $p_1(0), p_2(0),\cdots,p_n(0),$ т.е. вероятности состояний $p_i(0)$ в момент времени $t_0 = 0$ (начало процесса) и так называемые *переходные вероятности* $p_{ij}(k)$ марковской цепи на $k-$м шаге.

Переходной вероятностью $p_{ij}(k)$ называют условную вероятность перехода системы S на
$k-$м шаге, в состояние s_j, если известно, что на предыдущем $(k-1)-$м шаге она была в состоянии s_i, т.е.

$$p_{ij}(k) = P\{S(k) = s_j \,|\, S(k-1) = s_i\},\ i, j = \overline{1,n}; k = 0,1,2,\cdots, \qquad (43)$$

где первый индекс указывает на номер предшествующего, а второй индекс на номер последующего состояния системы.

Цепь Маркова называется *однородной,* если величина, $p_{ij}(k) = p_{ij}$, т.е. условные вероятности $p_{ij}(k)$ не зависят от номера испытаний, в противном случае называется неоднородной.

Далее, мы будем рассматривать только однородные цепи, которые могут быть заданы с помощью вектора $p(0) = (p_1(0), p_2(0),\cdots, p_n(0))$- вероятности состояний в момент времени $t_0 = 0$ и матрицы (*называемой матрицей перехода*)

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \left(p_{ij}\right)_{n\times n}. \qquad (44)$$

Элементы матрицы $P = \left(p_{ij}\right)$ обладают основными свойствами обычных квадратных матриц и дополнительно следующими свойствами:

а) $p_{ij} \geq 0$, б) $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,$ при каждом фиксированном $i = 1,2,\cdots,\text{n}$, т.е. сумма элементов каждой строки *матрицы перехода* равна единице (как вероятности событий перехода из одного состояния s_i в любое другое возможное состояние s_j- образующих полную группу событий).

Вероятность состояния системы на следующем шаге определяется по рекуррентной формуле:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\cdot p_{ij}, (k = 1,2,3,\cdots, j = 1,2,3,\cdots n).$$

При некоторых условиях (эргодичность, однородность, отсутствие циклов) в цепи Маркова устанавливается *стационарный режим*, в котором вероятности состояний системы уже от номера шага не зависят. Такие вероятности называют *предельными* (или финальными) вероятностями цепи Маркова:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij} \ \ (j = 1,2,\cdots,n).$$

Имеет место утверждение.

Теорема 17.1. *Для матрицы перехода вероятностей за* r *шагов* $P(r)$ *справедлива формула*

(45) $$P(r) = P^r,$$

где $P_{ij}(r, r+1) = p_{ij} = P\{X_{r+1} = j \mid X_r = i\}$.

Доказательство. По правилу умножения двух квадратных матриц $n-$го порядка имеем

$$P \cdot P = P^2 = (l_{ij})_{n\times n}; \text{ где } l_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p_{kj};$$

при этом, по определению матрицы перехода известно, что $\sum_{j=1}^{n} p_{kj} = 1$; при любом $k = 1, 2, \cdots, n$.

Просуммируем обе части равенства $l_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p_{kj}$ по всем $\mathrm{j} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}$, и заменяя порядок суммирования после дважды применения свойство а) получим, что $P(2) = P^2 -$матрица перехода за два шага. Аналогично, последовательно рассуждая шаг за шагом, получим наше утверждение в общем случае.

Пример 3. Задана матрица перехода

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы переходных вероятностей $P(2); P(3)$.

На основании правила умножения двух матриц получим

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}25 & 0{,}41 \\ 0{,}37 & 0{,}28 & 0{,}35 \\ 0{,}31 & 0{,}25 & 0{,}44 \end{pmatrix}.$$

Задание. Проверьте, что верно равенство

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}25 & 0{,}41 \\ 0{,}37 & 0{,}28 & 0{,}35 \\ 0{,}31 & 0{,}25 & 0{,}44 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} 0{,}316 & 0{,}269 & 0{,}415 \\ 0{,}319 & 0{,}265 & 0{,}416 \\ 0{,}319 & 0{,}256 & 0{,}425 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что конечная дискретная цепь Маркова представляет с собой дальнейшее обобщение схемы Бернулли, к тому же на случай зависимых испытаний; независимые испытания являются частным случаем марковской цепи. Здесь под «событием» понимается состояние системы, а под «испытанием» понимается изменение состояния системы.

Если «*испытания*» (опыты) являются независимыми, то появление определённого события в любом опыте не зависит от результатов ранее произведённых испытаний.

Задания. а) Заданы матрицы переходов

1. $P = P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$**;**

2. $P = P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$**;**

3. $P = P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$**.**

Найти в каждом случае матрицу $P(2)$.

Ответы: а) **1.** $P(2)=\begin{pmatrix}0{,}34 & 0{,}66\\ 0{,}33 & 0{,}67\end{pmatrix}$;

2. $P(2)=\begin{pmatrix}0{,}60 & 0{,}40\\ 0{,}35 & 0{,}65\end{pmatrix}$;

3. $P(2)=\begin{pmatrix}0{,}244 & 0{,}756\\ 0{,}252 & 0{,}748\end{pmatrix}$.

в) Заданы матрицы переходов

$$P_2(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}; \quad P_3(1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Найти $P_2(2), P_2(3), P_3(2)$.

Ответы: в) **1.** $P_2(2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0{,}75 & 0{,}25\end{pmatrix}$; **2.** $P_2(3)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0{,}875 & 0{,}125\end{pmatrix}$;

3. $P_3(2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3/4 & 1/4 & 0\\ 11/18 & 5/18 & 1/9\end{pmatrix}$.

Замечание. В общем случае дискретная *марковская цепь* $\{X_n\}$ представляет собой марковский случайный процесс, пространство состояний которого конечно или счётное, а множество индексов $T=(0,1,2,\cdots)$ - множество всех неотрицательных целых чисел или его некоторое подмножество (конечное или счётное). Мы можем говорить об X_n как об исходе $n-$го испытания.

Часто пространство состояний процесса удобно отожествить с множеством неотрицательных целых чисел $(0,1,2,\cdots)$ и в этих случаях говорят, что X_n находится в состоянии i, если $X_n=i$.

Вероятность попасть случайной величины X_{n+1} в состояние j (*называемая одношаговой переходной вероятностью*), как уже было упомянуто выше, обозначается $P_{ij}(n,n+1)=P_{ij}$, т.е.

(46) $$P_{ij}(n,n+1)=P_{ij}=P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}.$$

В таком обозначении подчёркивается, что в общем случае переходные вероятности зависят не только от начального и конечного состояний, но и от момента осуществления перехода.

В случаях, когда одношаговые переходные вероятности не зависят от временной переменной (т.е. от значения n), то говорят, что марковский процесс обладает *стационарными переходными вероятностями*. Итак, для дальнейшего отметим, что имеет место равенство $P_{ij}(n,n+1)=P_{ij}=P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}$, который не зависит от n, и p_{ij} обозначает вероятность перехода за одно испытание из состояния i в состояние j.

Обычно вероятности p_{ij} объединяют в квадратную матрицу (конечную или счётную) в зависимости от рассматриваемого процесса:

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{03} & \cdots \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}=\left(p_{ij}\right)_{\infty\times\infty},$$

и называют марковской матрицей, или *матрицей переходных вероятностей* марковской цепи. В матрице P $\{i+1\}-$я строка представляет собой распределение вероятностей с.в. X_{n+1} при условии, что $\mathrm{X_n}=i$. Если число состояний, конечно, то P - конечная квадратная матрица, порядок которой (число строк) равен числу состояний.

Естественно, что вероятности p_{ij} удовлетворяют следующим двум условиям:

а) $p_{ij}\ge 0;\ i,\, j=0,1,2,\cdots,$,

б) $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1,$ при каждом фиксированном $i=0,1,2,\cdots.$

Условие б) отражает тот факт, что каждое испытание вызывает некоторый переход из одного состояния в другое состояние. Для удобства обычно говорят также о *переходе* и в том случае, когда состояние остаётся неизменным. Имеет место утверждение.

Теорема 17.2. *Процесс полностью определён, если заданы вероятности* (46), *т.е.*

$$P_{ij}(n,n+1)=P_{ij}=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\},$$

и распределение вероятностей случайной величины X_0.

Доказательство. Покажем, что для любого конечного n как вычисляются вероятности

(47) $$P\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\},$$

так как по формуле полной вероятности любые другие вероятности, относящиеся случайным величинам $X_{j_1},X_{j_2},\cdots,X_{j_k},\, j_1<j_2<\cdots<j_k$, могут быть получены суммированием слагаемых (членов) вида (47).

По определению условной вероятности имеем

(48) $$P\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=$$
$$=P\{X_n=i_n\mid X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}\cdot P\{X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1}\}.$$

Но по определению марковского процесса получим

(49) $$P\{X_n=i_n\mid X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}\cdot P\{X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1}\}=$$
$$=P\{X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1}\}=P_{i_{n-1},i_n}.$$

Поставляя равенство (49) в (48) получим

(50) $$P\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}==P_{i_{n-1},i_n}\cdot P\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}.$$

Продолжая этот процесс последовательно, получим:

(51) $$P\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=P_{i_{n-1},i_n}\cdot P_{i_{n-2}i_{n-1}}\cdots P_{i_0,i_1}\cdot P_{i_0}.$$

Процесс полностью определён. Что требовалась доказать.

3. Примеры Марковских цепей

Большое число процессов: физических, биологических, в случайные блуждания системы, модели теории запасов, ветвящиеся процессы, различные модели в генетике и многие экономические явления описываются Марковскими цепями. Ниже приведём некоторые примеры.

А. Пространственно однородные марковские цепи

Пусть дискретная случайная величина ξ принимает неотрицательные целочисленные значения, причём $P\{\xi = i\} = \alpha_i, \alpha_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ представляют результаты независимых наблюдений с.в. ξ.

Опишем две различные марковские цепи, связанные с последовательностью $\{\xi_i\}$. В обоих случаях пространство состояний совпадает с множеством неотрицательных целых чисел.

I. Определим процесс $X_n, \mathrm{n} = 0,1,2,\cdots\}$, положив $X_n = \xi_n$ с заданным начальным значением $X_0 = \xi_0$. Матрица переходных вероятностей этого процесса имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}.$$

Тот факт, что в этом процессе у матрицы P все строки одинаковы, означает, что случайная величина X_{n+1} не зависит от с.в. X_n.

II. Следующий важный класс Марковских цепей возникает при рассмотрении последовательных частичных сумм S_n случайных величин ξ_i, т.е.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \ \ n = 1, 2, \cdots.$$

Согласно определению считаем $S_0 = 0$. Нетрудно заметить, что этот процесс $\{X_n = S_n\}$, является марковским. Найдём его матрицу переходных вероятностей: именно с учётом независимостью ξ_i получим

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P\{S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1} = j \mid S_n = i\} =$$
$$= P\{\xi_{n+1} = j - i\} = \begin{cases} a_{j-i}, & j \geq i, \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

Следовательно, матрица переходных вероятностей P будет иметь вид

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}. \qquad (52)$$

Замечание. Если случайная величина ξ может принимать как положительные, так и отрицательные целочисленные значения S_n, т.е. для каждого n значение S_n содержатся в множестве целых чисел $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$, то в этом случае пространство состояний удобнее отожествить со всеми целыми числами (а не преобразовывать в множество неотрицательных целых). Тогда матрицу переходных вероятностей удобно представить в более симметричной форме

$$P=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \cdots & a_{-3} & a_{-2} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}.$$

где $P\{\xi=k\}=a_k, \mathrm{k}\in \mathrm{Z}$ и $a_k\ge 0,\ \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}a_k=1.$

4. Расчет цепи Маркова для стационарного режима

Для нахождения финальных вероятностей необходимо составить систему алгебраических уравнений исходя из правила: для стационарного режима суммарный поток, переводящий систему из других состояний в состояние s_j, равен суммарному потоку вероятностей событий, выводящих систему из состояния s_j;

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot p_{ij}=p_j\sum_{i=1}^{n} p_{ji}, (j=1,2,\cdots,n;\ j\ne i). \tag{53}$$

К этим уравнениям надо добавить нормировочное условие $\sum p_i=1$, отбросив любое (одно) из уравнений. Полученная система уравнений с n неизвестными имеет единственное решение.

Пример 4. Вычислительная машина находится в одном из следующих состояний:

s_1 – система исправно работает;

s_2 – система неисправна, тестируется;

s_3 – система неисправна, настраивается программное обеспечение;

s_4 – система находится на профилактике;

s_5 – система ремонтируется, модернизируется;

Размеченный граф состояний системы показан на рисунке 72

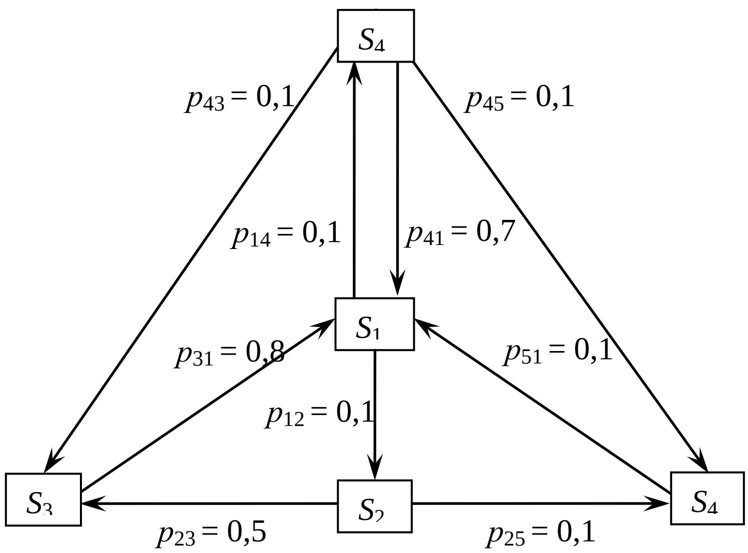


Рис.72

Составить систему алгебраических уравнений и найти предельные вероятности состояний.

Решение. Рассмотрим состояние s_5 системы в размеченном графе. В это состояние направлено две стрелки, следовательно, на основании (53) в левой части уравнения для $j = 5$ будут два слагаемых. Из этого состояния выходит одна стрелка, следовательно, в правой части уравнения будет одно слагаемое. Таким образом, получаем первое уравнение системы:

$$p_2 p_{25} + p_4 p_{45} = p_5 p_{51}.$$

Аналогично запишем ещё три уравнения для оставшихся состояний (вершин графа):

$$\begin{cases} p_2(p_{23} + p_{25}) = p_1 p_{12}; \\ p_2 p_{23} + p_4 p_{43} = p_3 p_{31}; \\ p_4(p_{41} + p_{43} + p_{45}) = p_1 p_{14}. \end{cases}$$

В качестве пятого уравнения возьмём нормировочное уравнение $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$. При решении системы уравнение для s_1 отбрасываем. Его можно в конце использовать для контроля полученного решения. Таким образом, перепишем систему уравнений в виде:

$$p_2 = \frac{p_1 p_{12}}{p_{23} + p_{25}}; \quad p_3 = \frac{p_2 p_{23} + p_4 p_{43}}{p_{31}};$$

$$p_4 = \frac{p_1 p_{14}}{p_{41} + p_{43} + p_{45}}; \quad p_5 = \frac{p_2 p_{25} + p_4 p_{45}}{p_{51}};$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1.$$

В результате решения системы методом подстановок получим:

$$p_1 \approx 0{,}597;\ p_2 \approx 0{,}1;\ p_3 \approx 0{,}071;\ p_4 \approx 0{,}066;\ p_5 \approx 0{,}166.$$

Замечание. Для решения этого примера нам не потребовались вероятности «*задержек*» $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}, p_{55}$.

Пример 5. В локальной вычислительной сети работают три ЭВМ. По истечению определённого промежутка времени t все ЭВМ тестируются, в результате чего каждая из них признаётся либо исправленной, либо требующего ремонта. Вероятность того, что за время t исправная ЭВМ выйдет из строя, равна p, а вероятность того, что неисправная будет отремонтирована, равна q. Процессы выхода ЭВМ из строя и их восстановление протекают независимо друг от друга. Пологая $p = 0{,}2;\ q = 0{,}3;$

Найти предельные (финальные) вероятности.

Решение. Сначала построим граф состояний (см.рис. 73).

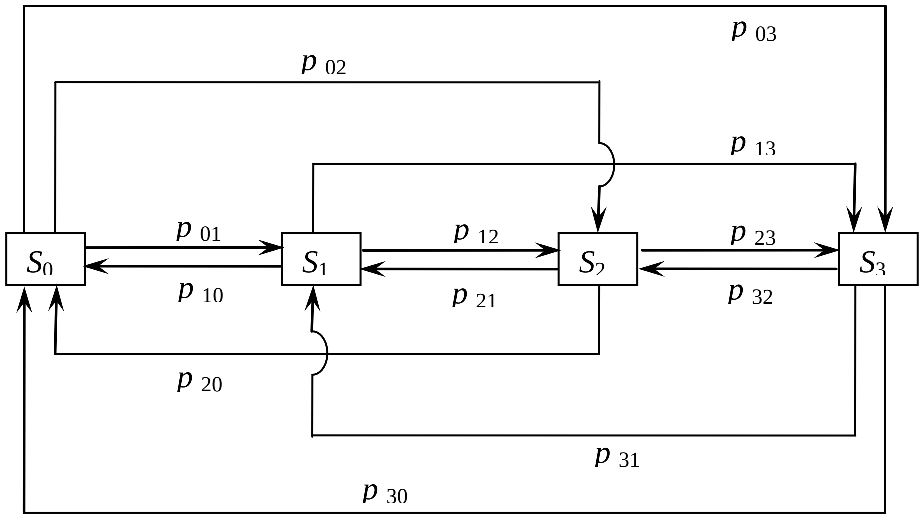


Рис. 73

Пронумеруем состояний системы по числу неисправных ЭВМ:

s_0 – ни одной неисправной; s_1 – одна неисправна;

s_2 – две неисправны; s_3 – все три неисправны;

Для того чтобы система перешла из состояния s_0 в состояние s_1, нужно, чтобы одна из трёх ЭВМ за время τ вышла из строя.

Эта вероятность в соответствии с законом распределения Бернулли равна $p_{01} = C_3^1 p(1-p)^2$. Аналогично, находим:

$$p_{02} = C_3^2 p^2(1-p);\ p_{03} = C_3^3 p^3;\ p_{00} = 1 - p_{01} - p_{02} - p_{03} = (1-p)^3.$$

Для того, чтобы система из состояния s_1, перешла в состояние s_0, нужно, чтобы неисправная ЭВМ за время τ была отремонтирована (событие A), а две исправные не вышли из строя (событие B). Тогда получим $p_{10} = P(A \cdot B) = q(1-p)^2$,

Аналогично находим:

$$p_{11} = q \cdot 2p(1-p) + (1-q)(1-p)^2;$$

$$p_{12} = q \cdot p^2 + (1-q) \cdot 2p(1-p);$$

$$p_{13} = (1-q) \cdot p^2; \qquad \sum_{i=0}^{3} p_{1i} = 1.$$

Рассуждая подобным образом, находим:

$$p_{20} = q^2(1-p);\ p_{21} = q^2 \cdot p + (1-p) \cdot 2q(1-q);$$

$$p_{22} = (1-q)^2(1-p) + p2q(1-q);\ p_{23} = (1-q)^2\ p;$$

$$p_{30} = q^3;\ p_{31} = C_3^1 q^2(1-q);$$

$$p_{32} = C_3^2 q(1-q)^2;\ p_{33} = (1-q)^3;$$

Составим матрицу переходов при $p = 0{,}2$ и $q = 0{,}3$:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} = 0{,}512 & p_{01} = 0{,}384 & p_{02} = 0{,}096 & p_{03} = 0{,}008 \\ p_{10} = 0{,}192 & p_{11} = 0{,}544 & p_{12} = 0{,}236 & p_{13} = 0{,}028 \\ p_{20} = 0{,}072 & p_{21} = 0{,}354 & p_{22} = 0{,}476 & p_{23} = 0{,}098 \\ p_{30} = 0{,}027 & p_{31} = 0{,}027 & p_{32} = 0{,}441 & p_{33} = 0{,}343 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемого примера система уравнений (53) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} 0{,}488p_0 - 0{,}192p_1 - 0{,}072p_2 - 0{,}0027p_3 = 0; \\ -0{,}384p_0 + 0{,}456p_1 - 0{,}354p_2 - 0{,}189p_3 = 0; \\ -0{,}096p_0 - 0{,}236p_1 + 0{,}524p_2 - 0{,}441p_3 = 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решая полученную систему линейных уравнений с помощью одним из известных методов (например, методом последовательного исключения неизвестных) получим: $p_0 = 0{,}213$; $p_1 = 0{,}431$; $p_2 = 0{,}289$; $p_3 = 0{,}067$.

На этом мы закончим этот раздел и для читателей рекомендуем в целях более подробного ознакомления с этим важным разделом теории вероятностей обратиться к фундаментальным книгам [Гнеденко, Феллер и Карлин и др.].

В завершении этой тематики рассмотрим кратко понятие о непрерывном Марковском процессе и системы уравнения Колмогорова.

5. О непрерывном Марковском процессе, уравнения Колмогорова

Пусть в некоторой системе S происходит марковский случайный процесс с дискретными состояниями $s_1, s_2, \cdots, s_n$.

Если переходы системы из одного состояния в другое состояние происходят в случайные моменты времени, а не в заданные (фиксированные) моменты $t_0, t_1, t_2, \cdots$, (что часто на практике встречаются), то такой процесс называют *марковским процессом с дискретными состояниями и непрерывным временем.*

Марковские с.п. указанного типа используются, в частности, для исследования реальных систем массового обслуживания (СМО); в них процессы протекают в непрерывном времени.

Под *состоянием системы* понимается *количество заявок (требований) на обслуживание данной* системы.

Будем считать, что переходы системы из состояния s_i в состояние s_j осуществляется под воздействием пуассоновского потока событий (см.16.2) с интенсивностью $\lambda_{ij} = const$.

Граф состояний системы с проставленными у стрелок интенсивностями называют *размеченным* (см. рис.74).

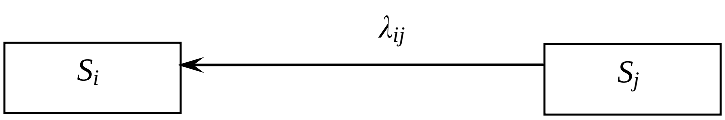


Рис. 74

Переходы системы из состояния s_i в s_j происходят в момент, когда наступает первое событие потока.

Вероятность события, когда система S в момент времени t находится в состоянии s_i, обозначается через $p_i(t)$. Тогда по определению $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}$, при этом выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1.$$

Для нахождения этих вероятностей $p_i(t)$ состояний системы $s_1, s_2, \cdots, s_n$, нужно решит систему дифференциальных уравнений следующего вида

(53) $$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot (p_j(t) - p_i(t)); \; i = 1,2,3,\cdots,\mathrm{n},$$

с начальными условиями

(54) $$p_1(0), p_2(0),\cdots, p_n(0); p_i(0) \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1$$

и условием нормировки $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (53) с начальными условиями (54), называется уравнением Колмогорова.

При составлении системы уравнений Колмогорова удобно пользоваться *размеченным графом* состояний системы.

Алгоритм (правило) составления уравнений Колмогорова следующее:

- в левой части каждого из уравнений стоит производная вероятности s_i, состояния системы в момент времени t, т.е. $\frac{dp_i(t)}{dt}$; а в правой части стоит сумма произведений вероятностей $p_j(t)$ всех состояний (когда стрелка ведёт в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков,

- *минус* вероятность данного s_i состояния, умноженная на суммарную интенсивность, всех потоков (когда стрелка ведёт из данного состояния см. рис.75)

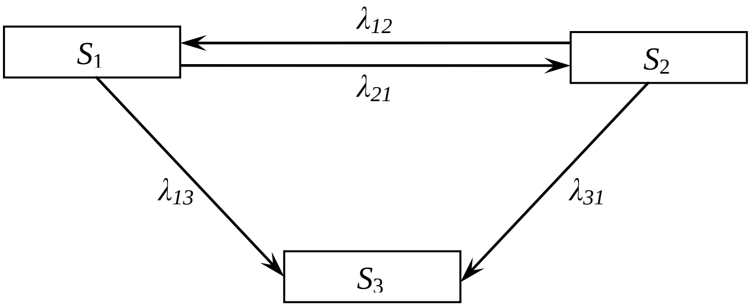


Рис. 75

Например, для системы S, размеченный граф состояний которой показан на рис 75, система дифференциальных уравнений будет следующее

$$\begin{cases} p_1'(t) = \lambda_{21} \cdot p_2(t) - p_1(t) \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \\ p_2'(t) = \lambda_{12} \cdot p_1(t) - p_2(t) \cdot (\lambda_{21} + \lambda_{23}) \\ p_3'(t) = \lambda_{13} \cdot p_1(t) + p_2(t) \cdot \lambda_{23}. \end{cases}$$

Кроме того, выполняется нормированное условие $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$.

При интегрировании такой системы следует учесть состояние системы в начальный момент, т.е. при $t = 0$. К примеру, если в этот момент система была в состоянии s_k, то полагают $p_i(0) = 0$, если $i \neq k$.

Замечание. Случайный процесс, устанавливающийся в системе при $t \to \infty$ (так называемый *предельный стационарный режим*), характеризуют так называемые предельные вероятности состояний, т.е. вероятности $p_i(t)$ при $t \to \infty$.

Предельные вероятности существуют, если число состояний конечно, «состояний без выхода» (из них невозможен переход ни в какое другое состояние) нет, потоки событий стационарны ($\lambda_{ij} = const$).

Предельная вероятность состояния s_i показывает *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии.*

Для нахождения предельных вероятностей в уравнениях Колмогорова полагают, все производные $\frac{dp_i(t)}{dt}$ равными нулю и решают систему однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot (p_j(t) - p_i(t)) = 0; \; i = 1,2,3,\cdots,\text{n},$$

с условием нормировки $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Пример 6. Найти предельные вероятности для системы S, представленный на рисунке 76

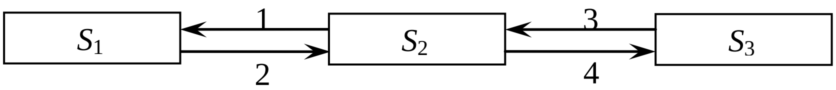


Рис. 76

Решение. Составляем дифференциальные уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} p_1'(t) = 4p_2 - p_1 \\ p_2'(t) = p_1 - (2+4)\cdot p_2 + 3p_3 \\ p_3'(t) = 2p_2 - 3p_3 \end{cases}$$

Тогда система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим системы S , принимает вид

$$\begin{cases} 4p_2 - p_1 = 0 \\ p_1 - 6\cdot p_2 + 3p_3 = 0 \\ 2p_2 - 3p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решая эту систему находим, $p_1 = \frac{12}{17}, p_2 = \frac{3}{17}, p_3 = \frac{2}{17}$, т.е. система S в среднем 70,6% будет находиться в состоянии s_1; 17,6% - в состоянии s_2; 11,8% - в состоянии s_3.

Математическая статистика,
эта наука о принятии решения
в условиях неопределённости

ГЛАВА 5

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Тема 18. Статистическая выборка и её характеристики

1. Краткая историческая справка

Математическая статистика возникла (XVII в.) в работах Я. Бернулли, П. Лапласа, К. Пирсона и как научное направление математики формировалось параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX и начало XX вв.) обязано, в первую очередь, П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову, а также К. Гауссу, А. Кетле, Ф. Гальтону, Г. Крамера, Р. Фишера, Ю. Неймана и др.

В XX в. наиболее существенный вклад в развитии математической статистики внесли математики советского периода Романовский, Слуцкий, Колмогоров, Смирнов, Хинчин, Гнеденко, а также английские учёные Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон и американские учёные Ю. Нейман, А. Вельд и многие другие.

В современной жизни человека во всех сферах его деятельности требуется создавать такие статистические методы обработки данных и направление деятельности любого производства, так чтобы оно не просто констатировало непригодность (брак) изготовленной продукции, но и своевременно вмешиваться в производственный процесс, не допускающий изготовления некачественной продукции. Именно к этому должно стремиться любое производство.

Таким образом, для управления качеством производства, главная задача состоит в разработке методов статистического исследования, которые позволяли бы уловить тот момент, когда бракованная продукция ещё не произведена, а уже возникает «***повышенная вероятность-сигнал***» начала её производства.

Идея статистического метода управления качеством в процессе производства состоит в том, чтобы время от времени проверять небольшие партии только что изготовленной продукции.

По результатам таких проверок можно судить своевременно о качестве работы того или иного станка. Однако, нужно помнить, что такую проверку следует производить не слишком

часто, чтобы не лихорадить ***переналадками*** оборудования производственный процесс, и не слишком ***редко***, чтобы не пропускать момент его ***разладки***. Далее результаты наблюдения наносятся на, так называемые, ***контрольные карты***, которые позволяют судить, что нужно предпринимать после каждой серии таких наблюдений – *прекратить работу для переналадки оборудования или продолжить производственный процесс.*

Если на некоторых производствах первичное произведение замеров параметров, определяющих качество продукции, допустимо и далее оценивается вручную, то на других производствах оно уже требует заметного усовершенствования и перехода к автоматизации замеров и обработки результатов измерения.

Дело в том, что во многих случаях приходится иметь дело с огромной скоростью технологических операций. Скорость настолько велика, что пока оператор производит измерение параметров отобранных изделий, автомат успевает изготовить сотни других изделий. В результате, при ручном измерении оказывается, что запаздывает информация о наладке процесса, а вместе с ней управляющее воздействие.

Вот почему предлагаются современные автоматы и автоматические линии на производстве, которые замеряют необходимые параметры своевременно и сами выполняют математические операции, необходимые для управления качеством.

Методы приёмочного контроля и статистические методы управления качеством оказались весьма эффективным средством упорядочения производства и экономии станочного времени, ресурсов, рабочей силы.

Экономический эффект от использования этих методов исчисляются миллиардами учётных денежных (валютных) единиц различных государств.

По-настоящему история статистических методов контроля и управления качеством можно сказать, что ещё недостаточно изучена и нуждается в совершенстве.

2. Задача математической статистики

В курсе теории вероятностей были введены правила, которые позволяли по вероятностям одних случайных событий вычислять вероятность других событий, связанных с ними: по числовым характеристикам и функциям распределения одних случайных величин можно было найти функции распределения и числовые характеристики других. Возникает естественный вопрос: как найти эти исходные вероятности, числовые характеристики и функции распределения? Как оценить хотя бы приближённые их значения? Это является предметом исследования науки о массовых случайных явлениях, которая получила название «*математическая статистика*» (МС). Как наука со своей установившейся тематикой и методами исследования МС сформировалась, в сущности, только в XX веке. Однако отдельные её задачи возникали и рассматривались задолго до XX века – и в XVII – XIX вв.

Термин «*статистика*» происходит от латинского слова «статус» (status) – состояние. Первоначально в XVIII веке, когда статистика начала оформляться в научную дисциплину, термин статистика связывался с системой описания фактов, характеризующих основные информации (данные) о состояние общества (государства). При этом даже не предполагалось, что введению статистики подлежат только явления массового порядка. В настоящее время статистика как наука включает в себя определённое содержание, а именно *установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основанные на изучении статистических данных – результатах наблюдений.*

Приведём основные задачи МС:

- первая задача это разработка приёмов и методов статистического наблюдения в процессе сбора статистических данных.

- вторая задача математической статистики – указать способы группировки (если данных очень много) статистических сведений, т.е. сведений, характеризующих отдельные единицы каких-либо массовых совокупностей;

- третья задача математической статистики является разработка методов анализа собранных статистических информаций, в зависимости от поставленных целей и задач исследования, и выявить тех закономерностей, которые могут быть установлены на основе собранных данных массового наблюдения;

Этот раздел фактически и составляет содержание науки математической статистики. На практике человеческой деятельности сбор статистических сведений, касающихся главным образом населения, производился уже давно: имеются сведения, что в 2238 году до н.э. в Китае при императоре Яо была произведена перепись населения. Переписи населения производились и в Древнем Иране, в Древнем Египте, Римской империи; известны переписи населения в России в 1245, 1259, 1273, 1287гг. и более поздние сроки. Следует отметить, что эти переписи были чрезвычайно примитивны. В Китае, например, в течение, 200 лет население учитывалось путём копировки списков предыдущих переписей. Однако, даже такие неполные и несовершенные переписи давали возможность намечать важные государственные мероприятия. На данном этапе этот вопрос является весьма актуальным во всех государствах. *Практическое значение статистики в наше время, бесспорно, возросло многократно.*

Роль математической статистики не ограничивается вопросами обработки экспериментальных данных, а распространяется и на управленческие процессы в целом, а также на разнообразные технологические процессы, в том числе, на проблему «*проверки соответствия теории того или иного явления экспериментальным данным».*

Исходным материалом для статистического исследования *реального явления* служит набор полученных результатов наблюдений или же набор результатов специально поставленных опытов (испытаний) над исследуемыми объектами. Вопросы, которые возникают при исследование, очень много и разнообразные по своему содержанию. Укажем на некоторые из них:

1. ***Оценка значения неизвестной вероятности случайного события;***

2. ***Определение неизвестной функции распределения и их основных числовых характеристик (математическое ожидание, дисперсии и среднеквадратичное отклонение);***

3. ***Определение неизвестных параметров распределения.***

Общая задача ставится так: в результате n - независимых испытаний над случайной величиной X получены следующие её значения $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. Требуется определить хотя бы приближённо неизвестную функцию распределения $\Phi(x)$ величины X .

Часто общетеоретические соображения позволяют сделать достаточно определённые заключения о типе функции распределения интересующей нас случайной величины. Так, например, теорема Ляпунова даёт возможность считать, что в определённых случаях функция распределения должна быть нормальной. При этом определение неизвестной функции распределения сводится к определению по результатам наблюдения только неизвестных параметров $a = MX$; $\sigma_X = \sqrt{DX}$.

Общая задача ставится так: случайная величина X имеет функцию распределения данного вида, зависящую от k параметров, значения которых неизвестны. На основании практических наблюдений величины X нужно найти последовательно значение этих параметров.

Очевидно, что определение неизвестной вероятности $p = P(A)$ события A является частным случаем только что сформулированной задачи. Так как мы можем рассматривать случайную величину X , принимающую значение 1, если событие A появляется - «успех» и значение 0, если событие A не появляется - «не удача» в данном испытании. Следовательно, функция распределения зависит от единственного параметра $p = P(A)$.

4. ***Проверка статистических гипотез.***

Эта задача ставится следующим образом: на основании некоторых предположений можно считать, что функция распределения случайной величины X есть $\Phi(x)$.

Возникает естественный вопрос, согласуются ли полученные значения с гипотезой в результате проведённого наблюдения (опыта), что с.в. X действительно имеет данное распределение $\Phi(x)$.

В частности, если вид функции распределения не вызывает сомнений и в проверке нуждается только значения некоторых параметров, характеризующих данное распределение, то в задаче ставиться вопрос: не опровергают ли результаты наблюдений ту гипотезу, что параметры распределения имеют предположенные значения? Эта задача есть «*проверки простой гипотезы*».

Если проверяемая гипотеза состоит в том, что параметры принимают не полностью множество значения, а часть из этих множеств значения (например, в случае биномиального распределения, гипотеза выполняется с ограничением $p < p_0$), то гипотеза называется *сложной.*

В качестве примера статической гипотезы приведём проверку однородности статистического материала. Наиболее часто встречается в русле такой задачи следующее: имеются две последовательности $x_1, x_2, \cdots, x_n$ независимых наблюдений над случайной величиной X с функцией распределения $\Phi_1(x)$, и над случайной величиной Y с последовательностью со значениями $y_1, y_2, \cdots, y_m$ и с функцией распределения $\Phi_2(x)$. Функции распределения $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ неизвестны. Требуется оценить правдоподобность гипотезы $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$.

5. ***Оценка зависимости.*** Производится последовательность наблюдений сразу двух случайных величин X и Y. Результаты наблюдений даны следующими парами значений: $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n$. Выяснить наличие функциональной или корреляционной связи между двумя случайными величинами X и Y.

6. ***Управление процессами.*** Пусть имеется случайный процесс от дискретного или непрерывного времени $X(t)$. Процесс под влиянием тех или иных причин может нарушить своё нормальное протекание стать другим, т.е. будет протекать по другому процессу $X_2(t)$. Это нарушение нормального течения может привести к нежелательным последствиям и следует
исследователю своевременно заметить момент «***разладки***» и оказать соответствующее воздействие с целью восстановления нормального хода процесса.

В качестве примера можно указать на работу технологического процесса (линии), которая вырабатывает определённую продукцию. Время от времени в силу различных причин процесс выходит из нормального состояния. Этими причинами могут служить сбой некоторых частей инструментов (затупление инструмента, нарушение энергетического снабжения и т.д.). Они приводят к ухудшению качества выпускаемого продукта от предусмотренного стандарта.

В этих случаях требуется по наблюдениям уловить момента ***разладки*** и восстановить ход процесса.

Следует заметить, что перечисленными задачами далеко не исчерпываются основные проблемы математической статистики. Совершенно новые и разнообразные задачи возникают перед наукой математической статистики в связи быстрыми темпами развитием научной и практической промышленности, а также происходящие глобальные изменения, в мировом масштабе.

Изучение тех или иных явлений методами математической статистики служит средством решения многих вопросов, выдвигаемых наукой и практикой (правильная организация технологического процесса, оптимальное планирование в экономических и финансовых сферах, своевременная регулировка экологических и социальных проблем в глобальном масштабе и др.). В частности, само планирование «**испытаний»** является одной из важнейшей задачей математической статистики.

Итак, если кратко резюмировать вышесказанное, то при решении многих прикладных задач для случайных величин определяются их вероятностные и числовые характеристики на основе статистического анализа экспериментальных данных.

Статистическое описание результатов наблюдений, построение и проверка различных математических моделей, использующих понятие вероятности, составляют основное содержание математической статистики, а «*задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов».*

Перейдём к изложению, одного из важнейших разделов математической статистики без которого в целом невозможно успешно изучать предмет математической статистики.

3. Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого *качественного* или *количественного* признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным – контролируемый размер детали, или, рассматривая работу диспетчера парикмахера, продавца, оператора технологической линии, и др., следует исследовать: его загруженность, тип клиентов, скорость обслуживания, моменты поступления заявок и т.д.

Каждый из таких признаков или различные сочетания их образуют случайную величину, наблюдения над которыми мы и производим. Совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, производимых при постоянных условиях над каждым объектом, обычно называют генеральной совокупностью.

Иногда проводят сплошное обследование, т.е. обследуют каждый из объектов всей совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяется сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Генеральная совокупность – это случайная величина, $X(\omega)$ заданная на пространстве элементарных событий Ω с выделенным в нём классом S подмножеств событий, для которых указаны их вероятности, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Выборочной совокупностью, или просто *выборкой*, называют совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности.

Более точно: *выборка* – это последовательность $X_1, X_2, \cdots, X_n$ независимых одинаково распределенных с.в., распределение каждой из которых совпадает с распределением самой генеральной случайной величины.

Количество наблюдаемых объектов в совокупности, генеральной или выборочной называется её объёмом; обозначается соответственно буквами N и n. Например, если из 10000 деталей отобрано для обследования 1000 деталей, то объемом генеральной совокупности $N = 10000$, а объемом выборки $n = 1000$.

Конкретные значения выборки, полученные в результате наблюдений (испытаний), называют *реализацией выборки* и обозначают строчными буквами $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Метод статистического исследования, состоящий в том, что на основе изучения выборочной совокупности делается заключение обо всей генеральной совокупности, называется *выборочной*.

Обычно, в целях получения достаточно «хороших» *оценок характеристик* генеральной совокупности необходимо, чтобы выборка была *репрезентативной* (*представительной*), то есть, чтобы она достаточно полно представляла изучаемые признаки генеральной совокупности. Условием обеспечения такой выборки является, согласно закону больших чисел, соблюдение *случайности производимого отбора*, то есть все объекты генеральной совокупности, попадающие в данную выборку, должны иметь равные вероятности (равные возможности).

Различают выборки *с возвращением* (*повторные*) и *без возвращения* (*бесповторные*). В первом случае отобранный объект возвращается в генеральную совокупность перед началом следующего испытания; во втором – не возвращается. На практике чаще используется бесповторная выборка.

Если объём выборки значительно меньше, чем объём генеральной совокупности, то можно не учитывать различие между повторной и бесповторной выборками . В зависимости от конкретных условий для обеспечения представительности выборки применяют различные способы отбора. Их можно подразделить на два вида:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности. Сюда относятся:

а) *простой случайный бесповторный отбор;*

б) *простой случайный повторный отбор*;

Простым случайным отбором называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному (случайным образом) из всей генеральной совокупности.

Если карточку возвращают в пачку каждый раз перед очередным выбором, то выборка является простой случайной бесповторной.

Если карточку не возвращать в пачку каждый раз перед очередным выбором, то выборка является простой случайной повторной.

Например, для извлечения n объектов из генеральной совокупности объема N поступают так: выписывают номера от 1 до N на карточках, которые тщательно перемешивают и наугад вынимают одну карточку; объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию; затем карточка возвращается в пачку (или не возвращается) и процесс повторяется, т.е. карточки перемешиваются, наугад вынимают одну из них и т.д. Так поступают n раз; в итоге получают простую случайную повторную (бесповторную) выборку объема n.

Следует отметить, что при большом объёме генеральной совокупности указанный процесс трудоёмкий. В таких случаях пользуются готовыми таблицами так называемых «*случайных чисел»,* в которых числа расположены в случайном порядке. Среди них, например, чтобы отобрать n объектов из перенумерованных N всего объектов генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают подряд n чисел. В выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными n случайными числами. Если какое-то случайное число окажется больше чем N, то оно пропускается. При осуществлении бесповторной выборки случайные числа таблицы, уже встречавшиеся ранее, следует также пропустить.

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся:

а) типический отбор;

б) механистический отбор;

в) серийный отбор.

- ***типическим отбором*** называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой её «типической» части.

Например, перед выборной компанией при анализе рейтинга определённых государственных деятелей опрашивают мнение случайно отобранных людей различных по признаку пола, возраста, социального статуса и т.д.. Другой пример, детали изготавливают на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, изготовленных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности, и т.д.

Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных «*типических частях*» генеральной совокупности. Если продукция изготавливается на нескольких технологических машинах, среди которых есть более и менее изношенные, то здесь типический отбор целесообразен.

-***механистический отбором,*** называют такой отбор при котором генеральная совокупность «механически» делят на группы, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект (например, опрос мнения по некоторому вопросу у каждого человека с простым порядковым номером); или, если нужно отобрать 20% изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь; если требуется отобрать 5% деталей, то отбирают каждую двадцатую деталь и т. д.

Следует указать, что иногда механический отбор ни всегда может обеспечить *представительности* выборки. Например, если отбирается каждый двадцатый обтачиваемый валик, причем сразу же после отбора производят замену резца, то отобранными окажутся все валики, обточенные затупленными резцами. В таком случае надо устранить совпадение ритма отбора с ритмом замены резца, для чего надо отбирать, скажем, каждый десятый валик из двадцати обточенных.

-***серийным отбором*** называют такой отбор, при котором объекты из генеральной совокупности отбираются «сериями», которые должны исследоваться при помощи сплошного обследования.

Например, если изделия изготавливают большой группой станков – автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков. Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

Подчеркнем, что на практике часто применяется *комбинированный отбор*, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, иногда разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

Пример 1. Пятьдесят абитуриентов проходят тестирование по математике. Каждый из них может набрать от 0 до 5 балов включительно. Пусть X_k – количество балов набранных k – м $(k = 0,1,\cdots,50)$, абитуриентом.

Тогда значения $0,1,2,3,4,5$ будут возможные количества баллов, набранных одним абитуриентом, из которых образуют генеральную совокупность.

Выборка $X_1, X_2, \cdots, X_{50}$ – результат тестирования 50 абитуриентов.

Реализациями выборки могут быть, например, следующие наборы чисел: $\{0,0,\cdots 0\},\ldots,$ $\{1,1,\cdots,1\},\cdots,$ $\{5,2,3,\cdots,4,5\},\{1,2,3,1,2,4,\cdots,5,5,5\}$, и т.д., где в каждом из этих наборов (подмножеств) по 50 цифр, общее число наборов $C_{50}^{6} = \dfrac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$.

Замечание. Часто генеральная совокупность содержит конечное число объектов. Однако, если это число достаточно велико, то иногда в целях упрощения вычислений, или для облегчения теоретических выводов, допускают, что генеральная совокупность состоит из бесчисленного множества объектов. Такое допущение оправдывается тем, что увеличение объема генеральной совокупности (достаточно большого объема) практически не сказывается на результатах обработки данных «выборки».

4. Статистическое распределение выборки, эмпирическая функция распределения

Пусть исследуется произвольная случайная величина X и относительно этой случайной величины производится ряд независимых опытов (испытаний) при наличии определённого комплекса условий. Далее, пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 наблюдалось n_2 раз, и так далее x_k наблюдалось n_k раз, при этом натуральное число $1 \le k \le n$; и

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{j=1}^{k} n_j = n,$$

выражает объём выборки, значения x_j называют *вариантами с.в.* X. Вся совокупность значений с.в. X представляет собой первичный статистический материал, который подлежит дальнейшей обработке, сначала подлежать *упорядочению*. Операцию по упорядочению значений случайной величины (признака) по не убыванию называют «*ранжированием*» статистических данных. Полученная таким способом последовательность значений $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(k)}\}$ случайной величины X, где $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(k)}$; $x_{(1)} = \min\limits_{1 \le j \le k}\{x_1\}$, $x_{(k)} = \max\limits_{1 \le j \le k}\{x_j\}$ называется *вариационным рядом*.

Числа n_j, показывающие, сколько раз встречаются варианты (числа) x_j в ряде наблюдений, называются *частотами*. А числа $W_n(n_j) = p_j^{\bullet}$ равное отношение n_j к объёму выборки n, называются *относительными частотами*, т.е.

$$p_j^{\bullet} = W_j = \frac{n_j}{n},\ j = 1,2,\cdots,k;\ n = \sum_{j=1}^{k} n_j. \tag{1}$$

Перечень *вариантов* и соответствующие им *частость* или *относительных частот* называют *статическим распределением выборки или статическим рядом*.

Статистическое распределение записывается в виде таблицы, где в первой строке пишут численные значения вариантов, а вторая заполняется их соответствующими *частотами* n_j. Из этой таблицы затем составляют новую таблицу с указанием *частотностей* (*относительных частот)* $p_j^{\bullet}$, где должен выполняться «*контроль*» $\sum_{j=1}^{k} p_j^{\bullet} = 1$.

Пример 2. Задано распределение частот выборки объема $n = 20$,

$$x_j:\ 2 \quad 6 \quad 12$$

$$n_j:\ 3 \quad 10 \quad 7\ .$$

Эта таблица означает, что $x_1 = 2$ принимается три раза, $x_2 = 6$ принимается 10 раз и $x_3 = 12$ принимается 7 раз. В итоге: $n = 20 = 3 + 10 + 7$.

Написать таблицу распределение относительных частот.

Решение. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки:

$$p_1^{\bullet} = \frac{3}{20} = 0.15,\ p_2^{\bullet} = \frac{10}{20} = 0.50,\ p_3^{\bullet} = \frac{7}{20} = 0.35.$$

Теперь, составим таблицу распределения относительных частот:

$$x_j:\ 2 \qquad 6 \quad 12$$

$$p^{\bullet}:\ 0{,}15 \quad 0{,}5 \quad 0{,}35\,.$$

Контроль: $0{,}15 + 0{,}5 + 0{,}35 = 1.$

Пример 3. В результате тестирования группы из 10 человек для приёма на работу претенденты набрали баллы: $5,3,0,1,4,2,5,4,1,5$. Составить

а) вариационный ряд;

б) статический ряд;

в) таблицу частот и относительных частот.

Решение. а) Упорядочив статические данные, получим вариационный ряд:

$$\{x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(10)}\} = \{0,1,1,2,3,4,4,5,5,5\};$$

б) Подсчитав *частоту* и относительную *частотность* вариантов: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$, получим статическое распределение выборки (так называемый дискретный ряд).

x_j	0	1	2	3	4	5
n_j	1	2	1	1	2	3

где $\sum n_j = 10$. Контроль.

Построим таблицу относительную частоту

x_j	0	1	2	3	4	5
$p_j^{\bullet}$	1/10	2/10	1/10	1/10	2/10	3/10

где $\sum p_j^{\bullet} = 1$. Контроль.

Статистическое распределение выборки является оценкой неизвестного распределения.

По теореме Бернулли, относительные частоты $W_n(n_j) = p_j^{\bullet}$ сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим вероятностям, p_j, т.е. $p_j^{\bullet} \to p_j$. Поэтому, при больших значениях n статическое распределение мало отличается от истинного распределения.

В случаях, когда количество значений признака (с.в. X) достаточно велико или когда случайная величина X является непрерывной (т.е. её значение заполняет некоторый отрезок числовой прямой), *составляют интервальный статистический ряд.*

В первую очередь образуют частичные промежутки, $[c_0, c_1); [c_1, c_2), \cdots, [c_{k-1}, c_k)$, которые берут обычно с одинаковыми длинами, равными $h = c_1 - c_0 = c_2 - c_1 = \cdots = c_j - c_{j-1} = \cdots$.

Интервалы	$I_1 = [c_0, c_1)$	$I_2 = [c_1, c_2)$	$I_3 = [c_2, c_3)$	$\cdots$	$I_k = [c_{k-1}, c_k]$
Частота	n_1	n_2	n_3	$\cdots$	n_k
Частость	$p_1^{\bullet}$	$p_2^{\bullet}$	$p_3^{\bullet}$	$\cdots$	$p_k^{\bullet}$

Эта таблица означает, что весь диапазон изменения величины X разбит на интервалы (границами $j-$го интервала являются, c_j и c_{j+1}); число $p_j^{\bullet}, (j = \overline{1,k})$; есть частота попадания в $j-$й интервал, $p_j^{\bullet} = n_j / n$, где $n_j -$количество чисел в исходном ряде (выборке), приходящихся в j- й интервал. На практике число интервалов выбирается обычно в пределах одного-двух десятков. Также следует отметить, что в общем случае длины интервалов не обязаны быть одинаковыми.

Для определения величины интервала $h = c_j - c_{j-1}$ существуют разные подходы, в качестве одного из таких способов разбиения, может быть использована формула Стерджесса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n},$$

где $x_{\max} - x_{\min}$ выражает разность между наибольшим и наименьшим значениями признака, числа интервалов $m = 1 + \log_2 n$; $(\log_2 n \approx (3{,}322) \cdot \lg 2)$. За начало первого интервала рекомендуется брать величину $(x_{\min} - \frac{h}{2})$, и если конец последнего промежутка входит во множестве с.в. X, то оно также включается в число элементов, входящих в последний промежуток. После завершения «разбиения» первую строку таблицы статического распределения заполняют полученными частичными промежутками. Во второй строчке статистического ряда вписывают числа n_j $(j=\overline{1,k})$- количество наблюдений, попавших в каждый интервал, а затем составляют вторую таблицу относительных частот по выше указанному принципу, где мы для удобства объединили обе таблицы.

Заметим, что в теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике — соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или *частость (относительные частоты).*

Пример 4. Измерили рост (с некоторой точностью скажем до 1 см.) 30 наудачу отобранных студентов. Результаты измерения показали:

$$178,\ 160,\ 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155,$$
$$157,\ 175,\ 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169,$$
$$179,\ 165,\ 156, 179, 158,\ 171, 175, 173, 164, 172.$$

Построить интервальный статистический ряд.

Решение. Сначала упорядочим полученные данные.

$$153,154,155,155,156,157,158,159,160,163,164,165,166,167,167,169,170,$$
$$171,171,172,173,173,175,175,178,179,179,182,183,186.$$

Следует, что X – рост студентов является непрерывной с.в. При более точном измерении роста значения с.в. X обычно не повторяется и может отличиться друг от друга на несколько миллиметров. Вероятность наличия на Земле двух человека с одинаковым ростом, например, $\sqrt{3} \approx 1{,}732050808...$ метров, равна нулю.

Отсюда следует, что $x_{\min} = 153,\ x_{\max} = 186$; в соответствии с формулой Стерджесса, при $n = 30$, находим длину частичного интервала разбиения:

$$h = \frac{186-153}{1+\log_2 30} = \frac{33}{1+(3{,}322)\cdot \lg 30} \approx \frac{33}{5{,}907} \approx 5{,}59.$$

Если примем за $h = 6$, тогда $x_1 = x_{нач} = 153 - \frac{6}{2} = 150.$ Все исходные данные разбиваем на 6 интервалов (при $m = 1+\log_2 30 \approx 6$): $I_1 = [150{,}156);\ I_2 = [156{,}1162); \cdots, I_6 = [180{,}186]$;

Подсчитав общее число студентов $n_j; (j = 1,2,\cdots,6)$, попавших в каждый из полученных промежутков, получим интервальный статистический ряд:

Рост	[150-156)	[156-162)	[162-168)	[168-174)	[174-180)	[180-186)
Частота	4	5	6	7	5	3
Частость	0,13	0,17	0,20	0,23	0,17	0,10

Одним из способов статистической обработки вариационного ряда является построение эмпирической функции распределения.

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X; n_x – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака $X < x, x \in \Re$, а n – общее число наблюдений (объем выборки).

Эмпирической (статистической) функцией распределения называется функция, $\Phi_n^{\bullet}(x)$ определяющая для каждого значения x частость события $\{X < x\}$:

$$\Phi_n^{\bullet}(x) = p^{\bullet}\{X < x\} = \frac{n_x}{n}. \tag{2}$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки, интегральную функцию $\Phi_X(x)$ распределения генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения.* Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция

(3) $$\Phi_X(x) = P\{X < x\}$$

- определяет вероятность события $\{X < x\}$, а эмпирическая функция $\Phi_n^\bullet(x)$, определяет относительную частоту этого же события.

Очевидно, что функция $\Phi_n^\bullet(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и истинная функция $\Phi_X(x)$ (см.Т.3). Другими словами, числа $\Phi_n^\bullet(x)$ и $\Phi_X(x)$ мало отличаются одно от другого. Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции $\Phi_X(x)$ – -распределения генеральной совокупности. Такое заключение подтверждается и тем, что $\Phi_n^\bullet(x)$ обладает всеми свойствами $\Phi_X(x)$. Действительно, из определения функции $\Phi_n^\bullet(x)$ вытекают следующие ее свойства:

1. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0,1];
2. $\Phi_n^\bullet(x)$ – неубывающая функция;
3. Если x_1 – наименьшая варианта, то $\Phi_n^\bullet(x) = 0$ при $x \le x_1$; и если x_n – наибольшая варианта, то при $x > x_n$, $\Phi_n^\bullet(x) = 1$.

На основании теорем ЗБЧ при увеличении числа n наблюдений (опытов) относительная частота события $\{X < x\}$ приближается к истинной вероятности этого события.

Эмпирическая функция распределения $\Phi_n^\bullet(x)$ является как бы «*оценкой*» вероятности события $\{X < x\}$, т.е. оценкой теоретической функции распределения $\Phi_X(x)$ с.в. $X < x$.

Таким образом, можно заключить, что имеет место утверждение,

Пусть $\Phi_X(x)$ ***является теоретическая функция распределения случайной величины*** $X < x$***, а*** $\Phi_n^\bullet(x)$ ***её эмпирической функцией распределения. Тогда для любого*** $\varepsilon > 0$ ***справедливо предельное соотношение***

(4) $$\lim_{n\to\infty} P\{|\Phi_n^\bullet(x) - \Phi(x)| < \varepsilon\} = 1.$$

Пример 5. В условиях примера 3, и используя полученные результаты, построим эмпирическую функцию $\Phi_n^\bullet(x)$.

Решение. В нашем случае по условию $n = 10$. В целях наглядности решения примера приведём ещё раз полученную таблицу относительных частот

x_j	0	1	2	3	4	5
$p_j^\bullet$	1/10	2/10	1/10	1/10	2/10	3/10

где $\sum p_j^\bullet = 1$. Контроль.

Поэтому $\Phi_{10}^\bullet(x) = \dfrac{0}{10} = 0$ при $x \le 0$ (наблюдений меньше 0 отсутствует);

$\Phi_{10}^\bullet(x) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ при $0 < x \le 1$ (здесь по таблице $n_X = 1$). $\Phi_{10}^\bullet(x) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{10} = 0{,}3$ при $1 < x \le 2$ (здесь $n_X = 3$) и т.д. Таким образом, получаем

$$\Phi_{10}^{\bullet}(x)=\begin{cases}0; & \text{при } -\infty < x \le 0,\\ 0{,}1; & \text{при } \ 0 < x \le 1,\\ 0{,}3; & \text{при } \ 1 < x \le 2,\\ 0{,}4; & \text{при } \ 2 < x \le 3,\\ 0{,}5; & \text{при } \ 3 < x \le 4,\\ 0{,}7; & \text{при } \ 4 < x \le 5,\\ 1; & \text{при } \ 5 < x + \infty.\end{cases}$$

График эмпирической функции распределения имеет вид:

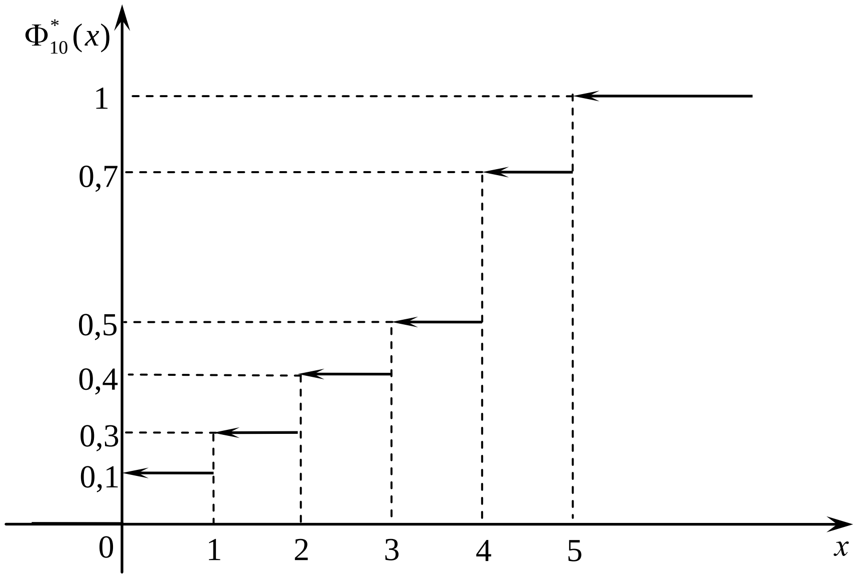


Рис. 77

5. Графическое изображение статистического распределения, полигон и гистограмма.

В целях наглядности изучения статистического распределения изображают (строят) различные графики в виде так называемых полигона и гистограммы. Полигон, как правило, служит для изображения дискретного (т.е. варианты отличаются друг от друга на постоянную величину) статистического ряда.

Полигоном частот называют ***ломаную***, построенную путём последовательного соединения отрезками точек (x_1,n_1), $(x_2,n_2),\cdots,(x_k,n_k)$ на плоскости $X0Y$. Для построения *полигона частот* на оси абсцисс OX откладывают значения вариантов x_j, а на оси ординат OY соответствующие им частоты n_j; $j=1,2,\cdots,k$. Точки (x_j,n_j) соединяют слева направо отрезками прямых и получают *полигон частот*.

Полигоном относительных частот называют ***ломаную***, построенную путём последовательного соединения отрезками точек $(x_1,p_1^{\bullet})$, $(x_2,p_2^{\bullet}),\cdots,(x_k,p_k^{\bullet})$ на плоскости $X0Y$. Для построения *полигона относительных частот* на оси абсцисс OX откладывают значения вариантов x_j, а на оси ординат OY соответствующие им относительные частоты $p_j^{\bullet}$; $j=1,2,\cdots,k$. Точки $(x_j,p_j^{\bullet})$ соединяют слева на право отрезками прямых и получают *полигон относительных частот*.

Пример 6. Для примера 3, полигон относительных частот изображен на чертеже 78. по таблице

x_j	0	1	2	3	4	5
$p_j^{\bullet}$	1/10	2/10	1/10	1/10	2/10	3/10

где $\sum p_j^{\bullet} = 1$. Контроль.

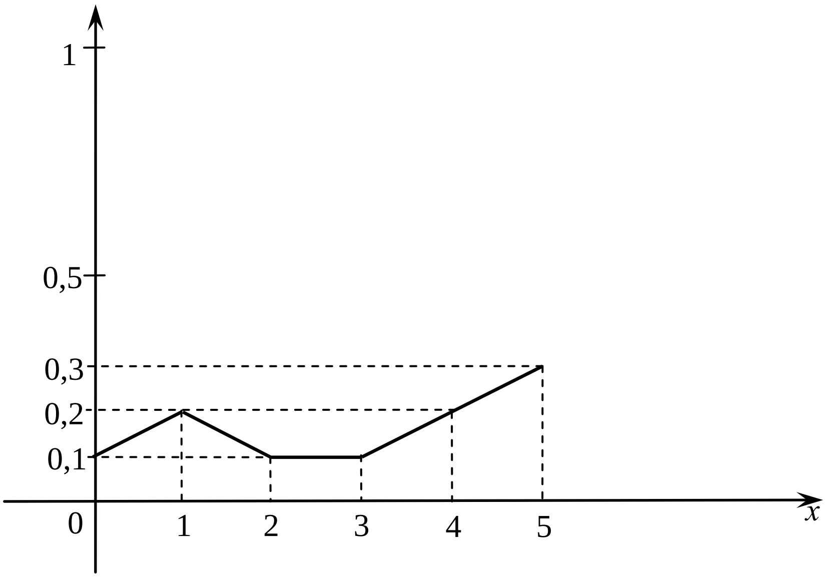


Рис.78.

Задание. Построить для этого же примера полигон частот на основании таблицы

x_j	0	1	2	3	4	5
n_j	1	2	1	1	2	3

где $\sum n_j = 10$. Контроль.

Сравнение этих двух графиков показывают, что ординаты полигона частот может быть достаточно «*высоким*», причем сумма координат равна числу выборке n. Ординаты полигона относительных частот ограничены сверху единичной прямой, причём сумма их координат (ординат) равна 1. Как бы во втором случае происходит «*нормировка*» графика.

Для непрерывного распределения признака (т.е. значения варианты могут отличиться один от другого на сколь угодно, малую величину) можно построить *полигон частот*, взяв середины интервалов в качестве значений $x_1, x_2, \cdots, x_k$. В этих случаях обычно строят *гистограмму частот,* а также *гистограмму относительных частот*

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{n_j}{h} = h_j$ – *плотность частоты*.

Гистограммой относительной частоты называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{p_j^{\bullet}}{h} = \frac{n_j/n}{h} = h_j^{\bullet}$ – *плотность относительной частоты*.

На основании этих определений, легко заметить, что:

1. *Площадь гистограммы частот $S_{гч}$ равна объёму выборки n, т.е.*

(5) $$S_{гч} = \sum h_j \cdot h = \sum n_j = n\,.$$

2. *Площадь гистограммы относительных частот* $S_{гоч}$ *равна единице, т.е.*

(6) $$S_{гоч} = \sum h_j^{\bullet} \cdot h = \sum p_j^{\bullet} = 1\,.$$

Пример 7. В условиях примера 4 рассмотрим гистограмму частот и гистограмму относительных частот.

Решение. В примере 4 длина интервала равна $h = 6$, и нами была составлена статистическая таблица распределения

Рост	[150-156)	[156-162)	[162-168)	[168-174)	[174-180)	[180-186)
Частота	4	5	6	7	5	3
Частость	0,13	0,17	0,20	0,23	0,17	0,10

На основании этой таблицы находим высоты $h_j^{\bullet}$ прямоугольников:

$$h_1^{\bullet} = \frac{0{,}13}{6} \approx 0{,}022; \quad h_2^{\bullet} = \frac{0{,}17}{6} \approx 0{,}028; \quad h_3^{\bullet} = \frac{0{,}20}{6} \approx 0{,}033;$$

$$h_4^{\bullet} = \frac{0{,}23}{6} \approx 0{,}038; \; h_5^{\bullet} = \frac{0{,}17}{6} \approx 0{,}028; \; h_6^{\bullet} = \frac{0{,}10}{6} \approx 0{,}017;$$

Гистограмма относительных частот изображена на рис. 79.

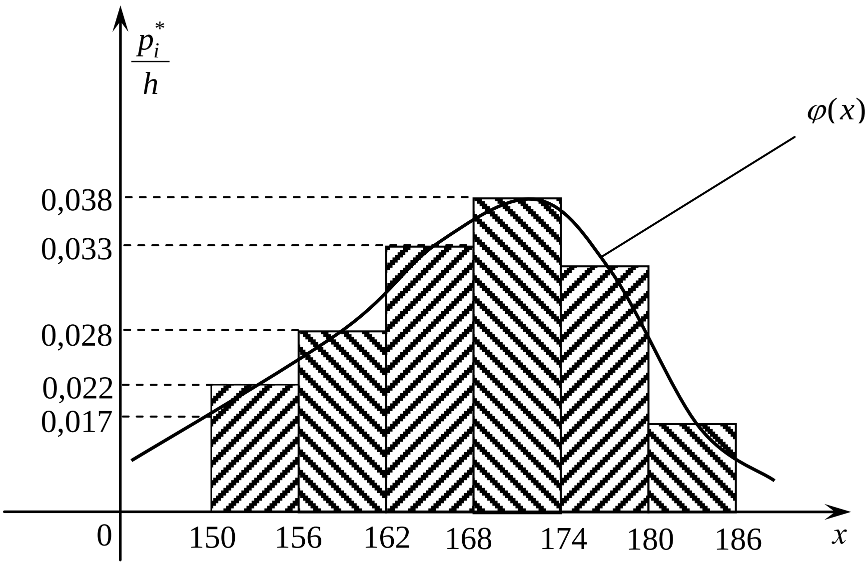


Рис. 79

Заметим, что гистограмма относительных частот является статистическим аналогом дифференциала функции распределения плотности $\varphi(x)$ с.в. X. Сумма площадей прямоугольников равна единице.

$$\sum_{j=1}^{6} h_j^{\bullet} \cdot h = \sum_{j=1}^{6} p_j^{\bullet} = 1\,,$$

что соответствует условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1 \qquad \text{(контроль)}$$

для плотности вероятностей $\varphi(x)$. Кривая на рисунке 79 выражает и плотность вероятностей $\varphi(x)$.

Если соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой, то получим полигон того же распределения. (Самостоятельно убедитесь в этом)

Задание. На основании таблицы примера 7 и формулы $\frac{n_j}{h} = h_j$

1. Найдите значения чисел h_j; $j = 1, 2, \cdots, 6$.
2. Изобразите гистограмму частот

Упражнение. Дана таблица измерения некоторого измерительного процесса

Интервал длиною $h = 5$	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
Частота интервала n_j	4	6	16	36	24	10	4
Плотность частоты $\frac{n_j}{h} = h_j$	0,8	1,2	3,2	7,2	4,8	2,0	0,8

1. Вычислить объём выборки n,

2. Найти численные значения высот $h_j^{\bullet}$ и $p_j^{\bullet}$,

3. Постройте геометрическое изображение гистограммы частот и относительных частот.

6. Числовые характеристики статистического распределения

Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак. Естественно возникает задача оценки параметров, которыми определяется это распределение. Например, если априори (до эксперимента) известно, что изучаемый признак в генеральной совокупности распределен нормально, то необходимо оценить (приближенно найти) математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение. Если же есть основания считать, что признак имеет, например распределение Пуассона, то необходимо оценить параметр λ, которым это распределение определяется.

Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки, например, значения количественного признака $x_1, x_2, \dots, x_n$, полученные в результате наблюдений (***здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми***). Через эти данные можно определить ряд числовых характеристик, аналогичным тем, что в теории вероятностей определялись для случайных величин.

Предположим, что статистическое распределение выборки объёма n (таблица) имеет вид:

x_j	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_j	n_1	n_2	$\cdots$	n_k
$p_j^{\bullet}$	n_1/n	n_2/n	$\cdots$	n_k/n

Выборочным средним $\bar{x}_b$ (или математическим ожиданием выборки) называется среднее арифметическое всех значений выборки:

(7) $$\bar{x}_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot n_j$$

Выборочное среднее с учётом значения относительной частоты можно записать и так:

(8) $$\bar{x}_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot p_j^{\bullet}$$

Для обозначения выборочного среднего используют: $\bar{x}_b, M^{\bullet}(X), m_x^{\bullet}$.

Следует отметить, что в случае интервального статистического ряда в равенстве (7) в качестве x_j берут середины его интервалов, а в качестве n_j – соответствующие им частоты.

Выборочной дисперсией D_b называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\bar{x}_b$, т.е.

(9) $$D_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j - m_b^{\bullet})^2 n_j,$$

или, с учётом выборочной относительной частоты имеем

(10) $$D_b = \sum_{j=1}^{k} (x_j - m_b^{\bullet})^2 p_j^{\bullet}.$$

Ввиду того, что наблюдения проводятся независимые, можно доказать вычислительную формулу, где

(11) $$D_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j^2 \cdot n_j - \ (m_b^{\bullet})^2 = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \cdot p_j^{\bullet} - (m_b^{\bullet})^2.$$

или $D_b = \bar{x}_b^2 - (\bar{x}_b)^2$.

Следует отметить, все основные свойства математического ожидания и дисперсии, рассмотренные ранее (см. Т.8.) сохраняются.

Выборочное среднеквадратическое отклонение выборки определяется формулой

(12) $$\sigma_b = \sqrt{D_b}\ .$$

Особенность выборочного среднеквадратичного отклонения σ_b состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и изучаемый признак.

При решении практических задач используется и величина

(13) $$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{k} (x_j - m_b^{\bullet})^2 \cdot n_j = \frac{n}{n-1} \cdot D_n.$$

Величина S^2 называется исправленной выборочной дисперсией, а величина

(14) $$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_b}$$

- называется *исправленным выборочным средним квадратическим отклонением.*

Для непрерывно распределённого признака формулы для выборочных средних будут такими же, но за значения последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_k$ следует брать не концы промежутков, $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \cdots$, а их середины $\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \cdots$.

В качестве описательных характеристик вариационного ряда $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}\}$ или полученного из него статистического распределения выборки (таблицы) используется медиана, мода, размах выборки (вариации) и т.д.

Размахом вариации называется число, $R = x_{(n)} - x_{(1)}$, где $x_{(1)} = \min\limits_{1\le j\le n} x_j$; $x_{(n)} = \max\limits_{1\le j\le n} x_j$ или $R = x_{\max} - x_{\min}$; где $x_{\max}$ – наибольший, $x_{\min}$ – наименьший вариант статистического ряда.

Модой $M_c^{\bullet}$ вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Медианой $M_0^{\bullet}$ вариационного ряда называется значение признака (с.в. X), приходящееся на середину ряда, при этом

$$M_c^{\bullet} = \begin{cases} \dfrac{x_{(l)} + x_{(l+1)}}{2}; & \text{если } n = 2l, \\ x_{(l+1)}; & \text{если } n = 2l+1. \end{cases} \qquad (15)$$

Пример 8. По условиям примера 3 найти характеристики выборки результаты тестирования десяти абитуриентов.

Решение. Сначала приведём полученные таблицы частоты и относительные частоты (см. решение примера 3) из примера 3:

x_j	0	1	2	3	4	5
n_j	1	2	1	1	2	3

где $\sum n_j = 10$. Контроль.

x_j	0	1	2	3	4	5
$p_j^{\bullet}$	1/10	2/10	1/10	1/10	2/10	3/10

где $\sum p_j^{\bullet} = 1$. Контроль.

На основании определений, таблиц и формулы (7)-(15) соответственно получим:

1. $\bar{x}_b = M^{\bullet}(X) = \dfrac{1}{10}\cdot(0\cdot1 + 1\cdot2 + 2\cdot1 + 3\cdot1 + 4\cdot2 + 5\cdot3) = 3,$
2. $D_b = \dfrac{1}{10}\cdot[(0-3)^2\cdot1 + (1-3)^2\cdot2 + \cdots + (5-3)^2\cdot3] = 3{,}2,$
3. $\sigma_b = \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}7888543,$
4. $S^2 = \dfrac{10}{9}\cdot 3{,}2 = 3{,}355555$
5. $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{3{,}3555555} \approx 1{,}8318175$
6. $R = 5 - 0 = 5$
7. $M_0^{\bullet} = 5,$
8. $M_c^{\bullet} = \dfrac{3+4}{2} = 3{,}5;\ \ n = 10,\ k = 5.$

Упражнение. На одном из телефонных станции города «П» производились наблюдения за количеством неправильных соединений в минуту.

Результаты наблюдений в течение одного часа представлены в виде статистического распределения.

x_j	0	1	2	3	4	5	6
n_j	8	17	16	10	6	2	1

$p_j^\bullet$	0,133	0,283	0,267	0,167	0,100	0,033	0,017

1. а) построить полигоны частот и относительных частот.

б) построить гистограммы частот и относительных частот.

2. Найти значения выборочные среднее и дисперсию. Сравните распределение относительной частоты с распределением Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{e^{-a}\lambda^m}{m!}; \quad a = m_X^\bullet .$$

Ответы: $\bar{x}_b = m_b^\bullet = 1{,}983 \approx 2$; $D_b = 1{,}949 \approx 1{,}95$. $\sum p_j^\bullet = 1$,

$$p_1 = \frac{e^{-2}2^0}{0!} \approx 0{,}135, \quad p_2 = \frac{e^{-2}2^1}{1!} \approx 0{,}270, \quad p_3 = \frac{0{,}135\cdot 2^2}{2!} \approx 0{,}270, \quad p_4 = \frac{e^{-2}2^3}{3!} \approx 0{,}180,$$

$$p_5 = \frac{e^{-2}2^4}{4!} \approx 0{,}090, \quad p_6 = \frac{e^{-2}2^5}{5!} \approx 0{,}036, \quad p_7 = \frac{e^{-2}2^6}{6!} \approx 0{,}017 .$$

3. Проверьте равенство $\sum p_j = 1$ и убедитесь, что с.в. X – количество неправильных соединений имеет фактически пуассоновское распределение.

<u>Тема19.</u> Элементы теории оценок и проверки гипотез

1. Оценки параметров распределения

1.1 Понятие оценки параметров

Пусть рассматривается случайная величина X с некоторым законом распределения. По виду статистического распределения (таблицы распределения) можно строить гипотезы об истинном характере распределения величины X. Например, построив гистограмму, естественно предположить, что распределение величины X подчиняется определённому (нормальному или равномерному и т.д.) закону.

На практике, в целом, редко встречается такое положение, когда изучаемый закон распределения неизвестен *полностью.* Чаще всего дело обстоит следующим образом, что ***вид*** закона распределения заранее (из каких-либо теоретических соображений) известен. Требуется найти лишь некоторые ***параметры***, от которых закон зависит. Например, если распределение происходит по закону Пуассона

$$P\{X = m\} = \frac{e^{-a}a^m}{m!},$$

то следует определить параметр a, а если по нормальному закону, то нужно определить параметры a и σ. Впрочем, в некоторых задачах и сам вид закона распределения несущественен, а требуется только его числовые характеристики. Во всех подобных случаях можно обойтись сравнительно небольшим числом - порядка одного или нескольких десятков наблюдений.

Предположим, что изучается случайная величина X с некоторым законом распределения, зависящим от одного или нескольких параметров.

Напомним, что $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – случайные величины, полученные в результате n опытов (наблюдений), при этом: X_1 – результат первого наблюдения, X_2 – результат второго наблюдения и т.д., при этом каждая с.в. X_j, $j = 1,2,\cdots,n$ имеет такое же распределение как X : конкретная выборка $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ это значения (реализация) независимых случайных величин $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

Статистической оценкой $\tilde{\theta}_n$ (далее просто оценкой - оценкой $\tilde{\theta}$) параметра θ теоретического распределения называющего приближённое значение, зависящее от данных (свойства) выборки.

Для того чтобы статистические оценки давали «***хорошие***» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям.

1.2. Требования, предъявляемые к оценкам параметров

Предположим, что закон распределения с.в. X содержит некоторый параметр θ. Численное значение этого параметра не указано (хотя оно должно быть определённым числом). В связи с этим возникает задача: исходя из набора значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величины X, полученного в результате n независимых опытов, оценить значение параметра θ.

Любая оценка для θ - обозначим её буквой $\tilde{\theta}$ - является значением некоторой функции результатов наблюдений над случайной величиной X, т.е.

(1) $$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n).$$

Тем самым $\tilde{\theta}$ будет случайной величиной (принимающей свои значения в результате n опытов над X). Её закон распределения будет зависеть от закона распределения с.в. X, которому подчинена каждая из величин $X_1, X_2, \cdots, X_n$, а следовательно величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и от проводимого количества опытов n.

Естественно, к оценке величины $\tilde{\theta}$ предъявить ряд требований, которым она должна удовлетворять, чтобы быть «близкой» к истинному значению параметра θ, быть в каком-то смысле «доброкачественной, надёжной» оценкой. Попробуем сформулировать некоторые из этих требования:

1. Желательно, чтобы, при использовании величиной $\tilde{\theta}$ вместо θ, не происходили систематические ошибки ни в одну сторону (ни в сторону занижения, ни в сторону завышения), т.е. чтобы было

(16) $$M[\overline{\theta}] = \theta.$$

Оценка, удовлетворяющая условию (16) называется «***несмещённой***». Требование наличие несмещённой оценки особенно важно при «*малом*» числе испытаний (опытов).

Другими словами несмещённой называют статистическую оценку $\tilde{\theta}$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любом объёме выборки.

В случаях, когда $M\tilde{\theta}_n \to \theta$, то оценка $\tilde{\theta}_n$ называется «***асимптотически несмещённой***».

Смещённой называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

2. Желательно, чтобы с увеличением числа опытов n, значения случайной величины $\tilde{\theta}$ концентрировались около величины θ все более тесно, т.е. чтобы выполнялось предел

(17) $$D[\tilde{\theta}_n] \to 0,$$

когда $n \to \infty$.

Другими словами, оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ, называют «***состоятельной***», если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру θ:

$$\tilde{\theta}_n \xrightarrow[n \to \infty]{вер} = \theta;$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное равенство:

(18) $$\lim_{n \to \infty} P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1.$$

Равенство (18) означает, что с увеличением объёма выборки мы всё ближе приближаемся к истинному значению параметра θ; т.е. практически верно приближённое равенство $\tilde{\theta}_n \approx \theta$.

Теорема 19.1. *Если оценка* $\tilde{\theta}_n$ *параметра* θ *является несмещённой и выполняется равенство* $D[\tilde{\theta}_n] \to 0$, *то* $\tilde{\theta}_n$ *является* ***состоятельной оценкой****, т.е. справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1.$$

Доказательство. На основании неравенство Чебышева для с.в. $\tilde{\theta}_n$ для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D\tilde{\theta}_n}{\varepsilon^2}.$$

Поскольку, по условию (17) $D[\tilde{\theta}_n] \to 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} \ge 1$. Но вероятность любого события не превосходит единицы и, следовательно, выполняется предельное равенство (18), т.е. состоятельность оценки $\tilde{\theta}_n$ к параметру θ доказана.

Замечание. Свойство состоятельности обязательно для любого правила оценки (несостоятельные оценки не используются).

Однако было бы ошибочным считать, что несмещенная оценка всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. Действительно, возможные значения $\tilde{\theta}$ могут быть сильно рассеяны вокруг своего среднего значения, т. е. дисперсия $D[\tilde{\theta}]$ может быть значительной. В этом случае, найденная по данным одной выборки оценка, например $\tilde{\theta}_1$, может оказаться весьма удаленной от среднего значения $\overline{\theta}$, а значит, и от самого оцениваемого параметра θ; приняв $\tilde{\theta}_1$ в качестве приближенного значения θ, мы допустили бы большую ошибку. Если же потребовать, чтобы дисперсия $\overline{\theta}$ была малой, то возможность допустить большую ошибку будет исключена. По этой причине к статистической оценке предъявляется требование «***эффективности***».

Несмещённая оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется ***эффективной,*** если она среди всех возможных несмещённых оценок параметра θ, имеет наименьшую дисперсию, т.е. оценка $\tilde{\theta}_n$ эффективна, если ее дисперсия ***минимальна.***

Эффективную оценку в ряде случаев можно вычислять, на основании формулы (неравенство) Рао – Крамера:

$$D\tilde{\theta}_n \ge \frac{1}{n \cdot I(\theta)},$$

где $I(\theta)$ – информация Фишера, определяемая формулами:

$$I(\theta) = M\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)\right]^2 = \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{p'_\theta(x_j,\theta)}{p(x_j,\theta)}\right]^2 \cdot p(x_j,\theta);$$

в дискретном случае, где $p(x,\theta) = P(X = x)$, а в непрерывном случае

$$I(\theta) = M\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)\right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\varphi'_\theta(x,\theta)}{\varphi(x,\theta)}\right]^2 \cdot \varphi(x,\theta);$$

где $\varphi(x,\theta)$ – плотность распределения непрерывной случайной величины X.

Эффективность оценки определяется равенством (формулой):

$$\text{Э}ff\tilde{\theta}_n = \frac{D\tilde{\theta}_n^{\text{Э}}}{\mathrm{D}\tilde{\theta}_n},$$

где $\tilde{\theta}_n^{\text{Э}}$ – эффективная оценка, а $D\tilde{\theta}_n^{\text{Э}} = \dfrac{1}{n \cdot I(\theta)}$. Чем ближе $\text{Э}ff\tilde{\theta}_n$ к единице, тем эффективнее оценка $\tilde{\theta}_n$. Если $\text{Э}ff\tilde{\theta}_n \to 1$ при $n \to \infty$, то оценка называется ***асимптотически эффективной.***

Следует отметить, что на практике не всегда удаётся удовлетворить всем перечисленным выше требованиям (несмещённость, состоятельность, эффективность), и поэтому приходится ограничиться (довольствоваться) оценками, не обладающими сразу всеми тремя свойствами. Тем не менее, выполнение всех трёх свойств, как правило, обеспечивает однозначность оценки.

1.3. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии, оценки параметров нормального распределения

Предположим, что заранее известен вид теоретического распределения интересующего нас признака X, но параметры этого распределения не известны и должны быть найдены по данным выборки. Например, если известно, что интересующая нас величина распределена по нормальному закону, то нужно определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (или дисперсии). Другими словами неизвестными параметрами являются: м.о. $a = MX = m_X$ и дисперсия $D = DX$. Требуется их найти. Поскольку в качестве оценки обычно ищут количество точек характеризующих искомое число (точку на координатной оси), то такие оценки называют ***точечными.***

Статистика (число), используемая в качестве приближённого значения неизвестного параметра генеральной совокупности, называется её *точечной оценкой.* Другими словами, точечная оценка характеристики генеральной совокупности – это число, определяемое по выборке, т.е. точечная оценка, определяется *одним числом* (например, в качестве точечной оценки неизвестной вероятности p в случае биномиального распределения берут $W = m/n -$ относительную частоту).

Пусть $x_1, x_2, \cdots, x_n -$ выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за с.в. X.

Чтобы подчеркнуть то, что величины $x_1, x_2, \cdots, x_n$ носят случайный характер перепишем их в виде последовательности случайных величин $X_1, X_2, \cdots, X_n$, т.е. под X_j будем подразумевать значение с.в. X в $j-$м опыте. Случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n$ можно рассматривать как n независимых «***экземпляров***» величины X. Поэтому имеем: $MX_1 = MX_2 = \cdots = MX_n = a$ и $DX_1 =$
$= DX_2 = \cdots = DX_n = DX$. Имеет место утверждение

Теорема 19.2. *Пусть* $X_1, X_2, \cdots, X_n -$ *выборка из генеральной совокупности и* $MX_j = MX = a;\ DX_j = DX\ \ (j = \overline{1,n})$. *Тогда выборочное среднее*

$$\overline{X}_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

есть несмещённая и состоятельная оценка математического ожидания $MX = a$.

Доказательство. Найдём математическое ожидание величины $\overline{X}_b$. На основании свойства м.о. имеем:

$$M\overline{X}_b = M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a = \frac{a}{n}\cdot n = a.$$

Отсюда по определению (16) получаем, что $\overline{X}_b$ есть несмещённая оценка MX.
Далее, согласно теореме Чебышева для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$(19)\qquad \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Согласно условиям теоремы, равенство (19) можно переписать в следующем виде:

(20) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\overline{X}_b - MX\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

или, именно выполняется равенство (18) $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\overline{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1.$ Тем самым, согласно определению получаем, что $\overline{X}_b$ есть состоятельная оценка MX.

В статистике оценку математического ожидания принято обозначать: $\overline{X}$ или $\overline{X}_b$.

На практике во всех случаях в качестве оценки математического ожидания используется среднее арифметическое, если она неизвестно.

Теперь покажем, что при нормальном распределении именно оценка $\overline{X}_b$ будет эффективной.

Теорема 19.3. *Пусть с.в.* $X = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ *– выборка из генеральной совокупности и* $MX_j = MX = a, DX_j = DX$, D_b *её выборочная дисперсия. Тогда справедливо равенство*

(21) $$DX = \frac{n}{n-1} \cdot MD_b.$$

Доказательство. Покажем, что имеет место равенство (по поводу обозначений выборочных параметров см. равенства (7) - (11) в пункте 18.6.). На основании свойства м.о. и определения.

$$D_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2 = \overline{X}^2 - (\overline{X})^2;\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j;\ \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2,,$$

вычислим величину MD_b, имеем

(22) $$MD_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2 = M\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2\right] =$$

$$= M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2\right) - \frac{1}{n^2} M\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M(X_j^2) - \frac{1}{n^2} \cdot M\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2.$$

Далее, используем известное равенство

(23) $$\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i z_j,$$

где во втором слагаемом суммирование ведётся по $i \neq j$, а количество слагаемых равняется числу $C_n^2 = n(n-1)/2$. Согласно (22) и (23) после стандартных упрощений получим

$$MD_b = \frac{n-1}{n^2}\left[MX_1^2 + MX_2^2 + \cdots + MX_n^2\right] - .$$

$$-\frac{2}{n^2}\left[(MX_1 \cdot MX_2) + (MX_1 \cdot MX_3) + \cdots + (MX_{n-1} \cdot MX_n)\right].$$

Отсюда, согласно условиям теоремы получим

$$MD_b = \frac{n-1}{n^2} \cdot n \cdot MX^2 - \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}(MX)^2 =$$

$$= \frac{n-1}{n}[MX^2 - (MX)^2] = \frac{n-1}{n} \cdot DX.$$

Утверждение доказано. Из равенства (21) следует, что $MD_b \neq DX$, т.е. ***выборочная дисперсия является <u>смещённой</u> оценкой дисперсии*** DX. Поэтому выборочную дисперсию, D_b поправляют, путём умножения на число $n/(n-1)$. Тогда получается формула

$S^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot D_b$. см. 18.6, равенство (13). Имеет место следствие.

Следствие. В условиях теорем 19.2 и 19.3.справедливо равенство $MS^2 = DX$.
Действительно,

$$MS^2 = M\left(\frac{n}{n-1}\cdot D_b\right) = \left(\frac{n}{n-1}\cdot MD_b\right) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}DX = DX. \quad (24)$$

Отсюда согласно определению получаем, что S^2 – является несмещённой оценкой величины DX.

Задание. Докажите ***состоятельность*** оценки S^2.

Следует отметить, что при больших значениях n разница между D_b и S^2 очень мала и они практически равны, поэтому выборочную оценку S^2 применяют при оценки дисперсии при малых (небольших) выборках, обычно при $n \le 30$.

Ниже сформулируем без доказательства два утверждения о состоятельности некоторых оценок.

Утверждения. 1. Относительная частота $W_n(n_A) = n_A/n$ появления события A в n независимых испытаниях является ***несмещённой состоятельной и эффективной оценкой*** неизвестной вероятности $p = P(A)$ случайного события A.

Это утверждение является непосредственным следствием ЗБЧ Бернулли.

2. Эмпирическая функция выборки $\Phi^{\bullet}(x)$ является несмещённой состоятельной оценкой функции распределения $\Phi(x)$ случайной величины X.

Пример 9. Пусть проводится повторное независимое испытание n раз (например, подбрасывание монеты) по схеме Бернулли. Вероятность наступления событие A (например, выпадения герба при каждом подбрасывание) равна $p = P(A)$. В ходе опыта было обнаружено, что событие A (выпадение герба) наступило n_A раз при n испытаниях. Показать несмещённость и состоятельность оценки $\tilde{\theta} = n_A/n$ вероятности $\theta = p$ наступления событие A (выпадение герба) в каждом опыте.

Решение. Число «**успехов**» n_A имеет распределение Бернулли. Тогда для построения точечной оценки рассмотрим случайную величину

$$\sum_{j=}^{n} X_j\,,$$

являющейся суммой индикаторов испытаний. Тогда математическое ожидание и дисперсия этого распределения (см. теорему Бернулли) имеют вид $M(n_A) = np;\ D(n_A) = npq$ при этом $p + q = 1$. Следовательно,

$$M\tilde{\theta} = M\left(n_A/n\right) = \frac{1}{n}\cdot M(n_A) = \frac{1}{n}\cdot np = p\,,$$

т.е. $\tilde{\theta} = \dfrac{n_A}{n} \Rightarrow p \approx \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ есть несмещённая оценка. Далее проверим эту оценку на состоятельность:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j,$$

На основании свойства м.о. и теоремы Чебышева, согласно которой среднее арифметическое системы случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\theta} = p.$

В следующем пункте рассмотрим наиболее распространённые методы получения точечных оценок параметров распределения.

2. Методы нахождения точечных оценок параметров распределения

В статистике наиболее часто применяемые методы нахождения точечных оценок параметров распределения являются:

- метод моментов (коротко (ММ);

- метод максимального правдоподобия (коротко - ММП);

- метод наименьших квадратов (коротко МНК).

2.1. Метод моментов (ММ)

Суть метода моментов для нахождения точечных оценок неизвестных параметров заданного распределения состоит в том, что *приравнивается теоретические моменты распределения соответствующим эмпирическим моментам, найденные по выборке.*

Например, если распределение зависит от одного параметра θ (задан вид плотности распределения $\varphi(x,\theta)$), то для нахождения его оценки нужно решить относительно θ одно уравнение: $MX = \overline{X}_b$, где

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x,\theta)dx = f(\theta)$$

- есть функция от θ.

Если распределение зависит от двух параметров θ_1, θ_2, (например, вид плотности распределения $\varphi(x,\theta_1,\theta_2)$), то надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} MX = \overline{X}_b, \\ DX = D_b, \end{cases}$$

относительно параметров $\{\theta_1, \theta_2\}$.

И, наконец, если надо оценить n параметров $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$, то надо решить одну из систем вида:

$$\begin{cases} MX = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \\ MX^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2, \\ \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \\ MX^k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^k, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} MX = \overline{X}_b, \\ DX = D_b, \\ \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \\ M(X - MX)^k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X}_b)^k \end{cases} \qquad (26)$$

В этих системах мы видим, что присутствуют моменты до $k-$го порядков случайного события X и его центрированного, $\breve{X} = X - MX$.

Метод моментов является наиболее простым методом оценки параметров, и он был предложен в 1894г. Пирсоном. Оценки, получаемые методом моментов, обычно являются состоятельными, однако их эффективность часто меньше единицы.

Пример 10. Найдём оценки параметров нормального распределения с.в. X применяя метод моментов.

Решение. Пусть дана выборка $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Найти точечные оценки параметров $a = MX = \theta_1$ и $\sigma = \sqrt{DX} = \theta_2$. По методу моментов приравниваем их, соответственно, к выборочному среднему и выборочной дисперсии: $\nu_1 = MX -$ начальный момент первого порядка, $\mu_2 = DX -$ центральный момент второго порядка и получаем

$$\begin{cases} MX = \overline{x}_b, \\ DX = D_b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \overline{x}_b, \\ \sigma = \sqrt{D_b}. \end{cases}$$

Таким образом, искомые оценки параметров нормального распределения будут: $\overline{\theta}_1 = \overline{x}_b$ и $\overline{\theta}_2 = \sqrt{D_b}$.

2.2. Метод максимального правдоподобия (ММП)

Пусть $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за с.в. X, и пусть вид закона распределения случайной величины X, например, вид функции плотности $\varphi(x,\theta)$, известен, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон. Требуется по заданной выборке оценить параметр θ.

Метод максимального правдоподобия (ММП), предложен Р.Фишером в основе которого, лежит понятие так называемой функции «*правдоподобия*».

Функцией правдоподобия, построенная по выборке $x_1, x_2, \cdots, x_n$, называется функция, зависящая от аргумента θ и заданная в следующем виде:

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \varphi(x_1,\theta)\cdot\varphi(x_2,\theta)\cdot\ldots\cdot\varphi(x_1,\theta) = \prod_{j=1}^{n}\varphi(x_j,\theta). \tag{27}$$

Функция правдоподобия обладает свойством «*вполне мультипликативности*» по аргументам $x_1, x_2, \cdots, x_n$, равномерна относительно параметру θ, где $\varphi(x,\theta)$- плотность распределения с.в. X, в случаях, когда с.в. X является *непрерывной*. Если же с.в. X является *дискретной*, то функция правдоподобия определяется равенством

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = p(x_1,\theta)\cdot p(x_2,\theta)\cdot\ldots\cdot p(x_1,\theta) = \prod_{j=1}^{n} p(x_j,\theta), \tag{28}$$

где $p(x_j,\theta) = P\{X = x_j, \theta\}$.

Замечание. На основании этих определений следует, что *чем больше значение функции* $L(x,\theta)$, *тем вероятнее (правдоподобнее) появление чисел* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ в результате данного проводимого опыта (эксперимента) при фиксированном θ.

За точечную оценку параметра θ, *согласно ММП, берут такое его значение* $\tilde{\theta}$, *при котором функция правдоподобия достигает максимального своего значения.*

Такая оценка, называемая *оценкой максимальной правдоподобия,* является решением уравнения

$$\left.\frac{dL(x,\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 0. \tag{29}$$

Из курса математического анализа известно, что функции $L(x,\theta)$ и $\ln(L(x,\theta))$ достигают своего максимума при одном и том же значении θ (самостоятельно убедитесь в этом), то вместо отыскания максимального значения функции $L(x,\theta)$ ищут (что проще, где в правых частях равенств (27) и (28) каждое произведение превращается в сумму слагаемых) максимум функции $\ln(L(x,\theta))$.

Таким образом, для нахождения оценки максимального правдоподобия необходимо:

1. Решить уравнение правдоподобия

$$\left.\frac{d(\ln L(x,\theta))}{d\theta}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} = 0; \tag{30}$$

2. Следует отобрать то решение, которое обращает функцию $\ln(L(x,\theta))$ в максимум, при этом удобно использовать вторую производную: если

(31) $$\left.\frac{d^2(\ln L(x,\theta))}{d\theta^2}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} < 0,$$

то точкой максимума будет $\theta = \tilde{\theta}$.

В случаях, когда подлежат оценке несколько параметров $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ распределения, то оценки $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \cdots, \tilde{\theta}_n$ определяются решением системы уравнений правдоподобия;

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial \theta_1}\right|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial \theta_n}\right|_{\theta_n=\tilde{\theta}_n} = 0. \end{cases}$$

Пример 11. Найдём оценку параметра λ в распределения Пуассона методом математического правдоподобия.

Решение. В данном примере

$$P\{X = m = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Поэтому

$$p(x_j, \theta) = P\{X = x_j, \theta\} = \frac{\theta^{x_j} \cdot e^{-\theta}}{x_j!}, \text{ при } x_j \in Z_+ = \{1,2,3,\cdots\}.$$

Составляем функцию правдоподобия для дискретной случайной величины X: по формуле (28) имеем

$$L(x,\theta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\theta_j \cdot e^{-x_j}}{x_j!}.$$

Отсюда, после логарифмирования обе части равенства получим

$$\ln L(x,\theta) = -n \cdot \theta + \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \ln\theta - \ln[(x_1!)\cdot(x_2!)\cdot\cdots\cdot(x_n!)].$$

Обе части равенства продифференцируем по параметру θ, получим

$$\frac{d(\ln L(x,\theta))}{d\theta} = -n + \frac{1}{\theta} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Таким образом, уравнение правдоподобия имеет вид:

(32) $$\frac{d(\ln L(x,\theta))}{d\theta} = \left.\left(-n + \frac{1}{\theta}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\right|_{\theta=\tilde{\theta}} = 0.$$

Следовательно,

(33) $$\tilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \bar{x}_b.$$

А так как из (32) следует, что

(34) $$\left.\frac{d^2(\ln L(x,\theta))}{d\theta^2}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} = -\frac{1}{\tilde{\theta}^2}\sum_{j=1}^{n} x_j < 0,$$

то найденная оценка $\tilde{\theta} = \bar{x}_b$ является оценкой максимального правдоподобия. Итак, $\tilde{\theta} = \tilde{\lambda} = \bar{x}_b$.

2.3. Сглаживания экспериментальных зависимостей метод наименьших квадратов (МНК)

Пусть проводится некоторый опыт, целью которого является исследование зависимости определённой физической (экспериментальной) величины от другой (скажем y от x). Будем предполагать, что величины y и x связаны некоторой функциональной зависимостью $y = f(x)$. Необходимо определить вид этой зависимости, что и требуется из опыта.

Предположим вначале, что зависимость $y = f(x)$ известна и в результате опыта получен ряд экспериментальных точек (x_j, x_j). Обычно, эти точки не ложатся точно на графике нашей функции $y = f(x)$. Как правило, имеется некоторый разброс точек, полученных опытным путём от графика функции, т.е. обнаруживается случайные отклонения от данной функциональной зависимости. Эти отклонения связаны с неизбежными допустимыми ошибками при любом опыте. В связи с этим возникает естественный вопрос, «***не зная зависимости $y = f(x)$, как, наилучшим образом воспроизвести эту зависимость по результатам экспериментальных данных»***.

Простое соединение все экспериментальные точки некоторой кривой линией, являющейся графиком определённой функции, в общем случае лишено смысла. Потому, что вид этой зависимости будет меняться при разных сериях измерений, а в некоторых случаях её в принципе нельзя получать (несколько экспериментальных точек могут иметь одинаковые абсциссы и разные ординаты). В этом случае возникнет типичная задача для практики «***задача сглаживания экспериментальных зависимостей***», т.е. требуется найти функцию $y = f(x)$, чтобы она некоторым наилучшим образом отражала функциональную зависимость y от x, и вместе с тем были бы сглажены случайные, незакономерные отклонения измерений, связанные с неизбежными погрешностями самых измерений.

Обычно ситуация облегчается тем, что из теоретического соображения или из других соображений, связанных с существом рассматриваемой задачи, и даже по полученному экспериментальному материалу можно указать вид функциональной зависимости y от x (линейная, квадратичная, показательная и т.д.). Требуется только установить численные значения параметров этих зависимостей. Именно, далее задачу рационального выбора таких числовых параметров будем рассматривать. Ниже дадим кратко обоснование так называемого *метода наименьших квадратов* на примере нормально распределённых случайных величин.

Итак, пусть имеются результаты n независимых измерений - опытные точки (x_j, y_j); $j = \overline{1, n}$. Из теоретических или иных соображений, с точностью до количества (или других признаков) неизвестных параметров (здесь мы ограничимся двумя) α и β известна функциональная зависимость y от x в виде

$$y = f(x, \alpha, \beta)\,. \tag{35}$$

Экспериментальные точки уклоняются от этой зависимости вследствие неизбежных ошибок измерений. Как правило, эти ошибки распределены по нормальному закону. Рассмотрим некоторое значение независимой переменной x_j. Результат измерения может рассматриваться как нормально распределённая случайная величина ξ_j с математическим ожиданием $f(x_j \alpha, \beta)$ и соответствующим среднеквадратичным отклонением σ_j, характеризующим ошибку измерений. Дополнительно предположим, что «точность измерения во всех точках одинакова, то есть $\sigma_j = \sigma$; $j = \overline{1, n}$. Тогда плотность вероятности с.в. ξ_j имеет вид

$$f_{\xi_j}(y_j) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_j - f(x_j, \alpha, \beta))^2}{2\sigma^2}}; \; j = 1, 2, \cdots, n; \tag{36}$$

В результате получаем $n-$ мерную случайную величину $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, координаты которой независимы и плотности вероятности которых определении равенствами (36). Как было показано ранее, плотность распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотностей вероятности компонент:

$$f_{\{\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n}(y_j - f(x_j,\alpha,\beta))^2}{2\sigma^2}}. \tag{37}$$

Теперь для определения параметров α и β воспользуемся идеей метода максимального правдоподобия (ММП), согласно которой в эксперименте реализуются те значения компонент, при которых плотность вероятности системы (37), близка к максимальному значению. Учитывая специальный вид равенств (37), можно заметить, что она достигает максимума, когда показатель степени принимает максимальное значения. Отбрасывая отрицательный множитель $(-\frac{1}{2\sigma^2})$ приходим к задаче отыскания минимума выражения:

$$\sum_{j=1}^{n}[y_j - f(x_j, \alpha, \beta)]^2 \Rightarrow \min. \tag{38}$$

Поскольку минимизируется сумма квадратов разностей экспериментальных и теоретических значений функции (их обычно называют «***невязками***»), предложенную процедуру называют ***методом наименьших квадратов.***

Согласно теории дифференциального исчисления в принципе задача сводится к решению системы двух однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{j=1}^{n}[y_j - f(x_j, \alpha, \beta)]^2 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\beta}\sum_{j=1}^{n}[y_j - f(x_j, \alpha, \beta)]^2 = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Если функциональная зависимость (35) линейна относительно параметров α и β, то система уравнений (39) также будет линейной и её решение можно найти известными методами линейной алгебры.

Таким образом, в общем случае мы приходим к следующему выводу.

Метод нахождения оценки $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений выборочных данных от определяемой (искомой) оценки θ, называется методом наименьших квадратов.

Другими словами, в МНК требуется найти такое значение $\tilde{\theta}$, которое минимизировало бы сумму

$$H(\theta) = \sum_{j=1}^{n}(X_j - \theta)^2 \Rightarrow \min.$$

Следует отметить, что МНК является наиболее простым и практичным методом нахождения оценок параметра θ.

Пример 12. Проведена серия опытов по определению влияния дозы внесённых удобрений на повышение урожайности некоторой сельхоз культуры (например, пшеницы).

Соответствующие данные приведены в трёх столбцах таблицы, и пусть x выражает внесённую дозу удобрений в центнерах на гектар, y выражает прирост урожайности в центнерах с гектара

j	x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j \cdot y_j$
1	0,342	2,10	0,1170	4,41	0,718
2	0,417	4,70	0,1739	22,09	1,960
3	0,675	6,05	0,4556	36,60	4,084
4	0,867	8,65	0,7517	74,82	7,500
5	1,000	10,00	1,0000	100,00	10,000
6	1,158	12,60	1,3410	158,76	14,591
7	1,283	12,08	1,6461	145,93	15,499
8	1,500	14,68	0,2500	215,50	22,020
9	1,733	16,65	3,0033	277,22	28,854
10	2,008	19,25	4,0321	370,56	38,654
11	2,083	19,98	4,3389	399,20	41,618
12	2,242	23,20	5,0266	538,24	52,014
13	2,508	23,93	6,2901	572,64	60,016
$\frac{1}{13}\sum_{1}^{13}$	1,370	13,37	2,3405	224,31	22,887

Требуется, применяя метод наименьших квадратов подобрать линейную функцию f, выражающую y через x.

Решение. Предполагая, искомые величины связаны между собой линейной зависимостью $y = \alpha x + \beta$. Определим коэффициенты α и β на основании системы (39).

Система (39) в нашем случае принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \displaystyle\sum_{j=1}^{13} [y_j - (\alpha x_j + \beta)]^2 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} [y_j - (\alpha x_j + \beta)]^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\displaystyle\sum_{j=1}^{13} (y_j - \alpha x_j - \beta) \cdot x_j = 0, \\ -2\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (y_j - \alpha x_j - \beta) \cdot y_j = 0. \end{cases}$$

После раскрытия скобок и некоторых стандартных преобразований, для определения наших параметров α и β получим следующую систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{13} \displaystyle\sum_{j=1}^{13} x_j^2 \right) \cdot \alpha + \left(\dfrac{1}{13} \displaystyle\sum_{j=1}^{13} x_j \right) \cdot \beta = \left(\dfrac{1}{13} \displaystyle\sum_{j=1}^{13} x_j \cdot y_j \right), \\ \left(\dfrac{1}{13} \displaystyle\sum_{j=1}^{13} x_j \right) \cdot \alpha + \beta = \left(\dfrac{1}{13} \displaystyle\sum_{j=1}^{13} y_j \right). \end{cases}$$

Решая эту систему методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса), в итоге получим:

$$\alpha = 9{,}86;\ \beta = -0{,}14 \Rightarrow y = 9{,}86x - 0{,}14.$$

Замечание. Во многих приложениях также используется и другая зависимость: $y = \dfrac{\alpha}{x} + \beta$, также линейно е относительно параметров α и β. В этом случае задача легко может быть сведена к предыдущей заменой переменной: $z = \dfrac{1}{x}$.

Пример 13. Найдём оценку параметра λ распределения Пуассона методом наименьших квадратов.

Решение. Найдём точку минимума функции $H(\theta)=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\theta)^2$. Найдём $H'(\theta)$.

$$H'(\theta)=[H=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\theta)^2]'=\sum_{j=1}^{n}2(X-\theta)\cdot(-1);$$

Из уравнения $H'(\theta)=0$ находим критическую точку: $-2\sum_{j=1}^{n}(X-\theta)=0,$ т.е.

$$\sum_{j=1}^{n}X_j-\sum_{j=1}^{n}\theta=0\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}X_j=n\theta,$$

следовательно, $\theta_{\text{кр}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$. Поскольку

$$H''(\theta_{\text{кр}})=[-2\sum_{j=1}^{n}(X_j-\theta)]'\Big|_{\theta}=-2\sum_{j=1}^{n}(-1)=2n>0,$$

при любом значении θ, то

$$\theta_{\text{кр}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$$

будет точкой минимума функции $H(\theta)$. Таким образом, оценкой параметра λ в распределении Пуассона

$$P(m;\lambda)=\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!},\quad m=0,1,2,\cdots$$

в соответствии с МНК, является величина $\tilde{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$.

Задание. Докажите, что имеют место равенства: $M(\tilde{\theta})=\theta=\lambda,\ D(\tilde{\theta})=\frac{\theta}{n}.$

Задачи с указаниями.

1. Найти оценку параметра распределения Пуассона методом моментов.

Указание. Распределение Пуассона $P\{X=m\}=\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}$ содержит один параметр λ.

Для оценки его методом моментов запишем уравнение $MX=\bar{x}_b$. Отсюда следует, что $\lambda=\bar{x}_b$.

Следовательно, $\vec{x}_b=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\Rightarrow\tilde{\theta}=\lambda=\bar{x}.$

2. Пользуясь ММП, оценить вероятность, появление герба, если при десяти подбрасываниях монеты герб появился шесть раз.

Указание. В данном случае с.в. X является дискретной с законом распределения

x_j	1	0
p_j	p	1- p

Так как

$$p(x_j,\theta)=P\{X=x_j,\theta)=\begin{cases}p, & \text{если } x_j=1,\\ 1-p, & \text{если } x_j=0,\end{cases}$$

то функция правдоподобия имеет вид: $L=L(x,\theta)=\theta^6\cdot(1-\theta)^4$. Тогда $\ln L=6\cdot\ln\theta+4\ln(1-\theta)$, и уравнение правдоподобия

$$\left(\frac{6}{\theta}-\frac{4}{1-\theta}\right)\Big|_{\theta=\tilde{\theta}}=0\Rightarrow\tilde{\theta}=p^{\bullet}=0{,}6.$$

3. Пусть случайная величина X равномерно распределена со значениями в отрезке $<a,b>$, т.е. $X \approx \Re_{\{a,b\}}$. По выборке $x_1, x_2, \cdots, x_n$ оценить величины a и b методом моментов.

Указание. В этой задаче требуется оценить две величины θ_1 и θ_2, т.е. величины a и b, методом моментов. Как было показано ранее, (см. Т. 9.5) $MX = \dfrac{a+b}{2};\ DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}.$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} MX = \overline{x}_b, \\ DX = D_b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \overline{x}_b, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = \sigma_b^2. \end{cases}$$

Отсюда находим: $b = 2\overline{x}_b - a,\ (2\overline{x}_b - 2a)^2 = 12\sigma_b^2;$ т.е. $(\overline{x}_b - a)^2 = 3\sigma_b^2; \overline{x}_b - a = \pm\sqrt{3}\,\sigma_b,$ $\overline{x}_b = a + \sqrt{3}\,\sigma_b$ и, значит, $a = \overline{x}_b - \sqrt{3}\,\sigma_b,\ b = \overline{x}_b + \sqrt{3}\,\sigma_b$ (вариант $a = \overline{x}_b + \sqrt{3}\,\sigma_b,\ b = \overline{x}_b - \sqrt{3}\,\sigma_b$ из-за $a < b$ исключается). Таким образом, оценки величин a и b получены и таковы:

$$\tilde{\theta}_1 = \tilde{a} = \overline{x}_b - \sqrt{3}\,\sigma_b, \tilde{\theta}_2 = \tilde{b} = \overline{x}_b + \sqrt{3}\,\sigma_b.$$

Задание. Решая систему

$$\begin{cases} MX = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \overline{x}_b \\ MX^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 = \overline{x}_b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \overline{x}, \\ \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} = \overline{x}_b^2. \end{cases}$$

получить те же самые оценки.

Теперь, кратко остановимся на общий случай, когда рассматриваемая зависимость близка к некоторой функциональной зависимости, где входят семейство параметров больше чем два, т.е. функциональная зависимость имеет общий вид

(40) $$y = f(x, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots),$$

требуется подобрать значения параметров так, чтобы кривая (40) как можно меньше уклонялась от точек, полученных экспериментальным путём.

Решение этой задачи, например, методом наименьших квадратов (МНК) заключается в отыскании таких значений параметров, для которых выражение

(41) $$H(a,b,c,\cdots) = \sum_{j=1}^{n}[y_j - f(x_j, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots)]^2 \Rightarrow \min$$

принимает наименьшее значение. И здесь, задачу можно свести к решению системы уравнений

(42) $$\left.\frac{\partial H}{\partial \theta_1}\right|_{\theta_1 = \tilde{\theta}_1} = 0;\ \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right|_{\theta_2 = \tilde{\theta}_2} = 0;\ \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right|_{\theta_2 = \tilde{\theta}_2} = 0, \cdots$$

где число уравнений совпадает с числом неизвестных параметров.

В общем случае решить систему (42) при произвольной функции $f(\cdots)$ конечно невозможно; для практического приложения необходимо задать конкретный вид функции $f(\cdots)$. В ряде случаев функцию $f(\cdots)$ задают в виде многочлена

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^r,$$

где роль параметров играют коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$. В некоторых случаях $f(\cdots)$ выбирается как комбинация показательных функций

$$a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 z} + \cdots + a_k e^{\alpha_k z},$$

где какие-то из чисел a_j и α_j могут быть заданы заранее, в то время как другие неизвестны (эти неизвестные и играют роль параметров, подлежащих вычислению). Возможны, разумеется и другие формы задания функции $f(\cdots)$.

3. Понятие интервального оценивания параметров

Точечные оценки неизвестного параметра θ хороши в качестве первоначальных результатов обработки наблюдений. Их недостаток в том, что заранее (априори) неизвестно с какой точностью они характеризуют оцениваемый параметр. Поскольку точечные оценки параметров распределения являются случайными величинами и могут отличаться от оцениваемых параметров, то возникает необходимость в оценке точности и надёжности найденного. То есть требуется знать, к каким ошибкам может привести замена неизвестного параметра его точечной оценкой, и с какой уверенностью можно ожидать, что допущенные ошибки не выйдут за известные пределы.

С этой целью вводятся понятия «***интервальные оценки***», накрывающие неизвестный параметр, то есть по данным выборки указывается интервал, который с заданной и достаточно близкой к единице вероятностью γ_p обеспечивает верхнюю и нижнюю границу оценок. Обычно, величину γ_p называют доверительной вероятностью или надёжностью оценки и определяют формулой:

(43) $$\gamma_p = P\left\{\theta \in (\tilde{\theta} - \varepsilon; \tilde{\theta} + \varepsilon)\right\} = P\left\{ |\theta - \overline{\theta}| < \varepsilon \right\}.$$

Число $\varepsilon > 0$ характеризует точность оценки: чем меньше разность $|\theta - \overline{\theta}|$, тем точнее оценка. Для выборок небольшого объёма вопрос о точности оценок очень важен.

Оценка неизвестного параметра называется ***интервальной***, если она определяется двумя числами – началом и концом интервала. Задачу в общем случае можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, относительно которого с заранее выбранной вероятностью γ_p можно сказать, что внутри этого интервала находится точное значение оцениваемого параметра.

Величина γ_p выбирается заранее, её выбор зависит от конкретно решаемой задачи. Например, степень доверия авиапассажира к надёжности самолёта, естественно, должно быть выше степени доверия покупателя к надёжности бытовых приборов.

Надёжность γ_p принято выбирать равной числам : 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999. Тогда практически достоверно нахождение параметра θ в доверительном интервале $(\tilde{\theta} - \varepsilon; \tilde{\theta} + \varepsilon)$.

4. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

В этом разделе построим доверительные интервалы для параметров нормального распределения, т.е. когда выборка производится из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с параметрами $MX = a$ и σ.

4.1. Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

Пусть с.в. $X \approx N_{(a,\sigma)}$; и σ – известна, и задана доверительная вероятность (надёжность) γ_p. Предположим, что $x_1, x_2, \cdots, x_n$ означают выборку, полученную в результате проведения n независимых наблюдений за с.в. X. Чтобы подчеркнуть случайный характер выборки

$x_1, x_2, \cdots, x_n$, перепишем их в виде $X_1, X_2, \cdots, X_n$, т.е. под X_j будем понимать значение с.в. X в $j-$м опыте. Случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n$ - независимы, закон распределения любой из них совпадает с законом распределения с.в. X, (т.е. с $X \approx N_{(a,\sigma)}$). А это значит, что $MX =$ $= MX_j = a;\ DX_j = DX;\ j = \overline{1,n}.$ Выборочное среднее

$$\overline{X}_b = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

также будет распределено по нормальному закону. Параметры распределения $\overline{X}$ таковы: $M(\overline{X}) = a,\ D(\overline{X}) = \sigma^2/n$. Действительно,

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MX_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a = \frac{a}{n}\cdot n = a.$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} DX_j = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} DX = \frac{DX}{n^2}\cdot n = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Отсюда, $\overline{X} \approx N_{(a,\sigma/\sqrt{n})}$.

Следовательно, пользуясь формулой (43) (см. Т.9) .

$$P\{|X-a| < \delta\} = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1,$$

можно записать для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\gamma_p = P\{|\overline{X}-a| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(t),$$

где $t = \dfrac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sigma}$, следовательно,

(44) $$\varepsilon = \frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}},$$

поэтому $\gamma_p = P\{|\overline{X}-a| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\dfrac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t)$ или

(45) $$P\left\{\overline{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi_0(t) = \gamma_p.$$

Замечание. ***Если потребуется оценить математическое ожидание с заранее заданной точностью ε и надёжностью γ_p, то минимальный объём выборки, который обеспечивает эту точность, находят по формуле*** $n = (t\sigma/\varepsilon)^2$ **(*непосредственное следствие формулы* (44)).**

В соответствии с определением доверительного интервала получаем, что доверительный интервал для $a = MX$ есть интервал

(46) $$\left(\overline{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

где t определяется из равенства (45), т.е. из функционального уравнения

(47) $$\Phi_0(t) = \frac{\gamma_p}{2} \text{ или } \Phi(t) = \frac{1+\gamma_p}{2}.$$

При заданном γ_p по таблице функции Лапласа находим аргумент t.

Заметим, что из равенства (44) непосредственно следует: с увеличением объёма выборки n число ε убывает и, значит, точность оценки увеличивается. Увеличение надёжности γ_p влечёт за собой уменьшение точности оценки.

Пример 14. Произведено 5 независимых наблюдений над с.в. $X \approx N_{(a,20)}$. Результаты наблюдений таковы: $x_1 = -25,\ x_2 = 34,\ x_3 = -20,\ x_4 = 10,\ x_5 = 21$. Найти оценку для $a = MX$, а также построить для него 95% -й доверительный интервал.

Решение. Находим сначала величину $\bar{x}_b : \bar{x}_b = \frac{1}{5}(-25 + 34 - 20 + 10 + 21) = 4,$ т.е. $\bar{x} = 4.$

Учитывая, что $\gamma_p = 0{,}95$ и $\Phi_0(t) = \frac{\gamma_p}{2} \Rightarrow \Phi_0(t) = 0{,}475.$ По таблице значений функции Лапласа находим, что $t = t_\gamma = 1{,}96.$ Тогда по формуле (44) $\varepsilon = \frac{1{,}96 \cdot 90}{\sqrt{5}} \approx 17{,}5$. Следовательно, доверительный интервал для $a = MX$ согласно равенство (45) будет следующее:

$$\{4 - 17{,}5; 4 + 17{,}5\} \Rightarrow \{-13{,}5; 21{,}5\}.$$

4. 2. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Обратимся теперь к случаю, когда параметр σ неизвестен (он должен сам оцениваться по результатам наблюдений).

Пусть с.в. $X \approx N_{(a,\sigma)}$, $\sigma -$ неизвестна, а доверительная вероятность γ_p задана. Найдём число $\varepsilon,$ для которого выполнялось соотношение $P\{\bar{X} - \varepsilon < a < X + \varepsilon\} = \gamma_p,$ или

$$(48) \qquad P\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\} = \gamma_p$$

Введём случайную величину

$$(49) \qquad T = \frac{\bar{X} - a}{S_n},\ S_\sigma = \frac{S}{\sqrt{n}},$$

$S -$ исправленное среднеквадратическое отклонение с.в. $X,$ вычисленное по выборке $x_1, x_2, \cdots, x_n$, (по которым мы условились определить с.в. $X_1, X_2, \cdots, X_n$), $\bar{X} = \bar{x}_b -$ выборочное среднее, построенное по заданной выборке (см. 18.6)

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2}.$$

В 15.2. было рассмотрено распределение Стьюдента. Аналогично показывается, что с.в. T имеет распределение Стьюдента с ($n-1$) степенью свободы. Плотность этого распределения имеет вид:

$$(50) \qquad \varphi_T(t, n-1) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma((n-1)/2)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1} \cdot e^{-u} du -$ гамма – функция Эйлера; $\varphi_T(t, n-1)$ является чётной функцией по t.

Преобразуя левую часть равенства (48) от с.в. к с.в. T получим

$$P\left\{\frac{|\bar{X} - a|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < \frac{\varepsilon}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right\} = \gamma_p \Leftrightarrow P\left\{|T| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{S}\right\} \Leftrightarrow P\left\{|T| < t_{\gamma_p}\right\},$$

где

(51) $$t_{\gamma_h} = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}.$$

Величина t_{γ_p} определяется из условия

$$P\left\{|T| < t_{\gamma_p}\right\} = \int_{-t_{\gamma_p}}^{+t_{\gamma_p}} \varphi_T(t, n-1)dt = 2 \cdot \int_{0}^{t_{\gamma_p}} \varphi_T(t, n-1)dt = \gamma_p$$

Следовательно, из равенства $2 \cdot \int_{0}^{t_{\gamma_p}} \varphi_T(t, n-1)dt = \gamma_p$ пользуясь таблицей квантилей Стьюдента (см. приложение 6.), находим значение t_{γ_p} в зависимости от доверительной вероятности γ_p и числа степеней свободы, равные $n-1$, (t_{γ_p} есть квантиль уровня $1-\gamma_p$). Определив значение величины t_{γ_p} из равенства (51), находим значение ε:

(52) $$\varepsilon = \frac{t_{\gamma_h} \cdot S}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, равенства (48) принимает вид

$$P\left\{\overline{X} - t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma_p.$$

А значит, интервал $\left(\overline{X} - t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает (ограничивает) величину м.о. $a = MX$ с вероятностью γ_p. Другими словами, является доверительным интервалом для неизвестного математического ожидания случайной величины X, которую можно представить в виде

$$\overline{X} - t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Пример 15. По условию примера 14, считая, что случайная величина распределена по нормальному закону: $X \approx N_{(a,20)}$, построить для неизвестного $MX = a$ доверительный интервал. Считать, что $\gamma_p = 0{,}95$. Напомним условие примера 14: произведено 5 независимых наблюдений над (относительно) с.в. $X \approx N_{(a,20)}$.

Результаты наблюдений таковы: $x_1 = -25,\ x_2 = 34,\ x_3 = -20,\ x_4 = 10,\ x_5 = 21.$

Найти оценку для $a = MX$, а также построить для него 95% -й доверительный интервал.

Решение. Оценку величины $\bar{x} = \overline{X}$ для $a = MX$ уже знаем: $\overline{X} = 4$. Вычислим значение S :

Сначала находим S^2 по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2.$$

Поэтому $S^2 = \frac{1}{4}\left\{(-25-4)^2 \cdot 1 + (34-4)^2 + (-20-4)^2 + (10-4)^2 + (21-4)^2\right\} = 660{,}5.$ Отсюда, $S \approx 25{,}7$. По таблице для $\gamma_p = 0{,}95$ и $n-1 = 4$ находим, что $t_{\gamma_p} = 2{,}78.$ Следовательно,

По формуле (52)

$$\varepsilon \approx 2{,}78 \cdot \frac{25{,}7}{\sqrt{5}} \approx 31{,}9.$$

Итак, доверительный интервал для математического ожидания таков: $\left(-27{,}9; 35{,}9\right)$.

Далее, кратко рассмотрим, как нужно находить доверительного интервала для нормально распределённой случайной величины, в связи с математическим ожиданием.

4.3. Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения

Пусть с.в. $X \approx N_{(a,\sigma)}$, $\sigma -$ неизвестно, а доверительная вероятность γ_p задано. Здесь мы приводим существующие результаты без доказательства в зависимости от м.о. в двух случаях:

1. Математическое ожидание ***<u>известно</u>*** (т.е. можно вычислить), тогда имеет место утверждение.

Доверительный интервал для неизвестного среднего квадратичного отклонения величины σ (стандарта) имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_1}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_2} \le \sigma \le \frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_1}$$

где $n -$ объём выборки,

$$S_o^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - a)^2,$$

а величины χ_1 и χ_2 являются квантилями и $\chi^2 -$ распределения с n степенями свободы (см.15.2) , равные $\chi_1^2 = \chi^2_{\{0,5(1+\gamma_p);\, n\}}$; $\chi_2^2 = \chi^2_{\{0,5(1-\gamma_p),;\, n\}}$ и определяются по таблице (приложение 5). Очевидно, что $\chi_2^2 > \chi_1^2$; $\frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_2} < \frac{\sqrt{n}\cdot S_0}{\chi_1}$.

2. Математическое ожидание ***<u>неизвестно</u>***, тогда имеет место утверждение.

Доверительный интервал для неизвестного среднеквадратичного отклонения величины σ (стандарта) имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2} \le \sigma \le \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}$$

где $n -$ объём выборки, $S = \sqrt{S^2}$ является ***<u>исправленное</u>*** среднеквадратическое отклонение

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2,$$

а квантили определяются соответственно по таблице (приложение 5) равенствами: $\chi_1^2 = \chi^2_{\{0,5(1+\gamma_p);\, n-1\}}$; $\chi_2^2 = \chi^2_{\{0,5(1-\gamma_p);\, n-1\}}$.

Пример 16. Для оценки параметра нормально распределённой случайной величины произведена (сделана) выборка в 30 единиц и известно (вычислено) $S = 1{,}5$.

Найти доверительный интервал, покрывающий (содержащий в себе) величину σ с доверительной вероятностью $\gamma_p = 0{,}90$.

Решение. По условиям примера имеем: $n = 30$; $\gamma_p = 0{,}9$. По таблице $\chi^2_{\alpha,k}$ находим:

$$\chi_1^2 = \chi^2_{\{0,5(1+0,9);\, 30-1\}} = \chi^2_{\{0,95;29\}} = 17{,}7;\ \chi_2^2 = \chi^2_{\{0,5(1-0,9);\, 30-1\}} = \chi^2_{\{0,05;29\}} = 42{,}6;$$

Доверительный интервал имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{29}\cdot 1{,}5}{\sqrt{42{,}6}}; \frac{\sqrt{29}\cdot 1{,}5}{\sqrt{17{,}7}}\right) \Leftrightarrow 1{,}238 < \sigma < 1{,}920.$$

Кратко остановимся на доверительном интервале для оценки вероятности успеха при большом числе испытаний Бернулли. Точечная оценка имела вид:

$$\sum_{j=1}^{k} n_j = n;\ w_j = \frac{n_j}{n};\ \sum_{j=1}^{k} w_j = 1$$

В целях нахождения доверительного интервала, для оценки вероятности события, рассмотрим отклонения относительной частоты $W(A) = p^{\bullet}$ от истинной вероятности $p,$ то есть разность $W(A) - p = p^{\bullet} - p.$

Учитывая, что вероятность появления события A при n испытаниях m раз, а следовательно, и относительная частота, определяется формулой Бернулли и при больших n вычисляется по интегральной теореме Муавра- Лапласа, получим

$$P\{| p^{\bullet} - p |\le \varepsilon\} = P\{n(p-\varepsilon) \le m \le n(p+\varepsilon)\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{np + \varepsilon p - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{np - \varepsilon p - np}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = \gamma_p,$$

где γ_p - надёжность требуемой оценки.

Переходя к новой переменной $t_{\gamma_p} = \varepsilon\sqrt{n}\big/\sqrt{pq}$, получим

$$P\left(| p^{\bullet} - p |\le t_{\gamma_p} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 2\Phi\left(t_{\gamma_p}\right) = \gamma_p,$$

где γ_p определяется по таблице значений функции Лапласа из условия $\Phi\left(t_{\gamma_p}\right) = \gamma_p/2$. Отсюда с вероятностью γ_p должно выполняться неравенство $p_1 \le p \le p_2$, где

(53) $$p_1 = p^{\bullet} - t_{\gamma_p} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};\ p_2 = p^{\bullet} + t_{\gamma_p} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};$$

Полученная оценка обладает двумя недостатками:

1) она зависит от p неизвестной величины;

2) фраза «***справедлива при больших*** n» является понятием расплывчатым (не точным).

От первого недостатка можно избавиться. Путём замены $p \approx p^{\bullet}$ под квадратным корнем, что даёт для оценки истинной вероятности события A следующий доверительный интервал,

(54) $$p^{\bullet} - t_{\gamma_p} \cdot \sqrt{\frac{p^{\bullet}(1-p^{\bullet})}{n}} \le p \le p^{\bullet} + t_{\gamma_p} \cdot \sqrt{\frac{p^{\bullet}(1-p^{\bullet})}{n}},$$

который с надёжностью γ_p покрывает оцениваемый параметр $p = P(A).$

Второй недостаток устраняется путём заменой точного распределения разности ($W(A) - p$) на нормальное распределение. Практически удовлетворительный результат получается при $npq = np(1-p) \ge 10$.

Пример 17. Из подвергнутых испытаниям на сортность 100 единиц товара 80 выдержали его. Найти доверительный интервал с надёжностью 0,95 для вероятности того, что произвольно выбранный образец удовлетворяет предъявленным условиям.

Решение. В качестве точечной оценки неизвестного параметра принимаем числа $p^{\bullet}$ и определяем равенством $p^{\bullet} = W(A) = \frac{80}{100} = 0{,}8$. По доверительной вероятности с помощью таблицы значений функции Лапласа находим $t_{\gamma_p} = 1{,}96$ и затем на основании формуле (53) определяем доверительный интервал: $o{,}711 \le p \le 0{,}867$.

Пример 18. Для проверки фасовочной установки было отобраны и взвешены 20 упаковок, были получены следующие результаты (в граммах).

246	247	247,3	247,4	251,7	252,5	252,6	252,8	252,8	252,9
253	253, 6	254,6	254,7	254,8	256,1	256,3	256,8	257,4	259,2

Найти доверительные интервалы для математического ожидания с надёжностью 0, 95 и среднеквадратического отклонения с надёжностью 0,9, предполагая, что измеряемая величина распределена по нормальному закону.

Решение. Находим точечные оценки для $a = MX$; и $\sigma = \sqrt{DX}$.

$$a^{\bullet} = m_x^{\bullet} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{20} X_j = 252{,}98,$$

$$S^2 = \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_j)^2 = \frac{1}{19}\sum_{j=1}^{20}(X_j - \overline{X}_j)^2 = 13{,}3,$$

$$\tilde{\sigma} = S = \sqrt{13{,}3} \approx 3{,}65\,.$$

Определим по таблице распределения Стьюдента (приложение 6) для доверительной вероятности $\gamma_p = 0{,}95$ с числом свободы $(n-1) = 20 - 1 = 19$ соответствующее значение $t_{\gamma_p} = 2{,}093$, и по формуле

$$P\left\{\overline{X} - t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma_p$$

находим искомый интервал надёжности $\left(\overline{X} - t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}} \le a \le \overline{X} + t_{\gamma_p}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$:

$$252{,}98 - \frac{2{,}093}{\sqrt{20}} \le a \le 252{,}98 + \frac{2{,}093}{\sqrt{20}} \Rightarrow 251{,}27 \le a \le 254{,}69.$$

Для построения доверительного интервала для с.к.о. σ с надёжностью $\gamma_p = 0{,}9$ находим по таблице распределения значений χ^2 с $(n-1) = 19$ степенями свободы (приложение 5) из условий:

$$\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2} \le \sigma \le \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1};\quad \chi_1^2 = \chi^2_{\{0,5(1+\gamma_p);\,n-1\}};\ \chi_2^2 = \chi^2_{\{0,5(1-\gamma_p);\,n-1\}}.$$

$$2{,}9 \le \sigma \le 5{,}0.$$

Задание. Выполните самостоятельно завершающие выкладки и убедитесь в справедливости полученных оценок (результатов) снизу и сверху (см. решение примера 16).

Задачи с указаниями.

Глубина нефтяной скважины измеряется некоторым прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены по нормальному закону с дисперсией 225 кв. м $(\text{т.е.}\,\sigma = 15\text{м})$. Сколько раз нужно провести независимые измерения, чтобы определить глубину скважины с ошибкой не более 5 м, если надёжность вероятности равна $\gamma_p = 0{,}9$?

Указание. Нужно воспользоваться $\varepsilon = \dfrac{t_{\gamma_p}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$; $\Phi_0(t_{\gamma_p}) = \dfrac{\gamma_p}{2}$.

При $\varepsilon=5,\ \sigma=15,\ \gamma_p=0{,}9$; показать, что $\Phi_0(t_{\gamma p})=0{,}45.$ По таблице находить: $t_{\gamma_p}=1{,}65$.

Наконец, по формуле $\varepsilon=\dfrac{t_{\gamma_p}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$, убедиться что $n=24{,}5025$ т.е. необходимо произвести не менее 25 раз измерений.

Измерили рост (с некоторой точностью скажем до 1 см.) 30 наудачу отобранных студентов. Результаты измерения показали:

178, 160, 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155,
157, 175, 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169,
179, 165, 156, 179, 158, 171, 175, 173, 164, 172.

(см. условие примера 6, 18.4.,).

Найти доверительный интеграл для среднего роста студентов, при надёжности вероятности $\gamma_p=0{,}95.$

Указание. Покажите, что $\overline{x}_b=\overline{x}=\dfrac{1}{30}\sum_{j=1}^{6}x_j\cdot n_j=167{,}6;\ S=9{,}28;$ при $\gamma_p=0{,}95$ и $(n-1)=29$ по таблице распределения Стьюдента находить равенство $t_p=2{,}05$. Наконец, вычислите по формуле $\varepsilon=\dfrac{t_{\gamma_p}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\approx 3{,}47$ и убедитесь, что доверительный интервал будет $(164{,}13;171{,},07)$

3. Производятся независимые испытания с одинаковой, но с неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании.

Найти доверительный интервал для оценки p с надёжностью $\gamma_p=0{,}95$, если в 400 раз проведённых наблюдений, событие A наступило (появилось) 80 раз.

Указание. По заданным условиям $n=400; n_A=m=80;\ \gamma_p=0{,}95$**,** относительная частота события A равна $p^{\bullet}=\dfrac{80}{400}=0{,}2.$ Из соотношения $\Phi_0(t_{\gamma_p})=0{,}475$ и таблицы значений функции Лапласа найдите: $t_{\gamma_p}=1{,}96,$ далее по формулам (53) и (54) вычислите величины p_1 и p_2 в итоге покажите, что доверительный интервал будет иметь вид: $0{,}161\le p\le 0{,}239$

5. Другие характеристики вариационного ряда

Кроме выборочной средней и выборочной дисперсии применяются и другие характеристики вариационного ряда. Укажем главные из них.

Модой M_0 называют варианту, которая имеет наибольшую частоту.

Например, для ряда

Варианта:	1	4	7	9
Частота:	5	1	20	6

мода равна 7.

Медианой m_e называют варианту, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если число вариант нечетно, т. е. $n=2k+1$, то $m_e=x_{k+1}$; и при четном $n=2k$ медиана равна

$$m_e=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}.$$

Например, для ряда $\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$, медиана равна 5, а для ряда $\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ медиана равна $(5+6)/2=5{,}5.$

Размахом варьирования называют число R равное разности между наибольшим и наименьшим значениями варианты т.е $R = x_{\max} - x_{\min}$

Например, для ряда $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 17,\ 19\}$ размах равен $R = 19$—1=18.

Размах является простейшей характеристикой рассеяния вариационного ряда.

Средним абсолютным отклонением Θ называют среднее арифметическое абсолютных отклонений:

$$\Theta = \frac{\sum n_j\, |x_j - \overline{x_в}|}{\sum n_j}.$$

Например, для вариационного ряда

$$x_j:\ \{1, 3, 6, 16\}$$

$$n_j:\ \{4, 10, 5, 1\}$$

имеем

$$\overline{x}_b = \frac{4\cdot 1 + 10\cdot 3 + 5\cdot 6 + 1\cdot 16}{4 + 10 + 5 + 1} = \frac{80}{20} = 4;$$

$$\Theta = \frac{4\cdot|1-4| + 10\cdot|3-4| + 5\cdot|6-4| + 1\cdot|16-4|}{20} = 2{,}2.$$

Среднее абсолютное отклонение служит для характеристики рассеяния вариационного ряда.

<u>Тема 20</u> . Проверка статистических гипотез

1. Задачи статистической проверки гипотез

На бытовом языке слово *гипотеза* означает *предположение*. В математической статистике это предположение относится к распределению вероятностей на выборочном пространстве.

Предположения могут быть как о конкретном законе распределения, так и о значениях его
 параметров. Таким образом, *статистическая гипотеза – это предположение о распределении вероятностей, которое нужно проверить по имеющимся статистическим данным.*

Одна из часто встречающихся на практике задач, связанных с применением методов статистического анализа, состоит в решении вопроса о том, должно ли быть на основании *данной выборки* принято или напротив опровергнуто некоторое предположение (гипотеза) относительно *генеральной совокупности* (случайной величины).

Например, новое лекарство испытано на определённом количестве людей. Можно ли по данным результатам лечения сделать обоснованный вывод о том, что новое лекарство более эффективно, чем применявшиеся ранее лекарства?

Аналогичный вопрос логично задать, говоря о новом правиле поступления в ВУЗ, о новых инновационных методах (формах) обучения, о пользе голодания для здоровья, о пользе быстрой ходьбы, о преимуществах новой модели автомобиля, о преимуществах внедрения новой автоматической технологии в производстве, о новой форме управления экономикой, т.д.

Процедура обоснованного сопоставления высказанного предположения (гипотезы) с имеющимися в нашем распоряжении выборочными данными называется *проверкой гипотез.*

На практике часто встречаются задачи сравнения двух выборочных совокупностей. Например, нас может интересовать сравнение двух методов обработки статистических данных, т.е. двух различающихся действий, направленных к одной и той же цели: *двух методик обучения, двух методик технологий управления процессами, двух способов получения информации и т.д.* Для формирования статистической гипотезы необходимо признаки (черты) присущие конкретной проблеме, чтобы их можно было выразить в терминах, относящихся к распределению вероятности.

Отметим, что этот процесс является творческим (динамичным), и его невозможно формализовать. При этом нужно помнить, что для ряда типовых случаев математическая теория (модель исследования) разработана достаточно хорошо (подробно), и нужно стараться по возможности задачу свести к одной из типовых статистических задач.

2. Статистическая гипотеза, статистический критерий

Под *статистической гипотезой* или просто *гипотезой* понимают всякое высказывание (предположение) о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Статистические гипотезы служат инструментом проверки выдвигаемых теоретических предположений. Гипотезы могут быть высказаны относительно параметров статистического распределения вероятностей. Например, в случае нормального закона распределения с.в., относительно м.о. и дисперсии. Тогда гипотезу называют *параметрической*.

Предположения могут быть сделаны так же относительно самого распределения с.в. (подчинение закону Бернулли, Пуассона, геометрическому, равномерному, нормальному и т.д.). В этом случае проверяемую гипотезу *называют непараметрической.*

На практике одну из гипотез выделяют в качестве *основной* или *нулевой* и обозначают H_0
, (которая формируется в предположении отсутствия существенной различии между выборочной и генеральной совокупностями), а другую *конкурирующей* гипотезой,

являющуюся противоположной к H_0, т.е. логическим отрицанием первого, в качестве *альтернативной гипотезы* и обозначается H_1.

Гипотезу, однозначно фиксирующую распределение наблюдений, называют *простой,* если в ней идёт речь об одном значении параметра, в противном случае – *сложной*.

Например, гипотеза H_0, состоящая в том, что математическое ожидание с.в. X равно a_0, то есть $MX = a_0$, является простой. В качестве альтернативной гипотезы, т.е. сложной можно рассматривать одну из следующих гипотез: $MX \neq a_0$ или $MX > a_0$, $MX < a_0$.

Имея две гипотезы H_0 и H_1 надо на основе выборки $x_1, x_2, \cdots, x_n$, принять либо основную гипотезу H_0, либо конкурирующую H_1. Исследуя выборку, принимается решение: согласуется она с этой гипотезой или нет. *Альтернативная гипотеза* H_1 принимается после того, как опровергается основная (нулевая).

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0, или отклонить или принять H_1, называется *статистическим критерием* или просто *критерием* проверки данной гипотезы.

Проверку гипотез осуществляют на основании результатов выборки $x_1, x_2, \cdots, x_n$, из которых формируется функция выборки $T_n = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, называемой *статистикой критерия*.

Основной принцип проверки гипотез состоит в следующем. Множество возможных значений статистики критерия T_n разбивается на два непересекающихся подмножества: *критическую область* S, т.е. область отклонения гипотезы H_0 и область $\overline{S}$ *принятия гипотезы* H_0. Если фактически наблюдаемое значение статистики критерия, т.е. значение критерия, вычисленное по выборке: $T_{\text{набл}} = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ попадает в критическую область S, то основная гипотеза H_0 отклоняется и принимается альтернативная гипотеза H_1; если же $T_{\text{набл}}$ попадает в область $\overline{S}$, то принимается H_0, а H_1 отклоняется.

Пример 1. Пусть в некотором высшем учебном заведении нам нужно доказать, что студенты пятого курса в среднем выше ростом, чем студенты первого курса.

Решение. В качестве нулевой гипотезы выдвинем предположение о равенстве и их среднего роста:

$$H_0 : \overline{L}_5 = \overline{L}_1,$$

где $\overline{L}_5$ – средний рост студентов 5-го курса, $\overline{L}_1$ – средний рост студентов 1-го курса.

В качестве альтернативной (конкурирующей) гипотезы к H_0 могла бы быть выдвинута гипотеза, утверждающая существенные отличия их роста:

$$H_1 : \overline{L}_5 \neq \overline{L}_1,$$

то есть возможные две случаи: $\overline{L}_5 > \overline{L}_1$; $\overline{L}_5 < \overline{L}_1$. Если в результате статической проверки гипотеза H_0 будет опровергнута, то тем самым будет доказана возможность принятия гипотезы

H_1. Если следовать здравому смыслу, то рост студентов в конце обучения не уменьшается, следовательно, он действительно стал больше. Таким образом, альтернативную гипотезу в данном примере можно сформулировать как одностороннюю:

$$H_1 : \overline{L}_5 > \overline{L}_1.$$

При проверке гипотезы может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух видов:

Ошибка первого рода состоит в том, что отвергается нулевая гипотеза H_0, когда на самом деле она верна.

Ошибка второго рода состоит в том, что отвергается альтернативная гипотеза H_1, когда она на самом деле верна.

Рассматриваемые случаи наглядно иллюстрирует следующая таблица.

Гипотеза H_0	Опровергается	Принимается
верна	ошибка 1-го рода	правильное решение
неверна	правильное решение	ошибка 2-го рода

Вероятность ошибки 1-го рода обозначается числом α и называется ***уровнем значимости критерия.*** Очевидно, что число $\alpha = P(H_1/H_0) = P_{H_0}(H_1)$ выражает условную вероятность альтернативной гипотезы H_1по отношению уже принятой гипотезы H_0. Чем меньше, α тем меньше вероятность отклонить верную гипотезу.

Обычно, допустимую ошибку 1-го рода задают заранее. Для числа α используются стандартные значения: $\alpha = 0{,}05;\ 0{,}01;\ 0{,}005;\ 0{,}001$. Например, $\alpha = 0{,}05$ означает, что в среднем из 100 испытаний в 5 случаях верная гипотеза будет опровергнута.

В общем случае величину α задают в зависимости рассматриваемой задачи (когда речь идёт, например, о разрушении сооружений, гибели судна, прыжок с большой высоты с парашютом, тонкая хирургическая операция, стыковка космических кораблей и т.д., нельзя пренебречь обстоятельствами, которые могут появиться с вероятностью, равной 0,001).

Вероятность ошибки 2-го рода обозначается через β, т. е. $\beta = P(H_0|H_1)$

Величину $1\text{-}\beta$, т. е. вероятность недопущения ошибки 2-го рода (отвергнуть неверную гипотезу H_0, принять верную H_1), называется *мощностью критерия.*

Очевидно, $1-\beta = P(H_0|H_1) = P((x_1, x_2, ..., x_n) \in S|H_1$

Чем больше мощность критерия, тем вероятность ошибки 2-го рода меньше, что, конечно, желательно (как и уменьшение α).

Последствия ошибок 1-го, 2-го рода могут быть совершенно различными: в одних случаях надо минимизировать α, в других нужно минимизировать β. Так, применительно к радиолокации говорят, что $\alpha-$ вероятность пропуска сигнала, $\beta-$ вероятность ложной тревоги.

Применительно к производству, к торговле можно сказать, что $\alpha-$ риск поставщика (т. е. доля товара подлежащего браковке по выборке всей партии изделий, удовлетворяющих стандарту), $\beta-$риск потребителя (т. е. прием по выборке всей партии изделий, не удовлетворяющей стандарту);

Применительно к судебной системе, ошибка 1-го рода приводит к оправданию виновного, ошибка 2-го рода приводит к осуждению невиновного.

Отметим, что *одновременное уменьшение ошибок* 1-*го и* 2-*го рода возможно лишь при увеличении объема выборок.* Поэтому обычно при заданном уровне значимости α отыскивается критерий с наибольшей мощностью.

Методика проверки гипотез сводится к следующему:

1. При наличии выборки $X_1, X_2, \cdots, X_n$, формируют основную (нулевую) гипотезу H_0 и альтернативную H_1.

2. В каждом конкретном случае подбирают статистику критерия $T_n = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, обычно из следующих распределений: $N_{(a,\sigma)}-$ нормальное распределение, χ^2- распределение хи-квадрат (Пирсона), $t-$распределение Стьюдента, $F-$распределение Фишера - Снедекора.

3. По статистике критерия T_n и уровню значимости α определяют критическую область S и $\overline{S}$. Для ее отыскания достаточно найти критическую точку $t_{кр}$, т.е. границу (или квантиль), отделяющую область S от $\overline{S}$.

Границы областей определяются, соответственно, из соотношений: $P(T_n > t_{кр}) = \alpha$. Для правосторонней критической области S (рис. 80); $P(T_n < t_{кр}) = \alpha$ для левосторонней критической области S (рис. 81); $P(T_n < t_{кр}^{л}) = P(T_n > t_{кр}^{п}) = \dfrac{\alpha}{2}$, для двусторонней критической области S (рис. 82).

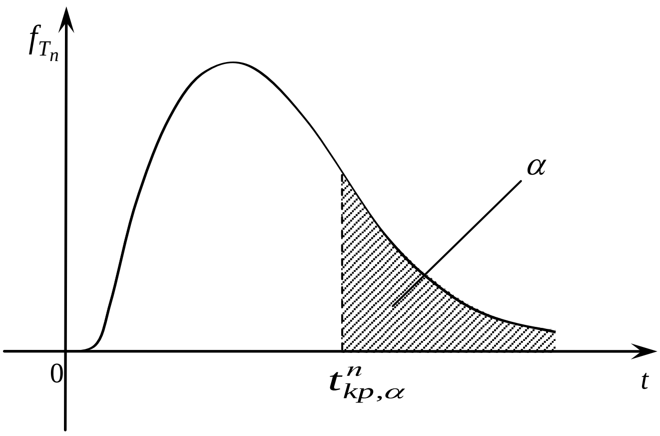


Рис.80

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят *критическую точку*, удовлетворяющую приведенным выше соотношениям.

4. Для полученной реализации выборки $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ подсчитывают значение критерия, т.е. $T_{набл} = T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = t$.

5. Если $t \in S$ (например, $t > t_{кр}$ для правосторонней области S), то нулевую гипотезу H_0 отвергают; если же $t \in \overline{S}$ ($t < t_{кр}$), то нет оснований, чтобы отвергнуть гипотезу H_0.

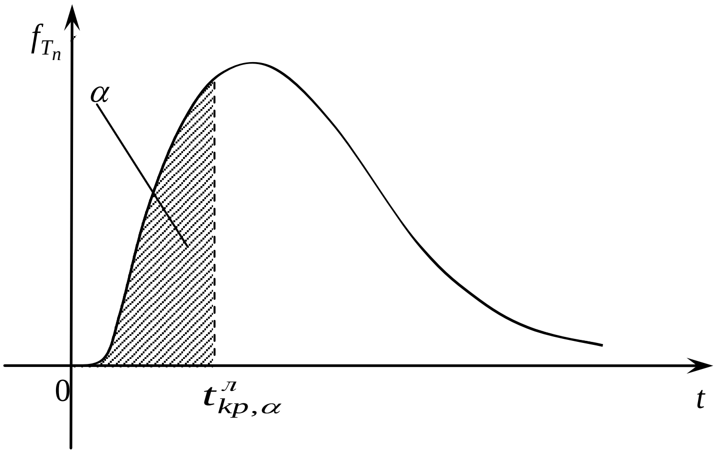


Рис.81

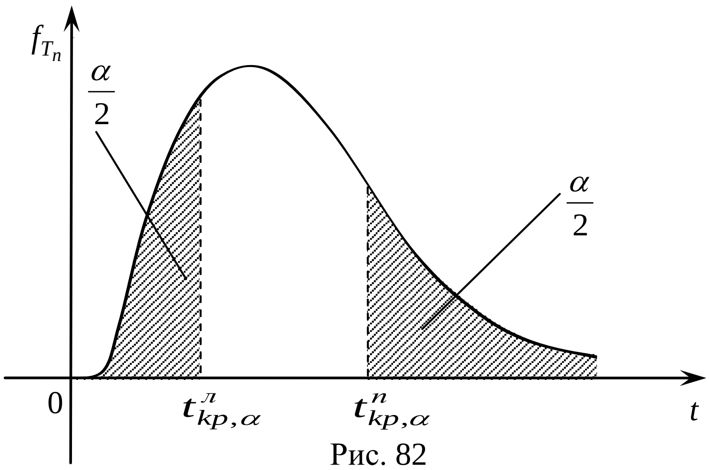


Рис. 82

3. Проверка гипотезы об однородности двух или более анализируемых совокупностей

Пусть мы имеем несколько наборов данных (выборок), образованных в результате наблюдения за одним и тем же параметром интересующего нас объекта. Эти наборы могут быть образованы, например, за счёт разделённости их регистрации во времени и в пространстве.

(1)
$$\begin{array}{l} 1-\text{я выборка: } x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1}; \\ 2-\text{я выборка } x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n_2}; \\ \text{--} \\ \text{--} \\ j-\text{я выборка } x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jn_j}. \end{array}$$

Обозначим функцию распределения, описывающую вероятностный закон, которому подчиняю наблюдения, первой выборки через $F_1(x)$, второй выборки через $F_2(x)$ и т.д.

Основные гипотезы однородности можно записать в следующем виде:

(2) $$H_0: F_1(x) = F_2(x) = \cdots = F_j(x);$$

(3) $$H_0: \overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \cdots = \overline{x}_j;$$

(4) $$H_0: S_1^2 = S_2^2 = \cdots = S_j^2.$$

В случае принятия неотрицательного результата проверки этих гипотез утверждают, что соответствующие выборки однородны, т.е. принадлежат одной генеральной совокупности и различаются *статистически незначительно*. Это означает, что условия регистрации выборочных данных можно считать неизменными.

4. Проверка гипотез о законе распределения

Для статистической проверки гипотез о виде распределения вероятностей исследуемой случайной величины используется ***критерия согласия***

(5) $$H_0 : F_0(x; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l)$$

где α_j – параметры проверяемого закона распределения.

Во многих случаях закон распределения изучаемой случайно величины неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет вполне определенный вид: нормальный, биномиальный или какой-либо другой.

Пусть необходимо проверить гипотезу H_0 о том, что с. в. X подчиняется одному из законов распределения, функция, распределения которой, $F_0(x)$, т. е. H_0: $\Phi_X(x) = F_0(x)$ Под альтернативной гипотезой H_1 будем понимать в данном случае то, что просто не выполнена основная гипотеза, т.е. H_1: $\Phi_X(x) \neq F_0(x)$.

Для проверки гипотезы о распределении случайной величины X проведем выборку, которую представим в виде статистического ряда:

x_j	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_j	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

где $\sum_{j=1}^{k} n_j = n -$ объем выборки.

Требуется сделать заключение: согласуются ли результаты наблюдений с высказанным предположением. Для этого используем специально подобранную величину так называемую «критерий согласия».

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. (Он используется для проверки согласия предполагаемого вида распределения с опытными данными на основании выборки.)

Существуют различные критерии согласия: Пирсона. Колмогорова, Фишера, Смирнова и др.

Критерий согласия Пирсона — наиболее часто употребляемый критерий для проверки простой гипотезы о законе распределения.

5. Критерий согласия χ^2 (Критерий Пирсона)

Для проверки гипотезы H_0 поступают следующим образом. Разбивают всю область значений св. X на m интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_k$ и подсчитывают вероятности p_j, $j = \overline{1, k}$, попадания случайной величины X (т.е. наблюдения) в интервал Δ_j, используя формулу

$$P\{\alpha \leq X \leq \beta\} = F_0(\beta) - F_0(\alpha).$$

Тогда теоретическое число значений с.в. X, попавших в интервал Δ_j, можно рассчитать по формуле $n'_j = n \cdot p_j$. Таким образом, имеем статистический ряд распределения с. в. X (8.11) и теоретический ряд распределения:

Δ_1	Δ_2	$\cdots$	Δ_k

$n'_1 = n \cdot p_1$	$n'_2 = n \cdot p_2$	$\cdots$	$n'_k = n \cdot p_k$

Если эмпирические частоты (n_j) сильно отличаются от теоретических частот $(n \cdot p_j = n'_j)$, то проверяемую гипотезу H_0 следует отвергнуть; в противном случае нужно принять.

Каким критерием, характеризующим степень расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами, следует воспользоваться? В качестве меры расхождения между n_j и $n \cdot p_j$ для $j = 1, 2, \cdots, k$.

К. Пирсон (1857-1936; английский математик - философ) предложил величину «критерий Пирсона» в следующем виде:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j^2}{n \cdot p_j} - n. \tag{6}$$

Согласно теореме Пирсона, при $n \to \infty$ статистика (6) имеет $\chi^2 -$ распределение с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где m — число групп (интервалов) выборки, r — число параметров предполагаемого распределения. В частности, если предполагаемое распределение нормально, то оценивают два параметра *(a* и *σ),* поэтому число степеней свободы $k = m - 3$.

Правило применения критерия χ^2 сводится к следующему:

1. По формуле (6) вычисляют $\chi^2_{\text{набл}}$ - выборочное значение статистики критерия.

2. Выбрав уровень значимости α критерия, по таблице $\chi^2 -$распределения находим критическую точку (квантиль) $\chi^2_{\alpha,k}$.

3. Если $\chi^2_{\text{набл}} \le \chi^2_{\alpha,\,k}$ гипотеза H_0 не противоречит опытным данным; $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\alpha,\,k}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Необходимым условием применения критерия Пирсона является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений $(n_j \ge 5)$. Если в отдельных интервалах их меньше, то число интервалов надо уменьшить путем объединения (укрупнения) соседних интервалов.

Пример 2. Измерены 100 обработанных деталей; отклонения от заданного размера приведены в таблице:

$[x_j, x_{j+1})$	[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, -3)	[3, 4)	[4, 5]
n_j	3	10	15	24	25	13	7	3

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу H_0 о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

Решение. Число наблюдений в крайних интервалах меньше 5, поэтому объединим их с соседними. Получим следующий ряд распределения $n = 100$:

$[x_j, x_{j+1})$	[-3,-1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3,5]
n_j	13	15	24	25	13	10

Случайную величину — отклонение — обозначим через *X*. Для вычисления вероятностей p_j необходимо вычислить параметры, определяющие нормальный закон распределения (*a* и *σ*). Их оценки вычислим по выборке:

$$\bar{x} = \frac{1}{100} \cdot \left(-2 \cdot 13 + (-0{,}5) \cdot 15 + \ldots + 4 \cdot 10\right) = 0{,}885 \approx 0{,}9,$$

$$D_в = \frac{1}{100} \cdot \left(4 \cdot 13 + 0{,}25 \cdot 15 + \ldots + 16 \cdot 10\right) - (0{,}885)^2 \approx 2{,}809,$$

$$\sigma \approx 1{,}676 \approx 1{,}7\,.$$

Находим p_j $(j = \overline{1,6})$. Так как св. $X \approx N_{(a,\sigma)}$ определена на $(-\infty, +\infty)$, то крайние интервалы в ряде распределения заменяем, соответственно, на $(-\infty, +\infty)$ и $(3, +\infty)$. Тогда

$$p_1 = P\{-\infty < X < -1\} = \Phi_0\left(\frac{-1 - 0{,}9}{1{,}7}\right) - \Phi_0(-\infty) = \frac{1}{2} - \Phi_0(1{,}12) = 0{,}1314.$$

Аналогично получаем:

p_2 = 0,1667, p_3 = 0,2258, p_4 = 0.2183, p_5 = 0,1503,

$$p_6 = P\{3 \le X < \infty\} = \Phi_0(+\infty) - \Phi\left((3 - 0{,}9)/1{,}7\right) = 0{,}5 - \Phi_0(1{,}24) = 0{,}1075.$$

Полученные результаты приведем в следующей таблице:

$[x_j, x_{j+1})$	$(-\infty, -1)$	$[-1, 0)$	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, +\infty)$
n_j	13	15	24	25	13	10
$n'_j = n \cdot p_j$	13,14	16,67	22,58	21,83	15,03	10,75

Вычисляем $\chi^2_{набл}$:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{j=1}^{6} \frac{n_j^2}{np_j} - n = \left(\frac{13^2}{13{,}14} + \frac{15^2}{16{,}67} + \cdots + \frac{10^2}{10{,}75}\right) - 100 \approx$$

$$\approx 101{,}045 - 100 = 1{,}045\,.$$

Следовательно, $\chi^2_{\text{набл}} \approx 1{,}045$

Находим число степеней свободы, по выборке рассчитаны два параметра, значит, r = 2. Количество интервалов 6, т. е. m = 6. Следовательно, k = 6 -2-1 = 3. Зная, что α = 0,01 и κ = 3, по таблице χ^2- распределения находим $\chi^2_{\alpha,\,k} = 11{,}3$. Итак, $\chi^2_{набл} < \chi^2_{\alpha,\,k}$, следовательно, нет оснований опровергнуть проверяемую гипотезу. Таким образом, отклонения от заданного размера подчиняются нормальному закону распределения.

6. Критерий Колмогорова

Критерий Колмогорова для простой гипотезы является наиболее простым критерием проверки гипотезы о виде закона распределения. Он связывает эмпирическую функцию распределения $\Phi_n^\bullet(x)$ с функцией распределения $\Phi(x)$ непрерывной случайной величины X.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - конкретная выборка из распределения с неизвестной непрерывной функцией распределения $\Phi(x)$ и $\Phi_n^\bullet(x)$ - эмпирическая функция распределения. Выдвигается простая гипотеза $H_0 : \Phi(x) = \Phi_0(x)$ (альтернативная H_1: $\Phi(x) \ne \Phi_0(x)$, $x \in R$).

Сущность критерия Колмогорова состоит в том, что вводят в рассмотрение функцию

$$D_n = \max_{-\infty<x<\infty} \left|\Phi_n^*(x) - \Phi_0(x)\right| \tag{7}$$

называемой *статистикой Колмогорова,* представляющей собой максимальное отклонение эмпирической функции распределения $\Phi_n^{\bullet}(x)$ от гипотетической (т. е. соответствующей теоретической) функции распределения $\Phi_0(x)$.

Колмогоров доказал, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины $\sqrt{n} \cdot D_n$ независимо от вида распределения с. в. X стремится к его *закону распределения:*

$$P\{\sqrt{n} \cdot D_n < x\} \to K(x)$$

где *K(x)* — функция распределения Колмогорова, для которой составлена таблица, ее можно использовать для расчетов уже при $n \geq 20$:

α	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
x_0	1,224	1.358	1,520	1,627	1,950

Найдем D_0 такое, что $P(D_n > D_0) = \alpha$.

Рассмотрим уравнение $K(x) = 1 - \alpha$. С помощью функции Колмогорова найдем значение (корень x_0) этого уравнения. Тогда по теореме Колмогорова,

$$P\{\sqrt{n} \cdot D_n < x_0\} = 1 - \alpha,\ P\{\sqrt{n} \cdot D_n > x_0\} = \alpha,$$

откуда
$$D_0 = \frac{x_0}{\sqrt{n}}.$$

Если $D_n < D_0$, то гипотезу H_0 нет оснований опровергнуть; в противном случае - ее опровергают.

Пример 3. Монету бросали 4040 раз (Бюффон). Получили $n_1 = 2048$ выпадений герба и $n_2 = 1992$ выпадений решётки. Проверить, используя

а) критерий Колмогорова;

б) критерий Пирсона, согласуются ли эти данные с гипотезой H_0 о симметричности монеты ($\alpha = 0.05$).

Случайная величина X принимает два значения: $x_1 = -1$ (решётка); $x_2 = 1$ (герб). Гипотеза H_0: $P\{X = -1\} = P\{X = 1\} = 1/5$.

а) По таблице распределения Колмогорова находим корень уравнения $K(x) = 1 - \alpha$ при $\alpha = 0{,}05$. Следует $x_0 = 1{,}358$. Тогда

$$D_0 = \frac{x_0}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}358}{\sqrt{4040}} \approx 0{,}021$$

Для нахождения по выборке D_n строим функции $\Phi_0(x)$ и $\Phi_n^{\bullet}(x)$ и вычисляем величину $D_n = \max\limits_{-\infty<x<\infty} \left|\Phi_n^*(x) - \Phi_0(x)\right|$.

	решётка	герб
x_j	x_1 = -1	x_2 = -1

p_j	0,5	0,5

$$\Rightarrow \quad \Phi_0(x) = \begin{cases} 0, & при \;\; x \le -1, \\ 0{,}5, & при \;\; x \in (-1,+1), \\ 1, & при \;\; x > 1. \end{cases}$$

x_i	решётка x_1 = -1	герб x_2 = -1
n_i	1992	2048
p_i	≈ 0,493	≈0,507

$$\Rightarrow \Phi_n^*(x) = \begin{cases} 0, & при \;\; x \le -1 \\ 0{,}493, & при \;\; -1 < x \le 1 \\ 1, & при \;\; x > 1 \end{cases}$$

Максимальное отклонение $\Phi_0(x)$ от $\Phi_n^{\bullet}(x)$ равно 0,007, т.е. D_n = 0,007. Поскольку $D_n < D_0$, то нет оснований отвергать, гипотезу H_0; опытные данные согласуются с гипотезой H_0 о симметричности монеты.

б) Вычисляем статистику χ^2

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{6} \frac{n_i^2}{np_i} - n = \frac{1992^2}{\frac{1}{2}\cdot 4040} + \frac{2048^2}{\frac{1}{2}\cdot 4040} - 4040 = 0{,}776$$

По таблице χ^2 – распределения находим критическую точку $\chi^2_{\alpha,\,k} = \chi^2_{0{,}05;\,1} = 3{,}8.$ Так как $\chi^2_{\alpha,\,k} < \chi^2_{0{,}05;\,1}$, то опытные данные согласуются с гипотезой о симметричности монеты.

7. Критерий однородности Смирнова

Для проверки гипотез вида (2) (см. 20.2) об однородности двух или более выборок применяют *критерий однородности*:

(8) $$H_0: \quad F_1(x) = F_2(x) = \cdots = F_l(x)$$

Здесь, мы ограничимся частным случаем этой критерии для двух выборок (т.е. $l = 2$). В качестве критической статистики применяется критерий однородности Смирнова, которая имеет вид:

(9) $$\gamma_{1,2} = n_1 n_2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\frac{m_{1j}}{n_1} - \frac{m_{2j}}{n_2}\right)}{m_{1j} + m_{2j}},$$

где n_1, n_2 – число элементов выборок; m_{1j}, m_{2j} – количество элементов соответственно первой и второй выборок, попавших в j – й интервал.

При условии справедливости гипотезы $H_0:\ F_1(x) = F_2(x)$ величина $\gamma_{1,2}$ будет распределена приблизительно по закону χ^2 с $(k-1)$ степенью свободы. Гипотеза H_0 опровергается, если $\gamma_{1,2} \le \chi^2_{(1-0{,}5\alpha)}$ или $\gamma_{1,2} > \chi^2_{(0{,}5\alpha)}$, и *принимается при всех остальных значениях критерия* $\gamma_{1,2}$.

Рассмотрим следующую производственную задачу.

Пример 4. Ниже в таблице приведены *условные данные* о заработной плате работников двух видов предприятий: текстильной и машиностроительной отраслей, полученные в результате социологического опроса. Объёмы двух выборок выразятся как $n_1 = n_2 = 100$.

№ п /п	Интервал зарплаты в у.е.	Количество элементов выборки, попавших в данный интервал		$m_{1j} + m_{2j}$	$m_{1j} - m_{2j}$
		Текстиль m_{1j}	Машиностроение m_{2j}		
1	130-150	4	1	5	3
2	150-170	4	1	5	3
3	170-200	15	8	23	7
4	200-250	51	43	94	8
5	250-300	22	34	56	-12
6	300-350	3	7	10	-4
7	350-400	1	3	4	-2
8	400-450	0	3	3	-3

Решение. Проверим гипотезу (при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$) о том, что распределения вероятностей по заработной плате в анализируемых отраслях не отличаются друг от друга.

Далее вычисления величины $\gamma_{1,2}$ по формуле критерии Смирнова (9) с учётом данных в таблице даёт

(10) $$\gamma_{1,2} = 100 \cdot 100 \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\frac{m_{1j}}{100} - \frac{m_{2j}}{100}\right)}{m_{1j} + m_{2j}} = 14{,}58.$$

Задание. Самостоятельно проверьте это равенство.

Из таблицы значений χ^2 -распределения (см. приложение) определяем критическую точку: $\chi^2_{(0,05;7)} = 14{,}07$. Следовательно, гипотезу о совпадении вероятностных распределений заработной платы в двух отраслях необходимо отвергнуть, т.к. $\gamma_{1,2} > \chi^2_{(0,05,7)}$. При этом, вероятность допускаемой ошибки равна 0,05.

Критерий однородности Смирнова относится к *непараметрическим критериям* (в отличие от критерия Пирсона), так как используемая в нём критическая статистика никак не зависит от наших предположений относительно распределения закона случайной величины.

8. Проверка гипотезы об однородности параметров распределений

8.1. Критерий Стьюдента (t – критерий)

Критерий Стьюдента (t – критерий) предназначен для проверки гипотез (3), т. е. $H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \cdots = \bar{x}_j$, $j = 2$, однородности математических ожиданий в двух выборках нормально распределённой случайной величины, имеющих одинаковую (хотя и неизвестную) дисперсию σ^2:

$$H_0: \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2; \qquad H_1: \quad \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2.$$

(11) $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{S} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}},$$

где $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ - оценки математических ожиданий в выборках объёмов n_1, n_2

$\bar{S}$ - стандартное отклонение, вычисляемое по формуле:

(12) $$\bar{S} = \sqrt{\bar{S}^2};$$

$\bar{S}^2$ - средняя дисперсия, которая вычисляется по выборочным дисперсиям S_1^2 и S_2^2 по формуле:

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{(n_1 + n_2 - 2)}\left[n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2\right].$$

В условиях справедливости гипотезы (3) и при дополнительном условии однородности дисперсий статистика t равенство (11) должна подчиняться распределению Стьюдента с ($k = n_1 + n_2 - 2$) степенями свободы. Определим из таблицы t- распределения критическое значение $t_{кр}$ для уровня значимости $0{,}5 \cdot \alpha$, и числа степеней свободы $n_1 + n_2 - 2$. Если окажется, что t, вычисленное по формуле (11), то гипотеза об однородности (3) отвергается.

Замечание. Слишком большое значение статистики t может быть следствием как неоднородности математических ожиданий двух выборок, так и неоднородности дисперсий. А это являться самостоятельной задачей исследования.

Частным случаем такой задачи является «задача о проверке гипотезы относительно равенствах математического ожидания нормально распределённой случайной величины заданному значению». Итак, имеем выборку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из нормальной генеральной совокупности $N_{(a,\sigma_x^2)}$. Рассмотрим различные варианты постановки задач по проверке гипотез о равенстве числового значения оценки математического ожидания $\bar{x}$ заданной постоянной величине c.

Вариант 1. $H_0 : \bar{x} = c$ при условии, что дисперсия генеральной совокупности σ_x^2 известна.

Критическая статистика согласно формуле (11) имеет вид:

(13)
$$t = \frac{\bar{x} - c}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

В условиях справедливости гипотезы H_0 статистика t подчиняется нормальному закону.

В качестве критического значения $t_{кр}$ используется квантиль нормального распределения U_α с уровнем значимости α

1) если $t > U_{1-\alpha}$ при альтернативе $H_0 : \quad \bar{x} > c$;
2) если $t < U_{1-\alpha}$ при альтернативе $H_0 : \quad \bar{x} < c$;
3) если $|t| > U_{1-\alpha}$ при альтернативе $H_0 : \quad \bar{x} \neq c$.

Здесь U_α - квантиль стандартного нормального распределения с уровнем значимости α.

Вариант 2. $H_0 : \bar{x} = c$ при условии, что дисперсия генеральной совокупности σ_x^2 неизвестна. Критическая статистика t вычисляется по формуле

(14)
$$t = \frac{(\bar{x} - c)\sqrt{n-1}}{S}.$$

и распределена по закону Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы. Здесь S - выборочная оценка среднеквадратического отклонения.

Правило принятия решения - гипотеза H_0 отвергается:

1) если $t > t_{(\alpha, n-1)}$ при альтернативе $H_1 : \quad \bar{x} > c$;
2) если $t < -t_{(\alpha, n-1)}$ при альтернативе $H_1 : \quad \bar{x} < c$;
3) если $|t| < t_{(-0{,}5\alpha; n-1)}$ при альтернативе $H_1 : \quad \bar{x} \neq c$.

Здесь $t_{(\alpha, n-1)}$ - 100 %- ная точка распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

Пример 5 . В целях оценки воздействия окружающей среды на здоровье населения обследованы два административных района. Эти показатели указаны в таблице.

Первый район		Второй район	
Населённый пункт	Заболеваемость x_i	Населённый пункт	Заболеваемость x_i
1	206	1	215
2	210	2	212
3	212	3	214
4	216	4	225
5	184	5	230
6	165	6	207
7	195	7	256
8	201	8	236
		9	302
		10	220
		11	214
		12	198

В первом районе с низким уровнем техногенной нагрузки проверено **восемь** крупных населённых пунктов, во втором - **двенадцать** населённых пунктов, имеющем химические и металлургические предприятия. По данным обследования населённых пунктов следует определить по уровню значимости критерия $\alpha = 0{,}05$ существенность различий этих районов по уровню заболеваемости населения злокачественными новообразованиями (X - количество заболеваний на 100 000 человек населения).

Сформулируем статистическую гипотезу. Факт влияния окружающей среды может быть доказан отклонением гипотезы о равенстве математических ожиданий двух выборок $H_0: \ \bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

Решение.

1. Определим оценки математических ожиданий и дисперсий по обеим выборкам
$$\bar{x}_1 = 198{,}6; \qquad \bar{x}_2 = 225{,}2; \quad S_1^2 = 336{,}9; \quad S_2^2 = 777{,}7.$$
2. По формуле (13) найдём среднюю дисперсию выборочных данных и СКО:
$$\bar{S}^2 = \frac{1}{8+12-2}\left(8 \cdot 336{,}9 + 12 \cdot 777{,}7\right) = 668{,}8; \quad \bar{S} = 25{,}8.$$
3. Рассчитываем наблюдаемое значение критерия Стьюдента (11):
$$t = \frac{(198{,}6 - 225{,})}{25{,}8 \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{12}}} = -2{,}47.$$
4. При проверке $H_0: \ \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ по таблице t- распределения определим критическое значение $t_{(0,25;18)} = 2{,}45$.

Поскольку наблюдаемое значение критерия превосходит критическое, то гипотезу H_0 следует опровергнуть. Следовательно, данные наблюдений действительно подтверждают факт наличия влияния окружающей среды на здоровья населения.

Пример 6. Для предприятий, торгующих продуктами питания, установлены показатели эффективности их деятельности: уровень рентабельности товарооборота равна 20 % , средняя оборачиваемость товарных запасов, составляет 12 дней. Более низкие показатели означают снижение эффективности конкурентоспособности предприятия. В целях оперативного контроля результатов коммерческой деятельности в одной из торговых фирм проведён анализ эффективности торговых операций за последние 10 месяцев и получены данные, указанные в таблице:

месяц	Рентабельность, %	Продолжительность товарооборота $T_{\partial н}$
1	14	19
2	12	15
3	16	19
4	14	1
5	15	24
6	18	12
7	22	10
8	20	15
9	13	18
10	9	20

Сформулируем статистическую гипотезу относительно значения показателя рентабельности. Эффективность коммерческой деятельности будет удовлетворительной, если уровень рентабельности будет соответствовать нормативному показателю, т.е. при справедливости гипотезы: H_0 : «$\overline{R}-$ среднее арифметическое показателей продолжительность товарооборота ($T_{\partial н}$) равна 20» , т.е. $\overline{R}=(0{,}1)\cdot\sum_{j=1}^{10}T_{\partial н}=20$.

Поскольку нарушение эффективности коммерческой деятельности произойдёт только в случае снижения показателя рентабельности относительного нормативного, примем в качестве альтернативной гипотезы $H_1 : \overline{R}<20$.

Решение.

1. Определим среднее значение рентабельности по третьему столбцу:

$$\overline{R}=(0{,}1)\cdot\sum_{j=1}^{10}T_{\partial н}=\frac{153}{10}=15{,}3;$$

2. По формуле (11) найдём значение критерия Стьюдента:

$$t=\frac{(15{,}3-20{,}0)\cdot\sqrt{9}}{3{,}86}=-3{,}65.$$

3. Найдём критическое значение критерия по таблице $t-$распределения Стьюдента: $t_{(0{,}05;9)}=1{,}83.$ Наблюдаемое значение $t<t_{(0{,}05;9)}$, (т.е. $-3{,}65<1{,}83$), следовательно, гипотеза H_0 должна быть опровергнута, что свидетельствует о нарушении эффективности торговых операций в анализируемом периоде.

8.2. Критерий Фишера (F – критерий)

$F-$критерий однородности дисперсий предназначен для проверки гипотезы однородности дисперсий H_0: $S_1^2=S_2^2$ в двух нормально распределённых совокупностях. Он основан на использовании статистики

$$F_n=\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\cdot\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right), \qquad (15)$$

которая в условиях справедливости гипотезы H_0 должна подчиняться $F-$распределению Фишера с числами степеней свободы соответственно (n_1-1) и (n_2-1). В целях удобства пользования статистических таблиц в числителе формулы (15) обычно подставляют большую дисперсию. При заданном уровне значимости критерия α определяют табличные значения в виде: $F_{1-0,5\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ и $F_{0,5\alpha}(n_1-1,n_2-1)$. Если окажется, что

(16) $$F_{1-0,5\alpha}(n_1-1,n_2-1) \le F_n \le F_{0,5\alpha}(n_1-1,n_2-1),$$

то гипотеза об однородности дисперсий принимается (и опровергается во всех других случаях)

Частным случаем является проверка гипотезы о значении дисперсии нормальной совокупности. Предположим, что по случайной выборке $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, взятой из нормальной генеральной совокупности, получена оценка дисперсии S^2. Требуется проверить гипотезу о $H_0: S^2 = \sigma_0^2$, где σ_0^2 есть некоторое конкретное числовое значение, исследуемой данной задачей. При проверке этой гипотезы используют *критическую статистику*

(17) $$F_h = \frac{n \cdot S^2}{\sigma_0^2},$$

которая в соответствии с теорией Фишера в условиях справедливости H_0 распределена по закону χ^2 с $(n-1)$ степенью свободы.

Принято следующее ***правило принятия решения***: гипотезу H_0 опровергают (с вероятностью ошибки α), в следующих случаях:

1) $F_h > \chi^2_{\alpha(n-1)}$ при альтернативе $H_1: S^2 > \sigma_0^2$;
2) при альтернативе $H_1: S^2 < \sigma_0^2$;
3) $\chi^2_{0,5\alpha\cdot(n-1)} < F_h < \chi^2_{1-0,5\alpha\cdot(n-1)}$ при альтернативе $H_1: S^2 \ne \sigma_0^2$.

Пример 7. Пусть в условиях примера 5, предварительный анализ законов распределения числа заболеваний в административных районах показал, что данные и в том и в другом случае Достаточно хорошо описываются *нормальной моделью* (т.е. достаточно хорошо соответствуют нормальному закону распределения). Нужно принять решение.

Решение. В решении поставленной задачи, перед тем как использовать $t-$критерий Стьюдента, необходимо убедиться в однородности дисперсии выборок, т.е. проверить гипотезу

$$H_0: \; S_1^2 = S_2^2.$$

С этой целью воспользуемся $F-$критерием. В рассматриваемом примере его значение оказывается равным 2,31 (дисперсии первой и второй выборки сосчитывались при решении примера 5 по таблице и были соответственно равны 336,9 и 777,7). Далее из таблиц $F-$ распределения находим критическую точку для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$; $F_{0,05}(7{,}11) = 3{,}01$.

Поскольку найденное (рассчитанное) значение критерия меньше чем критического, т.е. $2{,}31 < 3{,}01$, то имеется реальное основание принять, допущение о равенстве дисперсий в данных анализируемых выборочных совокупностях.

9. Построение статистических регрессионных моделей

9.1. Основные положения

Многофакторный регрессионный анализ служит для отыскания количественной зависимости между результирующим показателем (откликом) Y и независимыми факторами, (переменными) $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ которые оказывают влияние на Y. Требуется установить зависимость отклика Y от факторов x_j, число которых равно n, т.е. от X. Другими словами, имеется функциональная зависимость: $y = f\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ между откликами и факторами.

Значения отклика и фактора определяются в ходе пассивного или активного эксперимента над объектом. Количество факторов должно быть заранее установлено, т.е.

значения $x_1, x_2, \cdots, x_n$ известны. Явный вид функции связи факторов и откликов заранее неизвестен и должен быть установлен в ходе анализа. Кроме того, задача анализа состоит в определении численных параметров, входящих в эту функцию. Необходимо учитывать, что кроме установленных факторов на отклик *y* влияют и случайные величины, значения которых в ходе эксперимента не определяются.

Таким образом, можно говорить о математическом ожидании отклика *y,* который связан с факторами $x_1, x_2, ..., x_k$ уравнением регрессии

$$M(y) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n + b_{12} x_1 x_2 + + b_{13} x_1 x_3 + ... + b_1 x_1^{\ 2} + ... + b_n b_n^{\ 2} + ... \quad (18)$$

Описательные возможности линейного уравнения регрессии достаточно низки, поэтому для повышения адекватности модели в нее добавляют нелинейные зависимости. Например, парное взаимодействие факторов. Кроме того, нелинейные члены уравнения можно записать в виде квадратов, кубов и т.д.

В общем виде уравнение можно представить следующим образом:

$$M(y) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i,\, j=1\, (i \neq j)}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\ x_i^{\ 2} + ... \quad (19)$$

Следует учитывать, что по конечной выборке в результате полученной наблюдений, мы имеем не сами коэффициенты, а их *оценки (приближённые значения).* В результате подстановки их в уравнение регрессии будет получена оценка математического ожидания. Ее запись аналогична записи предыдущего уравнения.

Пусть имеется N результатов наблюдений над величиной *y,* зависящей от n факторов, причем степень полинома равна m. Тогда число коэффициентов регрессии равно числу C_{n+m}^{m}, где оно определяется неравенством

$$C_{n+m}^{m} = \frac{(n+m)!}{m! \cdot n!} < N .$$

Для получения возможности вычисления этих коэффициентов необходимо, чтобы количество опытов превышало C_{n+m}^{m}.

Для проведения регрессионного анализа следует соблюдать следующие условия:

- случайная величина *y* должна иметь нормальное распределение;
- независимые переменные фактора *X* должны измеряться с погрешностью, пренебрежимо малой по сравнению с дисперсией случайной величины *y.*

Уравнение регрессии можно упростить, если ввести следующие обозначения:

1) $x_0 = 1 -$ фиктивная переменная при свободном члене;

2) произведения двух переменных можно заменить, обозначив их следующим образом:

$$x_1^2 = x_{n+1};\ x_2^2 = x_{n+2}; ... ;\ x_n^2 = x_{2n};$$
$$x_1\, x_2 = x_{2n+1};\ x_1\, x_3 = x_{2n+2};\ x_2\, x_3 = x_{2n+3}; \ldots \quad (19)$$

x_S — конечное значение, соответствующее общему количеству переменных, включенных в уравнение регрессии.

Его максимальное значение определяется следующим образом:

$$S = 2\,n + C_n^2 = 2n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Таким образом, оценка математического ожидания наблюдаемой величины определяется формулой

(20) $$\widetilde{y}=\sum_{j=1}^{S}\overline{b}_j x_j .$$

Здесь $\overline{b}_j -$ оценка коэффициента.

9.2. Матричный метод построения уравнения регрессии

Используем метод наименьших квадратов для определения коэффициентов регрессии по результатам наблюдений. Составим следующую систему линейных уравнений:

(21) $$\begin{cases} b_0x_{01}+b_1x_{11}+b_2x_{21}+\ldots+b_{\rm i}x_{\rm i1}+\ldots+b_{\rm n}x_{\rm n1}+\varepsilon_1=y_1, \\ b_0x_{02}+b_1x_{12}+b_2x_{22}+\ldots+b_{\rm i}x_{\rm i2}+\ldots+b_{\rm n}x_{\rm n2}+\varepsilon_2=y_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ b_0x_{0\rm m}+b_1x_{1\rm m}+b_2x_{2m}+\ldots+b_{\rm i}x_{im}+\ldots+b_{\rm n}x_{\rm nm}+\varepsilon_m=y_{\rm m}, \end{cases}$$

Значения результатов первого опыта имеют индекс 1, второго индекс 2, n-го опыта имеют индекс n.

Результаты этих наблюдений можно записать в матричной форме, где X - матрица значений независимых переменных.

(22) $$X=\begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & \ldots & x_{n1} \\ x_{02} & x_{12} & \ldots & x_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{0m} & x_{1m} & \ldots & x_{nm} \end{pmatrix}=\left(x_{ij}\right)_{(m+1)\times n}$$

Коэффициенты регрессии можно представить в виде n-мерного вектора $B^{\rm T}$, а наблюдаемые значения переменной величины в виде соответствующего вектора $Y^{\rm T}$:

(23) $$B^T=(b_0,b_1,b_2,\cdots,b_n)^T; \quad Y^T=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T ,$$

где вектора $B^{\rm T}$ и $Y^{\rm T}$ являются транспонированными векторами к векторам столбцов B и Y.

Тогда систему можно записать в матричном виде:

(24) $$X\cdot B=Y.$$

Для нахождения оценок по методу наименьших квадратов необходимо выяснить, при каких значениях коэффициентов B достигается минимум выражения

(25) $$\Sigma\,[Y\text{-}\ XB]^2\rightarrow\min$$

Вычисляя частные производные выражения (25) по каждому b_j, и приравнивая их к нулю получим, систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов b_j:

(26) $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}[y_i-b_0\cdot b_1(x_{1i}-\overline{x}_1)-\ldots-b_n\cdot(x_{ni}-\overline{x}_n)]=0,) \\ \sum_{i-1}^{N}(x_{1i}-\overline{x}_1)[y_i-b_0\cdot b_1(x_{1i}-\overline{x}_1)-\ldots-b_n\cdot(x_{ni}-\overline{x}_n)]=0, \\ \ldots \quad \cdots \quad \ldots \quad \cdots \quad \ldots \quad \cdots \quad \ldots \quad \cdots \quad \ldots \quad \cdots \\ \sum_{i=1}^{N}(x_{ni}-\overline{x}_n)[y_i-b_0\cdot b_1(x_{1i}-\overline{x}_1)-\ldots-b_n(x_{ni}-\overline{x}_n)]=0 \end{cases}$$

Решением этой системы однородных линейных уравнений и будут оценки искомых коэффициентов b_i.

Представив результаты наблюдения в матричной форме в соответствии с формулами ((22)—(23)), можно осуществить решение системы линейных уравнений (26), вычислив произведение (24) в определенной последовательности.

Обе части уравнения (24) умножим на транспонированную матрицу X^T:

(27) $$X^TXB=X^T\mathrm{Y}.$$

Если в матрице $X = (x_{ij})$ переставлены местами строки и столбцы, то полученная матрица $(x_{ji}) = X^T$ называется транспонированной к X ней.

Обозначим матрицей $C = X^T X = (c_{ij})$, c_{ij} – элементы матрицы C.

В соответствии с алгоритмом нахождения обратных матриц (см. например [11]) вычислив определитель этой матрицы и алгебраических дополнений, находим обратную матрицу:

$$(*) \qquad C^{-1} = \frac{1}{\Delta}(C_{ij})^{T}.$$

Здесь C_{ij} — алгебраические дополнения элементов c_{ij}, $\Delta = \det(C) = |C|$ – определитель матрицы C и этот определитель должен быть отлично от нуля. (Проверьте!)

Окончательно расчетное выражение для вычисления коэффициентов регрессии имеет вид:

$$(28) \qquad B = C^{-1} X^T Y.$$

После определения коэффициентов регрессии необходимо установить правильность выбора регрессионной модели, т.е. проверить адекватность полученного уравнения регрессии. Такая проверка позволяет установить правомерность ограничения полинома регрессии выбранной степенью m. Например, сначала необходимо использовать линейное уравнение регрессии, затем уравнение 2-й степени и т.д.

Проверка адекватности осуществляется путем сопоставления расчетного значения критерия Фишера с критическим расчётным значением. Для этого, прежде всего, определяется дисперсия адекватности:

$$(29) \qquad S^2_{ad} = \frac{1}{N\text{-}n} \cdot \sum_{j=1}^{N} (\tilde{y}_j - y_j)^2 .$$

Здесь $\tilde{y}_j$ — расчетное значение отклика y; y_j — наблюдаемое в ходе эксперимента значение отклика; n – количество коэффициентов, включенных в уравнение регрессии; соответствует числу степеней свободы.

Следующим этапом проверки адекватности является сопоставление дисперсии адекватности с дисперсией эксперимента:

$$(30) \qquad S^2_y = \frac{1}{n\text{-}1} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2.$$

Здесь $\bar{y}$ — оценка математического ожидания наблюдений y.

Расчетный критерий Фишера вычисляется по следующей формуле:

$$(31) \qquad F_{наб} = \frac{S^2_{ad}}{S^2_y}.$$

Наблюдаемое значение сопоставляется с критическим значением для выбранного уровня значимости q и соответствующих степеней свободы, выразятся как $\nu_1 = (N - n)$ – число степеней свободы для числителя, а для знаменателя как $\nu_2 = N - 1$: F_Q, где $Q = \{q, \nu_1, \nu_2\}$.

Если наблюдаемое значение меньше критического, то модель можно признать адекватной. Иначе необходимо увеличить степень полинома регрессии, *введя дополнительный член уравнения.* Кроме того, следует учесть, что оценки коэффициентов регрессии будут приближаться к истинным значениям *по мере увеличения числа опытов*. Поэтому в некоторых случаях за счет увеличения числа опытов можно достигнуть адекватности модели.

Рассмотрим следующий пример, который достаточно хорошо иллюстрирует матричный метод построения уравнения регрессии.

Пример 8.

Количество выпускаемой продукции y зависит от двух факторов: x_1 – количества бригад, занятых выпуском продукции, и x_2 – прибыли от реализации продукции (млн уч.ед.).

Требуется определить функцию зависимости $y = f(x_1, x_2)$ по результатам наблюдений, приведенных в таблице, и проверить адекватность полученной модели.

Исходные данные к примеру 8

Наблюдения	x_0 (фиктивная переменная)	x_1	x_2	y
1	1	1	2	4
2	1	3	3	3
3	1	2	4	3
4	1	1	3	2

Решение. Искомое уравнение будет иметь вид:

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

В начале при заданных условиях находим величин b_0, b_1, b_2.

Запишем исходные данные в виде матриц:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу C. Используя правило умножения матриц, получим

$$C = X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 \\ 7 & 15 & 22 \\ 12 & 22 & 38 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель $\Delta = \det C = |C|$ по известному правилу из курса линейной алгебры [11]

$$\Delta = 4(15 \cdot 38 - 22 \cdot 22) - 7(7 \cdot 38 - 12 \cdot 22) + 12((7 \cdot 22 - 15 \cdot 12) = 18 \neq 0$$

По формуле $(*)$ определим обратную матрицу. Для этой цели нужно находить алгебраические дополнения C_{ij} элементов c_{ij} матрицы C по известному правилу (см. например, [11]). Например, $C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 15 & 22 \\ 22 & 38 \end{vmatrix} = 570 - 484 = 86$, аналогично находятся остальные C_{ij}.

Таким образом, получим

$$\mathrm{C}^{-1} = \frac{1}{\Delta}(C_{ij})^T = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 86 & -2 & -26 \\ -2 & 8 & -4 \\ -26 & -4 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}778 & -0{,}111 & -1{,}444 \\ -0{,}111 & 0{,}444 & 0{,}333 \\ -1{,}444 & -0{,}222 & 0{,}611 \end{pmatrix};$$

Отсюда после умножения матриц $C^{-1}X^T$ будем иметь

$$C^{-1}X^T = \begin{pmatrix} 1{,}779 & 0{,}113 & -1{,}222 & 0{,}335 \\ -0{,}111 & 0{,}555 & -0{,}111 & -0{,}333 \\ -0{,}444 & -0{,}227 & 0{,}556 & 0{,}167 \end{pmatrix}.$$

Умножая, справа на матрицу Y получим явный вид матрицы коэффициентов B (см. равенство (28))

$$B = C^{-1}X^{T}Y = \begin{pmatrix} 4{,}465 \\ 0{,}222 \\ -0{,}605 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем математическую модель задачи

$$\tilde{y} = 4{,}465\,x_0 + 0{,}222\,x_1 + (-605)\,x_2.$$

Теперь найдём координаты вектора $\tilde{Y}$ для чего воспользуемся данными для $\{x_0, x_1, x_2\}$.

$\tilde{y}_1 = 4{,}465 \cdot 1 + 0{,}222 \cdot 1 - 0{,}605 \cdot 2 = 3{,}477; \tilde{y}_2 = 4{,}465 \cdot 1 + 0{,}222 \cdot 3 - 0{,}605 \cdot 3 = 3{,}316;$

$\tilde{y}_3 = 4{,}465 \cdot 1 + 0{,}222 \cdot 2 - 0{,}605 \cdot 4 = 2{,}486; \tilde{y}_4 = 4{,}465 \cdot 1 + 0{,}222 \cdot 1 - 0{,}605 \cdot 3 = 2{,}872;$

Следовательно, значения $\tilde{y}$, полученные по модели,

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 3{,}477 \\ 3{,}316 \\ 2{,}486 \\ 2{,}872 \end{pmatrix}$$

Дисперсия адекватности (29) будет иметь вид:

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{4\text{-}3}\sum_{j=1}^{4}(\tilde{y}_j - y_j)^2 = 1{,}395.$$

Дисперсия адекватности (30):

$$S_y^2 = \frac{1}{4\text{-}1}\sum_{j=1}^{4}(y_j - \bar{y}_j)^2 = 0{,}667,$$

где
$$\bar{y} = \frac{4+3+3+2}{4} = 3.$$

Расчетный критерий Фишера вычисляется по формуле:

$$\mathrm{F}_{\text{наб}} = \frac{\mathrm{S}_{\text{ad}}^2}{\mathrm{S}_{\text{y}}^2} = \frac{1{,}395}{0{,}667} = 2{,}091.$$

Критическое значение для $q = 0{,}5;\ \nu_1 = 1;\ \nu_2 = 3$ по таблице Фишера имеем

$$\mathrm{F}_{q=0,05,\nu_1=1,\nu_2=3} = 10{,}13.$$

Так как $F_{наб} < F_{кр}$, то гипотеза об адекватности модели принимается.

Задание. В условиях примера 8 определите функцию зависимости $y = f(x_1, x_2)$ по результатам наблюдений, приведённым в следующей таблице, и проверьте адекватность полученной модели.

Исходные данные к заданию

Наблюдения	x_0 (фиктивная переменная)	x_1	x_2	y
1	1	1	2	4
2	1	3	3	3
3	1	2	4	3
4	1	2	3	1

В завершении данной тематики следует напомнить, что «Метод наименьших квадратов» ранее нами было использована в Теме19, пункт 2, Матричный метод построения уравнение регрессии по результатам наблюдений и процесс оптимизации сравнительно прост и в целом базируется на элементах курса линейной алгебры.

Далее кратко остановимся ещё на один метод построение регрессионной модели методом шаговой регрессии, в основе которого лежит метод наименьших квадратов.

9.3.Построение регрессивной модели методом шаговой регрессии.

Для обработки пассивного эксперимента (т.е. в ходе эксперимента экспериментатор не вмешивается активно в исследуемый процесс и обрабатывает полученные результаты шаг за шагом) часто применяются так называемый «***метод шаговой регрессии***» в основе которого лежит метод наименьших квадратов.

Суть метода заключается в следующем:

- в процессе пассивного эксперимента проведено N измерений n независимых переменных (факторов) и зависимой переменной y.

- по полученной выборке требуется построить функциональное уравнение регрессии вида:

(32)
$$\tilde{y} = b_0 + \sum_{j=1}^{L} b_j F_j(x),$$

где $L-$число включённых в уравнение функций; $F_j(x)-$система функций; $x-$вектор независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Чтобы построить уравнение регрессии, мы должны выбрать систему функций $F(x)$. Например, для $L=5$ и $n=2$ образующий полином будет иметь вид:

$$\tilde{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Задача заключается в том, что нужно выбрать те функции, которые будучи включенными, в уравнении регрессии, давали бы адекватное описание исследуемого объекта. В качестве характеристики адекватности объекта используется остаточная сумма квадратов.

(33)
$$S_l^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \tilde{y}_j)^2,$$

где $\tilde{y}_j -$значение y, найденное по модели; $n-$общее число наблюдений.

Для построения модели на каждом $l-$м шаге поочерёдно включается или исключается переменная x_j из общего множества факторов (переменных) в формуле

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^2, \cdots, x_1x_2, \cdots)$$

и вычисляется остаточная сумма квадратов (33).

При включении на $l-$м шаге новой переменной остаточная сумма квадратов уменьшится на величину

(34)
$$\Delta S_{l(+1)}^2 = S_l^2 - S_{l(+1)}^2;\ j = 1,2,\cdots,k\ .$$

При исключении на шаге l новой переменной остаточная сумма квадратов увеличивается на величину

(34)
$$\Delta S_{l(-1)}^2 = S_{l(-j)}^2 - S_l^2;\ j = 1,2,\cdots,k..$$

Принятие решения о включении $j-$й функции в уравнение связано с выполнением условия

(35)
$$F_{+j} = \frac{\Delta S_{l(+j)}}{S_{l(+j)}^2 \cdot (n - d_l - 2)} > F_Q; \quad Q = \{q, \nu_1, \nu_2\};$$

где d_l – число коэффициентов уравнения на l – м шаге.

При исключении j – й функции из уравнения проверяется условие

$$F_{-j} = \frac{\Delta S_{l(-j)}}{S^2_{l(-j)} \cdot (n - d_l - 2)} < F_Q; \quad Q = \{q, \nu_1, \nu_2\}; \tag{36}$$

где в формулах (35) и (36) величина F_Q – определяется таблицей критические точки распределения Фишера.

Если неравенства выполняется, то j – я соответственно функция включается или исключается. Процедура построения заканчивается, когда получено уравнение, в которое нельзя добавить x_j из предложенного множества $F(x)$ или из которого нельзя исключить ранее введённые переменных x_j. По модели может быть рассчитана средняя ошибка прогноза.

Следовательно, задача обработка результатов пассивного эксперимента методом шаговой регрессии сводится к следующему процессу:

- определению системы функций $F(x)$;
- сбору необходимых наблюдений;
- построению модели шаговой регрессии.

Ввиду значительной сложности численных расчётов для иллюстрации примера построения модели методом шаговой регрессии в дополнение 3 предлагается пакетом программы для статистической обработки данных в компьютере STATISTIC (пример5).

ДОПОЛНЕНИЕ 1

ГЛАВА VI

Прикладные вероятностные теории

<u>Тема 21</u>. Основы теории информации

Теория вероятностей, определившая как математический аппарат описания объектов и явлений, положила основу (стала фундаментом) целого ряда теорий, получивших весьма распространённый прикладной характер. Многие из этих теорий определили, в свою очередь, математические основы современных информационных технологий.

Среды этих теорий, важнейшее место занимает теория информации, в основе которой лежат труды К. Шеннона, где он интерпретирует ***количественную меру информации*** через вероятностной меры.

Характерно то, что первичным (изначальным) понятием или категорией, этой теории является *неопределённость*, а в качестве меры применяется понятие ***«энтропия».***

1. Энтропия как мера неопределённости

Неопределённость любого события определяется вероятностью его наступления (появления), неопределённость случайной величины определяется численной характеристикой функции плотности вероятностей, например, с помощью второго центрального момента или, дисперсией. Однако для случайных объектов или явлений, у которых состояния качественно различаются, в то время количественная характеристика не различаются, использование дисперсии представляется невозможным. В общем случае мера неопределённости, связанная с распределением вероятности, должна быть некоторой его числовой характеристикой, не зависящеё от того, в какой шкале измеряются реализации случайного объекта или явления. В качестве такой меры К. Шеннон предложил использовать ***энтропию*** H для случайного объекта

(или явления) α :

$$H(\alpha) = H(p_1, p_2, \cdots, p_n) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \log p_j, \quad (1)$$

где $p_{1,} p_2, \cdots, p_n$ – вероятности случайных событий $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, характеризующих возможные состояния случайного объекта или события. При этом выполняется «контроль»

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1; \quad (2)$$

и

(3) $$\lim_{p\to 0}(-p\log p)=0,\ \lim_{p\to 1}(-p\log p)=0,$$

Из условий (2) и (3) следует, что неопределённость отсутствует в том и только в том случае, когда одно из p_j равно единице. Максимальная неопределённость достигается в случаях, когда все p_j равны между собой, т.е. все $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1/n$.

Примерами таких распределений: подбрасывание игральной косточки (шестигранный кубик) дискретный случай или любые равновозможные события; равномерное распределение в непрерывном случае, где функция плотности имеет постоянное значение. В то время для равносильного (например, равновероятного), распределения неопределённость возрастает с возрастанием количество выборки n.

Такая ситуация означает, что энтропия (1) является как <u>*мерой неопределённости*</u>, так и <u>*мерой разнообразия.*</u> Это означает, что чем *сложнее*, *и разнообразнее объект или явление*, тем с большей неопределённостью объект становится (обладает свойством) «*менее прогнозируемым*».

В случае, когда случайный объект α представляется как континиум, например, для случайной величины X, принимающей «*бесконечное несчётное*» множество значений, где $x \in X$, энтропия вычисляется по формуле

(4) $$H(\alpha) = H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\cdot \log p(x)dx;$$

при условии выполнении контроля: $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

Следует заметить, что в формулах (1) и (4) основание логарифма не оказывает качественного влияния на оценку энтропии, а лишь определяет её размерность. При теоретическом анализе непрерывных случайных величин с использованием (включающем) дифференциального или интегрального исчисления, наиболее удобно использовать натуральные логарифмы (т.е. логарифмы с основанием $e \approx 2{,}71828182845$), при этом энтропия определяется в натуральных единицах измерения, называемыми «***Нити*** или ***Хартли***».

Число "e" было введено в 1736 году Леонардом Эйлером как предел числовой последовательности

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n;\ n = 1,2,3,4,\cdots$$

Вот несколько начальные значения этой последовательности:

$a_1 = 2;\ a_2 = 2{,}25;\ a_3 = 64/27 = 2{,}370370\cdots;\ a_4 = 625/256 = 2{,}4414062\cdots$.

В теории пределов показывается, что числовая последовательность a_n по мере возрастания n, монотонно возрастает и ограничена сверху числом **3**. *Поэтому имеет предел. Этот предел и обозначается числом*

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n,$$

Далее, на основании теории степенных рядов было доказано, следующая замечательная формула:

(*) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

справедливая, на всей числовой прямой $x \in (-\infty, +\infty)$, *где* $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. *В частности, для* $x = 1$ *получаем равенство:*

(**) $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Задание. *По формуле* (**) *вычислите число* e *и по формуле* (*) *вычислите* $\sqrt{e}$ *и* e^{-1} *с точностью до десяти знаков.*

При анализе цифровых машин и других подобных устройств, работающих в двоичном коде (т.е. в двоичной системе счисления), как правило, используются двоичные логарифмы (логарифмы с основанием 2) и соответственно *двоичные единицы* – ***биты.*** При анализе измерительных устройств, работающих в десятичной системе счисления (десятичном коде), удобнее применять десятичные логарифмы и *десятичные единицы* – ***диты.*** Между этими единицами измерений существуют следующие связи:

1 дит = 2,3 нит = 3,3 бит;

1 нит = 1,45 бит = 0,43 дит;

1 бит = 0,69 нит = 03 дит;

Разумеется, указанная ситуация в полной мере относится к единице измерения количества информации.

Рассмотрим примеры: такой объект как игра в орлянку (подбрасывание монеты), Для такого объекта характерны два равновероятных случайных результата: выпадение *решётки* или *орла*. Энтропия этого явления вычисляется по формуле

$$H(M) = -0{,}5 \cdot \log_2(0{,}5) - 0{,}5 \cdot \log_2(1-0{,}5) = -\log_2(0{,}5) = \log_2 2 = 1 \text{ бит.}$$

Другой пример: в урне имеются одни белые шары. Случайно извлекается один шар. Вероятность извлечения цветного шара равна 0, а белого шара равна 1.Энтропия этого явления равна

$$H(Ш) = -1 \cdot \log_2 1 - 0 \cdot \log_2 0 = 0$$

В этих двух примерах $n = 2$, при этом, (непредсказуемость) исхода в первом случае максимальна, а во втором случае неопределённость исхода отсутствует.

При увеличении числа n, например, $n = 6$, при подбрасывание шестигранного кубика, с учётом равновероятного распределения возможных состояний имеем

$$H(K) = -\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} \log_2 \frac{1}{6} \approx 2{,}58 \text{ бит}$$

Для задачи «бутерброда» также возможны два состояния: хлеб и масло. На основании известного в народе «*закона*» о том, что бутерброд всегда падает маслом вниз, имеем

$$H(Б) = -1 \cdot \log_2 1 - 0 \cdot \log_2 0 = 0$$

Для двух и более случайных объектов или явлений энтропия определяется аналогично как определение вероятности, т.е. с увеличением числа n энтропия возрастает.

Если α и β – независимые случайные объекты или явления, то для их суммы (совместного определения) имеет место равенство

(5) $$H(\alpha \cup \beta) = H(\alpha) + H(\beta),$$

т.е. *энтропия двух или нескольких независимых объектов или явлений равна сумме энтропий этих объектов или явлений. Это свойство называется свойством аддитивности энтропии.*

Если α и β – зависимые случайные объекты или явления, то для их суммы (совместного определения) имеет место равенство

(6) $$H(\alpha \cup \beta) = H(\alpha) + H(\beta/\alpha) = H(\beta) + H(\alpha/\beta),$$

где $H(\beta/\alpha)$ или $H(\alpha/\beta)$ определяется как «математическое ожидание энтропии» условного распределения.

Для всех случайных объектов или явлений имеет место неравенство $H(\alpha) \geq H(\alpha/\beta)$, это неравенство согласуется с интуитивным представлением о том, что знание (информация) о состояние β может только уменьшить неопределённость α, а если они независимы, т.е. $H(\alpha/\beta) = H\{\alpha)$, то энтропия останется неизменной.

Пример 1. Неопределённость даты проведения ежегодного мероприятия можно определить двумя способами:

1) $$H(\alpha) = \sum_{j=1}^{365} p_j \log p_j = -\frac{1}{365}\sum_{j=1}^{365} \log \frac{1}{365} = 8{,}54 \text{ бит,}$$

где 365 – число дней в году, а для високосного года вместо 365 пишут 366;

2) $$H(\alpha) = H(\beta \cup \gamma) = \sum_{j=1}^{12} p'_j \log p'_j + \sum_{k=1}^{30} p''_k \log p''_k = -$$

$$= -\sum_{j=1}^{12} \frac{1}{12} \log \frac{1}{12} - \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{30} \log \frac{1}{30} = 3{,}6 + 4{,}94 = 8{,}54 \text{ бит},$$

где 12-число месяцев в году; 30-число дней в месяце.

Пример 2. Специалист, занимающийся проблемой B, для информационного обеспечения своей интеллектуальной деятельности воспользовался автоматизированной информационно – поисковой системой (АИПС). В базе АИПС содержится 2% (два процента) статей, непосредственно относящихся к данной проблеме. Система поиска в АИПС точно обнаруживает эти статьи по запросу. В то же время ввиду некоторой близости тематики других статей к проблеме B эта система с равной вероятностью может представить или не представить специалисту статьи, не относящиеся непосредственно к проблеме B.

Определить эффект системы поиска, используя меру снятия неопределённости по отношению к проблеме B.

Решение. Формализуем представленную ситуацию. Определение отношения той или иной статьи к проблеме B представим как опыт β, имеющий два возможных исхода:

B_1 – «не относится»;

B_2 – «относится».

Определение эффективности системы поиска представим как опыт α, также имеющий два возможных исхода:

A_1 – «определён признак»;

A_2 «не определён признак».

Вероятности определения и неопределения признака B соответственно равны:

$$P(A_1) = \left(\frac{98}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{100} \cdot 1\right) = 0{,}51; \quad P(A_2) = \left(\frac{98}{100} \cdot \frac{1}{2}\right) = 0{,}49.$$

Неопределённость отношения той или иной статьи к проблеме B вычисляется по формуле

$$H(\beta) = -0{,}98 \cdot \log(0{,}98) - 0{,}02 \cdot \log(0{,}98) = 014 \text{ бит}.$$

Это есть неопределённость базы АИПС по отношению к проблеме B. В целом, с учётом эффективности работы системы поиска, то есть опыта α, определённость АИПС можно вычислить через условную энтропию $H(\alpha/\beta)$. Для этого определим:

-условные вероятности исходов B_1 и B_2 опыта β при условии исходов A_1 и A_2 опыта α :

$$P(B_1/A_1) = \frac{49}{51}; P(B_2/A_1) = \frac{2}{51}.$$

Так как из 51 случая, когда система поиска давала положительный ответ, 49 статей не относились к проблеме B, а 2 статьи - относилась

$$P(B_1/A_2) = 1; P(B_2/A_2) = 0.$$

что вполне очевидно.

-условные энтропии АИПС (при условиях A_1 и A_2):

$$H(\beta/A_1) = -\frac{49}{51} \cdot \log \frac{49}{51} - \frac{2}{51} \cdot \log \frac{2}{51} = 0{,}24 \text{ бит}.$$

Тогда, средняя условная энтропия опыта β (неопределённость АИПС) при условии существования системы поиска (опыта) будет равна математическому ожиданию энтропии условного распределения:

$$H(\alpha/\beta) = P(A_1) \cdot H(\alpha/A_1) + P(A_2) \cdot H(\beta/A_2) =$$

$$= 0{,}51 \cdot 0{,}24 + 0{,}49 \cdot 0 = 0{,}12 \text{ бит}$$

Если сравнить значение с ранее полученным значением неопределённости базы АИПС, то можно констатировать, что система поиска в данном случае недостаточно эффективна, поскольку снимает неопределённость АИПС всего на 14%.

2. Характеристика (определение) количества информации

Пусть случайный объект или явление β имеет неопределённость $H(\beta)$. Любой целенаправленный опыт α, имеющий определённое количество исходов (сообщений, результатов, измерений), уменьшает степень неопределённости β. Разность

(7) $$I(\alpha,\beta) = H(\beta) - H(\beta/\alpha).$$

где $H(\beta)$ - априорная, а $H(\beta/\alpha)$ - апостериорная энтропия (неопределённости) объекта или явления β есть *количество информации* (или *числовое значение количества информации в битах*), об объекте или явлении β полученной в результате опыта α. В этом случае $I(\alpha,\beta)$ представляется как мера *снятия неопределённости*, а процесс получения информации об объекте или явлении называется *процессом снятия неопределённости*.

Если результат (исходы) опыта α полностью определяет все сведения, которыми обладает β, то $H(\beta/\alpha)$ становится равным 0, а

(8) $$I(\alpha,\beta) = H(\beta) = I(\beta).$$

В этом случае можно считать, что получена *полная информация* об объекте или явлении β, отражающая все его свойства и являющаяся *мерой разнообразия* объектов или явлений.
Так раскрывается атрибутивная концепция информации, которая определяет информацию как *атрибут материи*.

Если $H(\beta/\alpha) = H(\beta)$, то следует, что в результате опыта α (а фактически о любой информационной деятельности) не получено никакой информации об объекте или явлении β, то есть $I(\alpha,\beta) = 0$.

Из приведённых утверждений следуют важные практические выводы, определяющие эффективность информационной деятельности.

- *информационная деятельность считается эффективной, если она приводит к снятию неопределённости (7).*

-*эффективность информационной деятельности может быть оценена количественно; предел, к которому стремится эта оценка, определяется выражением (8).*

Значение $I(\alpha,\beta)$ определяется выражением (7) как количество информации по объекту или явления β, содержащейся в опыте α, а выражение (8) - как количество информации о β, полученной объектом α. Последние выводы свидетельствуют о том, что $I(\alpha,\beta)$ есть *мера сравнения двух объектов*.

В результате сравнения объекта β с объектами α и γ получим следующее количество информации (7) $I(\alpha,\beta) = H(\beta) - H(\beta/\alpha)$ и

(9) $$I(\gamma,\beta) = H(\beta) - H(\beta/\gamma).$$

Очевидно, при $H(\alpha) \neq H(\gamma)$ будет справедливо неравенство $H(\beta/\alpha) \neq H(\beta/\alpha)$, а следовательно, $H(\alpha,\beta) \neq H(\gamma,\beta)$. Это означает, что различные субъекты (α или γ), обладающей различной энтропией или информацией, при исследовании одного и того же объекта (β) могут получить различное количество информации. Разность

(10) $$I_\beta(\alpha,\gamma) = I(\alpha,\beta) - I(\gamma,\beta) = H(\beta/\gamma) - H(\beta/\alpha),$$

можно рассматривать как меру сравнения информированности объектов (или субъектов) α и γ об объекте или явлении β. Это обстоятельство является важной предпосылкой *семантической теории информации.*

Пример 3. В качестве объекта β возьмём русскую письменную речь. В русском алфавите 32 буквы (без различия «е» и «ё»). С первого взгляда для нас как субъектов наблюдения неопределённость русской письменной речи β. В результате опыта α_1 получим данные приведёны ниже в таблице:

Буква p_i	(-) 0,175	О 0,090	Е, Ё 0,072	А 0,062	И 0,062	Т 0,053	Н 0,053	С 0,045
Буква p_i	Р 0,040	В 0,038	Л 0,035	К 0,028	М 0,026	Д 0,025	П 0,023	У 0,021
Буква p_i	Я 0,018	Ы 0,016	З 0,016	Ь, Ъ 0,014	Б 0,014	Г 0,013	Ч 0,012	Й 0,010
Буква p_i	Х 0,009	Ж 0,007	Ю 0,006	Ш 0,006	Ц 0,004	Щ 0,003	Э 0,003	Ф 0,002

Эти данные на основании большого статистического материала $(n \to \infty)$ были получены со значениями вероятностей появления отдельных букв русского алфавита и пробела (–) в текстах».

Решение. Неопределенность в случае равномерного распределения букв алфавита:

$$H(\beta) = -\sum_{i=1}^{32} p_i \log p_i = \log 32 = 5\text{бит}.$$

Проведем опыт α_1 в целях определения истинного (а не равновероятного) распределения вероятностей появления отдельных букв в русской речи.

На основании этих данных (этой информации) получим

$$H(\beta/\alpha_1) - 0{,}175\log 0{,}175 - 0{,}090\log 0{,}090 - \ldots - 0{,}002\log 0{,}002 \approx 4{,}35\text{бит}.$$

Тогда

$$I(\alpha_1, \beta) = H(\beta) - H(\beta/\alpha_1) = 0{,}65\text{бит}.$$

Такое количество информации содержится в таблице или получено в результате опыта α_1. Далее проведем опыт α_2, определяющий возможные связи между парами отдельных букв русского алфавита в письменной речи. В результате получим

$$H(\beta/\alpha_1,\alpha_2) = H(\alpha_1,\alpha_2) - H(\beta/\alpha_1) = -p(--)\log(--) - p(-a) - p(-б)\log p(-б) - \ldots -$$
$$p(яя)\log p(яя) + p(-)\log(-) + p(a) + \ldots + p(я)\log p(я) = 3{,}52\,\text{бит}$$

Тогда

$$I(\alpha_1,\alpha_2,\beta) = H(\beta/\alpha_1) - H(\beta/\alpha_1,\alpha_2) = 4{,}35 - 3{,}52 = 0{,}83\text{бит}.$$

Такое количество информации получено в результате опыта α_2, проведенного после опыта α_1.

3. Основы теории измерений

Измерение – это алгоритм, осуществляющий сопоставление наблюдаемых признаков или величин, характеризующих реальные объекты или явления, с некоторой шкалой (измерительной шкалой), посредством которой наблюдаемым признакам или величинам присваивается определенное обозначение: число, номер или символ.

Результат измерения, возникающий в процессе отражения объекта и субъекта наблюдения, направлен на снятие неопределенности субъекта по отношению к наблюдаемому объекту или явлению. При этом на результат измерения может оказать влияние случайность (неопределенность) как объекта, так и субъекта, а также случайные помехи, возникающие в среде (или канале) измерения. Эти случайности приводят к некоторой *остаточной неопределенности.*

Остаточная (апостериорная) неопределенность, получаемая в результате измерений, называется *погрешностью измерений* и является мерой *точности* измерения.

Измерение можно представить как способ снятия неопределенности. Суть измерения в полной мере описывается выражением (9), которое определяет количество информации, полученной в результате измерений. При измерении случайной величины X количество полученной информации

$$I(\alpha, X) = H(X) - H(X, \alpha), \tag{11}$$

где $H(X)$ - энтропия (априорная неопределенность) измеряемой величины до измерения, т.е. до опыта α; $H(X/\alpha)$ - энтропия измеряемой величины после измерения, или энтропия погрешности измерения.

Значение энтропии $H(X)$ определяется начальными значениями субъекта измерения об объекте измерения. Обычно эти знания ограничиваются возможным диапазоном измерения $\Delta X = X_B - X_H$, где X_B, X_H - соответственно верхний и нижний пределы измерения, а также равновероятным представлением о возможном появлении значений измеряемой величины в установленном диапазоне .

Это явление (вероятность появления случайной величины в установленном диапазоне), можно представить в виде следующего рисунка:

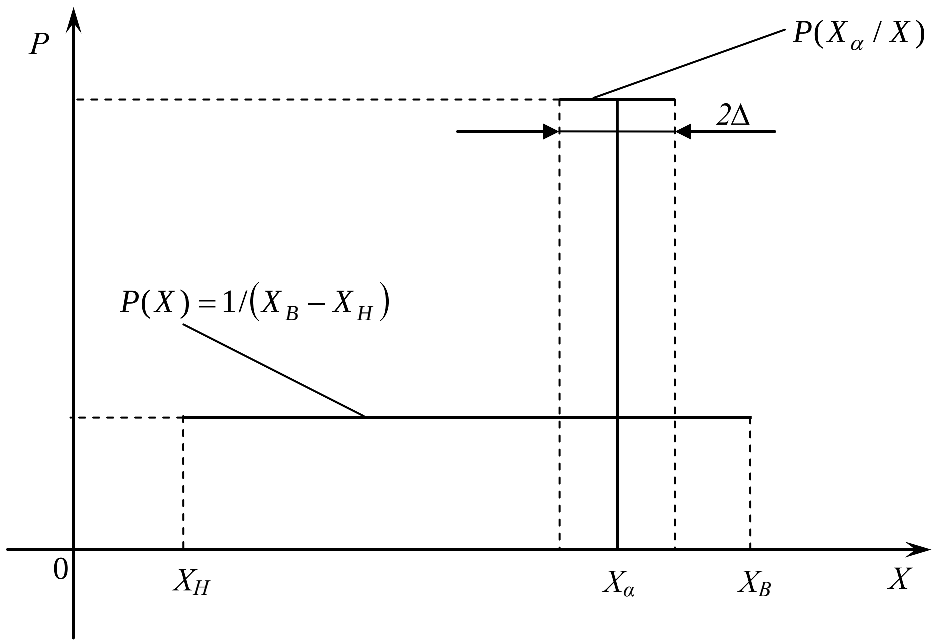


Рис.83

Вероятность появления СВ в установленном диапазоне

При этих условиях

$$P(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{X_B - X_H}, & если X_H < X < X_B; \\ 0, & если X < X_H или X > X_B; \end{cases}$$

$$H(X) = -\int_{X_H}^{X_B} \frac{1}{X_B - X_H} \ln \frac{1}{X_B - X_H} dx = \ln(X_B - X_H). \tag{12}$$

Энтропия погрешности полученного результата измерения X_α:

$$P(X_\alpha / X) = \frac{1}{2\Delta};$$

(13) $$H(X/\alpha) = -\int_{X_\alpha - \Delta}^{X_\alpha + \Delta} \frac{1}{2\Delta} \ln \frac{1}{2\Delta} dx = \ln(2\Delta) = \ln d,$$

где Δ - абсолютная погрешность измерения, зависит как от свойств субъекта измерения, так и от дезинформационного действия помех, возникающих при измерении или, другими словами, в процессе передачи информации от объекта к субъекту измерения. Выражение (13) показывает, что в результате измерения получается не истинное значение X_α, а лишь суженный в N раз интервал *неопределенности* $d = (X_\alpha + \Delta) - (X_\alpha - \Delta) = 2\Delta$, в котором может находится число X_α с равной вероятностью.

С учетом (12) и (13) количество информации, полученное в результате опыта α,

(14) $$I(\alpha, H) = \ln(X_B - X_H) - \ln(2\Delta) = \ln \frac{X_B - X_H}{2\Delta} = \ln N,$$

где число N показывает, сколько интервалов неопределенности длиной d укладывается во всем диапазоне, т.е. какое *число различимых градаций* возможно, получить при использовании данного средства измерений.

Величина d может быть определена строго математически для *любого закона распределения погрешности.*

Так, для нормально распределенной погрешности, т.е. для плотности нормального распределения

$$P(X_\alpha) = p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

имеем

$$\ln p(x) = -\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{x^2}{2\sigma^2},$$

Следовательно, получим

(15) $$H(X/\alpha) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left(\ln \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$

$$= \ln \sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \ln \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} =$$

$$= \ln \sigma\sqrt{2\pi} + \ln\sqrt{e} = \ln\left(\sqrt{2\pi e} \cdot \sigma\right)$$

Сопоставляя равенств (15) и (13), можно получить соотношение, прямо связывающее значение d с числовой характеристикой нормального распределения σ:

(16) $$d = \sqrt{2\pi e} \cdot \sigma \approx 4{,}133\sigma.$$

Аналогичным путем интервал неопределенности может быть найден для любого выраженного аналитически закона распределения погрешности.

При измерении различных физических величин с помощью автоматических устройств (измерительных приборов) величина d определяется исходя из метрологической характеристики так называемого прибора « *класса точности* γ ». Для большинства приборов γ вычисляется по формуле:

(17) $$\gamma = \frac{\Delta_\partial \cdot 100}{(X_B - X_H)},$$

где Δ_∂ - допустимая абсолютная погрешность прибора; $(X_B - X_H)$ - диапазон измерения прибора.

На основании (14) и (17) можно принять

$$N = \frac{50}{\gamma}, \quad H(X_H / \alpha) = \ln[\gamma(X_B - X_H)/50]. \tag{18}$$

Из второй формулы (18) следует, что при измерении одной и той же величины различные средства (или субъекты) измерения позволяют получить различное количество информации, т.е. обеспечивается различная степень снятия неопределенности об объекте измерения. В случае использования двух измерительных приборов с различным классом точности и различным диапазоном измерения эта разность составит

$$\Delta H(X / \alpha', \alpha'') = \ln[\gamma'(X'_B - X'_H)/50] - \ln[\gamma''(X''_B - X''_H)/50] = \tag{19}$$

$$= \ln\gamma'(X'_B - X'_H) - \ln\gamma''(X''_B - X''_H) = \ln\frac{\gamma'(X'_B - X'_H)}{\gamma''(X''_B - X''_H)}.$$

Пример 4. Отец принес из леса корзину белых грибов. Семью заинтересовало содержимое корзины. Младший сын подразделял грибы на «большие» и «небольшие», старшая дочь – на «большие», «средние» и «маленькие». Мать взвесила каждый гриб на весах с диапазоном измерения от 0 до 1 кг и классом точности 1. Следует определить, какое количество информации получили сын, дочь и мать, если известно, что самый маленький гриб весит около 30 г, а самый большой – около 800 г.

Решение. На основании выражения (14) получим:

$$I\langle сын\rangle = \ln\frac{X_B - X_H}{(X_B - X_H)/2} = \ln 2 = 0{,}69 \ нит.$$

$$I\langle дочь\rangle = \ln\frac{X_B - X_H}{(X_B - X_H)/3} = \ln 3 = 1{,}1 \ нит.$$

На основании (14) и второй формулы (8):

$$I\langle мать(весы)\rangle = \ln\frac{X_B - X_H}{(X'_B - X'_H)/50} = \ln\frac{(80-30)50}{100-0} = \ln 38{,}5 = 3{,}65 нит.$$

Здесь $X_B - X_H$ - приблизительный (априорный) вес соответственно самого большого и самого маленького грибов; $X'_B - X'_H$ - диапазон шкалы весов.

4. Основы теории кодирования и передачи информации

4.1. Основные понятия, формирование экономичного кода алфавита

В системе передачи информации *состояние* того или иного объекта отражается в форме сообщения, представленного в виде *символов.* Независимо от содержания сообщение обычно передается в виде последовательности электрических, звуковых, световых, механических или иных *сигналов,* характеризующих символы сообщений.

*Операция перевода сообщения в последовательность различных сигналов называется **кодированием.** Правило, ставящее в соответствие каждому передаваемому сообщению некоторую комбинацию сигналов, называется **кодом***. Если все комбинации кода имеют одну и ту же длину m ($m-$число символов или разрядов в кодовой комбинации), т.е. $m = const$, то такие коды называют ***равномерными***. В остальных случаях, $m \neq const$ коды называют ***неравномерными.*** По *основанию* системы счисления коды делятся на *двоичные* $(K = 2)$, *троичные* $(K = 3)$ и т.д. Величина K определяет число значений сигнала, характеризующих каждый символ сообщений в данной системе счисления. Например, при $m = 2$ и $K = 2$ т.е. при делении любого натурального числа на 2 рассматривают только остатки $\{0;1\}$. Из них можно составить четыре комбинации: {00}, {01}, {10}, {11}. Количество возможных комбинаций сигналов N, при заданных m и K определяется равенством:

(20) $$N = K^m.$$

При наличии числа возможных событий M код называют ***неизбыточным,*** если $M = N$. В случаях, когда $N > M$ код называют ***избыточным.*** Переход от неизбыточного кода к избыточному осуществляют путем добавления некоторых контрольных позиций.

При кодировании информации, подлежащей передаче, нужно учитывать следующее:

1) *код должен быть экономичным, т.е. среднее число сигналов, необходимых для полной индексации каждого признака из M (например, каждой буквы алфавита), должно быть минимально;*
2) *в совокупности потоке сообщения, код должен быть однозначно декодирован*; *для равномерного кода эта задача решается элементарно без какого-либо разделения, (введение разделительных сигналов снижает экономичность кода), никакое кодовое обозначение не должно совпадать с началом какого-либо другого, более длинного кодового обозначения;*
3) *код должен быть помехоустойчивым, т.е. при передаче закодированного сообщения возможные в канале передачи помехи, шумы не должны искажать суть сообщения.*

Для наиболее распространенного двоичного кода среднее число двоичных элементарных сигналов $\overline{m}$, приходящихся в закодированном сообщении на одну букву исходного сообщения, не может быть меньше H, т.е. $\overline{m} \geq H$, где

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i$$

энтропия одной буквы (всюду рассматриваются логарифмы с основанием 2). Исходя из этого. при любом методе кодирования для записи длинного сообщения из M букв требуется не меньше чем MH двоичных знаков. Это обстоятельство вытекает из условия, что $p_1 = p_2 = \ldots = p_i = \ldots = p_N = 1/N$ и все буквы независимы между собой. В этом случае $H = \log N$. Если $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_i = \ldots \neq p_N$, то $H < \log N$. Отсюда следует, что учет *статических закономерностей сообщения* позволяет построить более экономичный, нежели равномерный код.

Для построения такого экономичного кода Р. Фано и К. Шенноном предложена следующая методика (код Шеннона-Фано):

Все M букв (или иных знаков, знаковых систем) располагают в столбик в порядке убывания вероятностей их появления в сообщении.

1. Разбивают все буквы на две группы: верхнюю и нижнюю так, чтобы вероятности для букв принадлежали к каждой из этих групп, были по возможности близки одна к другой.
2. Для букв первой группы в качестве первой цифры кодового обозначения используется цифра 1, а для букв второй группы — цифра 0.
3. Каждую из двух полученных групп снова делят на две части, возможно, более близкой к суммарной вероятности.
4. Присваивают буквам вторую цифру кодового обозначения: 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит буква к первой или ко второй из этих более мелких групп.
5. Каждую из содержащих более одной буквы групп снова делят на две части возможно более близкой суммарной вероятности и т.д.
6. Процесс повторяется до тех пор, пока каждая из групп не будет содержать одну единственную букву.
7. Процесс повторяется до тех пор, пока каждая из групп не будет содержать одну единственную букву.

Пример 5.

Возьмем алфавит, состоящий из 6 букв, вероятности которых равны 0.4: 0.2; 0,2: 0.1; 0.05 и 0.05. Необходимо составить код Шеннона Фано.

Решение. Представим решение в виде таблицы.

Номер буквы	Вероятность	Разбиение на группы	Кодовое обозначение
1	0,4	I	1
2	0,2	I	01
3	0,2	I	001
4	0,1	II I	0001
5	0,05	II II I	00001
6	0,05	II II	000000

Для данного примера наилучший равномерный код состоит из трехзначных кодовых обозначений, так как в соответствии с равенством $N = K^m \Rightarrow N = 2^2 = 4;\ 4 < 6 < 2^3$.

Поэтому в нем на каждую букву приходится три элементарных сигнала.

При использовании кода Шеннона Фано среднее число элементарных сигналов, приходящихся на одну букву равна,

$$\overline{m} = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0.1 + 5 \cdot (0.05 + 0.05) = 2{,}3.$$

Это значительно меньше 3 и очень близко к предельно минимальному значению:

$$H = 0{,}4 \cdot \log 0{,}4 - 2 \cdot 0.2 \cdot \log 0{,}2 - 0.1 \cdot \log 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}05 \cdot \log 0{,}05 \approx 2{,}2$$

Таким образом, получен экономичный код.

Еще более экономичным получается код, если по методу Шеннона-Фано кодировать не отдельные буквы, а блоки букв, n - буквенные блоки.

Пример 6. Возьмем алфавит, состоящий из двух букв: A и B. имеющих вероятности $p = p(A) = 0{,}7$ и $q = P(B) = 0{,}3$. Вычислим энтропию:

$$H = -0{,}7 \cdot \log 0{,}7 \quad 0{,}3 \cdot \log 0{,}3 = 0{,}881$$

Двухбуквенный алфавит можно привести к простейшему равномерному коду: 1 - для буквы A и 0 - для буквы B, требующему для передачи каждой буквы один двоичный знак. Это на 12% больше минимально достижимого значения H. Требуется определить среднее значение длины кода в двух и трехбуквенных сообщениях.

Решение. Представим коды двух и трехбуквенных комбинаций, построенные по методу Шеннона-Фано в следующей таблице

Результаты решения к примеру 6

Комбинация букв	Вероятность	Кодовое обозначение	Комбинация букв	Вероят-ность	Кодовое обозначение
n=2			n=3		
AA	0,49	1	*AAA*	0,343	11
AB	0,21	01	*AAB*	0,147	10
BA	0,21	001	*ABA*	0,147	011
BB	0,09	000	*BAA*	0,147	010
			ABB	0,063	0010
			BAB	0,063	0011
			BBA	0,063	0001
			BBB	0,027	0000

Среднее значение длины кода для $n = 2$:

$$\overline{m}(n) = 1 \cdot 0{,}49 + 2 \cdot 0{,}21 + 3 \cdot (0{,}21 + 0{,}09) = 1{,}81$$

или на одну букву $\overline{m}(2) = 1{,}81/2 = 0{,}905$, что на 3% отличается от минимально достижимого значения H. Среднее значение длины кода для $n = 3$:

$$\overline{m}(n) = 2 \cdot (0{,}343 + 0{,}147) + 3 \cdot (0{,}147 + 0{,}147) + + 4 \cdot (3 \cdot 0{,}063 + 0{,}027) = 2.726$$

или на одну букву $\overline{m}(3) = 0{,}909$, что на 3% отличается от минимально достижимого значения H.

Представленные примеры отражают суть основной теоремы Шеннона о кодировании при отсутствии помех:

При кодировании сообщения, разбитого на n - буквенные блоки, можно, выбрав число n сколь угодно большим, добиться того, чтобы среднее число двоичных элементарных сигналов, приходящихся на одну букву исходного сообщения, было сколь угодно близко к H.

Другими словами:

Любое достаточно длинное сообщение из М букв может быть закодировано при помощи сколь угодно близкого к МН числа элементарных сигналов, если только предварительно разбить это сообщение на достаточно большие блоки из n букв и сопоставлять отдельные кодовые обозначения сразу целым блокам.

Самым экономичным из всех возможных является код Хафмана: *ни для какого, другого метода кодирования букв некоторого алфавита среднее число элементарных сигналов, приходящихся на одну букву, не может быть меньше того, какое поручается при кодировании, но методу Хафмана.* Построение этого кода опирается на простое преобразование, называемое *сжатием* алфавита. Суть этого метода такова.

1. Буквы $a_1, a_2, ..., a_{N-1}, a_N$ алфавита A располагают в порядке убывания вероятностей их появления: $p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_{N-1} \geq p_N$.

2. Две последние буквы принимают за одну букву b получая новый алфавит A_1, состоящий из букв $a_1, a_2, ..., a_{N-2}, b$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_{N-2}, (p_{N-1} + p_N)$. Эта операция называется ***однократным сжатием***. Буквы алфавита A_1, располагают в порядке убывания вероятностей.

3. Аналогичным образом подвергается сжатию алфавит A_1. Эта операция по отношению к алфавиту A называется двукратным сжатием, а по отношению A_1 называется однократным сжатием. В результате этой операции получается алфавит A_2, содержащий $(N-2)$ буквы, который также располагают в порядке убывания вероятностей.

4. Операция сжатия продолжается до тех пор, пока не образуется алфавит A_{N-2}, содержащий всего две буквы $(N-(N-2)) = 2$. Этим буквам присваиваются кодовые обозначения 1 и 0.

5. Если кодовое обозначение уже приписано всем буквам алфавита A_j, то буквам предыдущего алфавита, A_{j-1} сохранившимся и в алфавите A_j, приписываются те же кодовые обозначения, которые они имели в алфавите A_{j-1}, двум буквам a' и a'' алфавита A_j, слившимся в букву b алфавита A_{j-1}, приписываются обозначения, получающиеся из кодового обозначения буквы b добавлением цифр 1 и 0 в конце.

Пример 7. Исходный алфавит A состоит из 6 букв с вероятностями использования 0.4, 0.2, 0.2, 0.1, 0.05, 0.05 соответственно. Требуется осуществить кодирование алфавита по методу Хафмана.

Решение. Представим решение этой задачи в виде следующей таблицы

Результаты решения к примеру 7

Номер буквы	Вероятности и кодовые обозначения									
	Исходный Алфавит		Сжатые алфавиты							
	A		A_1		A_2		A_3		A_4	
1	0.4	0	0.4	0	0.4	0	0.4	0	0.6	1
2	0.2	10	0.2	10	0.2	10	0.4	11	0.4	0
3	0.2	111	0.2	111	0.2	111	0.2	10		
4	0.1	1101	0.1	1101	0.2	110				
5	0.05	11001	0.1	1100						
6	0,05	11000								

По заданной таблице легко заметить, что столбец A_1 получен путём объединения строки 5 и 6 из столбца A, путём сложения вероятностей и для двух последних букв, столбец A_2 получен путём объединения строки 4 и 5 из столбца A_1, путём сложения вероятностей и для двух последних букв, и т.д.

Среднее число элементарных сигналов, приходящихся на одну букву:

$$\overline{m} = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot (0{,}05 + 0{,}05) = 2{,}3$$

Для кодов с основанием K основная теорема о кодировании при отсутствии помех может быть представлена следующим образом.

При любом методе кодирования, использующем код с основанием K,

$$\overline{m} \geq H / \log K = m_{\min},$$

где H — энтропия одной буквы сообщения. При этом $\overline{m} \to m_{\min}$, если кодировать сразу блоки, состоящие из n букв.

4.2. Определение характеристики канала передачи информации

Из теоремы Шеннона следует, что *если по линии связи* (*или каналу передачи информации) за единицу времени можно передать* L *элементарных сигналов, принимающих* K *различных значений, то скорость передачи сообщений по такой линии не может быть большей, чем*

$$V = \frac{L \log K}{H} = \frac{C}{H}. \qquad (21)$$

Величина

$$C = L \cdot \log K, \qquad (22)$$

независящая от самой линии связи, указывает наибольшее количество единиц информации, которое можно передать по данной линии за единицу времени, и называется *пропускной способностью* линии связи.

Выражения (21) и (22) характеризуют линию связи без помех, т.е. идеализированную линию. В отличие от нее *линия связи с помехами* может быть математически описана заданием не только L и V, но K^2 и неотрицательных чисел $p_{ij}(\alpha)$, представляющих вероятность трансформации элементарного сигнала α_i, в сигнал α_j, вызванную влиянием помех.

Пропускная способность линии связи с помехами:

$$C = L \cdot c = L \cdot I_{\max}(\alpha,\ \beta), \qquad (23)$$

где

(24) $$I_{\max}(\alpha,\beta) = H_{\max}(\beta) - H_{\min}(\beta/\alpha)$$

Для дискретного канала с основанием K величина $H_{\max}(\beta) = \log K$, что показывает неопределенность некоторого опыта β. При передаче информации об этом опыте в результате действия помех возникает дополнительная неопределенность $H(\beta/\alpha)$, снижающая получаемую на выходе линии связи информацию об этом опыте. Для дискретного симметричного канала с основанием K, $(K_{вых} = K_{вход})$ вероятность трансформации любого символа:

(25) $$P = \sum_{i=1}^{K} p_{ij}(\alpha)$$

а вероятность трансформации символа α_i, в символ α_j (при $i \neq j$):

(26) $$p_{ij}(\alpha) = \frac{P}{K-1}.$$

Тогда вероятность прохождения символа (при $i = j$):

(27) $$p_{ij}(\alpha) = 1 - P.$$

а дополнительная неопределенность:

(28) $$H(\beta/\alpha) = -(1-P)\log(1-P) - P\cdot\log\frac{P}{K-1}.$$

В этом случае

(29) $$C = L\cdot\left[\log K + (1-P)\cdot\log(1-P) + P\cdot\log\frac{P}{K-1}\right].$$

В частном случае, когда $K = 2$ (двоичный симметричный канал), пропускная способность линии связи

(30) $$C = L\cdot[1 + (1-P)\cdot\log(1-P) + P\cdot\log P].$$

Основная теорема о кодировании при наличии помех формулируется следующим образом:

Для любой линии связи с помехами всегда можно подобрать специальный код, позволяющий передавать сообщения по этой линии с заданной скоростью, сколь угодно близкой к V, определённой формулой (21), *так, чтобы вероятность ошибки в определении каждой переданной буквы оказалась меньше любого заранее заданного числа* $\varepsilon > 0$.

Из формул (21) и (30) следует, что скорость передачи информации при $L = const$ зависит от величины $C = f(K, p)$ и экономичности кода (H). В свою очередь, число p зависит от величины и характера помех. Поэтому при наличии помех и заданного K можно достичь необходимой скорости передачи информации путем ее соответствующего кодирования.

Пример 8.

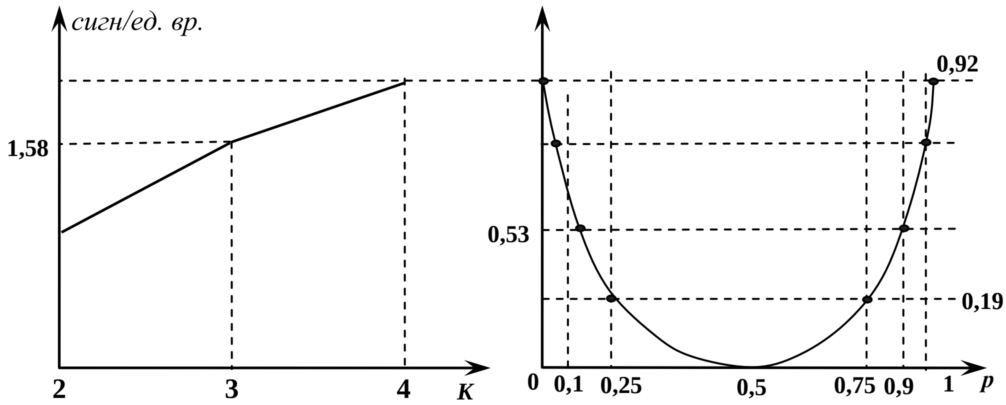
Определить влияние вероятности трансформации символа p (влияние помех), характеристик кодирования (K и H) на пропускную способность линии связи и скорость передачи сообщения, в частности:

1) $C = f(K)$ при $p = 0$, $K = \{2, 3,4\}$;
2) $C = f(p)$ при $K = 2$, $P = \{0{,}01, 0{,}1, 0.25, 0{,}5, 0{,}75, 0{,}9, 0{,}99\}$;
3) $V = f(p, H)$ при $K = 2$, $L = 100$ симв/с,

$P = \{0{,}01, 0.1. 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, 0{,}9\ 0{,}99\}$ и H_1 - равномерный код, H_2 - код Шеннона-Фано.

Решение. Первую задачу решим на основании выражения (21), и результат представим в виде графика (рис. 84, а)), вторую задачу - на основании (30) и графика (рис. 84, б)).

а)



а) б)

Рис.84

Зависимость $C = f(K)$ при $p = 0$ (рис.84,а)) по равномерный показывает, что с увеличением основания кода пропускная способность растет, однако при этом усложняется схемная реализация. Зависимость $C = f(p)$ при $K = 2$ (рис. 84, б)) показывает, что уже при $p = 0{,}1$ пропускная способность падает почти вдвое, а при $p = 0{,}5$ она практически пропадает (при $K = 2$). Это вполне очевидно, поскольку при равновероятном появлении сигнала 0 или 1 возникает полная неопределенность. При дальнейшем увеличении p наблюдается симметричное возрастание C: здесь вступает в силу инверсия 0 и 1. Зависимости $V = f(p, H)$ приведены на (рис. 85), а расчетные значения приведены в в таблице

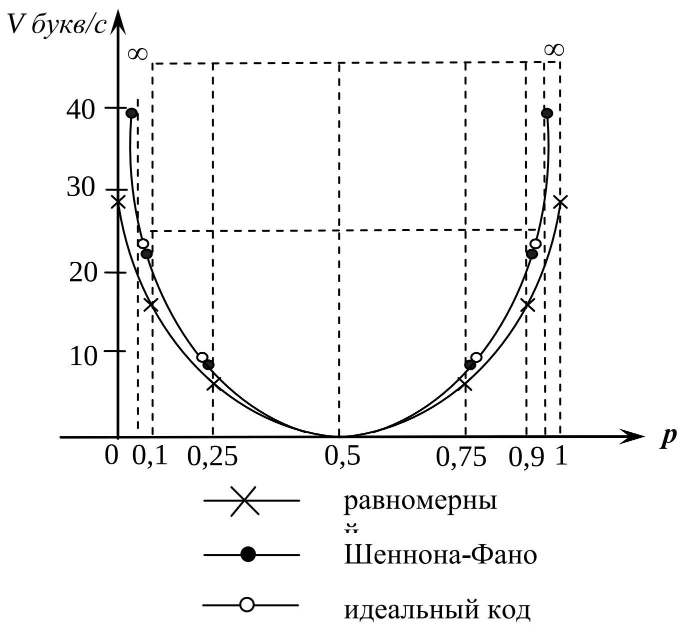


Рис.85

Скорость передачи сообщения

Вид кода	Вероятность трансформации символа						
	0, 01	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	1
Равномерный	30,7	17,7	6,3	0	6,3	17,7	30,7
Шеннона-Фано	40,0	23,0	8,3	0	8.3	23,0	40,0
Идеальный	41,8	24,0	8,6	0	8,6	24, 0	41,8

Если принять во внимание, что реальные системы работают при $P = 10^{-3} \div 10^{-5}$, то можно отметить существенное влияние метода кодирования на скорость передачи сообщений.

5. Основы теории надежности

Функционирование системы S, имеющей состав $C = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ - компоненты, элементы системы, и структуру $L = \{l_1, l_2, ..., l_m\}$ где $l_1, l_2, ..., l_m$ - связи между компонентами, определим выражением

(31) $$\left(F_S / F(C \& L)\right) \to Z,$$

где F - функциональные возможности; F_S - алгоритм функционирования; Z - цель системы. В процессе функционирования системы, т.е. в процессе целенаправленного изменения ее *состояний* по алгоритму F_S, выполняется преобразование

(32) $$F_S : X \to Y,$$

где X, Y - входные и выходные потоки (координаты) системы, например входная и выходная информация в процессе информационной деятельности. Для того чтобы

(33) $$Y \to Z,$$

Элементы и связи системы $(C \& L)$, должны иметь соответствующие параметры, совокупность которых для системы определяется областью или множеством G. Множество параметров G подразделяется на подмножества G_C и $G_L : G_C \subset G_L$ - множество параметров компонентов или элементов системы (состава); $G_L \subset G$ - множество параметров связей (структуры).

Состояние системы, при котором значения основных ее параметров соответствуют требованиям, характеризующим способность выполнять заданные функции, называется *работоспособным*.

Состояние, при котором значение хотя бы одного параметра не соответствует требованиям, характеризующим способность выполнять заданные функции, называется *неработоспособным*.

Событие, при котором система переходит из работоспособного в неработоспособное состояние, называется *отказом*. Обратное событие называют *восстановлением*.

Если каждому параметру $q \in G$ или $q \in G_C$ и $q \in G_L$ дать количественную оценку θ, то получим пространство значений основных параметров Θ. Требования работоспособности количественно могут быть заданы в виде двусторонних допусков $[\theta_H, \theta_B]$ на основные параметры, т.е.

(34) $$\theta_{H_i} \le \theta_i < \theta_{B_i},$$

где i - индекс параметра объекта (системы, ее элемента или связи), $i \in I$. Требования работоспособности (34) определяют область Θ_p работоспособных состояний объекта в пространстве Θ. Согласно понятию работоспособности область Θ_p является декартовым произведением допусков $[\theta_H, \theta_B]$, т.е.

(35) $$\Theta_p = \prod_{i \in I} [\theta_H, \theta_B].$$

Дополнением Θ_p к Θ будет область неработоспособных состояний $\Theta_{отк}$:

(36) $$\Theta_{отк} = \overline{\Theta}_p \text{ или } \Theta_{отк} = \Theta \setminus \Theta_p .$$

При этом под отказом объекта понимается переход вектора θ в область $\Theta_{отк}$, а под изменением функциональных возможностей $F(C \& L)$ процесс изменения вектора параметров $\theta(t)$. Продолжительность или объем работы объекта, при которых вектор $\theta(t)$ будет находиться в области Θ_p, называется *наработкой.*

Процесс $\theta(t)$ имеет случайный характер, поэтому отказ есть случайное событие, а наработка – случайная величина.

Свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение наработки называется *надежностью* или *безотказностью* объекта. *Количественные характеристики* в силу вышеуказанного являются *вероятностными.* Если характеристики надежности рассматривать как математическое ожидание некоторого функционала Φ, определенного на траекториях процесса $\theta(t)$, то некоторый показатель надежности

(37) $$h = M\{\Phi[\theta(t)]\},$$

где M - оператор математического ожидания. Так, например, задавая функционал Φ в виде

$$\Phi[\theta(t)] = \begin{cases} 1, если \theta(t) \in \Theta_p при T \le t \le T + \sigma, \\ 0, если \theta(t) \in \Theta_{отк}, хотя\_бы\_при\_одном\_значении t \in [T, T + \sigma], \end{cases}$$

Получим вероятность безотказной работы объекта на интервале наработки $[T, T + \sigma]$:

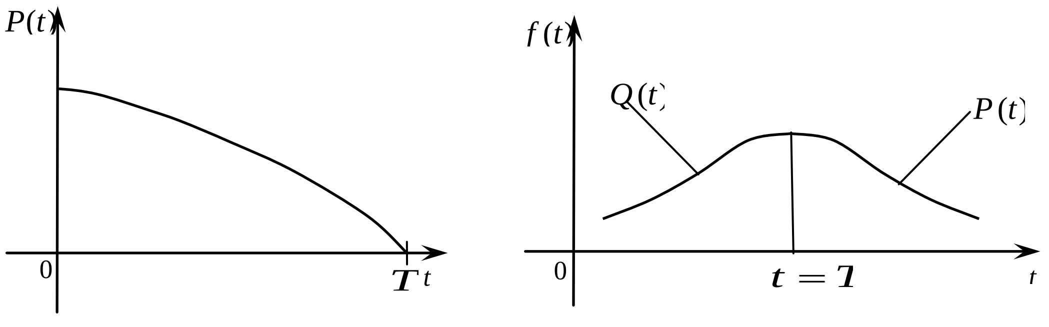
(38) $$M\{\Phi[\theta(t)]\} = P(T, T + \sigma).$$

6. Определение количественных характеристик надежности элементов

Допустим, что при отсчете времени работы элемента от $t = 0$ при $t = T$ произойдет отказ. Тогда T определим как время *отказа.* представим $P(t)$ как вероятность того, что в течение времени $t \le T$ отказа не произойдет. $P(t)$ называют *вероятностью безотказной работы.* Вероятность события, противоположного рассмотренному и несовместимого с ним, называют *вероятностью отказа* $Q(t)$:

(39) $$Q(t) = 1 - P(t).$$

Вероятность безотказной работы $P(t)$ является непрерывной убывающей функцией времени, вид которой определяется условиями возникновения отказа в системе, т.е. траекторией $\theta(t)$.



Вероятность безотказной работы

Вероятность отказа

Рис.86

Очевидно лишь, что $P(0)=1, P(\infty)=0$. Тогда из второй рисунке следует, что отказ исключен лишь при $t=0$, когда $P(t)=1$и $Q(t)=0$. Отказ возможен при всех значениях $t>0$, хотя при малых t вероятность его мала.
Время отказа работы элемента как непрерывная случайная величина характеризуется функцией плотности вероятности функцией плотности вероятности $\varphi(t)$. При этом вероятность безотказной работы элемента при $T \leq t$ определяется формулой:

(40) $$P(t)=\int_t^\infty \varphi(\tau)d\tau,$$

а вероятность отказа элемента равна

(41) $$Q(t)=\int_0^t \varphi(\tau)d\tau,$$

Площадь под кривой $\varphi(t)$ (см.рис. вероятность отказа), равна 1, разделена на две части ординатой, соответствующей абсциссе t. Площадь слева от t численно равна $Q(t)$, а справа равна $P(t)$.

Из равенства (41) следует, что вероятности отказа элемента является функцией распределения T, т.е.

(42) $$Q(t)=\Phi(t),$$

тогда получим дифференциальное равенство

(43) $$\varphi(t)=\frac{d}{dt}Q(t)=\frac{d}{dt}\Phi(t).$$

Из равенства (39) и (43) находим следующее равенство

(44) $$\varphi(t)=\frac{d}{dt}(1-P(t)=-\frac{d}{dt}P(t).$$

Таким образом, время отказа элемента характеризуется средним из всех значений, которые оно может получать при наблюдении множества однотипных элементов. В свою очередь среднее время безотказной работы элемента при $t \geq 0$ есть математическое ожидание

(45) $$\overline{T}=\int_0^{+\infty} t\,\varphi(t)dt=\int_0^{+\infty} P(t)dt,$$

где для выполнения предельного перехода (45) нужно потребовать выполнение условия $\lim\limits_{t\to\infty} tP(t)=0$.

Далее, определим средний функциональный ресурс невосстанавливаемых элементов. Представим себе, что группа однотипных элементов входящие в состав одной системы и отказы в этой системе не устраняются, то ***интенсивность отказов*** этих элементов определятся равенством

(46) $$\lambda(t)=-\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{d}{dt}P(t)=\frac{\varphi(t)}{P(t)}=-\frac{d}{dt}\ln P(t).$$

Из (46) следует, что

(47) $$P(t)=\exp\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right).$$

В случае, когда $\lambda(t) = const,$ что соответствует режиму нормального функционирования системы, получим

(48) $$P(t) = e^{-\lambda t},$$

и

(49) $$\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

то-есть имеет место экспоненциальное распределение времени. На основании (48) и (45) олучим

(50) $$\overline{T} = \int_0^{+\infty} P(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Это означает, что постоянная интенсивность отказов $\lambda = const,$ равна средней частоте отказов:

(51) $$\lambda = \frac{1}{T},$$

Из равенств (49) и (51) выводится равенство

(52) $$P(t) = \exp(-\frac{t}{\overline{T}}).$$

В частности, в этом равенстве $t = \overline{T}$ получим, $P(\overline{T}) = e^{-1} \approx 0{,}37,$ т.е. математическое ожидание времени отказа для экспоненциального распределения определится как время, в течение которого вероятность безотказной работы уменьшится до величины $e^{-1} \approx 0{,}37$, т.е. в e раз.

Следует заметить, что среднее время безотказной работы $\overline{T}$ является лишь одной из числовых характеристик случайной величины «*времени безотказной работы* T » (*наработки*).

Для исчерпывающей характеристики величины T необходимо знать еще и дисперсию $D(T) = \sigma_T^2$ – времени отказа или его среднее квадратичное отклонение σ_T. Эта величина находится по вычислительной формуле

(53) $$D(T) = \sigma_T^2 = M\left(T^2\right) - \left(MT\right)^2 = 2\int_0^{\infty} t\,P(t)dt - (\overline{T})^2.$$

Отсюда, при условии, когда $\lambda = const$ имеем (с учётом (48), (50) и дважды интегрирования по частям)

(54) $$D(T) = \sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

Откуда следует, что

(55) $$\sigma_T = \frac{1}{\lambda} = \overline{T}.$$

Таким образом, при *экспоненциальном законе надёжности* среднее квадратичное отклонение времени отказа равно среднему времени безотказной работы элемента. Это свойство экспоненциального закона надёжности позволяет считать, что при его наличии величина $\overline{T}$ является достаточно полной характеристикой надёжности.

Для определения характеристик надёжности элементов обычно проводят специальные испытания при условиях, близких к условиям функционирования этих элементов в системе. При этом исследуется N образцов элемента. На временной шкале откладываются равные интервалы времени $\Delta t.$ В каждом $i-$м интервале времени определяется число отказавших элементов n_i. Испытания продолжается до тех пор (t_k), пока не выйдут из строя все элементы.

Среднее время безотказной работы на основании (в соответствии) опытных данных определяют по формуле

(56) $$\bar{T} = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \frac{\bar{t}_i}{N},$$

где $k = \frac{t_k}{\Delta t}$, а $\bar{t}_i = \frac{(t_{i-1} + t_i)}{2}$ для $t_i = i \cdot \Delta t$. Статистическая оценка $\lambda(t)$ получается из выражения

(57) $$\lambda^{\bullet}(t) = \frac{\Delta n}{\Delta t} \cdot \frac{1}{m},$$

где Δn – число отказавших элементов за промежуток времени от $(t - 0{,}5 \cdot \Delta t)$ до $(t + 0{,}5 \cdot \Delta t)$; $m = \frac{(m_{i-1} + m_i)}{2}$ – среднее число исправно работающих элементов в интервале Δt, а $(m_{i-1}, m_i$ – число исправно работающих элементов в начале и в конце интервала).

Вышеприведённые характеристики являются показателями надёжности невосстанавливаемых объектов. При этом не учитывается возможность их восстановления в процессе функционирования системы. В практических условиях такая возможность чаще всего присутствует; более того, для этих целей создаются специальные службы.

Полагая, что каждый отказ каким-либо способом устраняется, восстанавливаемый элемент можно характеризовать числом отказов n, происходящих в течение промежутка времени t, и средним временем между двумя соседними отказами $\bar{t}$, называемым *«наработкой на отказ»*

(58) $$\bar{t} = \sum_{i=1}^{n} t_i \Big/ n$$

где n – число отказов элемента за время испытаний t; t_i – время исправной работы элемента между $(i-1)$ – м и i – м отказами.

В тех случаях, когда испытания производились не с одним, а с m аналогичными элементами, то формула (58) выглядит так:

(59) $$\bar{t} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} t_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{m} n_j,$$

где n_j – число отказов j – го образца; t_{ij} – время исправной работы между $(i-1)$ – м и i – м отказами j – го образца.

Пример 9. На основании данных технических паспортов установлены, что вероятность отказа первого прибора в течении 6000 часов составляет 0,95, а вероятность второго прибора в течении 10000 часов составляет 0,90.

Определить, какой из этих приборов более надёжен.

Решение. В соответствии с равенством (39) вероятность безотказной работы приборов за соответствующие периоды времени следующая:

$$P_1(t) = 1 - Q_1(t) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05; \qquad P_2(t) = 1 - Q_2(t) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10.$$

На основании равенства (52) имеем

$$\ln P(t) = -\frac{t}{\bar{T}} \Rightarrow \bar{T} = -\frac{t}{\ln P(t)}.$$

Для первого и второго приборов соответственно находим:

$$\bar{T}_1 = -\frac{6000}{\ln[0{,}05]} = 2003\text{ч}. \quad \bar{T}_2 = -\frac{10000}{\ln[0{,}10]} = 4343\text{ч}.$$

Поскольку $\bar{T}_2 > \bar{T}_1$, можно считать, что второй прибор более чем в два раза надежнее, чем первого прибора.

Пример 10. На основании проведённых испытаний N образцов элемента A, получены следующие данные:

Результаты испытаний

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n_i	2	11	23	40	56	66	75	81	79	69	53	45	25	18	11	6

Здесь число $i-$выражает номер интервала испытаний, число n_i $-$выражает количество отказавших образцов на $i-$м интервале времени. Общее число образцов элемента A определяется по формуле $N=\sum_{i=1}^{16} n_i$. В нашем примере $N=660$. Длительность интервала $\Delta t=200$ч. Нужно определить среднее время безотказной работы.

Решение. По формуле (56) $\overline{T}=\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \frac{\overline{t}_i}{N}$ получим

$$\overline{T}=\frac{2\cdot 100+11\cdot 300+23\cdot 500+40\cdot 700+56\cdot 900+66\cdot 1100}{660}+$$

$$+\frac{75\cdot 1300+81\cdot 1500+79\cdot 1700+69\cdot 1900+53\cdot 2100+45\cdot 2300}{660}+$$

$$+\frac{25\cdot 2500+18\cdot 2700+11\cdot 2900+6\cdot 31000}{660}=1556\text{ч.}$$

Задание. На основании данных испытаний, проведённых в примере 10, определите:
- функцию плотности вероятности $\varphi(t)$;
- функцию распределения $\Phi(t)=Q(t)$;
- функцию вероятности безотказной работы $P(t)$;
- вероятность безотказной работы $P(t)$ какого-то значения $t=T$ по графику функции $P(t)$ и представьте аналитически на основании полученного значения $\overline{T}=1556$ ч.

7. Определение надёжности системы по схеме

В этом пункте кратко остановимся на построения и анализа надежностно – функциональной схемы (НФС). Определение надёжности системы состоящей из элементов, необходимо начинать с построения и анализа надежностно – функциональной схемы (НФС), отражающей так называемой алгоритмы Φ_S. Как правило, эта схема отражает последовательность выполнения функции плотности вероятности φ_i:

$$\Phi_S \stackrel{\Delta}{=} \{\varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_i \to \cdots \to \varphi_n\} \to W, \tag{60}$$

где $W-$поставленная цель.

В этом случае вероятность безотказной работы некоторой системы S сосчитывается на основании формулы

$$P_S(t)=\prod_{i=1}^{n} p_i(t)\,. \tag{61}$$

В некоторых случаях в целях повышения надёжности системы отдельные элементы (функции φ_i) или группы элементов (функций φ_i) резервируют. Как правило, такой подход применяют к тем элементам системы, которые обладают невысокой надёжностью и (или) обладают очень ответственной функцией (предназначением). При резервировании $i-$ элемента (функции φ_i) в надежностно – функциональной схемы (НФС) появляются параллельные соединения , для которых вероятность отказа

(62) $$Q_p(t) = \prod_{j=1}^{m} q_{ij}(t),$$

а вероятность безотказной работы в соответствии формулы (39)

(63) $$P_p(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m} q_{ij}(t),$$

где $j-$число резервированных (параллельных соединения в НФС) элементов, т.е. кратность резервирования функции φ_i. В результате резервирования отдельных элементов или групп элементов могут возникнуть m путей функционирования системы S, т.е. достижение заданной цели W системы станет возможным по m цепочкам типа (60). Тогда $S : X \overset{m}{\to} Y$. Для подобных сложных систем вероятность безотказной работы можно определить по формуле (выражению)

(64) $$P(t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-k} a_{ij} \prod_{i=1}^{k+l} p_i(t) \prod_{i=k+l+1}^{n} q_i(t).$$

где $j-$номер пути; $k-$число элементов на $j-$м пути; $l-$количество безотказно функционирующих элементов, не входящих в путь, для которых определяется произведение вероятностей, т.е. члены внутренней суммы. Каждый элемент имеет переменный номер i . При вычислении каждого из членов внешней суммы нумерация изменяется таким образом, чтобы элементы, образующие соответствующий путь, имели бы номер от l до k . Номера этих k элементов не изменяются в пределах внутренней суммы, но при вычислении каждого ее члена изменяется нумерация остальных $(n-k)$ элементов. Коэффициент a_{ij} равен 1 или 0:
$a_{ij} = 1$; для $j = 1$; то есть при суммировании по первому пути, а для остальных путей следует принимать $a_{ij} = 0$ для всех слагаемых, которые уже встречались на предыдущих путях.

Пример 11. Пусть на следующей схеме (рисунке 87)

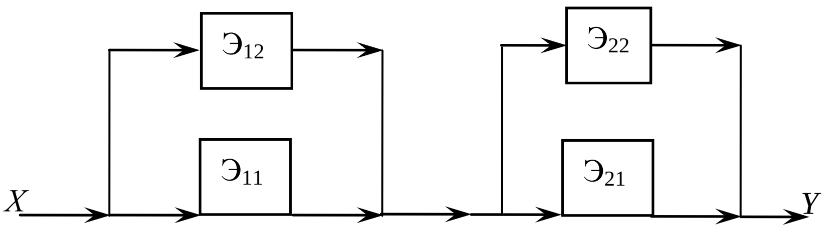


Рис.87

представлена НФС системы, состоящей из двух основных $(Э_{11}, Э_{21})$ и двух их резервирующих $(Э_{12}, Э_{22})$ элементов. Всего в схеме четыре элемента, т.е. $n = 4$. Характеристики надёжности для этих элементов определены через вероятности безотказной работы $P_{11}(t) = P_{12}(t)$ и $P_{21}(t) = P_{22}(t)$ и соответственно вероятности отказов $Q_{11}(t) = Q_{12}(t)$ и $Q_{21}(t) = Q_{22}(t)$. Требуется оценить надёжность системы.

Решение. Представленная схеме имеет четыре пути функционирования:

$j=1-$ через элементы $Э_{12}$ и $Э_{22}$;

$j=2-$ через элементы $Э_{11}$ и $Э_{22}$;

$j=3-$ через элементы $Э_{11}$ и $Э_{21}$;

$j=4-$ через элементы $Э_{12}$ и $Э_{21}$.

Таким образом, в этом примере $m=4; k=2; l=0+2=2$. Рассмотрим состояние функционирования системы по первому пути;

В случае $j=1$, при этом обязательно должны работать элементы $Э_{12}$ и $Э_{22}$, но могут работать и элементы $Э_{11}$ и $Э_{21}$ или один из них. Вычислим члены внутренней суммы в равенстве (64), полагая $a_{i1}=1,$ так как $j=1$. Эти слагаемые имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} P_{11}P_{22}Q_{11}Q_{21} & \text{при } l=0, \\ \left.\begin{array}{l} P_{12}P_{22}P_{11}Q_{21} \\ P_{12}P_{22}P_{21}Q_{11} \end{array}\right\} & \text{при } l=1, \\ P_{12}P_{22}P_{11}P_{21} & \text{при } l=2. \end{array}$$

Ради краткости в этих формулах будут опущены обозначения зависимости функций от t. Аналогичным образом при $j=2$ находим членов внутренней суммы, для которых $a_{i2}=1,$ так как их не было при $j=1$:

$$P_{11}P_{21}Q_{12}Q_{22}+P_{11}P_{21}P_{12}Q_{22}+P_{11}P_{21}P_{22}Q_{12}.$$

Для повторяющегося на этом пути члена $P_{11}P_{21}P_{12}P_{22};\ a_{ij}=0.$ Для $j=3$ и $j=4$ имеется лишь по одному члену внутренней суммы с коэффициентами $a_{ij}=1.$ Это члены соответственно равны $P_{11}P_{22}Q_{12}Q_{21}$ и $P_{12}P_{21}Q_{11}Q_{22}$.

Осуществляя внешнее суммирование в выражении (64) получим

$$\begin{aligned} P_{SP}(t) = {} & P_{12}P_{22}\cdot(Q_{11}Q_{21}+P_{11}Q_{21}+P_{21}Q_{11}+P_{11}P_{21})+ \\ & +P_{12}P_{21}\cdot(Q_{12}Q_{22}+P_{12}Q_{22}+P_{22}Q_{12})+ \\ & +P_{11}P_{22}Q_{12}Q_{21}+P_{12}P_{21}Q_{11}Q_{22}. \end{aligned}$$

Далее на основании формулы (39) (вероятности отказа $Q(t)=1-P(t)$), после соответствующих преобразований и упрощений получим

$$P_{SP}(t)=\{1-Q_{11}(t)\cdot Q_{12}(t)\}\cdot\{1-Q_{21}(t)\cdot Q_{22}(t)\},$$

что вполне согласуется с равенствами (61) и (63).

Если принять, что при $t=T,$ соответственно $Q_{11}=0{,}9$ и $Q_{21}=0{,}95$, то без резервирования функций φ_{11} и φ_{21} получим, $P_S(T)=0{,}005,$ а с резервированием имеем $P_S(T)=0{,}0185$ {где соответственно $Q_S(T)=0{,}995$ и $Q_{SP}(T)=0{,}9815$ }.

Это свидетельствует о том, что резервирование существенно повышает надёжность системы.

Пусть дана некоторая система, $S-$ состоящая из n элементов, и пусть λ_i выражает интенсивность безотказной работы $i-$го элемента этой системы. Обозначим через Λ_S

$$\Lambda_S=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i. \tag{65}$$

Λ_S- называется *интенсивностью отказов системы*, состоящей из n элементов в соответствии со схемой (60).

Вероятность безотказной работы системы $P_S(t)$ можно найти исходя из формулы (48):

(66) $$P_S(t) = e^{-\Lambda_S \cdot t} \quad .$$

Среднее время отказов такой системы будет

(67) $$\overline{T}_S = \frac{1}{\Lambda_S} = \left(\sum_{i=1}^{n} (\overline{T}_i)^{-1}\right)^{-1},$$

где $\overline{T}_i$ – среднее время безотказной работы i – го элемента системы S.

Вероятность безотказной работы системы, состоящей из m однотипных элементов, соединённых неразрывно, при условии $\lambda_i = const$ определяется равенством

(68) $$P_p(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda_i \cdot t})^m .$$

При этом, можно использовать приближённое равенство

(69) $$\overline{T}_p(t) = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-\lambda_i \cdot t})^m] dt \approx \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \cdot$$

Когда числа λ_i различны, в равенстве (69) вместо λ_i выбирают (подставляют) число $\overline{\lambda}$, равное среднему арифметическому этих чисел: $\overline{\lambda} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$.

Интенсивность отказов такой системы определяется через величины $\overline{T}_p$:

(70) $$\Lambda_p = \frac{1}{\overline{T}_p}.$$

Рассмотрим один пример и на этом ограничимся в этой тематике.

Пример 12. Определить среднее время безотказной работы $\overline{T}_{SP}$ системы НФС, которая представлена на рисунке 87 примера 11 если выполнены условия:

$P_1 = P_{11} = P_{12} = 0{,}9; P_2 = P_{21} = P_{22} = 0{,}95$ при $t = T = 1000$ ч.

Решение. На основании формулы (48) $\{ P(t) = e^{-\lambda t} \}$ для элементов $э_{11}$ и $э_{12}$ имеем

$$\lambda_1 = \frac{\ln P_1(T)}{T} = \frac{\ln(0{,}9)}{1000} = \frac{1{,}05}{1000ч}.$$

Тогда на основании формулы (69) получим

$$\overline{T}_{p1}(t) = \frac{1}{1{,}05 \cdot 10^{-4}}(1 + \frac{1}{2}) = 14286\,ч.$$

а $\Lambda_{P_1} = (\overline{T}_{P_1})^{-1} = 0{,}70 \cdot 10^{-4}\, 1/ч$.

Для элементов $э_{21}$ и $э_{22}$ имеем

$$\lambda_2 = \frac{\ln P_2(T)}{T} = \frac{\ln(0{,}95)}{1000} = \frac{0{,}51}{1000ч}.$$

Тогда на основании формулы (69) получим

$$\overline{T}_{p2}(t) = \frac{1}{0{,}51 \cdot 10^{-4}}(1 + \frac{1}{2}) = 29244ч,$$

а $\Lambda_{P_2} = (\overline{T}_{P_2})^{-1} = 0{,}34 \cdot 10^{-4}\, 1/ч$.

В соответствии формулы (65) имеем

$$\Lambda_{SP} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = (0{,}70 + 0{,}34) \cdot 10^{-4} = 0{,}104 \cdot 10^{-3}\, 1/ч,$$

а величина $\overline{T}_{SP} = (\Lambda_{SP})^{-1} = 9575$ ч.

В условиях нормального функционирования система после отказов её элементов имеет способность восстанавливаться. Для восстановления системы требуется определённое время. В связи с этим показателями функциональной надёжности могут служить:

- суммарная продолжительность безотказной работы (суммарная наработка)

(71) $$T_{\phi} = \sum_{i=1}^{r} T_{\phi_i};$$

(72) $$T_B = \sum_{i=1}^{r} T_{B_i},$$

где r – число отказов системы в рассматриваемый период функционирования системы;

T_{ϕ_i} – отрезки времени безотказной времени между двумя отказами;

T_{ϕ_i} – отрезки времени восстановления системы после каждого отказа.

T_{ϕ} и T_B – случайные величины, зависящие от множества различных факторов. Для невосстанавливаемых систем $T_{\phi} = T$, а $T_B = \infty$.

Значения математических ожиданий соответственно $MT_{\phi} = \overline{T}_{\phi}$ и $MT_B = \overline{T}_B$, определённых в процессе работы (функционирования) системы для специальных испытаний по выборкам T_{ϕ_i} и T_{B_i}, позволяют получить один из возможных показателей надёжности так называемый *«коэффициент готовности»* работающей (функционирующей) системы:

$$K_{\text{гот.}} = \frac{\overline{T}_{\phi}}{\overline{T}_{\phi} + \overline{T}_B}, \qquad (73)$$

а также «*коэффициент внутреннего простоя*»

$$K_{\text{прос.}} = \frac{\overline{T}_B}{\overline{T}_B + \overline{T}_{\phi}}, \qquad (74)$$

и «*коэффициент профилактики*»

$$K_{\text{проф.}} = \frac{\overline{T}_B}{\overline{T}_{\phi}} = \frac{K_{\text{прос..}}}{K_{\text{гот.}}} = \frac{1 - K_{\text{гот.}}}{K_{\text{гот.}}} = \frac{1 - K_{\text{прос.}}}{K_{\text{прос..}}}, \qquad (75)$$

Пример 13. Для системы НФС, которая представлена на рисунке 87 в примере 11 установлено, суммарное время восстановления $\overline{T}_B = 724$ч. Найти коэффициенты готовности, внутреннего простоя и профилактики.

Решение. Приняв за величину м.о. суммарной продолжительностью безотказной работы системы $\overline{T}_{\phi} = \overline{T}_{SP} = 9575$ ч. (см. пример 12), на основании равенств (73) – (75) получим:

$$K_{гот.} = 0{,}994;\; K_{прос.} = 0{,}608 \cdot 10^{-2};\; K_{проф.} = 0{,}612 \cdot 10^{-2}.$$

На этом ограничимся относительно данной тематики. Для более обстоятельного изучения этих вопросов рекомендуем обратиться к специальным источникам, посвящённые прикладным вопросам теории вероятностей. В следующей теме мы будем рассматривать некоторые вопросы системы массового обслуживания.

Дополнение 2

ГЛАВА VII

Элементы теории массового обслуживания

Тема 22. Системы массового обслуживания

В этом разделе кратко рассмотрим элементы системы массового обслуживания (СМО). Нередко возникает необходимость в решении вероятностных задач, связанных с работой систем массового обслуживания (СМО), примерами которых могут служить информационные системы, вычислительные устройства, торговые, транспортные, энергетические системы, системы связи, билетные кассы, ремонтные мастерские, и др.

Общность таких систем выявляется в единстве математических методов и моделей, применяемых при исследовании их профессиональной деятельности. Здесь мы кратко остановимся на основные моменты этой весьма важной и нужной практической части науки теории вероятностей и математической статистики.

В последнее время в связи с широким развитием различных предприятий, производящих продукцию массового потребления, достижения науки теории вероятностей не только успешно используется для качественного отбора уже произведённой продукции, но и для организации самого процесса производства (статистический контроль в производстве).

Большое значение в этом круге проблем имеет правильная разработка статистических методов управления качеством выпускаемой продукции массового характера. Для всего инженерного корпуса (дела) серьёзную роль приобрела теория надёжности «массового обслуживания населения планеты во всём», широко использующая методы теории вероятностей и математической статистики.

Здесь уместно напомнить, что в свою очередь «теория надёжности массового обслуживания» выдвинула перед математикой в целом, а в частности, перед теорией вероятностей (равным образом это относится и к многим фундаментальным наукам) ряд новых теоретических вопросов (задач). Связь теории вероятностей с практическими потребностями была основной причиной её бурного развития в последнее столетие: крупные достижения в области теоретической физики, генетики, микрохирургии, микробиологии, военной технике, компьютерной технологии, освоение космоса и др.

Многие её разделы были развиты как раз в связи с ответами на запросы практиков. Здесь кстати вспомнить замечательные слова великого учёного П.Л. Чебышева: «…**сближение теории с практикой даёт самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает: сами науки развиваются под влиянием её, она открывает им предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных….»**

1. Основные понятия, используемые в системах массового обслуживания

Каждая СМО состоит из определенного количества обслуживающих единиц – *каналов* обслуживания. Каналами могут быть: линий связи, кассиры, продавцы, устройства ЭВМ и др. СМО могут быть одноканальными и многоканальными.

Всякая СМО предназначена для обслуживания *потока заявок* (*или требований*), поступающих от одного или нескольких источников в случайные моменты времени, например звонков в справочную службу телефонной станции. Обслуживание заявки происходят в определённые моменты времени, и продолжается некоторое случайное время $t_{об}$, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. *Случайный характер потока заявок и времени обслуживания* приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается большое число заявок, (они будут становиться в очередь, либо покидают СМО не обслуженными, т.е. получать отказ); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

СМО можно представить в виде следующей схемы

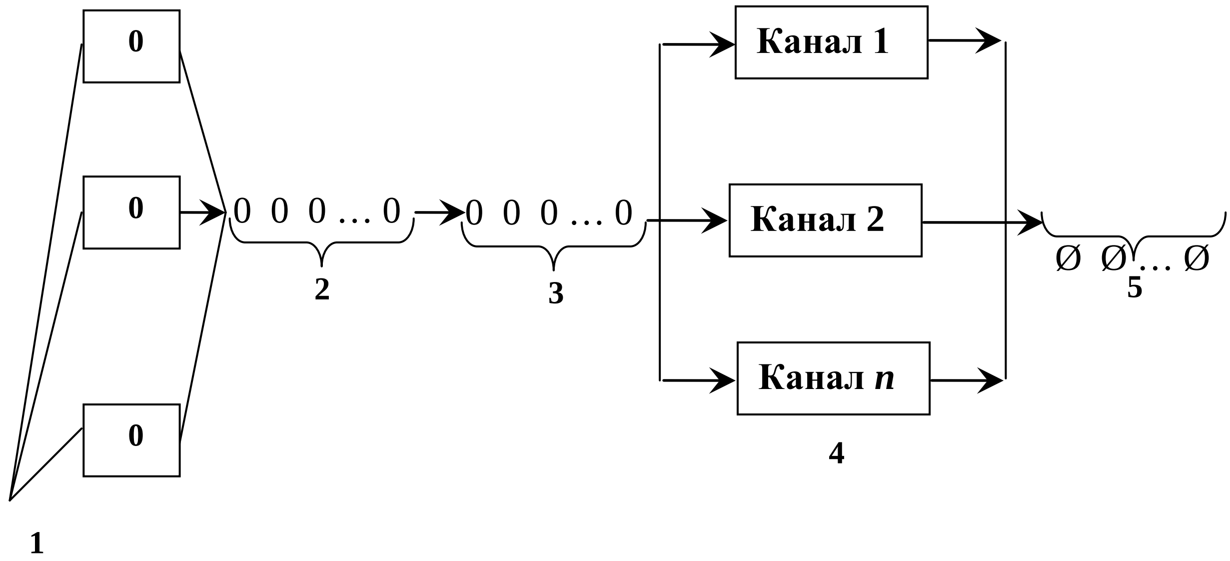


Схема работы системы массового обслуживания

в соответствии с представленной схемой СМО включает в себя следующие элементы:

- 1- источники заявок;
- 2- входной поток заявок;
- 3- очередь заявок на обслуживание, которых может быть одна или несколько;
- 4- узел обслуживания, включающий один или несколько параллельно работающих каналов;
- 5- выходящий поток обслуженных заявок.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты прихода новой заявки или окончания обслуживания очередной.

Системы массового обслуживания делятся на типы по ряду признаков.

1. По условию ожидания начала обслуживания заявки:

- СМО *с отказами*, у которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему, будучи необслуженной;
- СМО *с очередью*, у которых заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной;
- СМО *с ограниченной длиной очереди*, у которых заявки на обслуживание исчерпано;
- СМО *с ограниченным временем ожидания*, у которых срок пребывания каждой заявки в очереди ограничен.

2. По дисциплине обслуживания заявок:

- в порядке поступления;
- в случайном порядке;
- обслуживание с приоритетом, когда заявки определенного типа обслуживаются вне очереди.

3. По месту нахождения источников заявок:

- открытые СМО, в которых характеристики потока заявок не зависят от того, в каком состояния СМО (т.е. сколько каналов занято).
- замкнутые СМО, в которых характеристики потока заявок зависят от состояния СМО;
- обычно это происходит, когда источники заявок находятся внутри самой СМО.

Для описания СМО введем следующие обозначения:

k - число заявок в СМО (в очереди и узле обслуживания);

s - число заявок в очереди;

l - число заявок в узле обслуживания;

n - число каналов (устройств обслуживания);

r - число незанятых каналов.

Легко заметить, что $k = l + s,\ n = l + r.$

2. Структура и классификация систем массового обслуживания

На вход в СМО поступает поток требований на обслуживание. Например, клиенты или пациенты, поломки в оборудовании, телефонные вызовы и т.д. Требования поступают *нерегулярно, в случайные моменты времени*. Также случайный характер носит и продолжительность обслуживания. Это обстоятельство создает нерегулярность в работе СМО, служит причиной ее перегрузок или недогрузок.

Системы массового обслуживания обладают различной структурой, но обычно в них можно выделить четыре основных элемента: *входящий поток требований, накопитель, каналы обслуживания, выходящий поток.*

В зависимости от правил образования очереди различают следующие СМО:

1) ***системы с отказами***, в которых при занятости всех каналов обслуживания, заявка покидает систему *без обслуживания (необслуженной)*; *системы с неограниченной очередью*, в которых заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы обслуживания были заняты;

2) *системы с ожиданием и ограниченной очередью,* в которых время ожидания ограничено какими-либо условиями или существуют ограничения на число заявок, стоящих в очереди.

Характеристики входящего потока требований.

- *поток требований называется* ***стационарным****, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени определенной длины зависит только от длины этого участка.*

- *поток событий называется* ***ординарным****, если невозможно одновременное наступление двух или более событий на участок.*

- *поток событий называется* ***потоком без последствий****, если число событий, попадающих на некоторый участок времени, не зависит от числа событий, попадающих на другие участки.*

- *поток требований называется* ***пуассоновским*** *(или простейшим), если он обладает тремя свойствами*: ***стационарен, ординарен и не имеет последствий.***

Название связано с тем, что при выполнении указанных условий число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, будет распределено по закону Пуассона.

- *интенсивностью потока заявок называется среднее число заявок, поступающих из потока за единицу времени.*

Для стационарного потока интенсивность является постоянной. Если *m* - среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками, то $\lambda = 1/t$.

В случае *пуассоновского потока* вероятность поступления на обслуживание *m* заявок за промежуток времени *t* определяется по закону Пуассона:

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Время между соседними заявками распределено по экспоненциальному закону с плотностью вероятности $\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Время обслуживания $t_{обсл.}$ является случайной величиной и подчиняется показательному закону распределения Пуассона с плотностью вероятности $\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, где λ является интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени, $t_{обсл.} = 1/\mu$.

- *отношение интенсивности входящего потока к интенсивности потока обслуживания называется загрузкой системы* $\rho = \lambda/\mu$.

- *загрузка — это среднее число заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки.*

Если узел обслуживания состоит из $n > 1$ одинаковых устройств, то $\mu_n = \mu \cdot n$ — математическое ожидание числа требований, обслуженных *n* каналами за единицу времени.

Отношение $\alpha = \lambda/\mu_n$ называют коэффициентом загрузки системы (или приведенной интенсивностью потока заявок).

Согласно формуле Литта среднее время пребывания заявки в системе $W_{сис}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{сис}$, деленному на интенсивность потока заявок:

(1) $$\mathrm{W}_{\text{сис}} = \frac{L_{сис}}{\lambda}.$$

Точно таким же образом среднее время пребывания заявки в очереди $\mathrm{W}_{\text{очер}}$ связано со средним числом заявок в очереди $L_{\text{очер}}$:

(2) $$\mathrm{W}_{\text{очер}} = \frac{L_{очер}}{\lambda}.$$

Формальное описание СМО можно выполнить с помощью цепи Маркова, соответствующей схеме гибели и размножения. Расчет финальных вероятностей цепи Маркова позволяет определить P_{k} - вероятность того, что в системе находится k заявок. Для систем с отказами вероятность того, что число заявок в системе равно числу каналов обслуживания, соответствует вероятности отказа очередной заявки:

$$P_n = P_{отк}.$$

3. Марковский случайный процесс с отказами

Система массового обслуживания представляет собой систему дискретного типа с конечным или счетным множеством состояний, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачкообразно, когда осуществляется какое-нибудь событие.

Процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если его возможные состояния $S_1, S_2, S_3, \cdots$ можно заранее перенумеровать, и переход системы из одного состояния в другое состояние происходит практически мгновенно. Такие процессы бывают двух типов: с *дискретным или непрерывным* временем. В случае дискретного времени, переходы из одного в другое состояние могут происходить в строго определенные моменты времени. Процессы с непрерывным временем отличаются тем, что переход системы в новое состояние возможен в любой момент времени.

Случайный процесс называется марковским, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Переходы системы из одного состояния в другое состояние происходят под действием каких-то потоков событий (поток заявок, поток отказов). Если все потоки событий, переводящие систему в новое состояние *простейшие пуассоновские*, то процесс, протекающий в системе будет марковским. Поскольку, простейший поток не обладает последствием: в нем будущее не зависит от прошлого.

В системах с отказами заявок, поступившая информация в момент времени, когда все каналы обслуживания заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и в дальнейшем в процессе обслуживания не участвует. Имеется n каналов обслуживания, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.

Поток обслуживания имеет интенсивность μ (величина, обратная среднему времени обслуживания $t_{обсл.}$). Требуется найти вероятности состояний СМО и характеристики ее, эффективности. Так как оба потока: заявок и освобождений — простейшие, то процесс протекающий в системе, будет Марковским.

Рассмотрим ее как систему с конечным множеством состояний:

S_0 — свободны все каналы;

S_1 — занят ровно один канал;

S_k — занят ровно k каналов;

S_n — заняты все n каналов.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_k. Для любого t выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1.$$

Требуется определить вероятности состояний системы для любого момента времени t.

Составим дифференциальные уравнения для всех вероятностей. Начнем с $P_0(t)$. Зафиксируем момент времени t, и дадим t малое приращение Δt и найдем вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ система находится в состоянии S_0. Это процесс может осуществляться двумя способами: либо в момент времени t система будет находиться в состоянии S_0, а за прошедшее время не вышла из него, либо в момент времени t система будет находиться в состоянии S_1, а за время Δt перейдет в состояние S_0.

Вероятность первого способа найдем по теореме умножения вероятностей. Вероятность того, что в момент времени t система была в состоянии S_0, равна $P_0(t)$, вероятность того, что за время Δt не поступит ни одной заявки, равна $e^{-\lambda\Delta t} \approx 1-\lambda\Delta t.$

Вероятность первого способа равна $P_0(t)(1-\lambda\Delta t)$. Найдем вероятность второго способа. Вероятность того, что в момент времени t система была в состоянии S_1, равна $P_1(t)$. Вероятность того, что за время Δt канал освободится, равна $1-e^{-\mu\Delta t} \approx \mu\Delta t$.

Вероятность второго способа составит $P_1(t)\mu\Delta t$.

По теореме сложения вероятностей имеем

$$P_0(t+\Delta t) \approx P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t.$$

Отсюда получается дифференциальное уравнение для определения $P_0(t)$:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)$$

Аналогично составляются дифференциальные уравнения для вероятностей других состояний. Пусть $0 < \kappa < n$. (См. также 17.5). Вычислим $P_k(t+\Delta t)$ - вероятность того, что в момент времени $t + \Delta t$ система будет в состоянии S_k. Эта вероятность вычисляется как вероятность суммы трех событий:

1) в момент t система была в состоянии S_k и не вышла из него за время Δt;
2) в момент t система была в состоянии S_{k-1}, а за время Δt перешла в состояние S_k
3) в момент t система была в состоянии S_{k+1}, а за время Δt перешла в состояние S_k .

Тогда

$$P_k(t+\Delta t) \approx P_k(t)(1-(\lambda+\kappa\mu)\Delta t)+P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t.$$

Дифференциальное уравнение для вероятности $P_k(t)$:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t)-(\lambda+\kappa\mu)P_k(t)+(\kappa+1)\mu P_{k+1}(t).$$

Уравнение для вероятности $P_n(t)$:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t)-n\mu P_n(t) \quad .$$

Получена система уравнений для вероятностей:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)P_k(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t)-n\mu P_n(t) \end{cases}$$

Эти уравнения называются уравнениями Эрланга. А полученная система (3) будет называться системой Эрланга.

Нас интересует вопрос: что будет происходить с вероятностями состояний при больших t , т.е. $t \to \infty$. Будут ли вероятности стремиться к конечным пределам? В тех случаях, *когда эти пределы существуют и не зависят от начального состояния системы, то их называют* ***финальными вероятностями состояний.***

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них за конечное число шагов можно перейти в любое другое состояние, то финальные вероятности существуют. При $t \to \infty$ в системе устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого система меняет свои состояния случайным образом, но их вероятности уже не зависят от пройденного времени. Финальную вероятность состояния S_k можно истолковать как среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Если финальные вероятности постоянны, то их производные равны нулю. Чтобы найти финальные вероятности, заменим в системе дифференциальных уравнений (3) все вероятности $P_k(t)$ их пределами p_k, а все производные полагаем равными нулю. Получаем систему алгебраических уравнений:

$$(4)\qquad \begin{cases} -\lambda P_0 + P_1 = 0, \\ -\lambda P_0 - (\lambda+\mu)P_1 + 2\mu P_2 = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ -\lambda P_{k-1} - (\lambda + k\mu)P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0 \quad (0 < k < n), \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ -\lambda P_{n-2} - (\lambda + (n-1)\mu)P_{n-1} + n\mu P_n = 0, \\ -\lambda P_{n-1} - n\mu P_n = 0 \end{cases}$$

Для этих вероятностей должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Вводим обозначение $\rho = \lambda / \mu$ и решаем систему относительно неизвестных вероятностей:

$$P_1 = \rho P_0$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2} P_0$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P$$

для всех $k \le n$.

Чтобы выразить вероятности непосредственно через *p* и *n*, используем условие (контроль)

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} = 1,$$

отсюда получим

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}$$

получаем итоговые вероятности

$$p_k = \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}; \qquad (0 \le k \le n).$$

Полученные формулы называют формулами Эрланга. Эти формулы позволяют получить показатели эффективности работы СМО.

Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок, получается из формул Эрланга для итоговых вероятностей:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}$$

Требование, поступающее в систему, получает отказ в том случае, когда все каналы обслуживания заняты. Поэтому вероятность отказа равна:

$$p_{отк} = p_n = \left(\frac{\rho^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} = \rho^n \frac{p_0}{n!},$$

Отсюда находим относительную пропускную способность системы, т.е. среднюю долю поступивших заявок, обслуживаемых системой. Вероятность того, что заявка будет обслужена равна:

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 1 - \rho^n \frac{P_0}{n!},$$

Абсолютную пропускную способность системы, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени, получим, когда умножаем величину интенсивности потока заявок на относительную пропускную способность:

$$A = \lambda \cdot P_{обсл}.$$

Абсолютная пропускная способность системы — это интенсивность потока обслуженных системой заявок, а каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок. Значит, среднее число занятых каналов равно

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot P_{обсл}$$

Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$q = \frac{\bar{k}}{n}.$$

Теория массового обслуживания позволяет установить зависимость вероятностных характеристик СМО от интенсивности потока заявок, производительности и числа каналов и т.д. и часто включает экономический аспект. Например, стремятся найти наименьшую полную стоимость потерь C, связанных со временем ожидания заявок на обслуживание в очереди и временем простоя каналов обслуживания:

$$C = c_1 M(s) + c_2 M(r).$$

где c_1 - стоимость единицы времени ожидания одной заявки;

c_2 - стоимость единицы времени простоя одного канала.

Характеристиками эффективности СМО являются:

- A - абсолютная пропускная способность, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
- Q - относительная пропускная способность, т.е. средняя доля пришедших заявок, и они полностью обслужены системой:
- $\bar{k}$ - среднее число занятых каналов.

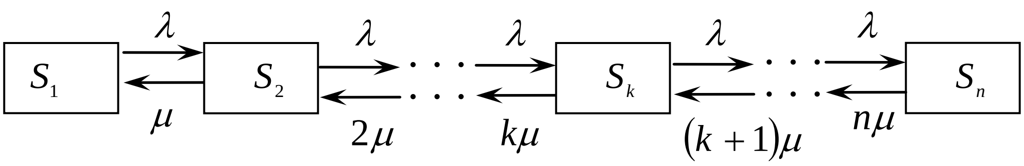
На базе введенных обозначений рассмотрим расчёты СМО.

4. Расчет системы массового обслуживания

Рассмотрим основные типы систем массового обслуживания.

1. *Многоканальная* (n*-канальная*) *СМО с отказами.* Граф состояний СМО показан ниже на схеме.

Пусть узел обслуживания СМО имеет n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуженных заявок имеет интенсивность μ. Требуется найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности: A, Q *и* $\bar{k}$.



Расчет финальных вероятностей выполняется в соответствии с формулами Эрланга:

(5) $$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1},$$

$$p_k = p_0 \frac{\rho^k}{k!}, \; 0 \le k \le n,$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu_n}$ - приведенная интенсивность потока заявок;

p_0 - вероятность отсутствия заявок в системе;

p_k - вероятность поступления k заявок

Вероятность отказа:

(6) $$p_{отк} = p_n = p_0 \frac{\rho^n}{n!}.$$

Отсюда находим относительную пропускную способность:

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - p_0 \frac{\rho^n}{n!}.$$

Для величины абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q:

(7) $$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - p_0 \frac{\rho^n}{n!} \right).$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k}$ можно найти «впрямую» как математическое ожидание числа заявок в системе:

$$\bar{k} = M(k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_0 \frac{\rho^n}{n!}.$$

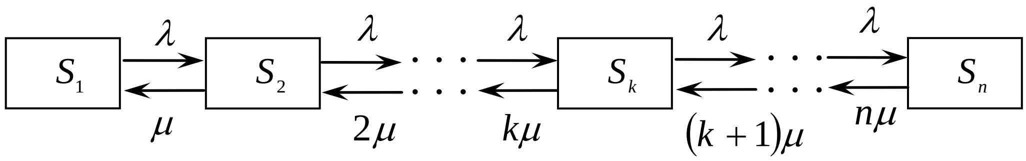
Однако, зная абсолютную пропускную способность, можно найти $\bar{k}$ проще:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu}$$

или с учетом (7)

$$\bar{k} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right)$$

2. *Многоканальная* ($n-$ *канальная*) *СМО с неограниченной очередью.* Граф состояний показан ниже на рисунке



Предлагаем самостоятельно обосновать значения интенсивностей проставленных у стрелок. Вероятность перехода системы в k-е состояние, т.е. вероятность наличия в системе k заявок,

$$p_k = p_0 \frac{\rho^n}{n!},\ n \geq k > 0,$$

если число заявок не превышает числа каналов обслуживания, и

$$p_k = p_0 \frac{\rho^n}{n!} \cdot n^{n-k},\ k \geq n$$

в противном случае. Вероятность отсутствия заявок в системе

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}, \quad (\lambda < \mu \cdot n).$$

Математическое ожидание числа заявок в очереди:

(8) $$M(s) = L_{очер} = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) \cdot p_k = p_0 \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}.$$

Среднее число занятых каналов:

$$\overline{k} = \lambda / \mu$$

Тогда среднее число заявок в системе:

$$L_{сис} = L_{очер} + \rho,$$

а время ожидания в очереди:

$$W_{очер} = \frac{1}{\lambda} L_{очер}.$$

3. *Система массового обслуживания с очередью и одним каналам.*

Этот пункт является частный случаи предыдущей системы для $n = 1$.Для нее выполняются равенства:

$$P_k = \rho^k (1-\rho), \quad P_0 = 1-\rho.$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{сис} = \frac{\rho}{1-\rho},$$

а в очереди

$$L_{очер} = L_{сис} - \rho.$$

4. *Одноканальная СМО с ограниченной очередью.*

Задача отличается от задачи 3только тем, что число заявок в очереди ограничено и не может превосходить некоторого числа ν.

Финальные вероятности системы находятся по формулам:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{s+1}},\ (\rho < 1);\ p_k = \rho^k \cdot p_0.$$

Математическое ожидание числа требований в системе:

$$M(k) = \sum_{k=0}^{s} k \cdot p_k = L_{сис}$$

Вероятность того, что требование получит отказ:

$$p_{отк} = p_v = \rho^v \frac{1-\rho}{1-\rho^{s+1}}.$$

Пример 1. Справочное бюро имеет 5 линий связи. В систему поступает поток заявок с математическим ожиданием (интенсивностью) $\lambda = 2$ (заявок в минуту). Заявка, поступившая в момент, когда все линии заняты, получает отказ. Средняя продолжительность удовлетворения заявки $t_{обс} = 2$ мин . Вычислить основные вероятностные характеристики системы.

Решение. Имеем математическое ожидание (интенсивность) потоков заявок $\mu = 1/t_{обс} = 0{,}5$ и $\lambda = 2$ заявок в минуту. Приведенная интенсивность:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_n} = \frac{2}{0{,}5 \cdot 5} = 0{,}8.$$

Вероятность отсутствия; заявок в СМО согласно (4);

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{5} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1} = 0{,}45\,.$$

Вероятность отказа на обслуживание согласно (5):

$$p_{отк} = p_5 = 0{,}45 \cdot \frac{0{,}8^5}{5!} = 0{,}0012 \cdot$$

Абсолютная пропускная способность справочного бюро:

$$A = \lambda(1 - p_{отк}) = 2 \cdot (1 - 0{,}0012) = 1{,}997$$

- справок в минуту.

Среднее число занятых линий определяется равенством:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{1{,}997}{0{,}5} \approx 4.$$

Пример 2. В инструментальное отделение сборочного цеха за 10 минут, обратились за инструментом 16 рабочих, т.е. интенсивность потока заявок $\lambda = 1{,}6$. Обслуживание одного рабочего занимает в среднем $t_{обс} = 1{,}1$ минута. Известно, что стоимость минуты работы рабочего и кладовщика соответственно равны: c_1 = 6 денеж. ед., c_2 = 4 денеж. ед. Сколько должно быть кладовщиков (n), чтобы стоимость: времени, потерянного рабочими в очереди и кладовщиками при отсутствий обращений к ним, была минимальной?

Решение. По условию примера имеем $\mu = 1/1{,}1 \approx 0{,}91$, $\rho = \lambda/\mu_n$. Среднее число рабочих в очереди вычисляем по формуле

$$L_{очер} = \sum_{k=n}^{\infty}(k-n)\cdot p_k = p_0 \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}\,.$$

Среднее количество занятых кладовщиков вычисляем по формуле $\bar{k} = A/\mu = 1{,}997/0{,}5 \approx 4$,

а простаивающих без работы находится по формуле, $M(r) = n - \bar{k}$. Стоимость простоя рабочими в очереди и кладовщиками при отсутствии обращений к ним определим по формуле

$$C = 6M(s) + 4M(r)\cdot$$

Аналогично проведем расчет для других значений n. Полученные значения сведем в следующей таблице

n	ρ	P_0	$L_{очер}$	$M(r)$	C
2	0,88	0,39	0,12	1,12	5,19

3	0,59	0,56	0,0045	2,41	9,68
4	0,44	0,64	0,00012	3,56	14,24
5	0,35	0,70	2,4E-06	4,65	18,59

Из таблицы видно, что функция стоимости достигает минимума при $n = 2$.

Задание. В автоматизированную информационную систему поступают запросы с интенсивностью $\lambda = 2$ (запросов в минуту). Средняя время продолжительность ответа могут бить соответственно: $t_{\text{отв}}^{(1)} = 10; t_{\text{отв}}^{(2)} = 15; t_{\text{отв}}^{(3)} = 20$; сек. Встроенный буфер позволяет хранить информацию о двух запросах. Если в буфере уже хранятся два запроса, то очередной запрос получает отказ.

1. Определите основные вероятностные характеристики эффективности системы.

2. Сравните полученные результаты между собой и преложите наилучший вариант ответа.

5. СМО с неограниченным ожиданием и ограниченной длиной очереди

Пусть имеется n - канальная СМО с очередью, на которую не наложено ограничений ни по длине очереди, ни по времени ожидания. В силу неограниченности очереди каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому $P_{обсл} = 1$, $P_{отк} = 0$. Для СМО с неограниченной очередью накладывается ограничение $p/n < 1$. Если это условие нарушено, то очередь растет до бесконечности, наступает явление «**взрыва**». Вероятность простоя каналов равна

$$P_0 = \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\rho^j}{j!} \right) + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}$$

Вероятность занятости обслуживанием k каналов равна

$$P_k = \rho^k \frac{P_0}{k!}, \; 1 \le k \le n.$$

Вероятность занятости обслуживанием всех каналов при отсутствии очереди равна

$$P_n = \rho^n \frac{P_0}{n!}$$

Вероятность наличия очереди есть вероятность того, что число требований в системе больше числа каналов:

$$P_{оч} = \rho^{n+1} \frac{P_0}{n!(n-\rho)}.$$

Вероятность попадания заявки в очередь есть вероятность занятости всех каналов. Эта вероятность равна сумме вероятностей наличия очереди и занятости всех n каналов при отсутствии очереди:

$$P_{зан} = P_n + P_{оч} = \rho^n \frac{p_0}{(n-1)!(n-\rho)}.$$

Среднее число занятых обслуживанием каналов равна

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Доля каналов, занятых обслуживанием равна,

$$q = \frac{\bar{k}}{n}.$$

Среднее число заявок в очереди (длина очереди) равно

$$L = \rho^{n+1} \frac{P_0}{(n-1)!(n-\rho)^2}$$

Среднее число заявок в системе равно

$$M = L + T = L + p.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди равно

$$t = \frac{L}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе равно

$$T = t + \frac{1}{\mu},\ T = \frac{M}{\lambda}.$$

Имеется n-канальная система с ожиданием, в которой количество заявок, стоящих в очереди, ограничено числом m, т.е. заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь, только если в ней находится менее m заявок. Если число заявок в очереди равно m, то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему необслуженной.

Системы с ограниченной очередью являются обобщением двух рассмотренных ранее СМО: при $m = 0$ получаем СМО с отказами, при $m = \infty$ получаем СМО с ожиданием.

Вероятность простоя каналов

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}.$$

Вероятность отказа в обслуживании равна вероятности p_{n+m} того, что в очереди уже стоят m заявок:

$$P_{отк} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m} P_0}{n! n^m}.$$

Относительная пропускная способность есть величина, дополняющая вероятность отказа до 1, т.е. вероятность обслуживания

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк}.$$

Абсолютная пропускная способность определяется равенством

$$A = \lambda(1 - P_{отк}) = \lambda P_{обсл},$$

Среднее число занятых каналов определяется равенством

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho P_{обсл},$$

Средняя длина очереди системы, т.е. среднее число заявок в очереди определяется равенством

$$L = \frac{P_0 \rho^n \left(\frac{\rho}{n} - (m+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1} + m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+2}\right)}{n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}.$$

Среднее время ожидания обслуживания в очереди равно

$$t = \frac{L}{\lambda}.$$

Среднее число заявок в СМО равно

$$M = L + к.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО равно

.

$$T = t + \frac{1}{\mu},\ T = \frac{M}{\lambda}$$

6. Замкнутые системы массового обслуживания

До сих пор мы рассматривали СМО, в которых входящий поток никак не связан с выходящим. Такие системы называются *разомкнутыми*. В некоторых же случаях требования, которые были обслужены, после задержки опять могут поступать на вход.

Такие *системы массового обслуживания* называются ***замкнутыми.*** Например, такие объекты, как, поликлиника, обслуживающая данную территорию, бригада рабочих, закрепленная за группой станков, являются примерами замкнутых систем. В замкнутой СМО циркулирует одно и то же конечное число потенциальных требований. Пока потенциальное требование не реализовалось в качестве требования на обслуживание, считается, что оно находится в блоке задержки. В момент реализации оно поступает в саму систему. Например, рабочие обслуживают группу станков. Каждый станок является потенциальным требованием, превращаясь в действующее в момент своей поломки. Пока станок работает, он находится в блоке задержки, а с момента поломки до момента окончания ремонта — в самой системе. Каждый рабочий является каналом обслуживания.

Пусть $n-$общее число каналов обслуживания, $s-$число потенциальных заявок, $n < s$, λ- интенсивность потока заявок каждого потенциального требования, $\mu-$интенсивность обслуживания. Тогда, в соответствии наших обозначений коэффициент загрузки системы равна $\rho = \lambda / \mu.$ Вероятность простоя системы определяется формулой

$$P_0 = \left(s! \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\rho^j}{(s-j)!\, j!} + \sum_{j=n+1}^{s} \frac{\rho^j}{(s-j)!\, n^{j-n} n!} \right) \right)^{-1}$$

Финальные вероятности состояний системы определяются в виде:

$$P_k = \frac{s!\rho^k P_0}{(s-k)!k!}, \qquad k < n,$$

$$P_k = \frac{s!\rho^k P_0}{(s-k)!n^{k-n}\, n!}, \qquad n \le k \le s.$$

Через эти вероятности выражается среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = P_1 + 2P_2 + \ldots + n(P_n + P_{n+1} + \ldots + P_s)$$

Через $\bar{k}$ находим абсолютную пропускную способность системы

$$A = \bar{k} \cdot \mu,$$

а также среднее число заявок в системе

$$M = s - \frac{\mu \bar{k}}{\lambda} = s - \frac{\bar{k}}{\rho}.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 3. На вход трехканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью равной 4 заявки в минуту, время обслуживания заявки одним каналом $t_{обсл}$ = 1/μ = 0,5 мин. Выгодно ли с точки зрения пропускной способности СМО заставить все три канала обслуживать заявки сразу, при этом среднее время обслуживания уменьшается втрое? Как это скажется на среднем времени пребывания заявки в СМО?

Решение. Вероятность простоя трехканальной СМО согласно формуле равна

$$\rho = \lambda / \mu = 4/2 = 2,\ n = 3$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} \approx 0{,}158$$

Вероятность отказа определяем по формуле вероятности отказа:

$$P_{отк} = \frac{2^3 P_0}{3!} \approx 0{,}21$$

Относительная пропускная способность системы равна

$$P_{обсл} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$$

Абсолютная пропускная способность системы равна

$$A = \lambda P_{обсл} \approx 3{,}16\,.$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k} \approx 1{,}58$, доля каналов, занятых обслуживанием равно,

$$q = \frac{\bar{k}}{n} \approx 0{,}53$$

Среднее время пребывания заявки в СМО находим как вероятность того, что заявка принимается к обслуживанию, умноженную на среднее время обслуживания: $t_{СМО} \approx 0{,}395$ мин.

Объединяя все три канала в один, получаем одноканальную систему с параметрами μ = 6, ρ = 2/3. Для одноканальной системы вероятность простоя равна

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho} = 0{,}6\,.$$

вероятность отказа равна

$$P_{отк} = \rho P_0 = 0{,}4\,,$$

относительная пропускная способность равна

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 0{,}6\,,$$

абсолютная пропускная способность равна

$$A = \lambda P_{обсл} \approx 2{,}4\,.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО равно

$$t_{СМО} = P_{обсл} \frac{1}{\mu} = 0{,}1\,мин\,.$$

В результате объединения каналов в один, пропускная способность системы снизилась, так как увеличилась вероятность отказа. Тем самым, среднее время пребывания заявки в системе уменьшилось.

Пример 4. На вход трехканальной СМО с неограниченной очередью поступает поток заявок с интенсивностью λ = 4 заявки в час, среднее время обслуживания одной заявки t= 1/μ 0,5 ч. Найти показатели эффективности работы системы.

Решение. Для рассматриваемой системы n = 3, λ= 4, μ = 1/0,5 = 2, ρ = λ /μ = 2, ρ/n = 2/3 < 1. Определяем вероятность простоя системы:

$$P_0 = \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4 \frac{2}{3}}{3!(1-2/3)}\right)^{-1} = 1/9\,.$$

Среднее число заявок в очереди находим по формуле:

$$L = \frac{2^4 \cdot \frac{1}{9}}{3 \cdot 3! \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{8}{9}\,.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди определяется по формуле:

$$t = \frac{L}{\lambda} = 0{,}22 \text{ ч.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе равно

$$T = t + \frac{1}{\mu} \approx 0{,}22 + 0{,}5 = 0{,}72\,.$$

Пример 5. В парикмахерской работают 3 мастера, а в зале ожидания расположены 3 стула. Поток клиентов имеет интенсивность X = 12 клиентов в час. Среднее время обслуживания $t_{обсл}$ = 20 мин. Определить относительную и абсолютную пропускную способность системы, среднее число занятых кресел, среднюю длину очереди, среднее время, которое клиент проводит в парикмахерской.

Решение. Для данной задачи n = 3, m = 3, λ = 12, μ= 3, ρ = 4, ρ/n = 4/3.
Вероятность простоя равна:

$$P_0 \approx 0{,}012\,.$$

Вероятность отказа в обслуживании определяем по формуле:

$$P_{отк} = P_{n+m} \approx 0{,}307\,.$$

Относительная пропускная способность системы, т.е. вероятность обслуживания

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 0{,}693\,.$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda P_{обсл} \approx 12 \cdot 0{,}683 \approx 8{,}32\,.$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} \approx 2{,}78\,.$$

Средняя длина очереди $L \approx 1{,}56$.

Среднее время ожидания обслуживания в очереди $t \approx 0{,}13$ ч.

Среднее число заявок в СМО

$$M = L + \bar{k} \approx 4{,}34\,.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО

$$T = M / \lambda \approx 0{,}36 \text{ ч.}$$

Пример 6. Рабочий обслуживает 4 станка. Каждый станок отказывает с интенсивностью λ = 0,5 отказа в час, среднее время ремонта $t_{рем}$ = 1/μ = 0,8 ч. Определить пропускную способность системы.

Решение. Эта задача рассматривает «замкнутую СМО», μ = 1,25, ρ = 0,5/1,25 = 0,4. Вероятность простоя рабочего:

$$P_0 = \frac{1}{4!\left(\frac{1}{4!} + \frac{0{,}4}{3!} + \frac{0{,}4^2}{2!} + 0{,}4^3 + 0{,}4^4\right)} = \frac{1}{6{,}66} \approx 0{,}15\,.$$

Вероятность занятости рабочего $P_{зан} = 1 - P_0 \approx 0{,}85$. Если рабочий занят, он налаживает μ станков в единицу времени, пропускная способность системы $A = (1 - P_0)\mu = 0{,}85\mu \approx 1{,}06$ станков в час.

В заключении читателю рекомендуется обратиться к более обстоятельным источникам, с целью получения углубленного знания по этому разделу [12]

<u>Тема 23</u>. Моделирование случайных величин методом Монте – Карло

1. Предмет метода Монте-Карло

Датой рождения метода Монте – Карло принято считать 1949 год, когда учёные Н. Метрополис и С.Улам опубликовали статью под названием «Метод Монте – Карло», в которой изложили суть своего метода. Название метода связано с названием города Монте – Карло, где в игорных домах (казино) играют в рулетку, которая является одним из простейших устройств для получения, так называемых, «***случайных чисел***», на использование которых основан данный метод.

ЭВМ позволяют легко получать, так называемые, «***псевдослучайные числа***» (при решении задач их часто применяют вместо случайных чисел). Это привело к широкому внедрению метода во многие области науки и техники (статистическая физика, теория массового обслуживания, теория игр и др.). Метод Монте – Карло используют для вычисления интегралов, в особенности многомерных, для решения систем алгебраических уравнений высокого порядка, для исследования различного рода сложных систем (автоматического управления, экономических, биологических и т.д.).

Сущность метода Монте – Карло состоит в следующем: *требуется найти значение числа* a некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно a: $MX = a$, т.е. решит указанное функциональное уравнение. Эта задача в общем случае весьма сложная и трудная.

Практически же поступают так: производят n испытаний, в результате которых получают n возможных значений $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$; вычисляют их среднее арифметическое

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

и принимают $\overline{x}$ в качестве оценки (приближённого значения) $a^{\bullet}$ искомого числа a: $a^{\bullet} \approx a = \overline{x}$.

Поскольку метод Монте – Карло требует проведения большого числа испытаний, его часто называют *методом статистических испытаний*. Теория этого метода указывает, как наиболее целесообразно выбрать случайную величину X, как найти её возможные значения. В частности, разрабатываются способы уменьшения дисперсии используемых случайных величин, в результате чего уменьшается ошибка, допускаемая при замене искомого математического ожидания числа a его оценкой $a^{\bullet}$.

Отыскание возможных значений случайной величины X (моделирования) называют «*разыгрыванием случайно величины*». Здесь мы изложим лишь некоторые способы разыгрывания с.в. X и укажем, как оценить допускаемую при этом ошибку.

2. Случайные числа, оценка погрешности метода Монте – Карло

Как уже отметили, метод Монте – Карло основан на применении случайных чисел; приведём определение этих чисел. Обозначим через R н.с.в., распределённую равномерно в интервале $(0;1)$.

Случайными числами называют возможные значения непрерывной случайной величины R*, распределённой равномерно в интервале* $(0,1)$.

В действительности пользуются неравномерно распределённой с.в. R, возможные значения которой, вообще говоря, имеют бесконечное число десятичных знаков, а *квазиравномерной случайно величиной* $R^{\bullet}$, возможное значение которой имеют конечное число знаков. В результате замены R на $R^{\bullet}$ разыгрываемая величина имеет не точно, а приближённо заданное распределение.

В конце книги приведена таблица случайных чисел, заимствованную из книги [10] (приложение 10).

Пусть для получения оценки $a^{\bullet}$ математического ожидания числа a случайной величины X было произведено n независимых испытаний (разыграно n возможных значений) и по ним была найдена выборочная средняя $\bar{x}$, которая принята в качестве искомой оценки $a^{\bullet} = \bar{x}$..

Ясно, что, если повторить опыт, то будут получены другие возможные значения X. Следовательно, другая средняя и другая оценка числа $a^{\bullet} = \bar{x}$.. Уже отсюда следует, что получит в общем случае точную оценку МО невозможно.

Естественно, возникает вопрос о величине допускаемой ошибки. Ограничимся здесь отысканием лишь верхней границы ε допускаемой ошибки с заданной вероятностью (надёжностью) γ; $P\{|\bar{x} - a| \le \varepsilon\} = \gamma$

Интересующая нас верхняя граница ошибки ε есть не что иное, как «*точность оценки*» математического ожидания по выборочной средней при помощи доверительных интервалов уже шла речь в разделе дополнение 1, тема 21. В связи с этим воспользуемся полученные ранее результатами, и рассмотрим здесь три случая:

2.1 Случайная величина X распределена нормально и ее среднее квадратическое отклонение σ известно. В этом случае с надёжностью γ верхняя граница ошибки

(1) $$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

где n —число испытаний (разыгранных значений X); t —значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \gamma/2$, σ —известное среднее квадратическое отклонение X.

Пример 1. С надёжностью $\gamma = 0{,}95$ найти верхнюю границу ошибки δ, если для оценки математического ожидания, нормально распределённой сл. величины X с известным (заданным) средним квадратическим отклонением σ, равным $0{,}5$ было разыграно 100 возможных значений величины X.

Решение. По условию данного примера, $n = 100, \sigma = 0{,}5; \Phi(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475$. По таблице функции Лапласа находим $t = 1{,}96$. Искомая верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}098.$$

2.2 Случайная величина X распределена нормально и ее среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. В этом случае с надёжностью γ верхняя граница ошибки

(2) $$\delta = \frac{t_{\gamma} \cdot s}{\sqrt{n}},$$

где n —число испытаний (разыгранных значений X); t_{γ} —значение аргумента функция Лапласа, которое находят по таблице функции Лапласа, $\Phi(t) = \gamma/2$, s —неизвестное «исправленное» среднее квадратическое отклонение X.

Пример 2. С надёжностью $\gamma = 0{,}95$ найти верхнюю границу ошибки δ, если для оценки математического ожидания, нормально распределённой случайной величины X было разыграно 100 её возможных значений и по ним найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s, равным $0{,}5$.

Решение. По условию данного примера, $n = 100, s = 0{,}5$; По таблице определения значений величины t_{γ} находим: $t_{\gamma} = 1{,}984$. Искомая верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{1{,}984 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}099.$$

2.3 Случайная величина X распределена по закону, отличному от нормального закона.

В этом случае при достаточно большом количестве испытаний $(n > 30)$ с надёжностью, приближённо равной γ, верхняя граница ошибки может быть вычислена по формуле (1), если среднее квадратическое отклонение σ случайной величины X известно; если же σ неизвестно, то можно в формуле (1) величина σ заменяется либо «исправленной» оценкой s, либо воспользуются равенством (2).

Следует заметить, что чем больше n, тем меньше различие между результатами, которые дают обе формулы. Это явление объясняется тем, что при $n \to \infty$ распределение Стьюдента стремится к нормальному закону. В частности, в примерах 1 и 2, в случае $n = 100$ и $\gamma = 0{,}95$ по формуле (1) верхняя граница ошибки равна $0{,}098$, а по формуле (2) она равна в $0{,}099$. Как видим, результаты отличаются незначительно (на одну тысячную).

Замечание. Для того чтобы найти (определить) наименьшее число испытаний, которые обеспечат наперёд заданную (заранее намеченную) границу верхнюю границу ошибки δ, надо выразить число n на формул (1) и (2):

(3) $$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}, \quad n = \frac{t_\gamma^{\,2}\sigma^2}{\delta^2},$$

Например, для наших примеров, если $\delta = 0{,}0098, t = 1{,}96, \sigma = 0{,}5,$ то минимальное число испытаний, при которых ошибка не превысит 0,098, равно

(4) $$n = \frac{(1{,}96)^2 \cdot (0{,}5)^2}{(0{,}098)^2} = 100.$$

3. Разыгрывание дискретной случайной величины

Пусть требуется разыграть дискретную случайную величину X, т.е. нужно получить последовательность её возможных значений x_j $(j = 1,2,\cdots,n)$, зная закон распределения X:

(5) $$\begin{array}{llll} X: & x_1 & x_2 \cdots & x_n, \\ P: & p_1 & p_2 \cdots & p_n. \end{array}$$

Обозначим через R непрерывную случайную величину, распределённую равномерно в интервале $(0,1)$, а через r_j $(j = 1,2,\cdots)$ – ее возможные значения, т.е. случайные числа.

Разобьём интервал $0 \le R \le 1$ на оси Or точками с координатами

$$p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \cdots, p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{n-1}$$

на n частичных интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$:

Дл. $\Delta_1 = p_1 - 0 = p_1$

Дл. $\Delta_2 = (p_1 + p_2) - p_1 = p_2$

....

....

Дл. $\Delta_n = 1 - (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) = p_n.$

Таким образом, видим, что длина частичного интервала с индексом i равна вероятности с тем же индексом:

(6) Дл. $\Delta_i = p_i$

Справедливое следующее утверждение.

Теорема 1. *Если каждому случайному числу* r_j $(j=1,2,\cdots)$, *которое попало в интервал* Δ_i,*ставить в соответствие возможное значение* x_i, *то разыгрываемая величина будет иметь заданный закон распределения* (4).

Доказательство. Поскольку при попадания случайного числа r_j в частичный интервал Δ_i, разыгрываемая величина принимает возможное значение x_i, а таких интервалов всего n**,** то разыгрываемая величина имеет те же возможные значения, что и X , а именно $x_1, x_2, \cdots x_n$.

Вероятность попадания случайной величины R в интервал Δ_i равна его длине, а в силу (1) Дл. $\Delta_i = p_i$. Таким образом, вероятность попадания R в интервал Δ_i равна p_i. Следовательно, вероятность того, что разыгрываемая величина примет возможное значение x_i, также равна p_i

(поскольку мы условились в случае попадания случайного числа r_j в интервал Δ_iсчитать, что разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i). Итак, разыгрываемая величина имеет заданный закон распределения и справедливо **ПРАВИЛО:**

- для того чтобы разыграть дискретную случайную величину X , заданную законом распределения

$$X: \quad x_1, \quad x_2, \cdots, x_n,$$
$$P: \quad p_1, \quad p_2, \cdots, p_n,$$

нужно поступать следующим образом:

1) разбить интервал $(0,1)$ оси $0r$ на n частичных интервалов:

$$\Delta_1 = (0, p_1), \quad \Delta_2 - (p_1, p_1 + p_2), \quad \Delta_n = (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}; 1);$$

2) выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число r_j

Если r_j попало в частный интервал Δ_i, то разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_i.

Пример 3. Разыграть восемь значений дискретной случайной величины X , закон распределения которой задан в виде таблицы

$$X: \quad 3 \qquad 11 \qquad 24$$
$$P: \quad 0{,}25 \quad 0{,}16 \quad 0{,}59$$

Решение. 1. Разобьём интервал $(0,1)$ оси Or точками с координатами $0{,}25$; $0{,}25 + 016 = 0{,}41$ на три равных частичных интервала:

$$\Delta_1 = (0; 0{,}25), \Delta_2 = (0{,}25; 0{,}41), \Delta_3 = (0{,}41; 1).$$

2. Выпишем из таблицы случайных чисел (см. приложения) восемь случайных чисел, например первых восемь чисел: $0{,}10; 0{,}37; 0{,}08; 0{,}99; 0{,}12; 0{,}66; 0{,}31; 0{,}85$.

Случайное число $r_1 = 0{,}10$ попадает частичному интервалу Δ_1, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение $x_1 = 3$. Случайное число $r_2 = 0{,}37$ принадлежит частичному интервалу Δ_2, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение $x_2 = 11$. Аналогично получим остальные возможные значения . Таким образом, разыгранные возможные X таковы: 3; 11; 3; 24; 3; 24; 11; 24.

Замечание. Далее будет показано, что в общем случае, разыгрывание событий можно свести к разыгрыванию ***дискретной случайной величины***.

4. Разыгрывание противоположных событий

Пусть требуется разыграть испытания, в каждом из которых событие A появляется с известной вероятностью p и не появляется с вероятностью $q = 1 - p$. То-есть $P(\overline{A}) = q$.

Рассмотрим дискретную случайную величину X с двумя возможными значениями (пусть для определённости будут $x_1 = 1; x_2 = 0$) и соответствующими им вероятностями $p_1 = p$ и $p_2 = q$.

Итак, разыгрывание противоположных событий A и $\overline{A}$ сведено к разыгрыванию д.с.в. X с заданным законом распределения

$$X: \; x_1, \quad x_2, \cdots, x_n,$$
$$P: \; p_1, \quad p_2, \cdots, p_n,$$

с $MX = p; DX = pq; \sigma_X = \sqrt{pq}$.

Для разыгрывания случайной величины X надо (по правилу пункта **3.)** интервал $(0;1)$ разбить точкой p на два частичных интервала: $\Delta_1 = (0, p)$ и $\Delta_2 = (p, 1)$. Затем выбирают случайное число r_j. Если r_j попадает в интервал Δ_1, то $X = x_1 = 1$ (наступило событие A); если же r_j попадает в интервал Δ_2, то $X = x_2 = 0$ (событие A не наступило).

Правило. Для того чтобы разыграть испытания, в каждом из которых вероятность наступления события A равна p или вероятность не наступления события A равна

$1 - p = q$ (т.е. наступления противоположного события $\overline{A}$), надо выбрать случайное число

$r_j; (j = 1, 2, \cdots)$; если $r_j < p$, то событие A наступило; если же $r_j \geq p$, то событие A не наступило, т.е. наступило противоположное событие $\overline{A}$.

Пример 4. Разыграть шесть испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p = 0{,}35$.

Решение. Выберем из таблицы случайных чисел (см. приложения) шесть случайных чисел, например: $0{,}10; 0{,}36; 0{,}08; 0{,}99; 0{,}12; 0{,}06$. Считая при $r_j < 0{,}35$ событие A появилось, а при $r_j \geq 0{,}35$ событие A не появилось, т.е. наступило противоположное событие $\overline{A}$. Итак, получим искомую последовательность событий: $A, \overline{A}, A, \overline{A}, A, A.$

5. Разыгрывание полной группы событий

Разыгрывание полной группы n $(n > 2)$ несовместных событий. $A_1, A_2, \cdots, A_n$, вероятности которых $p_1, p_2, \cdots, p_n$ известны, можно свести к разыгрыванию дискретной случайной величины X со следующим законом распределения (для определенности примем $x_1 = 1, x_2 = 2, \cdots, x_n = n$):

$$\begin{array}{cccccc} X & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ P & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{array}$$

Действительно, достаточно считать, что если в испытании величина X приняла значение $x_j = j \; (j = 1, 2, \cdots, n)$, то наступило событие A_j. Справедливость этого утверждения выводится из того, что число n возможных значений X равно числу событий полной группы и вероятности возможных значений x_j и соответствующих им событий A_j одинаковы: $P(X = x_j) = P(A_j) = p_j$. Таким образом, появление в испытании события A_j равносильно событию, состоящему в том, что дискретная случайная величина X приняла возможно значение x_j.

Правило. Для того чтобы разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий полной группы событий $A_1, A_2, \cdots, A_n$ вероятности которых $p_1, p_2, \cdots, p_n$ известны, достаточно разыграть (по правилу пункта 3) дискретную случайную величину X со следующим законом распределения

X	1	2	3	$\cdots$	n
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Если в испытании величина X приняла возможное значение $x_j = j$, то считается наступило событие A_j.

Пример 5. Заданы вероятности четырех событий, обозначающих полную группу:

$$p_1 = P(A_1) = 0{,}19;\ p_2 = P(A_2) = 0{,}21;\ p_3 = P(A_3) = 0{,}34;\ p_4 = P(A_4) = 0{,}26.$$

Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из четырех заданных событий A_1, A_2, A_3, A_4.

Решение. В соответствии с правилом, приведенным в этом параграфе, надо разыграть дискретную случайную величину X, закон распределения которой задается в виде:

X	1	2	3	4
P	0,19	0,21	0,34	0,26

Согласно правилу пункта 3, разобьем интервал (0; 1) на четыре частичных интервала: $\Delta_1 = (0; 0{,}19), \Delta_2 = (0{,}19; 0{,}40), \Delta_3 = (0{,}40; 0{,}74), \Delta_4 = (0{,}74; 1).$ Выберем из таблицы случайных чисел пять случайных чисел. Например: 0,66; 0,31; 0,85; 0,63; 0,73. Так как случайное число $r_1 = 0{,}66$ принадлежит интервалу Δ_3, то $X = 3,$ следовательно, наступило событие A_3 . Аналогично найдем остальные события.

Итак, искомая последовательность событий такова: $A_3, A_2, A_4, A_3, A_3.$

Пример 6. События A и B независимы и совместны. Разыграть шесть испытаний в каждом из которых, вероятность появления события A равна 0,6, а вероятность появления события B равна 0,2.

Решение. Возможны четыре исхода испытания: (с учётом независимости A и B)

$A_1 = AB,$ причем, $P(AB) = P(A)p(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12;$

$A_2 = A\overline{B},$ причем, $P(A\overline{B}) = P(A)p(\overline{B}) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48;$

$A_3 = \overline{A}B,$ причем, $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})p(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08;$

$A_1 = \overline{A}\overline{B},$ причем, $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})p(\overline{B}) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32.$

Таким образом, задача сведена к разыгрываю полной группы четырех событий: A_1 с вероятностью $p_1 = 0{,}12$; A_2 с вероятностью $p_2 = 0{,}48$; A_3 с вероятностью $p_3 = 0{,}08$; A_4 с вероятностью $p_4 = 0{,}32$.

В свою очередь, в соответствии с правилом настоящего параграфа эта задача сводится к разыгрыванию дискретной случайной величины X , закон распределения которой имеет вид:

X	1	2	3	4
P	0,12	0,48	0,08	0,32

Используем правило пункта 3. Выберем шесть случайных чисел. Например: 0,45; 0,65; 0,06; 0,59; 0,33; 0,70. Построим частичные интервалы: $\Delta_1 = (0; 0{,}12);$ $\Delta_2 = (0{,}12; 0{,}60),$ $\Delta_3 = (0{,}60; 0{,}68), \Delta_4 = (0{,}68; 1).$ Таким образом, получим:

- случайное число $r_1 = 0{,}45$ принадлежит интервалу Δ_2, поэтому наступило событие $A_2 = A\overline{B}.$ Аналогично найдем исходы остальных испытаний (**найдите остальные исходы!**)

Итак, искомая последовательность исходов разыгранных испытаний такова: $A\overline{B}, \overline{A}B,$ $AB, A\overline{B}, A\overline{B}, \overline{A}\overline{B}.$

Пример 7. События A и B зависимы и совместны. Разыграть четыре испытания, в каждом из которых заданы вероятности $P(A) = 0{,}8,\ P(B) = 0{,}6,\ P(AB) = 0{,}5.$

Решение. Возможны четыре исхода испытания:

$A_1 = AB,$ причем, по условии, $P(AB) = 0{,}5;$

$A_2 = A\overline{B},$ причем, $P(A\overline{B}) = P(A) - p(AB) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3;$

$A_3 = \overline{A}B,$ причем, $P(\overline{A}B) = p(B) - P(AB) = 0{,}6 - 05 = 0{,}1;$

$A_4 = \overline{A}\overline{B},$ причем, $P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1 - [0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}1] = 0{,}1.$

Таким образом, задача сведена к разыгрываю полной группы четырех событий: A_1 с вероятностью 0,5, A_2 с вероятностью 0,3, A_3 с вероятностью 0,1, A_4 с вероятностью 0,1.

Задание.

Рекомендуем самостоятельно закончить решение, считая для определенности, что выбраны случайные числа: 0,65; 0,06; 0,59; 0,33.

Ответ представляется в виде: $\overline{A}B, AB, A\overline{B}, \overline{A}\overline{B}.$

Указание. Так как $A = AB + A\overline{B}$, то $P(A) = P(AB + A\overline{B}).$

Следовательно

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB).\ .....$$

Аналогично получим, что

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB).$$

6. Разыгрывание непрерывной случайной величины, метод обратных функций

Пусть потребуется разыграть непрерывную случайную величину X , т.е. получить ее возможных значений, $x_j \ \ (j = 1,2,...)$, зная функцию распределения $\Phi(x).$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Если r_j – случайное число, то возможное значение x_j разыгрываемой непрерывной случайной величины X с заданной функцией распределения $\Phi(x)$, соответствующее r_j, является корнем функционального уравнения*

$$\Phi(x_j) = r_j . \tag{7}$$

Доказательство. Пусть выбрано случайное число $r_j \ (0 \le r_i < 1).$ Так как в интервале всех возможных значений X функция распределения $\Phi(x)$ монотонно возрастает от 0 до 1, то в этом интервале существует, причем только одно, такое значение аргумента x_j, при котором функция распределения $\Phi(x)$ примет значение r_j. Другими словами, уравнение (7) имеет единственное решение

$$x_j = \Phi^{-1}(r_j),$$

где Φ^{-1} – функция, обратная функции.

Докажем теперь, что корень x_j, уравнения (7) есть возможное значение такой непрерывной случайной величины (временно обозначим ее через ξ , а потом убедимся что X принимает это значение, т.е. $\xi = X$). С этой целью докажем, что вероятность попадания ξ в интервал, например (c, d), принадлежащий интервалу всех возможных значений X , равна приращению функции распределения $\Phi(x)$ на этом интервале:

$$P(c < \xi < d) = \Phi(d) - \Phi(c).$$

В самом деле, так как $\Phi(x)$ – монотонно возрастающая функция в интервале всех возможных значений случайной величины X, то в этом интервале большим значением аргумента соответствуют большие значения, и обратно. Поэтому, если $c < x_j < d$, то $\Phi(c) < r_j < \Phi(d)$ и обратно (с учетом того, что в силу формулы (7) имели $\Phi(x_j) = r_j$).

Из этих неравенств следует, что случайная величина ξ заключена в интервале

(8) $$c < \xi < d,$$

то случайная величина X заключена в интервале

(9) $$\Phi(c) < X < \Phi(d),$$

и обратно. Следовательно, неравенства (8) и (9) равносильны, а значит, и равновероятны:

(10) $$P(c < \xi < d) = P\{\Phi(c) < X < \Phi(d)\}.$$

Так как величина R распределена равномерно в интервале (0; 1), то вероятность попадания R в некоторый подинтервал, принадлежащий интервалу (0; 1), равна его длине. В частности,

$$P\{\Phi(c) < X < \Phi(d)\} = \Phi(d) - \Phi(c).$$

Таким образом, соотношение (10) можно переписать в виде

$$P(c < \xi < d) = \Phi(d) - \Phi(c).$$

Итак, вероятность попадания ξ в подинтервал (c, d) равна приращению функции распределения $\Phi(x)$ на этом подынтервале, а это означает, что. Другими словами, числа x_j, определяемые формулой (7), есть возможные значения случайной величины X с заданной функцией распределения $\Phi(x)$, что и требовалось доказать.

Правило 1. Для того чтобы найти возможное значение x_j непрерывной случайной величины X, зная ее функцию распределения $\Phi(x)$, надо выбрать случайное число r_j, приравнять его функции распределения и решить относительно x_j полученное уравнение

$$\Phi(x_j) = r_j .$$

Замечание 1. Если решить это уравнение в явном виде не удается, то применяют графический или численный методы.

Пример 8. Разыграть три возможных значения непрерывной случайной величины X распределенной равномерно в интервале (2; 10).

Решение. Напишем функцию распределения величины X, распределенной равномерно в интервале (a, b), в виде:

$$\Phi(x) = \frac{(x-a)}{(b-a)}.$$

По условию, $a = 2$, $b = 10$, следовательно,

$$\Phi(x) = \frac{(x-2)}{8}.$$

Используя правило 1 данного параграфа, напишем уравнение для отыскания возможных значений x_j. Для этой цели приравниваем значение функции распределения $\Phi(x)$ случайному числу r_j:

$$\frac{(x_j - 2)}{8} = r_j$$

Отсюда получим: $x_j = 8r_j + 2.$

Выберем три случайных числа, например, $r_1 = 0{,}11$; $r_2 = 0{,}17$; $r_3 = 0{,}66$. Подставим эти числа в уравнение, разрешенное относительно x_j; в итоге получим соответствующие возможные значения случайной величины X:

$$x_1 = 8 \cdot 0{,}11 + 2 = 2{,}88;\ x_2 = 8 \cdot 0{,}17 + 2 = 3{,}36;\ x_3 = 8 \cdot 0{,}66 + 2 = 7{,}28.$$

Пример 9. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному функцией распределения:

$$\Phi(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (x > 0),$$

где параметр $\lambda > 0$ считается известным.

Требуется найти явную формулу для разыгрывания возможных значений X.

Решение. Используя правило 1 данного параграфа, напишем уравнение

$$1 - e^{-\lambda x_j} = r_j.$$

Решим это уравнение относительно x_j:

$$e^{-\lambda x_j} = 1 - r_j \quad \text{или} \quad -\lambda x_j = \ln(1 - r_j).$$

Отсюда

$$x_j = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_j).$$

Случайное число r_j заключено в интервале (0; 1); следовательно, число $1 - r_j$ также случайное и принадлежит интервалу (0; 1). Другими словами, величины R и $1 - R$ распределены одинаково. Поэтому для отыскания x_j воспользоваться более простой формулой

$$x_j = -\frac{1}{\lambda}\ln r_j.$$

Замечание 2. На основании определения функции распределения непрерывной случайной величины с заданной функцией плотности $\varphi(x)$ имеем:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt.$$

В частности,

$$\Phi(x_j) = \int_{-\infty}^{x_j} \varphi(t)dt.$$

Отсюда следует, что если известна плотность вероятности $\varphi(x)$, то для разыгрывания случайной величины X можно вместо уравнения $\Phi(x_j) = r_j$ решить относительно x_j интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{x_j} \varphi(t)dt = r_j. \tag{11}$$

Правило 2. Для того чтобы найти возможное значение x_j, непрерывной случайной величины X, зная ее функции плотности вероятности $\varphi(x)$, надо выбрать случайное число r_j и решить относительно x_j интегральное уравнение (11) или уравнение

$$\int_{a}^{x_j} \varphi(t)dt = r_j,$$

где a наименьшее конечное возможное значение случайной величины X.

Пример 10. Задан плотность $\varphi(x) = \lambda(1 - (0{,}5) \cdot \lambda x)$ вероятности непрерывной случайной величины X в интервале $(0; 0{,}5 \cdot \lambda)$; вне этого интервала $\varphi(x) = 0$. Требуется найти явную формулу для разыгрывания возможных значений X.

Решение. Напишем в соответствии с правилом 2 уравнение

$$\lambda \int_{0}^{x_j} (1 - 0{,}5 \cdot \lambda t)dt = r_j,$$

Выполнив интегрирование и решив полученное квадратное уравнение относительно x_j, окончательно получим $x_j = 2(1-\sqrt{1-r_j})\cdot\lambda^{-1}$.

7. Метод суперпозиции

Пусть функция распределения разыгрываемой случайной величины X может быть представлена в виде линейной комбинации двух функций распределения:

$$(*) \qquad \Phi(x) = C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x);\ (C_1 > 0; C_2 > 0).$$

При $x \to \infty$ каждая из функций распределения стремится к единице, поэтому должно выполняться условие, $C_1 + C_2 = 1$.

Введем вспомогательную дискретную случайную величину Z с законом распределения

Z	1	2
P	C_1	C_2

Мы видим, что

$$(12) \qquad P(Z=1) = C_1,\ P(Z=2) = C_2,$$

Выберем два независимых случайных числа r_1 и r_2. По числу r_1 разыгрываем возможное значение Z. Если окажется, что $Z=1,$то ищут искомое возможное значение X из уравнения $\Phi_1(x) = r_1;$ если $Z = 2,$, то решают относительно x уравнение $\Phi_2(x) = r_2$.

Докажем, что функция распределения разыгрываемой случайной величины равна заданной функции распределения. Воспользуемся формулой полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H2}(A).$$

Обозначим через Aсобытие $X < x;$ тогда

$$(13) \qquad P(A) = P(X < x) = \Phi(x).$$

Рассмотрим гипотезы $H_1:\ Z=1$ и $H_2:\ Z=2$. Вероятности этих гипотез в силу (12) равна

$$(14) \qquad P(H_1) = P(Z-1) = C_1 \text{ и } P(H_2) = P(Z=2) = C_2.$$

Условные вероятности появления события A соответственно равны:

$$(15) \qquad P_{H_1}(A) = P_{H_1}(X < x) = \Phi_1(x) \text{ и } P_{H_2}(A) = P_{H_2}(X < x) = \Phi_2(x)$$

Представим (13), (14) и (15) в формулу полной вероятности, окончательно получим

$$\Phi(x) = C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x).$$

что и требовалось доказать.

Правило. Для того чтобы разыграть возможное значение случайное величины X, функция распределения которой

$$\Phi(x) = C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x).$$

где $C_1 > 0$; $C_2 > 0$ и $C_1 + C_2 = 1$, надо выбрать два независимых случайных числа r_1 и r_2.Затем по случайному числу r_1 разыграть возможное значение вспомогательной дискретной случайной величины Zпо правилу разыгрывания дискретных случайных величин (см. пункт 3):

Z	1	2
P	C_1	C_2

Если окажется, что $Z=1$, то решают относительно x уравнение, $\Phi_1(x) = r_1;$ если $Z=2$, то решают уравнение $\Phi_2(x) = r_2;$.

Пример 11. Найти явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения

$$\Phi(x) = 1 - 0{,}25\cdot(e^{-2x} + 3e^{-x});\ 0 < x < +\infty.$$

Решение. Воспользуемся методом суперпозиции, для этой цели представим заданную функцию в виде равенства

$$\Phi(x) = 0{,}25 \cdot (1 - e^{-2x}) + 0{,}75(1 - e^{-x}).$$

Таким образом, можно принять за значениями функции распределения и соответственно определяются константы:

$$\Phi_1(x) = (1 - e^{-2x}); \;\; \Phi_2(x) = 1 - e^{-x}); \; C_1 = 0{,}25, \; C_2 = 0{,}75.$$

Введем в рассмотрение вспомогательную дискретную случайную величину .. с заданным законом распределения

Z	1	2
P	0,25	0,75

Выберем независимые случайные числа r_1 и r_2. Разыграем Z по случайному числу r_1, с этой целью согласно пункту 3 построим частичные интервалы $\Delta_1 = (0; 0{,}25)$, $\Delta_2 = (0{,}25; 1)$. Если

$r_1 < 0{,}25;$ то $Z = 1,$ если $r_1 \geq 0{,}25$, то $Z = 2$.

Итак, возможное значение с.в. X находят, решая относительно неизвестного x уравнение $1 - e^{-2x} = r_1;$ если $r_1 < 0{,}25;$ или $1 - e^{-x} = r_2;$ если $r_1 \geq 0{,}25;$

Используя способ решения примера 9 из пункта 6, в котором была найдена явная формула $x = -\lambda^{-1} \ln r$ для разыгрывания возможных значений показательного распределения с заданным параметром λ, окончательно получим:

$$x = -0{,}5 \cdot \ln r_1; \quad 0 < 0{,}25 \text{ и } x = -\ln r_2; \;\; 0{,}25 \leq r_1 < 1.$$

Замечание 2. Метод суперпозиции по аналогию рассмотренного случая обобщается на $n > 2$ слагаемых функций распределения.

Задание. Исследуйте формулу $(*)$ для трёх слагаемых. Проведите аналогичные рассуждения, рассмотренные в случае двух линейных комбинаций функции распределения, для случая трёх функций распределения. Рассмотрите вспомогательную дискретную величину $Z = \{1,2,3\}$ с вероятностями C_1, C_2, C_3, и т.д.

8. Приближенное разыгрывание нормальной случайной величины

Напомним предварительно, что если случайная величина X распределена равномерно в интервале (0; 1), то ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны:

$$MX = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \text{ и } DX = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}. \tag{16}$$

Составим сумму n независимых, распределенных равномерно в интервале $(0;1)$ случайных величин $X_j \quad (j = 1,2,...,n)$:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = X_1 + X_2 + ... + X_n. \tag{17}$$

Для нормирования этой суммы найдем предварительно ее математическое ожидание и дисперсию.

Поскольку, математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых, и так как сумма (17) содержит n слагаемых, то математическое ожидание каждого, из которых, согласно (16) равно $1/2$. Следовательно, математическое ожидание суммы (17) вычисляется по формуле

$$M\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \frac{n}{2}.$$

Известно, что дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых. Сумма (17) содержит n независимых слагаемых, дисперсия каждого из которых в силу (16) равна $1/12$; следовательно, дисперсия всей суммы равна

$$D\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \frac{n}{12}.$$

Отсюда извлекая, квадратный корень находим среднее квадратическое отклонение суммы (17)

$$\sigma = \sqrt{n/12}$$

Пронумеруем рассматриваемую сумму, для чего от выражения (17) вычтем математическое ожидание, а затем полученный результат разделим на среднее квадратическое отклонение, получим:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - (n/2)}{\sqrt{n/12}}.$$

В силу центральной предельной теоремы при $n \to \infty$ распределение этой нормированной случайной величины стремится к нормальному закону с параметрами $a = MX = 0$ и $\sigma = 1$. ***При конечном*** $n < \infty$ ***это распределение приближенно нормальное***. В частности, при $n = 12$ получим достаточно хорошее и удобное для расчета приближение

$$\sum_{j=1}^{12} X_j - 6.$$

Правило. Для того чтобы разыграть возможное значение x_j нормированной случайной величины X с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, надо сложить 12 независимых случайных чисел и из полученной суммы вычесть число 6, имеем:

$$x_j = \sum_{j=1}^{12} r_j - 6 = S_j - 6.$$

Пример 12.

а) Разыграть 100 возможных значений нормированной случайной величины X с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$.

б) оценить параметры разыгранной величины.

Решение. а) Выберем 12 случайных чисел из первой строки таблицы случайных чисел, затем сложим их и из полученного результата вычтем число 6; в итоге имеем

$$x_1 = (0{,}10 + 0{,}09 + ... + 0{,}67) - 6 = -0{,}99$$

Аналогично, выбирая из каждой строки таблицы случайных числе первые 12 чисел, найдем остальные возможные значения X.

Задание. Найти численные значения последующих значений случайной величины X: $x_2,\ x_3,\ \cdots, x_{12}$.

б) Выполнив расчеты, получим искомые оценки:

$a^* = \overline{x}_b \approx -0{,}05;\ \sigma^{\bullet} = \sqrt{D_b} \approx 1{,}04.$

Оценки удовлетворительные: a^* близко к нулю, σ^* мало отличается от единицы.

Замечание. Если требуется разыграть возможные значения z_j нормально распределенной случайной величины Z с математическим ожиданием $M(Z) = a$ и средним квадратическим отклонением σ_Z. Разыграв по правилу настоящего параграфа возможное значение z_j, находят искомое возможное значение x_j по формуле

$$z_j = \sigma_X \cdot x_j + a.$$

Эта формула получена из соотношения

$$\frac{z_j - a}{\sigma_Z} = x_j.$$

На этом мы завершим раздел разыгрывания случайных величин методом Монте-Карло.

9. Расчёт многоканальной СМО с отказами методом Монте – Карло

Пусть в систему массового обслуживания с отказами (заявка покидает такую систему, если все каналы заняты), состоящую из N каналов, поступает простейший поток заявок (см. пример 5, пункт 2, Т.6), при этом плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными заявками задана равенствами: при $\lambda > 0$,

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\tau}, & 0 \le \tau < \infty \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Каждая заявка поступает в первый канал. Если первый канал свободен, то он обслуживает поступившую заявку; если же первый канал занят, то заявка поступает во второй канал, и он обслуживает заявку (если канал в этот момент свободен) или заявка передаётся в третий канал (если первый и второй каналы заняты) и т.д.

В случае, если в момент поступления заявки все каналы заняты, наступает отказ и поступившая заявка не обслуживается и из дальнейшего рассмотрения исключается.

Ведётся подсчёт количества обслуженных заявок и количество отказов. Если заявка обслужена, то в «*счётчик обслуженных заявок*» добавляют единицу; при отказе единицу добавляют в «*счётчик отказов*».

Ставится задача: *найти математические ожидания количества* ***обслуженных заявок*** *и* ***количества отказов*** *за фиксированный промежуток времени* T.

Решение. Для решения этой задачи производят n; $(1 \le n \le N)$ испытаний, каждое длительностью времени T, и определяют в каждом испытании число «*обслуженных*» заявок и число «*отказов»*.

Обозначим:

n – число испытаний;

$t_{\text{обсл}}$ – обслуживания заявки каналом;

t_{j} – момент освобождения j – го канал;

T_{k} – момент поступления k – й заявки;

τ_k – длительность времени между поступлениями k – й и $(k+1)$ – й заявок;

$T_{r+1} = (T_k + \tau_k)$ – момент поступления $(k+1)$ – й заявки;

Пусть первая заявка поступила в момент времени, $T_1 = 0$, т.е. когда все каналы свободны. Эта заявка поступит в первый канал и будет им обслужена за время за время $t_{\text{обсл}}$. В счётчик обслуженных заявок надо записать единицу.

Моделируем (разыграем) момент T_2, поступления второй заявки, для чего выбираем случайное число r_1 и разыграем τ_1 (учитывая, τ распределено по показательному закону): по формуле

$$\tau_1 = -(1/\lambda)\ln r_1$$

(см. Пункт 7. пример 2). Следовательно, вторая заявка поступит в момент времени

$$T_2 = T_1 + \tau_1 = 0 + \tau_1 = \tau_1.$$

Если окажется, что $t_1 \le T_2$ (вторая заявка поступила после того, как первый канал освободился), то вторая заявка будет обслужена первым каналом и то первый канал занят, и заявка поступит во второй канал и будет им обслужена, и в счётчик обслуженных заявок надо добавить единицу.

Если же окажется, что $t_1 > T_2$ то первый канал занят, и заявка поступит во второй канал и будет им обслужена, поскольку расчёт начат в предположении, что все каналы свободны; в счётчик обслуженных заявок надо добавить единицу. и в счётчик обслуженных заявок надо добавить единицу.

Дальнейший расчёт производится аналогично. Если в некоторый момент времени поступления очередной заявки все каналы заняты, то наступает отказ и в счётчик отказов надо добавить единицу.

Испытание заканчивается, если очередная заявка поступит в момент времени, превышающий момент окончания испытания, т.е. если наступит момент $T_{k+1} > T$.

В итоге j – о испытания в счётчиках окажутся соответственно число обслуженных заявок $o_j = З_{\mathrm{j}}(обсл)$ – и число отказов $\overline{o}_j = З_{\mathrm{j}}(отк)$.

Пусть произведено всего n испытаний, каждое с временным интервалом T , причём в j – м испытании зарегистрировано $o_j = З_{\mathrm{j}}(обсл)$ обслуженных заявок и $\overline{o}_j = З_{\mathrm{j}}(отк)$ отказов. В качестве оценок искомых математических ожиданий принимают соответственно выборочные средние:

$$M^{\bullet}[З_{обсл}] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} З_j(обсл),\ M^{\bullet}[З_{отк}] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} З_j(\text{отк}).$$

Для вычисления наименьшего числа испытаний, которые с надёжностью γ_p заранее обеспечат заданную верхнюю границу ошибки $\varepsilon = t\sigma/\sqrt{n}$ (см. Т.19, формула (44)). Отсюда следует, что (см. замечание) $n = (t\sigma/\varepsilon)^2$, где t находят по формуле $\Phi_0(t) = \frac{\gamma_p}{2}$ (см.Т.19, (47)), а величина с.к.о для показательного распределения определяется равенством $\sigma = 1/\lambda$.

Пример 13. Предположим, что среднеквадратическое отклонение $\sigma = 4,$ и $\gamma_p = 0{,}95$; $\varepsilon = 0{,}7$. Тогда $\Phi_0(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$ и, по таблице значений функции $\Phi_0(t) = 0{,}475,\ t = 1{,}96$.

Следовательно, минимальное число испытаний равно

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{(1{,}96)^2 \cdot 4^2}{(0{,}7)^2} = [125{,}44] = 125.$$

В наших рассмотрениях предполагалось, что время обслуживания - неслучайная величина; если время обслуживания случайно, то расчёт производится аналогично. Разумеется, для моделирования (разыгрывания) случайного времени обслуживания надо знать закон его распределения для каждого канала. На практике обычно расчёт производят на ЭВМ.

10. Применение метода Монте-Карло к вычислению определённых интегралов

Рассмотрим один из способов вычисления определённых методом Монте-Карло, которая называется «**способ усреднения подынтегральной функции**. Требуется найти оценку интеграла $J^{\bullet}$ определённого интеграла

$$J = \int_a^b f(t)dt.$$

Пусть X случайная величина, распределённая равномерно в интервале интегрирования (a,b) с плотностью распределения $\varphi(x) = 1/(b-a)$.

Тогда математическое ожидание этого распределения вычисляется равенством

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{J}{b-a},$$

Отсюда получим

$$M[\varphi(X)]\cdot(b-a) = J = \int_a^b \varphi(t)dt.$$

Заменим математическое ожидание $M[\varphi(X)]$его оценкой, равной выборочной средней, получим оценку $J^{\bullet}$ искомого интеграла:

(!)
$$J^{\bullet} = (b-a)\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(x_j),$$

где x_j – возможные значения случайной величины $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Так как величина X распределена равномерно в интервале (a,b) с плотностью распределения $\varphi(x) = 1/(b-a)$. то x_j в соответствии с формулой пункта 7. правило 2, *разыгрывают* по формуле $\frac{1}{b-a}\int_a^{x_j} dt = r_j$. Отсюда следует, что $x_j = a + (b-a)\cdot r_j$.

Пример 14. Пусть задан определённый интеграл

$$J = \int_1^3 (x+1)dx.$$

Найти:

а) оценку $J^{\bullet}$;

б) абсолютную погрешность $|J - J^{\bullet}|$;

в) дисперсию усредняемой функции $\varphi(X) = X + 1$, учитывая, случайная величина X в интервале (1,3) распределена равномерно;

г) минимальное число испытаний, которые с надёжностью $\gamma_p = 0{,}95$ обеспечат верхнюю границу ошибки $\varepsilon = 0{,}1$.

Решение.

а)Используем формулу **(!)**. По условию примера, имеем

$$a = 1; b = 3; f(x) = x + 1.$$

Для простоты пример будем решать при $n = 10$. Тогда оценка $J^{\bullet}$определяется из равенства

$$J^{\bullet} = (3-1)\cdot\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(x_j+1) = \frac{1}{5}\cdot\sum_{j=1}^{10}(x_j+1).$$

Результаты десяти испытаний приведены в таблице

Номер опыта j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_j	0,100	0,973	0,253	0,376	0,520	0,135	0,863	0,467	0,354	0,876
$2r_j$	0,200	1,946	0,506	0,752	1,040	0,270	1,726	0,934	0,708	1,752
$x_j = 1 + 2r_j$	1,200	2,946	1,506	1,752	2,040	2,270	1,726	1,934	1,708	2,752
$\varphi(x_j) = 1 + x_j$	2,200	3,946	2,506	2,752	3,040	3,270	2,726	2,934	2,708	3752

Сложим все числа последней строки таблицы, находим

$$\sum_{j=1}^{10}\varphi(x_j) = 29{,}834.$$

Следовательно, искомая оценка интеграла равна $J^{\bullet} = 0{,}2 \cdot 29{,}834 = 5{,}967$.

б) Для оценки величины $|J - J^{\bullet}|$ вычислим интеграл J по формуле Ньютона-Лейбница, получим $J = 6$. Поэтому $|J - J^{\bullet}| = 6 - 5{,}967 = 0{,}033$.

в) Найдём дисперсию усредняемой функции плотности $\varphi(X) = X + 1$, с учётом того, что случайная величина X в интервале интегрирования (1,3) распределена равномерно и её дисперсия определяется по формуле $D(X) = (b-a)^2/12$ (см. Т.9,пункт 1.). Следовательно, с учётом свойства дисперсии $D(X+1) = D(X)$ получим

$D(X) = (3-1)^2/12 = 1/3$.

г) Найдём минимальное число испытаний n, которые с надёжностью 0,95 обеспечит верхнюю границу ошибки $\varepsilon = 0{,}1$. Из равенства $\Phi_0(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475$ и по таблице значений функции Лапласа находим $t = 1{,}96$. Искомое минимальное число испытаний n равно

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{(1{,}96)^2 \cdot 1/3}{(0{,}1)^2} = 128.$$

Дополнение 3

Примеры решения задач с использованием системы «STATISTICA»

1. Краткая характеристика системы

Рассмотрим приемы решения статистических задач с применением специализированной системы статистического анализа данных — STATISTICA. Мы будем использовать свободно-распространяемую версию с электронным учебником [1].

STATISTICA — это универсальная система, включающая расчет набора статистик и графиков, дисперсионный и непараметрический анализ, корреляционный и многомерный регрессионный анализ, кластерный и факторный анализ и т.д. В системе данные организованы в виде наблюдений и переменных. Наблюдения можно рассматривать как эквивалент записей в программе управления базами данных, а переменные — как эквивалент полей. Переменные могут иметь имя, например ВЕС, РОСТ (по умолчанию VAR1, VAR2, ...). Наблюдения (CASE) имеют порядковую нумерацию, но могут содержать имена наблюдений, например Иванов, Петров.

Файлы данных системы STATISTICA помимо исходных данных могут хранить и другую информацию, например:

- ☐ формат отображения;
- ☐ определенные значения, которые нужно пропускать при расчетах;
- ☐ длинные имена переменных и комментариев;

Наборы файлов данных системы STATISTICA (расширение *.sta) можно рассматривать как «рабочие книги», так как они содержат информацию о всех дополнительных файлах (например, графиках, отчетах и программах), которые используются с текущим набором данных.

2. Описательная статистика

Пример 1.

Требуется определить среднюю величину дневной выручки в магазине. Пусть мы располагаем выборкой этой величины, которая фиксировалась кассиром ежедневно в течение месяца. Эти данные приведены в нижеследующей таблице.

День	Выручка (у.е)	День	Выручка (у.е)	День	Выручка (у.е)
1	27479,27	11	38077,50	21	53686,90
2	39469,80	12	69720,76	22	69582,56
3	43501,55	13	38106,10	23	30865,84
4	39264,79	14	50553,20	24	44048,56
5	30043,48	15	43583,21	25	61449,22
6	67662,00	16	41282,52	26	53349,40
7	68987,42	17	46200.47	27	55048,30
8	35961,27	18	45346,07	28	39927,48
9	36232,53	19	54307,78	29	38368,89
10	50277,72	20	67304,06	30	31470,00

Для решения поставленной задачи необходимо будет по данным этой выборки определить математическое ожидание случайной величины (выручки), дисперсию и средне-квадратичное отклонение. Затем построить доверительный интервал на оценку математического ожидания, задавшись приемлемой доверительной вероятностью (например, 95%).

Решение

1. Запустите программу STATISTICA и в переключателе модулей системы (рис.1) выберите режим Основные статистики и таблицы (Basic Statistics). Нажмите клавишу Переключиться в (Switch To) – на экране появится основное окно системы. Как правило, в этом окне откроется таблица с раннее использовавшимся набором данных.

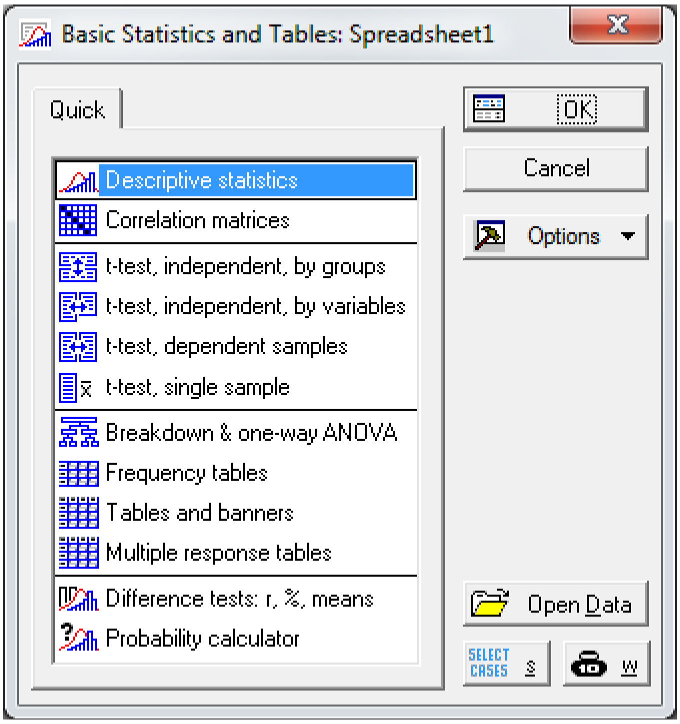


Рис.1. Окно переключателя модулей

2. Теперь нужно создать свою электронную таблицу данных. В основном окне системы выберите меню **Файл** (рис.2) и команду **Создать данные...** (New Data). В диалоговом окне **Открытие файла данных** (Open Data File) (рис.3) выберите нужный каталог и введите имя файла. По умолчанию файлам, содержащим таблицы данных, присваивается расширение *.sta.

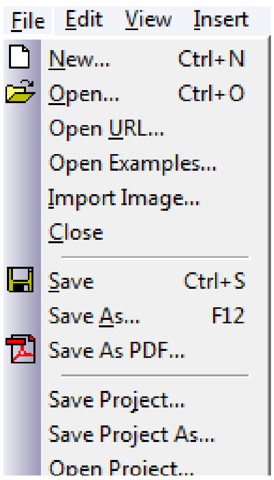


Рис.2. Меню команды файл

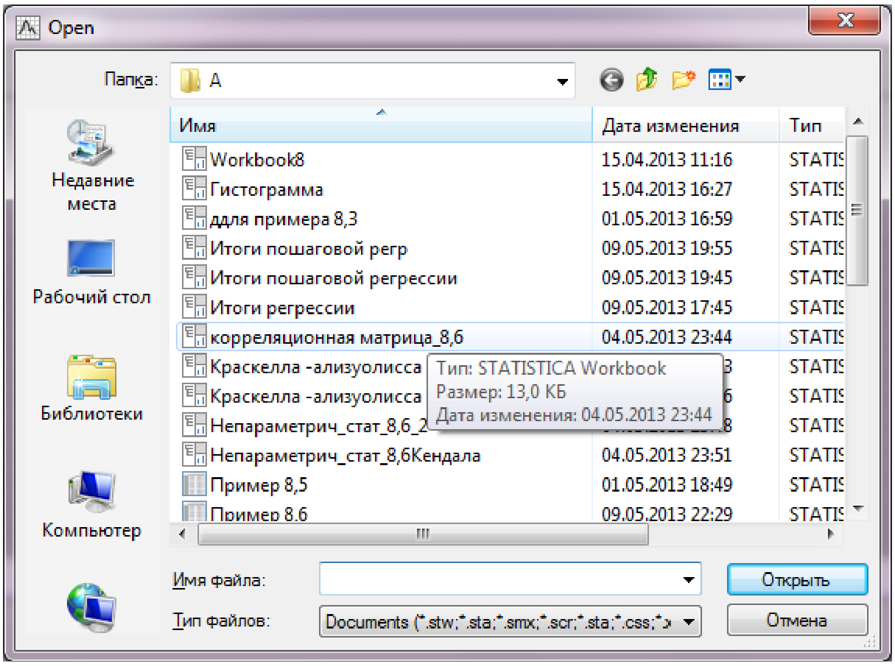


Рис.3. Открытие файла данных

После нажатия кнопки Сохранить (Save) появится пустая таблица данных по умолчанию размером 10 * 10, т.е. 10 **переменных** (VARIABLES) представлены значениями в 10 **наблюдениях** (CASE). В нашем случае имеется всего одна переменная и 30 наблюдений.

Поэтому с помощью меню **Переменные/удалить** (Vars/Deletc) удалите из таблицы переменные VAR2 — VAR10, а с помощью меню **Наблюдения/добавить** (Case/Add) добавьте еще 20 наблюдений после 10-го. Щелкните дважды по ячейке с именем VAR1, задайте имя переменной нашего примера — ВЫРУЧКА (рис. 4) и нажмите кнопку **ОК.**

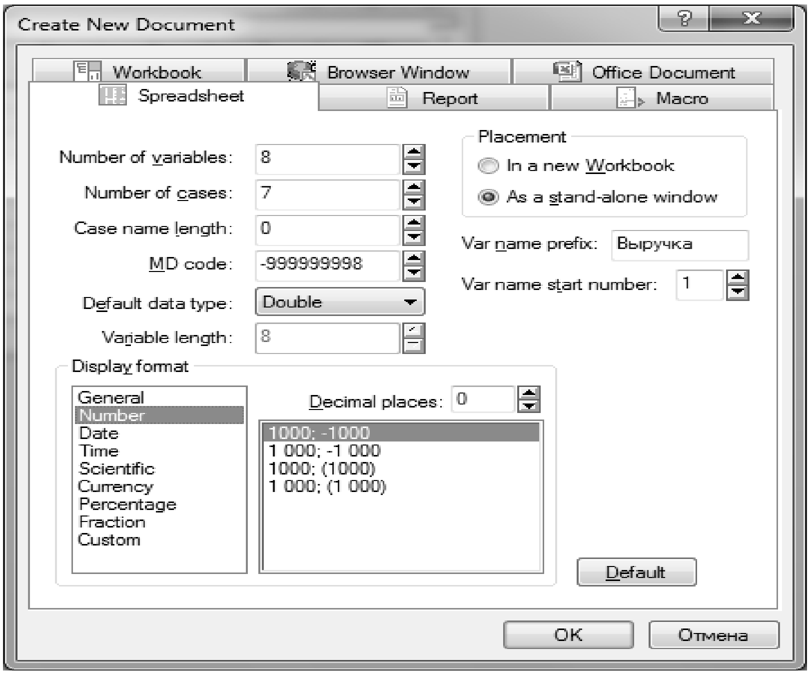


Рис.4. Задание формата для ввода переменной

В окне **Данные** (Data) введите значения выручки в магазине из таблицы 1 и сохраните данные с помощью команды меню **Файл/Сохранить** (File / Save).

3. Теперь можно приступить к расчету требуемых статистических характеристик. С помощью меню **Анализ/Описательная статистика** (Analysis/Decriptive Statistics) вызовите диалоговое окно **Основные статистики и таблицы** (Basic Statistics), выберите команду **Описательные статистики** (Decriptive Statistics) и нажмите **ОК.** В появившемся окне (рис. 5), нажав кнопку **Переменные** (Variables), укажите имя исследуемой переменной; в данном случае она единственная в списке — ВЫРУЧКА.

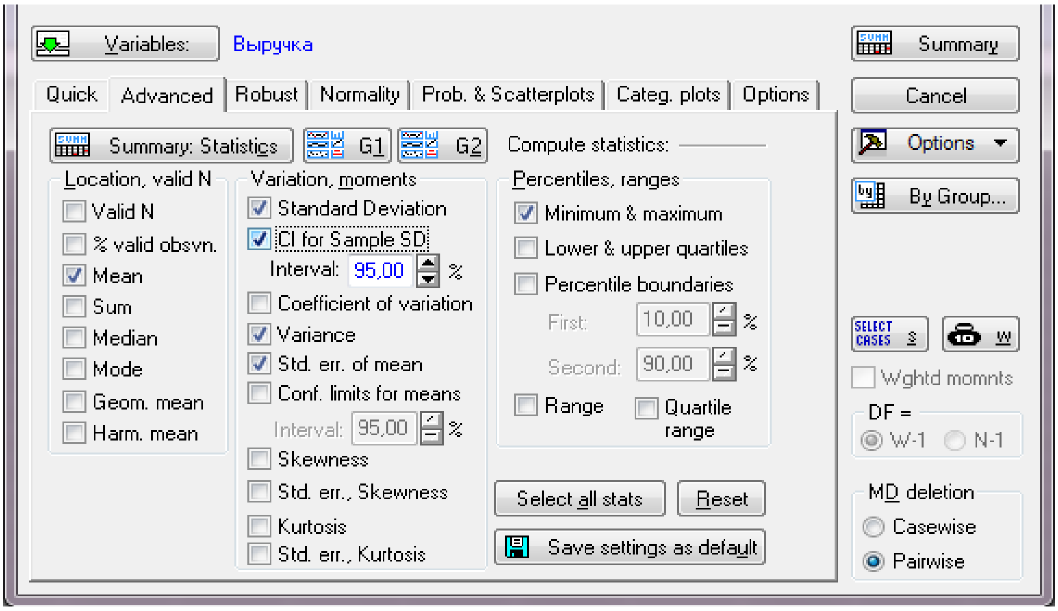
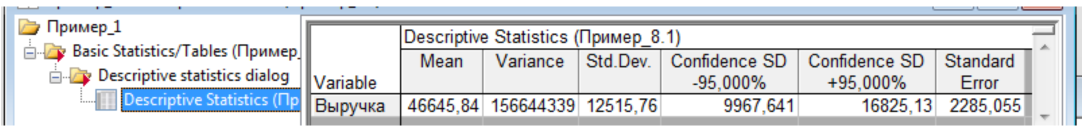


Рис. 5. Диалоговое окно описательной статистики

Вернувшись в окно **Описательные статистики** (Decriptive Statistics), нажмите кнопку **Другие статистики** (More statistics) и в появившемся списке укажите следующие статистические характеристики:

- математическое ожидание (Mean);
- стандартное отклонение (Standard Deviation);
- дисперсия (Variance);
- стандартная ошибка (Standard error of mean);
- доверительный интервал на математическое ожидание при доверительной вероятности 95% (95% confidence limits of mean).

Запустите вычислительную процедуру, нажав кнопку **ОК.** На экране появится следующая таблица результатов (рис. 6). Из этой таблицы можно легко увидеть, что величина ежедневной выручки в магазине с вероятностью 95% лежит в пределах от 42304,96 до 51772,28 (у.е.) и в среднем составляет 47038,62 (у.е.).



Descriptive Statistics (Пример_8.1)

Variable	Mean	Variance	Std.Dev.	Confidence SD -95,000%	Confidence SD +95,000%	Standard Error
Выручка	46645,84	156644339	12515,76	9967,641	16825,13	2285,055

Рис. 6. Результ ат

расчета основных характеристик случайной величины

Визуальную интерпретацию результатов можно представить с помощью двумерного графика. В диалоговом окне **Описательные статистики** нажмите клавишу **Графики «ящики с усами»** (Box & Wisker Type). В появившемся окне выберите тип графика: **Среднее/Стандартная ошибка/Стандартное отклонение** (Mean/SE/SD). Нажмите **ОК** и получите графическое окно (рис. 7).

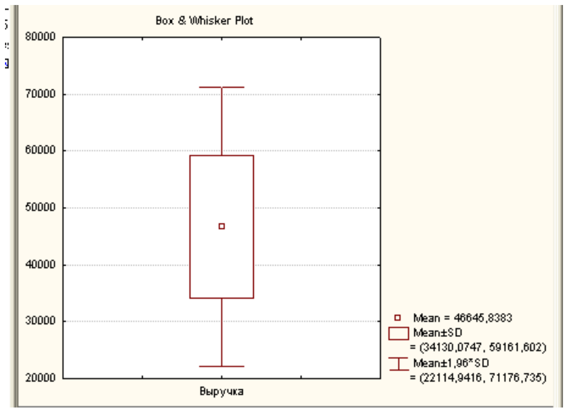


Рис. 7. Диаграмма размаха значений случайной величины

Смысл этого графика достаточно прост: точка в центре прямоугольника (ящика) соответствует среднему значению выручки. От этого значения откладываются положительная и отрицательная величины стандартной ошибки (ширина ящика) и положительная и отрицательная величины стандартного отклонения (усы)

3. Построение гистограммы и проверка закона распределения

Пример 2.

Во многих случаях, перед тем как проводить основной анализ данных, требуется установить: к какому из известных законов распределения вероятности принадлежит наблюдаемая величина? Исследуем прибыль от реализации товара на предприятии как непрерывную случайную величину, распределенную предположительно по нормальному закону. Исходные данные о прибыли, полученные при ее ежедневной регистрации в течение 100 дней (объем выборки n= 100), приведены в таблице ниже.

Исходные данные к примеру 2

День	Прибыль	День	Прибыль	День	Прибыль	День	Прибыль	День	Прибыль
1	47,00	21	43,10	41	46,73	61	66,61	81	35,56
2	37,22	22	33,10	42	46,30	62	33,88	82	41,53
3	52,44	23	31,53	43	63,43	63	55,39	83	34,78
4	62,76	24	40,22	44	49,15	64	59,02	84	46,37
5	61,98	25	42,26	45	48,14	65	69,19	85	49,68
6	67,33	26	28,82	46	44,87	66	49,15	86	50,28
7	28,16	27	44,32	47	69,72	67	44,76	87	46,77
8	47,66	28	45,96	48	58,66	68	56,75	88	71,95
9	60,95	29	51,35	49	73,76	69	46,19	89	32,58
10	39,13	30	46,35	50	43,45	70	57,58	90	42,64
11	24,22	31	56,94	51	50,72	71	72,06	91	54,44
12	64,48	32	53,23	52	58,30	72	64,44	92	56,18
13	37,20	33	40,60	53	58,62	73	63,04	93	52,13
14	43,46	34	47,59	54	43,63	74	51,13	94	39,73
15	57,58	35	51,32	55	40,77	75	50,02	95	62,38
16	54,67	36	55,58	56	61,11	76	54,54	96	46,89
17	58,75	37	51.39	57	37,99	77	49,74	97	41,60
18	55,96	38	40,89	58	34,41	78	39,45	98	41,79
19	36,28	39	68,85	59	57,11	79	32,25	99	45,71
20	38,84	40	54,87	60	56,38	80	58,28	100	45,47

Решение

1. Запустите программу STATISTICA и в окне **Переключателя модулей** (см. рис.1) выберите **Основные статистики и таблицы** (Basic Statistics). Введите исходные данные в

файл *Пример_2.sta* аналогично примеру 1, при этом таблица данных будет содержать одну переменную — ПРИБЫЛЬ и 100 наблюдений (рис. 8).

Задайте команду **Продолжить анализ** (Resume Analysis) и в появившемся окне **Описательные статистики** (Decriptive Statistics) (рис. 9)

	1 День	2 Прибыль
1	1	47
2	2	48,2
3	3	45,2
4	4	46,8
5	5	51,2
6	6	53,5
7	7	58,5
8	8	56,52
9	9	45,5
10	10	45,8
11	11	69,72
12	12	72,5
13	13	73,5
14	14	68,2
15	15	64,5
16	16	66,8
17	17	58,8

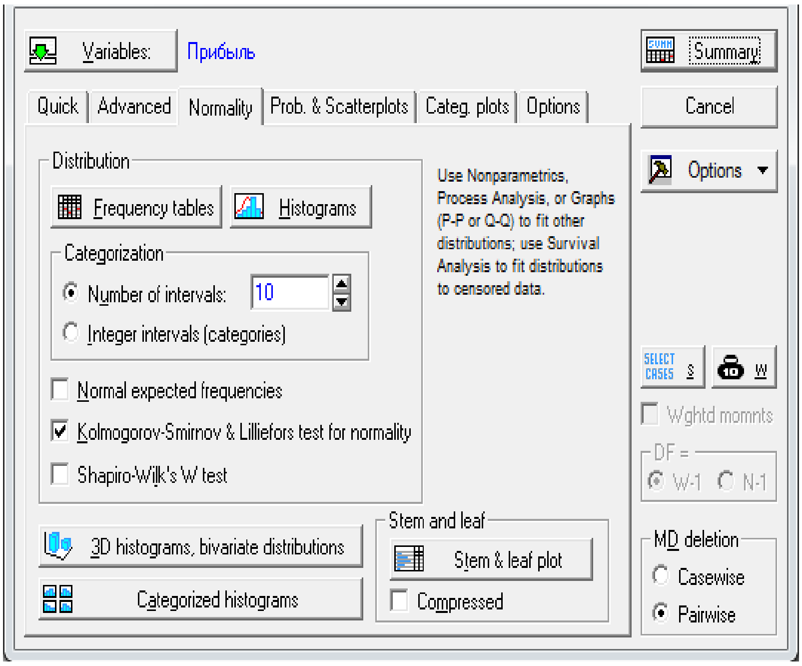


Рис.8. Исходные данные

Рис.9. Окно описательной статистики

активизируйте метку **Крит, нормальности Колмогорова-Смирнова** (K-S and lilliefors test for normality), а также укажите число интервалов (Numbers of interval) для построения гистограммы.

2. Нажмите кнопку **Таблицы частот** (Frequency tables) и получите таблицу результатов (рис. 10).

В первом столбце таблицы показаны границы интервалов *Группа,* причем в некоторых случаях число интервалов может отличаться от заданного, так как программа автоматически контролирует минимальное значение. Для каждого интервала приводится число попаданий в интервал — *Частота (count)* и статистическая функция распределения — *Кумул. Частота (Cumul. count)*.

Frequency table: Прибыль (ПримерЯ_9.2)
K-S d=,09071, p> .20; Lilliefors p> .20

Category	Count	Cumulative Count	Percent of Valid	Cumul % of Valid	% of all Cases	Cumulative % of All
10,00000<x<=20,00000	0	0	0,00000	0,0000	0,00000	0,0000
20,00000<x<=30,00000	3	3	10,00000	10,0000	10,00000	10,0000
30,00000<x<=40,00000	5	8	16,66667	26,6667	16,66667	26,6667
40,00000<x<=50,00000	13	21	43,33333	70,0000	43,33333	70,0000
50,00000<x<=60,00000	4	25	13,33333	83,3333	13,33333	83,3333
60,00000<x<=70,00000	5	30	16,66667	100,0000	16,66667	100,0000
Missing	0	30	0,00000		0,00000	100,0000

Frequency table: Прибыль (ПримерЯ_9.2)

Рис. 10. Таблица частот

Гипотеза о нормальном законе распределения проверяется с помощью критерия Колмогорова-Смирнова. В информационной части окна приводится значение критерия К-С d = 0,055 при минимальном уровне значимости p > 0,20, что свидетельствует о возможности принятия гипотезы о нормальном законе распределения. Это наглядно видно на графике (рис. 11), который получится после нажатия кнопки **Гистограммы** (Histograms).

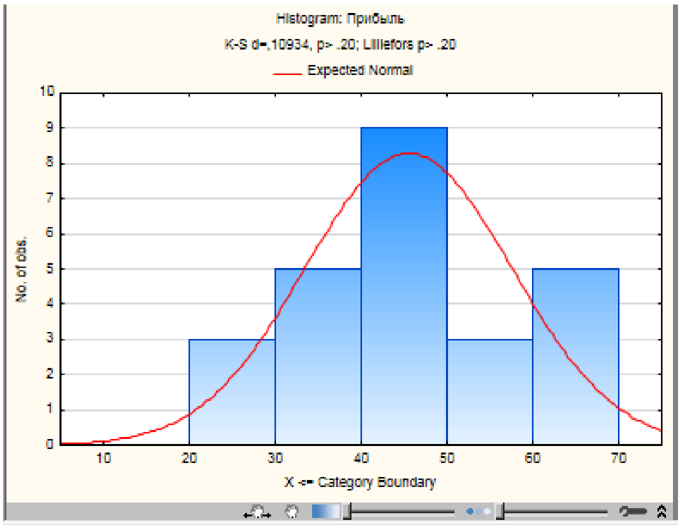


Рис.11. Гистограмма, полученная по выборке

(Decriptive Statistics) в заключение получим результирующую таблицу (рис.12), в которой приводятся основные статистические характеристики этой выборки.

Variable	Descriptive Statistics (Пример 9.2) Valid N	Mean	Minimum	Maximum	Std.Dev.
День	100	50,50000	1,00000	100,0000	29,01149
Прибыль	100	51,84310	41,50000	73,5000	6,28895

Рис.12. Результат расчета основных статистик

4. Построение статистических регрессионных моделей

Пример 3.

Исходные данные примера 4 даны ниже в таблице 3. Требуется проанализировать зависимость величины **расходов на питание** от величины **душевого дохода** и **среднего размера семьи.** Построим регрессионное уравнение вида $y =\ y = f(x_1, x_2)$.

Исходные данные к примеру 3

Номер группы	Расход на питание y	Душевой доход x_1	Размер семей x_2
1	433	628	1,5
2	616	1577	2,1
3	900	2659	2,7
4	1113	3701	3,2
5	1305	4796	3,4
6	1488	5926	3,6
7	1645	7281	3,7
8	1914	9350	4,0
9	2411	18807	3,7

Решение

1. Для построения уравнения регрессии запустите пакет STATISTICA и в появившемся окне (см. рис. 1) выберите режим **Множественная регрессия** (Multiple Regression). Введите исходные данные в файл или откройте файл данных для нашего примера, содержащий три переменные **(РАСХ_ПИТ, ДОХОД, РАЗ_СЕМЬИ)** и 9 наблюдений (см. рис. 13).

	1 Расх_пит	2 Доход	3 Разм_семьи
1	433	628	1,5
2	616	1577	2,1
3	900	2659	2,7
4	1113	3701	3,2
5	1305	4796	3,4
6	1488	5926	3,6
7	1645	7281	3,7
8	1914	9350	4
9	2411	18807	3,7

Рис.13. Окно исходных данных

2. В строке команд выберите в команде **Анализ** (Analysis) режим **Продолжить анализ** (Resume Analysis), появится окно **Множественная регрессия** (Multiple Regression) (см. рис. 14). Задайтесь переменными: независимыми **ДОХОД, РАЗ_СЕМЬИ;** зависимой **— РАЗ_ПИТ.**

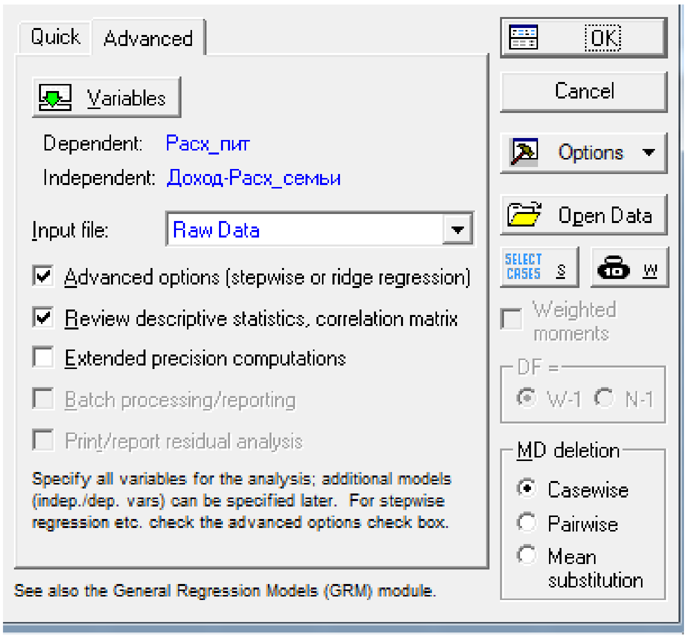


Рис.14. Окно множественной регрессии

3. Активизируйте метки:

- провести анализ по умолчанию (не пошаговый) (Perform default(non-stepwiss) analysis);

- показывать описательные статистики, корр. матрицы (Review descry, stats, corr. matrix).

Нажмите кнопку **ОК.** Получим окно **Просмотр описательных статистик** (Review Descriptive Statistics) (рис. 15).

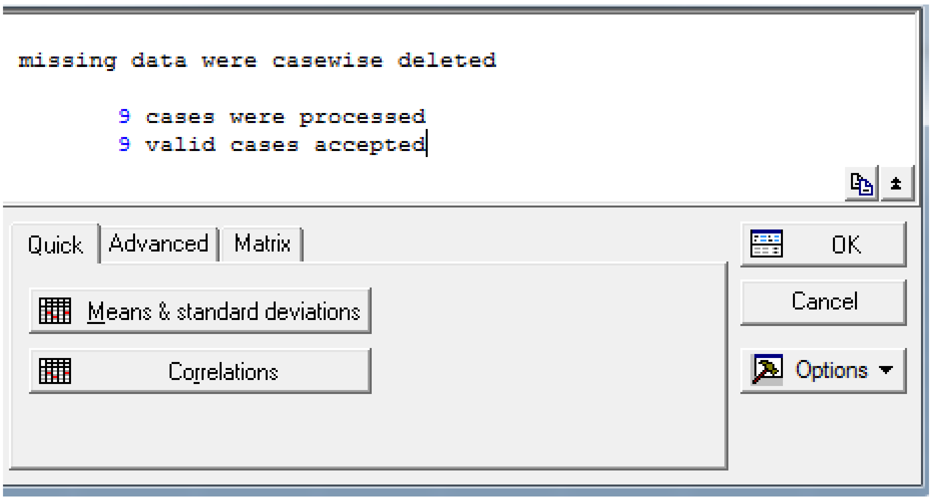


Рис.15. Окно просмотра описательных статистик

4. Нажав кнопку **ОК,** получим окно **Результаты множественной регрессии** (Multiple Regression Results) (рис. 16). Выбрав кнопку **Итоговая таблица регрессии** (Regression summary), получим модель регрессии (рис. 17). Модель имеет вид:

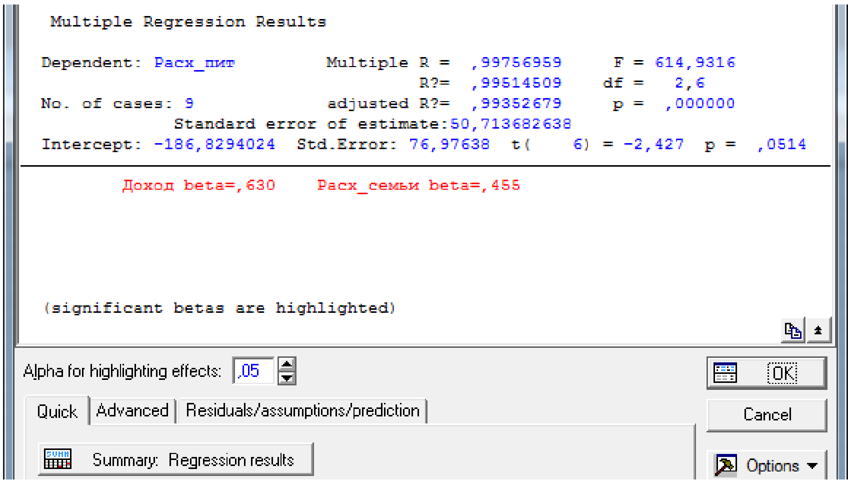
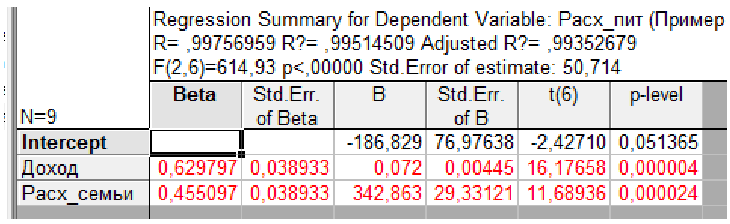


Рис.16. Главное окно результатов



Regression Summary for Dependent Variable: Расх_пит (Пример
R= ,99756959 R?= ,99514509 Adjusted R?= ,99352679
F(2,6)=614,93 p<,00000 Std.Error of estimate: 50,714

N=9	Beta	Std.Err. of Beta	B	Std.Err. of B	t(6)	p-level
Intercept			-186,829	76,97638	-2,42710	0,051365
Доход	0,629797	0,038933	0,072	0,00445	16,17658	0,000004
Расх_семьи	0,455097	0,038933	342,863	29,33121	11,68936	0,000024

Рис.17. Коэффициенты регрессии

Выполняются действия:

РАСХ _ ПИТ = -186,829 + 0,072 *ДОХОД* + + 342,863А43 _ *СЕМЬИ*

- Критерий Фишера

$$F = \frac{S_y^2}{S_{ad}^2} = 614{,}93$$

при минимальном уровне значимости *p* = 0,0000 и степенях свободы $n_1 = 2$ и $n_2 = 6$, что свидетельствует об адекватности модели.

5. Выбрав кнопку **Дисперсионный анализ** (Analysis of variance), получим суммы квадратов, степени свободы, среднеквадратические ошибки, критерий Фишера и уровень принятия гипотезы (рис. 18).

	Analysis of Variance; DV: Расх_пит (Пример 8,6.sta)				
Effect	Sums of Squares	df	Mean Squares	F	p-level
Regress.	3163058	2	1581529	614,9316	0,000000
Residual	15431	6	2572		
Total	3178489				

Рис. 18. Проверка адекватности модели

Нажав кнопку Далее (Continue), вернемся в окно Результаты множественной регрессии (Multiple Regression Results) (см. рис. 19). Для выхода из метода следует нажать кнопку Отмена (Cancel).

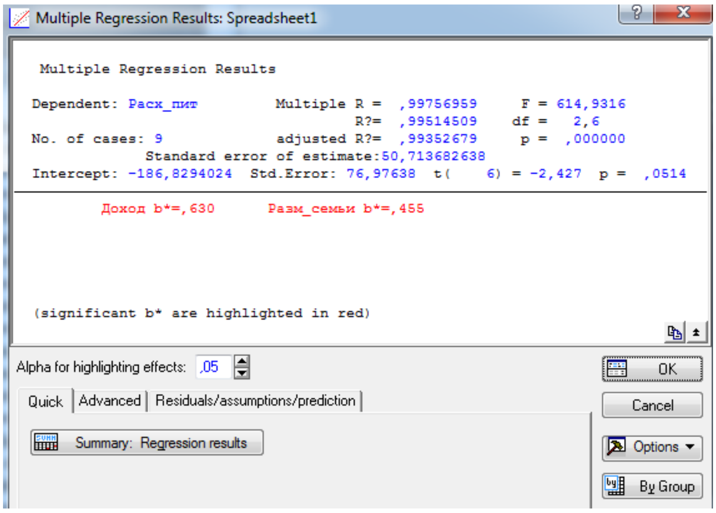


Рис.19.

5. Построение статистических моделей методом шаговой регрессии

Пример 4

Рассмотреть решение задачи по данным примера 3 методом шаговой регрессии. Исходные данные вводятся аналогично регрессионному анализу.

Решение:

1. Запустите пакет STATISTICA и в появившемся окне (см. рис. 1) выберите режим **Множественная регрессия** (Multiple Regression)

2. Откройте файл с данными регрессионного анализа, который содержит три переменные – **РАСХ_ПИТ**, **ДОХОД РАЗ_СЕМЬИ** – и 9 наблюдений (см. рис. 13). Введите новую переменную **КВАДР_Х2**, численно равную квадрату **РАЗ_СЕМЬИ** (рис. 20).

	1 Расх_пит	2 Доход	3 Разм_семьи	4 Квадр_X2
1	433	628	1,5	2,25
2	616	1577	2,1	4,41
3	900	2659	2,7	7,29
4	1113	3701	3,2	10,24
5	1305	4796	3,4	11,56
6	1488	5926	3,6	12,96
7	1645	7281	3,7	13,69
8	1914	9350	4	16
9	2411	18807	3,7	13,69

Рис.20. Окно исходных данных

3. Выберите в строке команд **Анализ** (Analysis) режим Продолжить анализ (Resume Analysis), получим окно **Множественная регрессия** (Multiple Regression) (см. рис.14). Необходимо задаться переменными: независимыми – **ДОХОД, РАЗ_СЕМЬИ** и **КВАДР_Х2**; зависимой – **РАСХ_ПИТ**. Отключите метку Провести анализ по умолчанию (не пошаговый) (Perform default (non-stepwiss) analysis) и нажмите кнопку ОК. Получим окно **Определение модели** (Model Definition) (рис. 21), в котором в списке Процедура (Method) выберите режим **Пошаговая с** включением (Forward stepwise). Измените порог **F-включить** (F to enter), например, на 0,80 или меньшее значение (назначение этой переменной см. Тема 20, раздел 9).

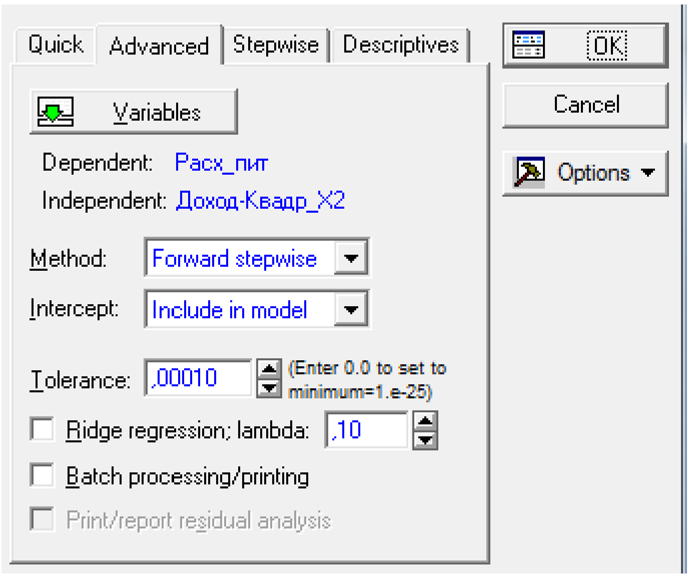


Рис.21. Задание параметров пошаговой регрессии

4. Нажав ОК, получим окно **Пошаговая** множественная **регрессия** (Stepwise Multiple Regression) (рис. 22), в котором указаны включенные переменные.

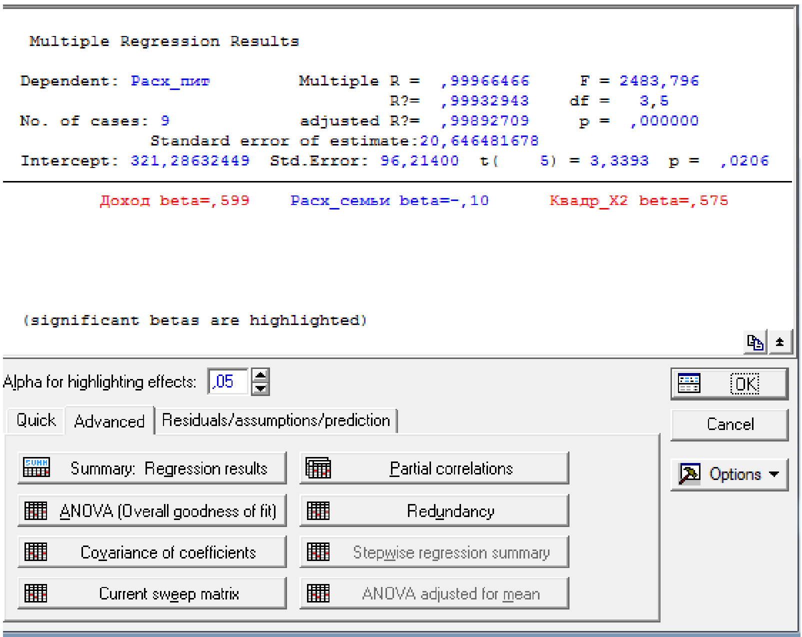


Рис.22. Главное окно результатов шаговой регрессии

Нажав **ОК**, получим окно **Результаты множественной регрессии** (Multiple Regression Results) (см. рис. 20). Выбрав кнопку **Итоги по шагам** (Stepwise (summary)), получим таблицу пошагового включения переменных (рис. 23).

/ariable	Variables currently in the Equation; DV: Расх_пит (Пример 8,8.sta) Beta in	Partial Cor.	Semipart Cor.	Tolerance	R-square	t(7)	p-level
Доход	0,940522	0,940522	0,940522	1,000000	0,00	7,324548	0,000159

Рис.23. Пошаговое включение переменных

5. Выбрав кнопку **Итоговая таблица регрессии** (Regression summary), получим модель регрессии (рис. 24). Модель имеет вид:

Variable	Summary of Stepwise Regression; DV: Расх_пит (Пример 8,8.sta) Step +in/-out	Multiple R	Multiple R-square	R-square change	F - to entr/rem	p-level	Variables included
Доход	1	0,940522	0,884582	0,884582	53,6490	0,000159	1
Квадр_X2	2	0,999603	0,999207	0,114625	867,0917	0,000000	2
Расх_семьи	3	0,999665	0,999329	0,000123	0,9142	0,382919	3

Рис.24. Модель шаговой регрессии

Выполним действия:

РАСХ_ПИТ=321,286 + 0,0685 ДОХОД – 71,91 РАЗ_СЕМЬИ + 78,068 КВАДР_X2

Критерий Фишера F = 2483,8 при минимальном уровне значимости p = 0,000 и степенях свободы n_1 = 3 и n_2 = 5, что свидетельствует об адекватности модели

Нажав на кнопку **Далее** (Continue), вернемся в окно **Результаты множественной регрессии** (Multiple Regression Results) (см.рис. 16). Для завершения работы с шаговым методом следует нажать кнопку **Отмена** (Cancel) активного окна.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	2637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3064	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2544	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895'	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1738
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582.	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0581	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0C61
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	ООП	ООП	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	1)002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1 ,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0.21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0.2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1 ,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0.4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1.47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1.85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Приложение 3

Таблица значений $t_y = t\ (\gamma,\ n)$

ν / n	0,95	0,99	0,999	ν / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1 ,996	2,649	3,439
14	2,10	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1 ,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1 ,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4

Таблица значений $q = q\ (\gamma,\ n)$

n \ ν	0,95	0,99	0,999	n \ ν	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 5

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы ν	Уровень значимости *q*					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5.0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,6	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1.24
8	20,1	17,5	15,5	2,3	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8.90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 6

Критические точки распределения Кохрена (ν — число степеней свободы числителя, l количество выборок, при уровне значимости q - 0,05)

l \ ν	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0.8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

l \ ν	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0.8010	0,7880	0.7341	0,6602	0,8534	0,8332
3	6333	6167	6025	5466	4748	6771	6530
4	5175	5017	4884	4366	3720	5598	5365
5	0,4387	0,4241	0,4118	0.3645	0,3066	0,4783	0,4564
6	3817	3682	3568	3135	2612	4184	3980
7	3384	3259	3154	2756	2278	3726	3535
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,3362	0,3185
9	2768	2659	2568	2226	1820	3067	2901
10	2541	2439	2353	2032	1655	2823	2666
12	0,2187	0.2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,2439	0,2299
15	1815	1736	1671	1429	1144	2034	1911
20	1422	1357	1303	1 108	0879	1602	1501
24	0,2116	0,1160	0,1113	0.0942	0.0743	0,1374	0,1286
30	1002	0958	0921	0771	0604	1137	1061
40	0780	0745	0713	0595	0462	0887	0827

60	0.0552	0.0520	0.0497	0,0411	0.0316	0.0623	0,0583
120	0292	0279	0266	0218	0165	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Приложение 7

Критические точки распределения Фишера
(F-распределение)
(ν_1 — число степеней свободы числителя, ν_2 — число степеней свободы знаменателя, при уровне значимости q = 0,05)

ν_2	ν_1									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4.26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,11	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2.95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3.03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4.54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3.24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2.66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83

ν_2	12	15	20	24	30	40	50	120	∞
1	243,9	245,9	248	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19.48	19,49	19,50
3	8,74	8,70	8.66	8,64	8,62	8,59	8.57	8,55	8.53
4	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4.40	4,36
6	4.00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2.13
15	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1.97	1,92
19	2,23	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2.25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,13	2.06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1.73	1,67
28	2,12	2,04	1,96	1,91	1.87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,10	2,03	1.94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,09	2,01	1,93	1,89	1.84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2.00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Критические точки распределения Стьюдента (*t*-распределение)

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63.7	318,3	637,0
2	2,92	4.30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4.60	7,7	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4.03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3.71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2.26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2.13	2.60	2.95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3.69	4.01
17	1,74	2,11	2,57	2.90	3,65	3,96
18	1.73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3.88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3.53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2.78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2.76	3,40	3,66
29	7,70	2,05	2.46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2?00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1?66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
Число степеней свободы	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					

Критические точки распределения X^2

Число степеней свободы ν	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0.00098	0,0001
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0.051	0,020
3	11,3	9.4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0.297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,6	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1.24
8	20,1	17,5	15,5	2,3	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2.56
11	24,7	21.9	19,7	4,57	3.82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4.11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5.23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7.63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8.90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9.54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40.6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Равномерно распределенные случайные числа

0,	10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
	37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
	08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
	99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
	12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
0,	66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
	31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39
	85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
	63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09
	73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
0,	98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
	11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
	83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
	88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
	99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
0,				
	65 48 II 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
	80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 II 57 82 53
	74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
	69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 II 39 90
	09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
0,	91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
	80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
	44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
	12 55 07 37 42	11 10 (Ю 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
	63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
0,	61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
	15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
	94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
	42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
	23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63
0,	04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35
	00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
	35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24
	59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92
	46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47
0,	32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
	69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23
	19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
	45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33
	94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56

0,	98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
	33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
	80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
	79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
	18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	65 45 56 14 27
0,	74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
	54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
	11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
	48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
	69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15

Квантили нормального распределения u_p

(перед всеми значениями квантилей в этой части таблицы нужно поставить знак минус)

$100P_i$ %	0,0,	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	—	3,090	2,878	2,748	2,652	2,576	2,512	2,457	2,409	2,366
1	2,326	2,290	2,257	2,226	2,170	2,197	2,144	2,120	2,097	2,075
2	2,054	2,034	2,014	1,995	1,977	1,960	1,943	1,927	1,911	1,896
3	1,881	1,866	1,852	1,838	1,825	1,812	1,799	1,787	1,774	1,762
4	1,751	1,739	1,728	1,717	1,706	1,695	1,685	1,675	1,665	1,655
5	1,645	1,635	1,626	1,616	1,607	1,598	1,589	1,580	1,572	1,563
6	1,555	1,546	1,538	1 ,530	1,522	1,514	1,506	1,499	1,491	1,483
7	1,476	1,468	1,461	1,454	1,447	1,440	1,433	1,426	1,419	1,412
8	1,405	1,398	1,392	1 ,385	1,379	1,372	1,366	1,359	1,353	1,347
9	1,341	1,335	1,329	1,323	1,317	1,311	1,305	1,299	1,293	1,287
10	1,282	1,276	1,270	1,265	1,259	1,254	1,248	1,243	1,237	1,232
11	1,227	1,221	1,216	1,211	1,206	1,200	1,195	1,190	1,185	1,180
12	1,175	1,170	1,165	1,160	1,155	1,150	1,146	1,141	1,136	1,131
13	1,126	1,122	1,117	1 ,112	1,108	1,103	1,098	1,094	0,089	1,085
14	1,080	1,076	1,071	1,067	1,063	1,058	1,054	1,049	1,045	1,041
15	1,036	1,032	1,028	1,024	1,019	1,015	1,011	1,007	1,003	0,999
16	0,994	0,9900	0,986	0,982	0,978	0,974	0,970	0,966	0,962	0,958
17	0,954	0,950	0,946	0,942	0,938	0,935	0,931	0,927	0,923	0,919
18	0,915	0,912	908 0	0,904	0,900	0,896	0,893	0,889	0,885	0,882
19	0,878	0,874	0,871	0,867	0,860	0,863	0,856	0,852	0,849	0,845
20	0,842	0,838	0,834	0,831	0,827	0,824	0,820	0,817	0,813	0,810
21	806	803	800	796	793	789	786	782	779	776
22	772	769	765	762	759	755	752	749	745	742
23	739	736	732	729	726	722	719	716	713	710
24	706	703	700	697	693	690	687	684	681	678
25	674	671	668	665	662	659	656	653	650	646
26	643	640	637	634	631	628	625	622	619	616
27	613	610	607	604	601	598	595	592	589	586
28	583	580	577	574	571	568	565	562	559	556
29	553	550	548	545	542	539	536	533	530	527
30	524	522	519	516	513	510	507	504	502	499

Продолжение приложения 11

31	0,496	0,493	0,490	0,487	0,485	0,482	0,479	0,476	0,473	0,470
32	468	465	462	459	457	454	451	448	445	443
33	440	437	434	432	429	426	423	421	418	415
34	412	410	407	404	402	399	396	393	391	388
35	385	383	380	377	375	372	369	366	364	361
36	358	356	353	350	348	345	342	340	337	335
37	332	329	327	324	321	319	316	313	311	308
38	305	303	300	298	295	292	290	287	285	282
39	279	277	274	272	269	266	264	261	259	256
40	0,253	0,251	0,248	0,246	0,243	0,240	0,238	0,235	0,233	0,230
41	228	225	222	220	217	215	212	210	207	204
42	202	199	197	194	192	189	187	184	181	179
43	176	174	171	169	166	164	161	159	156	154
44	151	148	146	143	141	138	136	133	131	128
45	126	123	121	118	116	113	111	108	105	103
46	100	098	095	093	090	088	085	083	080	078
47	075	073	070	068	065	063	060	058	055	053
48	050	048	045	043	040	038	035	033	030	028
49	025	023	020	018	015	013	010	008	005	003

Квантили нормального распределения u_p

(все значения квантилей в этой части таблицы – положительные)

$100P_i$ %	0,0,	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
50	--	0,003	0,005	0,008	0,010	0,013	0,015	0,018	0,020	0,023
51	0,025	028	030	033	035	038	040	043	045	048
52	050	053	055	058	060	063	065	068	070	073
53	075	078	080	083	085	088	090	093	095	098
54	100	103	105	108	111	113	116	118	121	123
55	126	128	131	133	136	138	141	143	146	148
56	151	154	156	159	161	164	166	169	171	174
57	176	179	181	184	187	189	192	194	197	199
58	202	204	207	210	212	215	217	220	222	225
59	228	230	233	235	238	240	243	246	248	251
60	0,253	0,256	0,259	0,261	0,264	0,266	0,269	0,272	0,274	0,277
61	279	282	285	287	290	292	295	298	300	303
62	305	308	311	313	316	319	321	324	327	329
63	332	335	337	340	342	345	348	350	353	356
64	358	361	364	366	369	372	375	377	380	383
65	385	388	391	393	393	399	402	404	407	410
66	412	415	418	421	423	426	429	432	434	437
67	440	443	445	448	451	454	457	459	462	465
68	458	470	473	476	479	482	485	487	490	493
69	496	499	502	504	507	510	513	516	519	522
70	0,524	0,527	0,530	0,533	0,536	0,539	0,542	0,545	0,548	0,550
71	553	556	559	562	565	568	571	574	577	580
72	583	586	589	592	595	598	601	604	607	610
73	613	616	619	622	625	628	631	634	637	640
74	643	643	650	653	653	(.59	6(52	665	668	671
75	674	678	681	684	687	()90	693	697	700	703
76	706	710	713	7)6	719	722	726	729	732	736
77	739	712	745	749	752	755	759	762	765	769
78	772	776	779	782	786	789	793	796	800	803
79	806	810	813	817	820	824	827	831	834	838

80	0,842	0,845	0,849	0,852	0,856	0,860	0,863	0,867	0,871	0,874
81	0,878	0,882	0,885	0,889	0,893	0,896	0,900	0,904	0,908	0,912
82	0,915	0,919	0,923	0,927	0,931	0,935	0,938	0,942	0,946	0,950
83	0,954	0,958	0,962	0,956	0,970	0,974	0,978	0,982	0,986	0,990
84	0,994	0,999	1,003	1,007	1,011	1,015	1,019	1,024	1,028	1,032
85	1,036	1,041	1,045	1,049	1,054	1,058	1,063	1 ,067	1,071	1.076
86	1,080	1,085	1,089	1,094	1,098	1,103	1,108	1,112	1,117	1 .122
87	1,126	1,131	1,136	1,141	1,146	1,150	1,155	1,160	1,165	1,170
88	1,175	1,180	1,185	1,190	1,195	1,200	1,206	1,211	1,216	1,221
89	1,227	1,232	1,237	1,243	1,248	1.254	1,259	1,265	1,270	1.276
90	1,282	1,287	1,293	1,299	1,305	1,311	1,317	1,323	1,329	1,335
91	1,341	1,347	1,353	1,359	1,366	1,372	1,379	1,385	1,392	1,398
92	1,405	1,412	1,419	1,426	1,433	1,440	1,447	1,454	1,461	1,468
93	1,476	1,483	1,491	1,499	1,506	1,514	1,522	1,530	1,538	1,546
94	1,555	1,563	1,572	1,580	1,589	1,598	1,607	1,616	1,626	1,635
95	1,645	1,655	1,665	1,675	1.685	1,695	1,706	1,717	1,728	1,739
96	1,751	1,762	1,774	1,787	1,799	1,812	1,825	1,838	1,852	1,866
97	1,881	1,896	1,911	1,927	1,943	1,960	1,977	1,995	2,014	2,034
98	2,054	2,075	2,097	2,120	2,144	2,170	2,197	2,226	2,257	2,290
99	2,326	2,366	2,409	2,457	2,512	2,576	2,652	2,748	2,878	3,090

Список литературы

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. - М.: Едиториал, 2005.
2. Венцель Е.С. Теория вероятностей. Москва, 1962.
3. Гмурман В.Е.Теория вероятностей и математическая статистика.- М: ВШ, 2006.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М: ВШ, 2007.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов.Москва. ЮНИТИ, 2004.
6. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: Санкт-Петербург-Москва-Краснодар 2006.
7. Феллер В. Введение в теории вероятностей и её применения. Том.1и 2. Москва, 1967.
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. - М.: Айрис пресс, 2006.
9. Солодовников А.С. Теория вероятностей. Учеб. Пособие для втузов по спец. матем.- Москва. Вербум, 1999.
10. Белов А.А., Баллод Б.А., Елизарова Н.Н. Теория вероятностей и математическая статистика- Ростов на Дону, «Феникс», 2008.
11. Виноградов И. М. Основы теории чисел. Москва., Наука., 1981г.
12. Карлин С. Основы теории случайных процессов Издательство «Мир». Москва.1971.
13. Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Ермаков В.И., Матвеев В.И. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. Москва, ИНФРА-М, 2004.
14. Бокаева М.С., Исмоилов Д., Сарбасова Н.Д. Основы линейной алгебры и линейного программирования: Учеб. пособие для вузов. Павлодар, ИнЕУ, 2010.
15. Архипов Г.И., Садовничий В.А.. Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу: Современный учебник. Москва, 2004.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	2637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3064	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2544	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895'	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1738
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582.	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0581	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0C61
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	ООП	ООП	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	1)002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1 ,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0.21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0.2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1 ,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0.4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1.47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1.85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Приложение 3

Таблица значений $t_y = t\ (\gamma,\ n)$

ν / n	0,95	0,99	0,999	ν / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1 ,996	2,649	3,439
14	2,10	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1 ,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1 ,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4

Таблица значений $q = q\ (\gamma,\ n)$

ν / n	0,95	0,99	0,999	ν / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 5

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы ν	Уровень значимости *q*					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5.0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,6	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1.24
8	20,1	17,5	15,5	2,3	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8.90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 6

Критические точки распределения Кохрена (ν — число степеней свободы числителя, l количество выборок, при уровне значимости q - 0,05)

l \ ν	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0.8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

l \ ν	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0.8010	0,7880	0.7341	0,6602	0,8534	0,8332
3	6333	6167	6025	5466	4748	6771	6530
4	5175	5017	4884	4366	3720	5598	5365
5	0,4387	0,4241	0,4118	0.3645	0,3066	0,4783	0,4564
6	3817	3682	3568	3135	2612	4184	3980
7	3384	3259	3154	2756	2278	3726	3535
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,3362	0,3185
9	2768	2659	2568	2226	1820	3067	2901
10	2541	2439	2353	2032	1655	2823	2666
12	0,2187	0.2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,2439	0,2299
15	1815	1736	1671	1429	1144	2034	1911
20	1422	1357	1303	1 108	0879	1602	1501
24	0,2116	0,1160	0,1113	0.0942	0.0743	0,1374	0,1286
30	1002	0958	0921	0771	0604	1137	1061
40	0780	0745	0713	0595	0462	0887	0827

60	0.0552	0.0520	0.0497	0,0411	0.0316	0.0623	0,0583
120	0292	0279	0266	0218	0165	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Приложение 7

Критические точки распределения Фишера
(F-распределение)
(ν_1 — число степеней свободы числителя, ν_2 — число степеней свободы знаменателя, при уровне значимости q = 0,05)

ν_2	ν_1									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4.26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,11	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2.95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3.03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4.54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3.24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2.66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83

ν_2	12	15	20	24	30	40	50	120	∞
1	243,9	245,9	248	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19.48	19,49	19,50
3	8,74	8,70	8.66	8,64	8,62	8,59	8.57	8,55	8.53
4	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4.40	4,36
6	4.00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2.13
15	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1.97	1,92
19	2,23	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2.25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,13	2.06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1.73	1,67
28	2,12	2,04	1,96	1,91	1.87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,10	2,03	1.94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,09	2,01	1,93	1,89	1.84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2.00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Критические точки распределения Стьюдента (*t*-распределение)

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63.7	318,3	637,0
2	2,92	4.30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4.60	7,7	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4.03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3.71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2.26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2.13	2.60	2.95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3.69	4.01
17	1,74	2,11	2,57	2.90	3,65	3,96
18	1.73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3.88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3.53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2.78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2.76	3,40	3,66
29	7,70	2,05	2.46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2?00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1?66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
Число степеней свободы	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					

Критические точки распределения X^2

Число степеней свободы ν	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0.00098	0,0001
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0.051	0,020
3	11,3	9.4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0.297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,6	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1.24
8	20,1	17,5	15,5	2,3	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2.56
11	24,7	21.9	19,7	4,57	3.82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4.11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5.23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7.63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8.90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9.54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40.6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Равномерно распределенные случайные числа

0,	10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
	37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
	08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
	99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
	12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
0,	66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
	31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39
	85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
	63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09
	73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
0,	98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
	11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
	83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
	88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
	99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
0,				
	65 48 II 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
	80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 II 57 82 53
	74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
	69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 II 39 90
	09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
0,	91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
	80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
	44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
	12 55 07 37 42	11 10 (Ю 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
	63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
0,	61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
	15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
	94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
	42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
	23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63
0,	04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35
	00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
	35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24
	59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92
	46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47
0,	32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
	69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23
	19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
	45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33
	94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56

0,	98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
	33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
	80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
	79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
	18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	65 45 56 14 27

0,	74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
	54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
	11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
	48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
	69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15

Приложение 11

Квантили нормального распределения u_p

(перед всеми значениями квантилей в этой части таблицы нужно поставить знак минус)

$100\,P_i$ %	0,0,	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	—	3,090	2,878	2,748	2,652	2,576	2,512	2,457	2,409	2,366
1	2,326	2,290	2,257	2,226	2,170	2,197	2,144	2,120	2,097	2,075
2	2,054	2,034	2,014	1,995	1,977	1,960	1,943	1,927	1,911	1,896
3	1,881	1,866	1,852	1,838	1,825	1,812	1,799	1,787	1,774	1,762
4	1,751	1,739	1,728	1,717	1,706	1,695	1,685	1,675	1,665	1,655
5	1,645	1,635	1,626	1,616	1,607	1,598	1,589	1,580	1,572	1,563
6	1,555	1,546	1,538	1 ,530	1,522	1,514	1,506	1,499	1,491	1,483
7	1,476	1,468	1,461	1,454	1,447	1,440	1,433	1,426	1,419	1,412
8	1,405	1,398	1,392	1 ,385	1,379	1,372	1,366	1,359	1,353	1,347
9	1,341	1,335	1,329	1,323	1,317	1,311	1,305	1,299	1,293	1,287
10	1,282	1,276	1,270	1,265	1,259	1,254	1,248	1,243	1,237	1,232
11	1,227	1,221	1,216	1,211	1,206	1,200	1,195	1,190	1,185	1,180
12	1,175	1,170	1,165	1,160	1,155	1,150	1,146	1,141	1,136	1,131
13	1,126	1,122	1,117	1 ,112	1,108	1,103	1,098	1,094	0,089	1,085
14	1,080	1,076	1,071	1,067	1,063	1,058	1,054	1,049	1,045	1,041
15	1,036	1,032	1,028	1,024	1,019	1,015	1,011	1,007	1,003	0,999
16	0,994	0,9900	0,986	0,982	0,978	0,974	0,970	0,966	0,962	0,958
17	0,954	0,950	0,946	0,942	0,938	0,935	0,931	0,927	0,923	0,919
18	0,915	0,912	908 0	0,904	0,900	0,896	0,893	0,889	0,885	0,882
19	0,878	0,874	0,871	0,867	0,860	0,863	0,856	0,852	0,849	0,845
20	0,842	0,838	0,834	0,831	0,827	0,824	0,820	0,817	0,813	0,810
21	806	803	800	796	793	789	786	782	779	776
22	772	769	765	762	759	755	752	749	745	742
23	739	736	732	729	726	722	719	716	713	710
24	706	703	700	697	693	690	687	684	681	678
25	674	671	668	665	662	659	656	653	650	646
26	643	640	637	634	631	628	625	622	619	616
27	613	610	607	604	601	598	595	592	589	586
28	583	580	577	574	571	568	565	562	559	556
29	553	550	548	545	542	539	536	533	530	527
30	524	522	519	516	513	510	507	504	502	499

Продолжение приложения 11

31	0,496	0,493	0,490	0,487	0,485	0,482	0,479	0,476	0,473	0,470
32	468	465	462	459	457	454	451	448	445	443
33	440	437	434	432	429	426	423	421	418	415
34	412	410	407	404	402	399	396	393	391	388
35	385	383	380	377	375	372	369	366	364	361
36	358	356	353	350	348	345	342	340	337	335
37	332	329	327	324	321	319	316	313	311	308
38	305	303	300	298	295	292	290	287	285	282
39	279	277	274	272	269	266	264	261	259	256
40	0,253	0,251	0,248	0,246	0,243	0,240	0,238	0,235	0,233	0,230
41	228	225	222	220	217	215	212	210	207	204
42	202	199	197	194	192	189	187	184	181	179
43	176	174	171	169	166	164	161	159	156	154
44	151	148	146	143	141	138	136	133	131	128
45	126	123	121	118	116	113	111	108	105	103
46	100	098	095	093	090	088	085	083	080	078
47	075	073	070	068	065	063	060	058	055	053
48	050	048	045	043	040	038	035	033	030	028
49	025	023	020	018	015	013	010	008	005	003

Квантили нормального распределения u_p

(все значения квантилей в этой части таблицы – положительные)

$100P_i$ %	0,0,	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
50	--	0,003	0,005	0,008	0,010	0,013	0,015	0,018	0,020	0,023
51	0,025	028	030	033	035	038	040	043	045	048
52	050	053	055	058	060	063	065	068	070	073
53	075	078	080	083	085	088	090	093	095	098
54	100	103	105	108	111	113	116	118	121	123
55	126	128	131	133	136	138	141	143	146	148
56	151	154	156	159	161	164	166	169	171	174
57	176	179	181	184	187	189	192	194	197	199
58	202	204	207	210	212	215	217	220	222	225
59	228	230	233	235	238	240	243	246	248	251
60	0,253	0,256	0,259	0,261	0,264	0,266	0,269	0,272	0,274	0,277
61	279	282	285	287	290	292	295	298	300	303
62	305	308	311	313	316	319	321	324	327	329
63	332	335	337	340	342	345	348	350	353	356
64	358	361	364	366	369	372	375	377	380	383
65	385	388	391	393	393	399	402	404	407	410
66	412	415	418	421	423	426	429	432	434	437
67	440	443	445	448	451	454	457	459	462	465
68	458	470	473	476	479	482	485	487	490	493
69	496	499	502	504	507	510	513	516	519	522
70	0,524	0,527	0,530	0,533	0,536	0,539	0,542	0,545	0,548	0,550
71	553	556	559	562	565	568	571	574	577	580
72	583	586	589	592	595	598	601	604	607	610
73	613	616	619	622	625	628	631	634	637	640
74	643	643	650	653	653	(.59	6(52	665	668	671
75	674	678	681	684	687	()90	693	697	700	703
76	706	710	713	7)6	719	722	726	729	732	736
77	739	712	745	749	752	755	759	762	765	769
78	772	776	779	782	786	789	793	796	800	803
79	806	810	813	817	820	824	827	831	834	838

Продолжение приложения 11

80	0,842	0,845	0,849	0,852	0,856	0,860	0,863	0,867	0,871	0,874
81	0,878	0,882	0,885	0,889	0,893	0,896	0,900	0,904	0,908	0,912
82	0,915	0,919	0,923	0,927	0,931	0,935	0,938	0,942	0,946	0,950
83	0,954	0,958	0,962	0,956	0,970	0,974	0,978	0,982	0,986	0,990
84	0,994	0,999	1,003	1,007	1,011	1,015	1,019	1,024	1,028	1,032
85	1,036	1,041	1,045	1,049	1,054	1,058	1,063	1 ,067	1,071	1.076
86	1,080	1,085	1,089	1,094	1,098	1,103	1,108	1,112	1,117	1 .122
87	1,126	1,131	1,136	1,141	1,146	1,150	1,155	1,160	1,165	1,170
88	1,175	1,180	1,185	1,190	1,195	1,200	1,206	1,211	1,216	1,221
89	1,227	1,232	1,237	1,243	1,248	1.254	1,259	1,265	1,270	1.276
90	1,282	1,287	1,293	1,299	1,305	1,311	1,317	1,323	1,329	1,335
91	1,341	1,347	1,353	1,359	1,366	1,372	1,379	1,385	1,392	1,398
92	1,405	1,412	1,419	1,426	1,433	1,440	1,447	1,454	1,461	1,468
93	1,476	1,483	1,491	1,499	1,506	1,514	1,522	1,530	1,538	1,546
94	1,555	1,563	1,572	1,580	1,589	1,598	1,607	1,616	1,626	1,635
95	1,645	1,655	1,665	1,675	1.685	1,695	1,706	1,717	1,728	1,739
96	1,751	1,762	1,774	1,787	1,799	1,812	1,825	1,838	1,852	1,866
97	1,881	1,896	1,911	1,927	1,943	1,960	1,977	1,995	2,014	2,034
98	2,054	2,075	2,097	2,120	2,144	2,170	2,197	2,226	2,257	2,290
99	2,326	2,366	2,409	2,457	2,512	2,576	2,652	2,748	2,878	3,090

Список литературы

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. - М.: Едиториал, 2005.
2. Венцель Е.С. Теория вероятностей. Москва, 1962.
3. Гмурман В.Е.Теория вероятностей и математическая статистика.- М: ВШ, 2006.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М: ВШ, 2007.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов.Москва. ЮНИТИ, 2004.
6. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: Санкт-Петербург-Москва-Краснодар 2006.
7. Феллер В. Введение в теории вероятностей и её применения. Том.1и 2. Москва, 1967.
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. - М.: Айрис пресс, 2006.
9. Солодовников А.С. Теория вероятностей. Учеб. Пособие для втузов по спец. матем.- Москва. Вербум, 1999.
10. Белов А.А., Баллод Б.А., Елизарова Н.Н. Теория вероятностей и математическая статистика- Ростов на Дону, «Феникс», 2008.
11. Виноградов И. М. Основы теории чисел. Москва., Наука., 1981г.
12. Карлин С. Основы теории случайных процессов Издательство «Мир». Москва.1971.
13. Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Ермаков В.И., Матвеев В.И. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. Москва, ИНФРА-М, 2004.
14. Бокаева М.С., Исмоилов Д., Сарбасова Н.Д. Основы линейной алгебры и линейного программирования: Учеб. пособие для вузов. Павлодар, ИнЕУ, 2010.
15. Архипов Г.И., Садовничий В.А.. Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу: Современный учебник. Москва, 2004.