Министерство образования и науки Республики Казахстан

Инновационный Евразийский Университет

И.А. Степьюк

Некоторые теоремы о суммировании арифметических функций

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

специальность 6М060100 – «Математика»

Павлодар 2015

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Инновационный Евразийский Университет

Кафедра «Математика и информационные технологии»

«Допущен к защите»
___________заведующий
кафедрой ____________ Ж.К. Даниярова

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

На тему: «Некоторые теоремы о суммировании арифметических функций»

по специальности 6М060100 - «Математика»

Выполнил **И.А. Степьюк**

Научный руководитель
д.ф.м.н., проф. **Д.И. Исмоилов**

Павлодар 2015

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей магистерской диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

- Методические указания по написанию, оформлению и процедуре защиты магистерской диссертации. Утверждены на заседании Научно-методического совета университета. Протокол №3 от 13 января 2015г.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

В настоящей магистерской диссертации применяют следующие термины с соответствующими определениями.

Функция – это правило, по которому каждому элементу одного множества, называемого областью определения функции, ставится в соответствие некоторый элемент другого множества, называемый областью значений.

Теорема – утверждение, для которого в рассматриваемой теории существует доказательство.

Лемма – доказанное утверждение, полезное не само по себе, а для доказательства других утверждений.

ИнЕУ – Инновационный Евразийский Университет

ГАК – Государственная аттестационная комиссия

Рис. – рисунок

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением дипломной работы и относится к теории суммирования арифметических функций, а это один из классических вопросов математики. К арифметической прогрессии, геометрической прогрессии и приводящимся к ним числовым последовательностям относятся первые общие результаты по данной теории. Отличительным свойством этих прогрессий является то, что вне зависимости от числа слагаемых для них удается записать явные вычислительные формулы.

Главной задачей теории суммирования арифметических функций является их приближения к некоторой конкретной искомой функции и по возможности сделать это оптимальным способом. Иными словами рассматривается некоторая сумма $\sum_{n\le N} f(n)$, где $f(n)$ - арифметическая функция и $N\to\infty$. Нужно найти главный член асимптотической формулы – функцию $P_f(N)$ и, если это возможно, наиболее точно оценить её остаточный член $R_f(N)$, то есть $\sum_{n\le N} f(n)=P_f(N)+R_f(N)$. Значит, основной задачей является оценить разность между суммируемой функцией и главным членом

$$\left|\sum_{n\le N} f(n)-P_f(N)\right|\le C_1\cdot R_f(N).$$

Работа состоит из трех частей.

В первой части работы рассмотрим некоторые простейшие суммы числовых последовательностей (сумма первых и вторых степеней натуральных чисел, а также с дополнительными условиями, связанными с функцией Эйлера), основные свойства мультипликативных функций, связь функции Эйлера с другими арифметическими функциями.

Во второй части работы кратко расскажем о связи функции Эйлера с теорией корней степени n из единицы, рассмотрим некоторые утверждения, касающиеся суммирования корней степени n из единицы, а также рассмотрим порядок роста функции Эйлера в среднем и более конкретное поведение суммарной функции для функции Эйлера.

В третьей части работы рассмотрим общую теорему суммирования арифметических функций и применим её для числа целых точек под гиперболой и в круге (теорема Дирихле и теорема Гаусса).

1 Некоторые теоремы касающиеся суммирования простейших арифметических последовательностей

1.1 Первичные сведения о суммировании некоторых последовательностей

Возьмем множество целых чисел $Z = \{0,\pm1,\pm2,...,\pm\mathrm{n}\}$, где $n \in N$. Допустим, нужно сложить n натуральных чисел $\{1,2,...,\mathrm{n}\}$. Другими словами вычислить сумму:

$$S_1(n) = 1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k. \qquad (1.1)$$

Нетрудно заметить, что количество натуральных чисел на $[1, n]$ будет равняться n, то есть $S_0(n) = n$.

Основываясь на формуле о сумме последовательности, образующей арифметическую прогрессию, имеем:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n, \qquad (1.2)$$

где a_n, начиная со второго члена, можно вычислить следующим образом:

$$a_i = a_{i-1} + d; \qquad i = 1,2,\ldots,n; \quad d = a_i - a_{i-1}.$$

Тогда, исходя из (1.2) получим: $a_1 = 1$, $a_n = n$

$$S_1(n) = \frac{(1+n)}{2} \cdot n.$$

Следствие 1.1. Для любого числа $N \geq 1, N \in R$ справедливо следующее равенство:

$$S_n(N) = \frac{1}{2}[N] \cdot ([N] + 1).$$
$$N = [N] + \{N\},$$

где $[N]$ - целая часть числа N, а $\{N\}$ – его дробная часть.

Теперь рассмотрим формулу суммы квадратов первых n натуральных чисел $S_2(n)$.

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Справедливо равенство:

$$S_2(n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}. \qquad (1.3)$$

Это равенство доказывается следующим образом:

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$$

Откуда получается:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Если просуммировать обе части данного равенства от единицы до n, то получим следующее:

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Тем самым получим:

$$-1 + (n+1)^3 = 3S_2(n) + 3S_1(n) + n,$$

откуда имеем:

$$S_2(n) = \frac{(n+1)^3 - 1 - 3S_1(n) - n}{3}.$$

Если упростить правую часть данного равенства с учетом того, что

$$S_1(n) = \frac{1+n}{2} \cdot n\,,$$

получится:

$$S_2(n) = \frac{(n+1)^3 - 1 - 3 \cdot \left(\frac{1+n}{2} \cdot n\right) - n}{3} = \frac{2 \cdot (n+1)^3 - 2 - 3n \cdot (n+1) - 2n}{6} =$$
$$= \frac{(n+1) \cdot (2(n+1)^2 - 3n) - 2(n+1)}{6} = \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + n)}{6} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

В итоге получилось равенство (1.3):

$$S_2(n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Теперь сформулируем такую задачу: Пусть даны числа $\{1,2,\ldots,n\}$. В данной последовательности нужно найти количество натуральных чисел, которые будут взаимно простыми с числом n. Другими словами, нужно найти:

$$S_0' = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n-1} 1.$$

Это количество выражается через функцию Эйлера:

$$S_0' = \varphi(n) \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ (k,n)=1}} 1.$$

1.2 Мультипликативные функции, примеры мультипликативных функций

Функция $\theta(n)$ называется мультипликативной, если она удовлетворяет двум следующим условиям:

1. Эта функция определена для всех целых положительных n и не равна нулю по меньшей мере при одном таком n.

2. Для любых положительных взаимно простых n_1 и n_2 имеем:

$$\theta(n_1 n_2) = \theta(n_1) \cdot \theta(n_2).$$

Примером мультипликативной функции может быть функция $\theta(n) = n^s$, где s - любое комплексное или вещественное число.

Рассмотрим некоторые свойства мультипликативных функций.

Теорема 1.1. Для всякой мультипликативной функции $\theta(n)$ справедливо равенство $\theta(1) = 1$.

Доказательство. Пусть $\theta(n_0)$ не равняется нулю. Вычислим

$$\theta(n_0) = \theta(1 \cdot n_0) = \theta(1) \cdot \theta(n_0),$$

другими словами $\theta(1) = 1$.

Отсюда можно получить следующее важное свойство:

Теорема 1.2. Произведение двух мультипликативных функций $\theta_1(n)$ и $\theta_2(n)$ тоже является мультипликативной функцией.

Доказательство.

$$\theta_0(1)=\theta_1(1)\cdot\theta_2(1)=1.$$

Кроме того, при $(n_1,n_2)=1$ получим:

$$\theta_0(n_1n_2)=\theta_1(n_1n_2)\cdot\theta_2(n_1n_2)=\theta_1(n_1)\cdot\theta_1(n_2)\cdot\theta_2(n_1)\cdot\theta_2(n_2)=$$
$$=(\theta_1(n_1)\cdot\theta_2(n_1))\cdot(\theta_1(n_2)\cdot\theta_2(n_2))=\theta_0(n_1)\cdot\theta_0(n_2).$$

Обозначим через $\sum\limits_{d/n}$ - сумму, распространенную на все делители d числа n. Тогда имеет смысл следующая теорема:

Теорема 1.3. Пусть $\theta(n)$ - мультипликативная функция и $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ - каноническое разложение числа n. Тогда имеем конечное Эйлерово произведение:

$$\sum_{d/n}\theta(d)=(1+\theta(p_1)+\theta(p_1^2)+...+\theta(p_1^{\alpha_1})\cdot...\cdot$$
$$\cdot(1+\theta(p_k)+\theta(p_k^2)+...+\theta(p_k^{\alpha_n})=\prod_{p/n}\sum_{v=0}^{\alpha_p}\theta(p^v)$$

В случае при $n=1$ правую часть считают равной единице.

Доказательство. Раскроем скобки в правой части данного тождества. Тогда получим сумму всех слагаемых вида:

$$\theta(p_1^{\beta_1})\cdot\theta(p_2^{\beta_2})\cdot...\cdot\theta(p_k^{\beta_k})=\theta(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}),$$
$$0\le\beta_1\le\alpha_1, 0\le\beta_2\le\alpha_2,...,0\le\beta_k\le\alpha_k$$

причем ни одно слагаемое не будет пропущено и не повториться более одного раза, а это в свою очередь и будет то, что стоит в левой части.

Теорема 1.4. При $\theta(n)=n^s$ теорема 1.3 примет вид:

$$\sum_{d/n}d^s=(1+p_1^s+p_1^{2s}+...+p_1^{\alpha_1 s})\cdot...\cdot$$
$$\cdot(1+p_k^s+p_2^{2s}+...+p_k^{\alpha_1 s}). \qquad (1.4)$$

В частности при $s=1$ левая часть данного тождества будет представлять собой сумму делителей $\sigma_1(n)$ числа n.
Упрощая левую часть получим:

$$\sigma_1(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot...\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

Пример:

$$\sigma(720) = \sigma(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) = \frac{2^{4+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{2+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} = 2418.$$

Если $s = 0$, то левая часть в (1.4) будет представлять собой число делителей $\tau(n)$ числа n. Тогда получится следующее:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Примеры:

$$\tau(720) = (4+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 30.$$
$$\tau(1024) = (2^{10}) = (10+1) = 11.$$

1.3 Функция Мебиуса, её применение и свойства

Функция Мебиуса - мультипликативная функция которая определяется для всех целых положительных n и обозначается $\mu(n)$. Она задается следующим равенством:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^r, & n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \\ 0, & p^2 / n \end{cases}$$

где r – количество простых различных чисел, входящих в n.

Другими словами: функция Мебиуса – это функция $\mu(n)$ определенная следующими условиями:

1. $\mu(n) = 1$, если $n = 1$;
2. $\mu(n) = (-1)^r$, если каноническое разложение n имеет следующий вид $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$;
3. $\mu(n) = 0$, если p^2 / n, то есть если в каноническом разложении n имеется хотя бы один простой множитель в степени, большей, чем первая.

Примеры:

$$\mu(1)=1, \qquad \mu(5)=(-1)^1=-1,$$
$$\mu(2)=(-1)^1=-1, \qquad \mu(6)=\eta(2\cdot 3)=(-1)^2=1,$$
$$\mu(3)=(-1)^1=-1, \qquad \mu(7)=(-1)^1=-1,$$
$$\mu(4)=\eta(2^2)=0, \qquad \mu(8)=\eta(2^3)=0.$$

Теорема 1.5. Пусть $\theta(n)$ - произвольная мультипликативная функция и $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ - каноническое разложение числа n.

Тогда будет справедлива следующая формула:

$$\sum_{d/n}\theta(d)\mu(d)=\left(1-\theta(p_1)\right)\cdot\left(1-\theta(p_2)\right)\cdot...\cdot\left(1-\theta(p_k)\right).$$

При $\theta(d)\neq 0$ эту формулу можно представить в виде:

$$\sum_{d/n}\theta(d)\mu(d)=(-1)^{\nu(n)}\cdot\theta(p_1)\cdot\theta(p_2)\cdot...\cdot\theta(p_k)\cdot\sum_{d/n}\frac{\mu(d)}{\theta(d)}.$$

В случае при $n=1$ правую часть считают равной единице.

Доказательство. Функция $\mu(n)$ - мультипликативная. В связи с этим функция $\theta_1(n)=\mu(n)\theta(n)$ будет мультипликативной, как произведение двух мультипликативных функций $\mu(n)$ и $\theta(n)$.

Если применить к функции $\theta_1(n)=\mu(n)\theta(n)$ теорему 1.3., имея в виду, что $\theta_1(p)=-\theta(p)$, где $\theta_1(p^s)=0$ при $s>1$, можно убедиться в справедливости данного тождества.

В частном случае, полагая $\theta(n)=1$ в теореме 1.5., получим:

$$\varepsilon_n=\sum_{d/n}\mu(d)=\begin{cases}0, & если \quad n>1\\ 1, & если \quad n=1\end{cases}$$

Также это равенство называют формулой «ортогональности».

Приведем доказательство в два этапа.

Доказательство.

1. При $n=1$ сумма равна $\mu(1)$ по определению.

2. Если $n>1$, то n представляет собой каноническое разложение $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ для любого делителя содержащего хотя бы одно простое число в степени больше чем первая $\mu(d)=0$. В связи с этим можно оставить только делители произведения $p_1p_2\cdots p_k$, то есть

$$\sum_{d/n}\mu(d)=\sum_{d/p_1p_2\cdots p_k}\mu(d)=\mu(1)+\sum_{1\le i\le k}\mu(p_i)+\sum_{1\le i\le j\le k}\mu(p_ip_j)+\ldots=$$
$$=1-c_k^1+c_k^2+\ldots+(-1)^k c_k^k=1-1=0.$$

Если в теореме 1.5. положим $\theta(d)=\frac{1}{d}$, то получим следующее:

$$\sum_{d/n}\frac{\mu(d)}{d}=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right), & \textit{если} \quad n>1\\ 1, & \textit{если} \quad n=1\end{cases}$$

1.4 Элементарные сведения о функции Эйлера, некоторые применения функции Эйлера к суммированию натуральных чисел

Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется для всех целых положительных n и представляет собою число чисел ряда

$$0,1,\ldots,n-1 \tag{1.5}$$

взаимно простых с n

$$\varphi(n)=\sum_{\substack{1\le k\le n\\(k,n)=1}}1.$$

Примеры:

$$\begin{aligned}&\varphi(1)=1, && \varphi(8)=4,\\ &\varphi(2)=1, && \varphi(9)=6,\\ &\varphi(3)=2, && \varphi(10)=4,\\ &\varphi(4)=2, && \varphi(15)=8,\\ &\varphi(5)=4, && \varphi(30)=8,\\ &\varphi(6)=2, && \varphi(45)=24,\\ &\varphi(7)=6, && \varphi(60)=16.\end{aligned}$$

Теорема 1.6. Пусть дано каноническое разложение числа n

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}, \tag{1.6}$$

тогда:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right), \tag{1.7}$$

или

$$\varphi(n) = \left(2^{\alpha} - 2^{\alpha-1}\right) \cdot \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \left(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right). \tag{1.8}$$

В частности:

$$\begin{aligned} &\varphi\left(p^{\alpha}\right) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1), \\ &\varphi(p) = p - 1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Доказательство. Число взаимно простое с p^{α} только в том случае, когда оно не делится на p. Среди первых p^{α} натуральных чисел имеется $\frac{p^{\alpha}}{p} = p^{\alpha-1}$ чисел, делящихся на p. Оставшиеся числа $p^{\alpha} - p^{\alpha-1}$ взаимно просты с p^{α}, другими словами:

$$\varphi\left(p^{\alpha}\right) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1).$$

Действительно, согласно формуле

$$\varphi(n) = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d},$$

а также в силу мультипликативности функции получим:

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Умножив обе части на n и принимая во внимание $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, получим:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{n}{d} = \prod_{p_i/n} \left(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \left(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r-1}\right). \end{aligned}$$

Однако, если $n = p^{\alpha}$, тогда:

$$\varphi\left(p^{\alpha}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,p)=1}}^{p^{\alpha}} 1 = \sum_{k=1}^{p^{\alpha}} 1 - \sum_{k=1}^{\frac{p^{\alpha}}{p}} 1 = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}.$$

Непосредственно из равенства (1.8) следует следующее следствие.

Следствие. Функция $\varphi(n)$ при $n \geq 3$ всегда есть четное число.

Рассмотрим некоторые свойства и формулы конечного Эйлерова произведения.

1. $$\sum_{d/n} \mu(d)\theta(d) = \prod_{p/n} \left(1 - \theta(p)\right);$$

Поскольку при мультипликативной $\theta(d)$, $\mu(d)\theta(d)$ тоже является мультипликативной.

2. $$\sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

3. $$\varphi(n) = n \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Приведем доказательство равенства 3.

$$n \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} =$$
$$= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \left(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r - 1}\right) = \varphi(n)$$
$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{(k,n)} \cdot 1 = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} 1 = \varphi(n)$$

Поскольку

$$d/(k,n) \Rightarrow \begin{cases} k = k_1 d \\ n = n_1 d \end{cases} \quad (k_1, n_1) = 1,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{n = n_1 d \\ k = k_1 d \leq n \\ k_1 \leq \frac{n}{d}}} \mu(d) = \sum_{d/n} \mu(d) \sum_{k_1 = 1}^{\frac{n}{d}} 1 = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Таким образом получилось равенство:

$$\varphi(n)=\sum_{d/n}\mu(d)\cdot\frac{n}{d}$$

откуда ввиду частного случая теоремы 1.5. следует формула (1.7):

$$\varphi(n)=n\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Из которой, принимая во внимание $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, следует (1.8):

$$\varphi(n)=\left(2^{\alpha}-2^{\alpha-1}\right)\cdot\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\cdot\left(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\right)..$$

Примеры:

$$\varphi(60)=\varphi(2^2\cdot3\cdot5)=60\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=60\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=16,$$
$$\varphi(140)=\varphi(2^2\cdot5\cdot7)=140\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)=140\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}=48,$$

или

$$\varphi(60)=\varphi(2^2\cdot3\cdot5)=\left(2^2-2^1\right)\cdot\left(3^1-3^0\right)\cdot\left(5^1-5^0\right)=2\cdot2\cdot4=16,$$
$$\varphi(140)=\varphi(2^2\cdot5\cdot7)=\left(2^2-2^1\right)\cdot\left(5^1-5^0\right)\cdot\left(7^1-7^0\right)=2\cdot4\cdot6=48.$$

Теорема 1.7. Функция $\varphi(n)$ – мультипликативная, то есть при $(n_1,n_2)=1$

$$\varphi(n_1n_2)=\varphi(n_1)\cdot\varphi(n_2).$$

Доказательство.. Пусть $(n_1,n_2)=1$ и $n_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$, $n_2=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}...q_r^{\beta_r}$, причем все $\left(p_i^{\alpha_i},q_j^{\beta_j}\right)=1$.

По определению функции $\varphi(n)$, а также согласно $\varphi(n)=\sum\limits_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n}1$, учитывая $(k,n_1n_2)=1$, получаем:

$$\varphi(n_1)=\sum_{\substack{k=1\\(k,n_1)=1}}^{n_1}1 \text{ и } \varphi(n_2)=\sum_{\substack{k=1\\(k,n_2)=1}}^{n_2}1 .$$

Учитывая $(k,n_1n_2)=1$, $(k,n_1)=1$ и $(k,n_2)=1$ получим:

$$\varphi(n_1 n_2) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k, n_1 n_2)=1}}^{n_1 n_2} 1 = \varphi(n_1)\cdot\varphi(n_2).$$

Чем и доказываем мультипликативность функции Эйлера.

Примеры:

$$\varphi(405) = \varphi(81)\cdot\varphi(5) = 54\cdot 4 = 216,$$
$$\varphi(270) = \varphi(54)\cdot\varphi(5) = 18\cdot 4 = 72.$$

Рассмотрим следующую теорему.

Теорема 1.8.

$$\sum_{d/n}\varphi(d) = n.$$

Для доказательства воспользуемся теоремой 1.3., где при $\theta(n) = \varphi(n)$ получим:

$$\sum_{d/n}\varphi(d) = \left(1 + \varphi(p_1) + \varphi(p_1^2) + \ldots + \varphi(p_1^{\alpha_1})\right)\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot\left(1 + \varphi(p_k) + \varphi(p_k^2) + \ldots + \varphi(p_k^{\alpha_k})\right).$$

Ввиду (1.9) получим следующее:

$$\sum_{d/n}\varphi(d) = \left(1 + \varphi(p_1 - 1) + \varphi(p_1^2 - p_1) + \ldots + \varphi(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})\right)\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot\left(1 + \varphi(p_k - 1) + \varphi(p_k^2 - p_k) + \ldots + \varphi(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})\right).$$

Приведем подобные в каждой большой скобке и получим:

$$\sum_{d/n}\varphi(d) = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k},$$

то есть:

$$\sum_{d/n}\varphi(d) = n.$$

Рассмотрим некоторые утверждения, касающиеся функции Эйлера.

Утверждение 1. Для любого натурального n справедливо следующая формула:

$$S_1'(n) = \frac{n \cdot \varphi(n)}{2}.$$

Доказательство. Поскольку $(k,n)=1$, то $(n-k,n)=1$. Значит $k+(n-k)=n$. Имеем:

$$S_1'(n) = 1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{\varphi(n-1)} + \delta_{\varphi(n)}$$
$$S_1'(n) = \delta_{\varphi(n)} + \delta_{\varphi(n-1)} + \ldots + \delta_2 + 1$$
$$2S_1'(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} \left(k + (n-k)\right) = n \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} 1 = n\varphi(n).$$

Откуда следует:

$$S_1'(n) = \frac{n\varphi(n)}{2}.$$

Утверждение 2. При $n \geq 1$ будет справедливо следующее равенство:

$$S_1'(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} k = \frac{n}{2} \cdot \left(\varphi(n) + \varepsilon_n\right).$$

Доказательство. Исходя из частного случая теоремы 1.5. имеем:

$$\varepsilon_n = \sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad n > 1 \\ 1, & \textit{если} \quad n = 1 \end{cases}$$

Значит:

$$\varepsilon_{(k,n)} = \sum_{d/(k,n)} \mu(d) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad (k,n) > 1 \\ 1, & \textit{если} \quad (k,n) = 1 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$S_1'(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{(k,n)} \cdot k.$$

Другими словами, используя функцию $\varepsilon_{(k,n)}$ сняли условие $(k,n)=1$ и перешли на полную сумму. Используя определение наибольшего общего делителя чисел k и n получим следующее:

$$(k,n)=d \Leftrightarrow \begin{cases} k=dk' \\ n=dn' \end{cases}, \Rightarrow 1\le k'\le n', \qquad (k',n')=1$$

$$\begin{aligned} S_1'(n) &= \sum_{k\neq 1}^{n}\left(\sum_{d/(k,n)}\mu(d)\right)\cdot k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{d/(k,n)}\mu(d)\right)\cdot(k',d) = \\ &= \sum_{d/n} d\mu(d)\sum_{k'} k' = \sum_{d/n} d\mu(d)\cdot S_1\left(\frac{n}{d}\right), \end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$S_1(n)=\sum_{k=1}^{\frac{n}{d}} k = \frac{\frac{n}{d}\left(\frac{n}{d}+1\right)}{2} = \frac{n^2}{2d^2}+\frac{n}{2d}.$$

Значит,

$$S_1'(n)=\sum_{d/n} d\cdot\mu(d)\cdot\left(\frac{n^2}{2d^2}+\frac{n}{2d}\right)=\frac{n^2}{2}\cdot\sum_{d/n}\frac{\mu(d)}{d}+\frac{n}{2}\cdot\sum_{d/n}\frac{\mu(d)}{d}.$$

Используя определение функции Эйлера и формулу

$$\varphi(n)=\sum_{d/n}\mu(d)\cdot\frac{n}{d}=n\cdot\sum_{d/n}\frac{\mu(d)}{d},$$

получим:

$$\varphi(n)=n\cdot\sum_{d/n}\frac{\mu(d)}{d},$$

откуда, учитывая определение ε_n, получим:

$$S_1'(n)=\frac{n}{2}\varphi(n)+\frac{n\varepsilon_n}{2}=\frac{n}{2}\cdot\left(\varphi(n)+\varepsilon_n\right)$$

чем и докажем данное утверждение.

Воспользуемся суммой квадратов $S_2(n)$ и рассмотрим следующее утверждение.

Утверждение 3. При $n \geq 1$ справедливо равенство:

$$S_2'(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} k^2 = \frac{n^2}{6} \cdot \left(2\varphi(n) + 3\varepsilon_n + \frac{\varphi(n)}{n^2} \right).$$

Для доказательства используем функцию $\varepsilon_{(k,n)}$.

Доказательство. Имеется:

$$S_2'(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} k^2 \cdot \varepsilon_{(k,n)}.$$

Проводя те же рассуждения, как при доказательстве второго утверждения, получим следующее равенство:

$$S_2'(n) = \sum_{d/n}^{n} d^2 \mu(d) \cdot S_2\left(\frac{n}{d}\right),$$

где

$$S_2(m) = \frac{m \cdot (m+1) \cdot (2m+1)}{6}.$$

При $m = \frac{n}{d}$, получим:

$$S_2\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{\frac{n}{d} \cdot (\frac{n}{d}+1) \cdot (\frac{2n}{d}+1)}{6} = \frac{n}{6d} \cdot \left(2\left(\frac{n}{d}\right)^2 + 3\frac{n}{d} + 1 \right) = \frac{n^3}{3d^3} + \frac{n^2}{2d^2} + \frac{n}{6d}.$$

Подставим значение $S_2\left(\frac{n}{d}\right)$ в правую часть равенства $S_2'(n)$, тем самым получим:

$$S_2'(n) = \sum_{d/n}^{n} d^2 \mu(d) \cdot \left(\frac{n^3}{3d^3} + \frac{n^2}{2d^2} + \frac{n}{6d}. \right) =$$

$$= \frac{1}{3} n^2 \cdot n \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d} + \frac{n^2}{2} \sum_{d/n} \mu(d) + \frac{n}{6} \sum_{d/n} d\mu(d).$$

Далее, используем тождества для $\varphi(n)$ и ε_n, а также функцией

$$\varphi^*(n) = n\sum_{d/n} d\mu(d).$$

В итоге получим:

$$S_2'(n) = \frac{n^2\varphi(n)}{3} + \frac{n^2}{2}\varepsilon_n + \frac{\varphi^*(n)}{6d} = \frac{n^2}{6}\cdot\left(2\varphi(n) + 3\varepsilon_n + \frac{\varphi^*(n)}{n^2}\right).$$

Лемма 1.1. Справедливо следующее равенство:

$$\varphi^*(n) = (-1)^{v(n)}\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r\cdot\varphi(n),$$

где $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$, , а $v(n)$ представляет собой число различных простых делителей числа n не учитывая их кратность.

Доказательство. Пусть $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$, - это каноническое разложение числа m. Тогда по теореме 1.5. и при условии, что $\theta(d)\neq 0$ получим:

$$\sum_{d/n}\theta(d)\mu(d) = (1-\theta(p_1))\cdot(1-\theta(p_2))\cdot\ldots\cdot(1-\theta(p_к)) =$$
$$= (-1)^{v(n)}\theta(p_1)\theta(p_2)\ldots\theta(p_r)\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_r}\right).$$

Поскольку в выражении:

$$\sum_{d/n} d\mu(d), \quad \theta(d) = d,$$

то получается следующее:

$$\sum_{d/n} d\mu(d) = (-1)^{v(n)}p_1p_2\ldots p_r\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_r}\right) =$$
$$= (-1)^{v(n)}\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r\cdot\frac{\varphi(n)}{n}.$$

Умножив обе части данного равенства на n, получим:

$$\varphi^*(n) = (-1)^{v(n)}\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r\cdot\varphi(n).$$

Что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим некоторые задачи на суммирование арифметических функций, которые связаны с дробными долями линейных функций и последующим применением в них арифметических функций $S_1'(n)$ и $S_1(n)$.

Утверждение 4.

$$\sum_{x\in R_m}\left\{\frac{ax+b}{m}\right\}=\frac{1}{2}(m-1),$$

При $m>1$, $(a,m)=1$, b – целое, суммирование ведется по полной системе вычетов R_m по модулю m.

Прежде чем доказать это утверждение рассмотрим следующую теорему.

Теорема 1.9. Если $(a,m)=1$ и x пробегает полную систему вычетов по модулю m, то $ax+b$, где b это любое целое число, также пробегает полную систему вычетов R_m по модулю m.

Действительно, сколько будет чисел x, столько же будет чисел $ax+b$, а именно m. Поскольку, любые m чисел, попарно несравнимые по модулю m, образуют по этому модулю полную систему вычетов R_m, остается показать, что любые два числа ax_1+b и ax_2+b, которые отвечают несравнимым x_1 и x_2, будут сами несравнимы по модулю m.

Но, если допустить, что

$$ax_1+b\equiv ax_2+b(\operatorname{mod} m),$$

то получим сравнение

$$ax_1\equiv ax_2(\operatorname{mod} m).$$

Тогда, вследствие $(a,m)=1$, получится следующее:

$$x_1\equiv x_2(\operatorname{mod} m).$$

а это в свою очередь противоречит предположению о несравнимости x_1 и x_2.

Теперь вернемся к доказательству утверждения 4.

Поскольку $(a,m)=1$, то когда число x пробегает R_m, то в свою очередь $y=ax+b$ то же пробегает R_m, для любого b. Таким образом:

$$\sum_{x\in R_m}\left\{\frac{ax+b}{m}\right\}=\sum_{x\in R_m}\left\{\frac{y}{m}\right\}=\sum_{y=0}^{m-1}\left\{\frac{y}{m}\right\},$$

В силу периодичности дробной части ограничимся значениями:

$$0\le y\le\frac{m-1}{m}<1,\quad \left\{\frac{y}{m}\right\}=\frac{y}{m}.$$

Откуда имеем:

$$\sum_{y=0}^{m-1}\left\{\frac{y}{m}\right\}=\frac{1}{m}\sum_{y=0}^{m-1}y.$$

Используя сумму членов арифметической прогрессии S_{m-1}, получим:

$$S_{m-1}=\sum_{y=0}^{m-1}y=\frac{(m-1)m}{2}.$$

А значит:

$$\sum_{m=0}^{m-1}\left\{\frac{ax+b}{m}\right\}=\frac{1}{m}\sum_{y=1}^{m-1}y=\frac{1}{m}\cdot\frac{(m-1)\cdot m}{2}=\frac{m-1}{2}.$$

Чем и доказывается данное утверждение.

Утверждение 5 .

$$\sum_{\xi\in R'_m}\left\{\frac{a\xi}{m}\right\}=\frac{1}{2}\varphi(m),$$

При $m>1$, $(a,m)=1$, ξ – пробегает приведенную систему вычетов R'_m по модулю m.

Что бы доказать данное утверждение дадим (без доказательства) следующую теорему:

Теорема 1.10. Если $(a,m)=1$ и x пробегает приведенную систему вычетов по модулю m, то ax также пробегает приведенную систему вычетов R'_m по модулю m.

На основании данной теоремы, поскольку $(a,m)=1$ и $\xi\in R'_m$, то $y=a\xi$ так же пробегает приведенную систему вычетов R'_m.

Откуда следует:

$$\sum_{\xi\in R'_m}\left\{\frac{a\xi}{m}\right\}=\sum_{\xi\in R'_m}\left\{\frac{y}{m}\right\}=\sum_{\substack{y=0\\(y,m)=1}}^{m-1}\frac{y}{m}=\frac{1}{m}\sum_{\substack{y=0\\(y,m)=1}}^{m-1}y.$$

Основываясь на утверждении 1 получим следующее:

$$\sum_{\xi\in R'_m}\left\{\frac{a\xi}{m}\right\}=\frac{1}{m}\cdot\frac{m\cdot\varphi(m)}{2}=\frac{\varphi(m)}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. При $m \geq 1$ данное равенство выглядит следующим образом:

$$\sum_{\xi \in R'_m} \left\{ \frac{a\xi}{m} \right\} = \frac{\varphi(m) + \xi_m}{2}.$$

Замечание 2. При $m = 1$ имеем:

$$\sum_{\xi \in R'_m} \{a\xi\} = \frac{\varphi(1) + 1}{2} = 1.$$

Теперь рассмотрим дополнение для функции Эйлера.

Пусть дано натуральное число n и функция Эйлера $\varphi(n)$. Добавим в рассмотрение арифметическую функцию $\eta(n)$, представляющую собой разность между числами n и $\varphi(n)$, то есть число натуральных чисел $m < n$, где $(m,n) > 1$.

$$\eta(n) = n - \varphi(n) \Leftrightarrow n = \varphi(n) + \eta(n) \Leftrightarrow n^4 + \varphi(n)^4 + \eta(n)^4 = \\ = 2 \cdot \left(\frac{n^2 + \varphi(n)^2 + \eta(n)^2}{2} \right)^2. \tag{1.11}$$

Примеры:

$$\begin{array}{ll} \eta(1) = 1 - 1 = 0, & \eta(8) = 8 - 4 = 4, \\ \eta(2) = 2 - 1 = 1, & \eta(9) = 9 - 6 = 3, \\ \eta(3) = 3 - 2 = 1, & \eta(10) = 10 - 4 = 6, \\ \eta(4) = 4 - 2 = 2, & \eta(15) = 15 - 8 = 7, \\ \eta(5) = 5 - 4 = 1, & \eta(30) = 30 - 8 = 22, \\ \eta(6) = 6 - 2 = 4, & \eta(45) = 45 - 24 = 21, \\ \eta(7) = 7 - 6 = 1, & \eta(60) = 60 - 16 = 34, \end{array}$$

Поскольку $\eta(1) = 0$, то из этого следует, что функция $\eta(n)$ - не мультипликативная функция.

Исходя из определения функции $\varphi(n)$ и $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, имеем следующее:

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r - 1}) = \\ = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Исходя из этого получим явную вычислительную формулу для $\eta(n)$, которая выглядит следующим образом:

$$\eta(n)=\left[1-\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right]=n\cdot\left[1-\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_r}\right)\right]= \\ =n\cdot\left(1-\sum_{d/n}\frac{\mu(d)}{d}\right). \qquad (1.12)$$

При $n=p$ для всех n - простых, получаем: $\eta(n)=1$, поскольку единственное число в ряде чисел $1,2,\ldots,p$ которое не взаимно простое с p будет само число p.

Используя формулу (1.12) вычислим некоторые значения функции $\eta(n)$.

1. Пусть $n=p^{\alpha}$, где $\alpha\geq 2$. Имеем:

$$\eta(p^{\alpha})=p^{\alpha}-\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}-(p^{\alpha}-p^{\alpha-1})=p^{\alpha-1}$$
$$\eta(p^{\alpha-1})-\eta(p^{\alpha})-\varphi(p^{\alpha})\Rightarrow\eta(p^{\alpha-1})=\eta(p^{\alpha})+\varphi(p^{\alpha}).$$

2. Пусть $n=pq$, где p и q - простые числа, тогда $\eta(pq)=p+q+1$. В самом деле, делителями числа $n=pq$, которые больше единицы, будут следующие числа: $p,2p,\ldots,(q-1)p,qp,q,2q,\ldots,(p-1)q$. Всего этих чисел будет $p+q-1$ штук. Тогда, согласно формуле, получим:

$$\eta(pq)=pq-pq\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{q}\right)=pq\cdot\left[1-\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{q}\right)\right]= \\ =pq\cdot\left[1-1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{pq}\right]=p+q-1.$$

3. Вычислим $\eta(pqr)$, где p,q,r - простые числа. Для этого используем формулу(1.12). Получим:

$$\eta(pqr)=pqr\left[1-\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{q}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{r}\right)\right]=pqr-(p-1)\cdot(q-1)\cdot(r-1)= \\ =pt+qr+pq-(p+q+r)+1=n_p+n_q+n_r-(n_{pr}+n_{pq}+m_{qr})+1,$$

где

$$n_p=n\cdot p^{-1},n_q=n\cdot q^{-1},n_r=n\cdot r^{-1},n_{pr}=n\cdot(pr)^{-1},n_{pq}=n\cdot(pq)^{-1},n_{qr}=n\cdot(qr)^{-1}.$$

По-другому это равенство можно записать следующим образом:

$$\eta(pqr)=\sum_{i=p,q,r}n_i+(-1)^3\sum_{\substack{i,j=p,q,r\\ i\neq j}}n_{ij}+(-1)^2\cdot 1.$$

Для случаев, когда $n = p_1 p_2 \cdots p_r$, где $r \geq 4$, общую формулу в явном виде можно записать следующим образом:

$$\eta(n) = \eta(p_1 p_2 ... p_r) = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)\right].$$

Иначе, в общем случае получим:

$$\frac{\eta(n)}{n} = 1 - \sum_{d/n} \frac{\eta(d)}{d} = \sum_{\substack{d/n \\ d>1}} \frac{\eta(d)}{d}.$$

В итоге, получается явная формула:

$$\eta(n) = n \sum_{\substack{d/n \\ d>1}} \frac{\eta(d)}{d}. \tag{1.13}$$

Пусть $\eta_1(n) = S_1(n) - S_1'(n)$. Тогда:

$$\eta_1(n) = \sum_{\substack{d=1 \\ (d,n)>1}}^{n} d = \frac{n}{2} \cdot (n + 1 - \varphi(n) + \varepsilon_n),$$

$$\eta_1(1) = 0,$$

$$\eta_1(p) = \frac{p}{2} \cdot (p + 1 - (p - 1)) = \frac{p}{2} \cdot 2 = p.$$

2 Функция Эйлера и корни степени n из единицы. Порядок роста функции Эйлера в среднем

2.1 Связь функции Эйлера с корнями степени n из единицы

Пусть дано следующее уравнение:

$$x^n = 1. \tag{2.1}$$

Тогда любое решение данного уравнения можно задать формулой:

$$x_k = \varepsilon_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1, \tag{2.2}$$

где i - мнимая единица, то есть:

$$x_0 = 1, \quad x_k = \varepsilon_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Из данных решений выделим $\varepsilon_k = \varepsilon'_k$, при условии $(k,n)=1$. Эти корни называют **первообразными**. Замечательность данных корней в том, что каждый из них способен породить все корни степени n. Другими словами:

$$(\varepsilon'_k)^0 = 1, \quad (\varepsilon'_k)^r = \varepsilon'^{\,r}_k = e^{2\pi i \frac{kr}{n}}.$$

Согласно теореме 1.9. можно сформулировать следующее высказывание. Если $(k,n)=1$ и r пробегает полную систему вычетов по модулю n, то $y = kr$ также пробегает полную систему вычетов по модулю n.

Отсюда следует, что количество первообразных корней будет равно:

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} 1.$$

Примеры:

1. $$x^2 - 1 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

В данном примере первообразным корнем будет $x_2 = -1.$. Остальные корни можно получить из этого корня, то есть

$$x_1 = x_1^0 = (-1)^0, \quad x_2 = x_2^1 = (-1)^1 = -1.$$

2. $$x^4 - 1 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = i, \quad x_3 = -i.$$

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi k}{4}, \quad k = 0,1,2,3.$$

В данном случае $x_3 = i, x_3 = -i.$ будут первообразными корнями.

3. $x^p - 1 = 0,$, где $p \geq 3$ - простое число, тогда:

$$\varepsilon_k = e^{2\pi i \frac{k}{p}}, \quad k = 0,1,2,\ldots, p-1.$$

Известно, что функция Эйлера выражает количество первообразных корней степени n из единицы. Иначе говоря, если ε_k представляет собой любой корень из единицы

$$\varepsilon_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}, \quad k = 0,1,2,\ldots, n-1.$$

Тогда все первообразные корни можно найти по следующей формуле:

$$\varepsilon_n' = 2\pi i \frac{k}{n}, \quad (k,n) = 1, \quad \varphi(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} 1.$$

Действительно, исходя из формулы Эйлера, получим:

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \alpha \in R$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\varepsilon_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad i^2 = -1.$$

Значит ε_k - корни уравнения $x^n - 1 = 0,$.

Примеры:

1. $$x^2 - 1 = 0, \quad \varepsilon_k = e^{2\pi i \frac{k}{2}},$$

$$\varepsilon_0 = e^{2\pi i \frac{0}{2}} = \left(e^{2\pi i \frac{1}{2}}\right)^0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = e^{2\pi i \frac{1}{2}} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

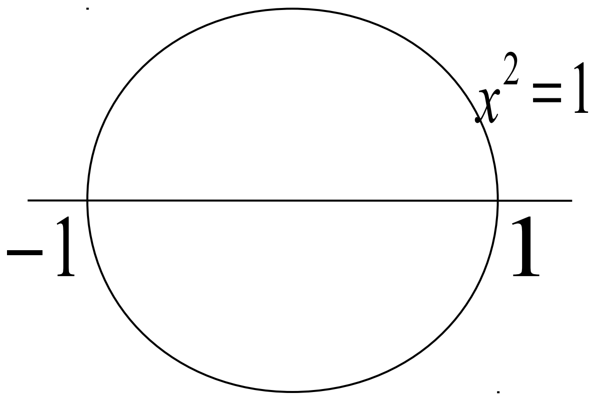


Рисунок 2.1.

2.

$$x^3 - 1 = 0, \quad \varepsilon_k = e^{2\pi i \frac{k}{3}},$$

$$\varepsilon_0 = e^{2\pi i \frac{0}{3}} = 1,$$

$$\varepsilon_1 = e^{2\pi i \frac{1}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos 120 + i\sin 120 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = e^{2\pi i \frac{2}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin 4\frac{2\pi}{3} = \cos 240 + i\sin 240 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = (\varepsilon_1)^2 = \left(e^{2\pi i \frac{1}{3}}\right)^2 = e^{\pi i \frac{4}{3}}$$

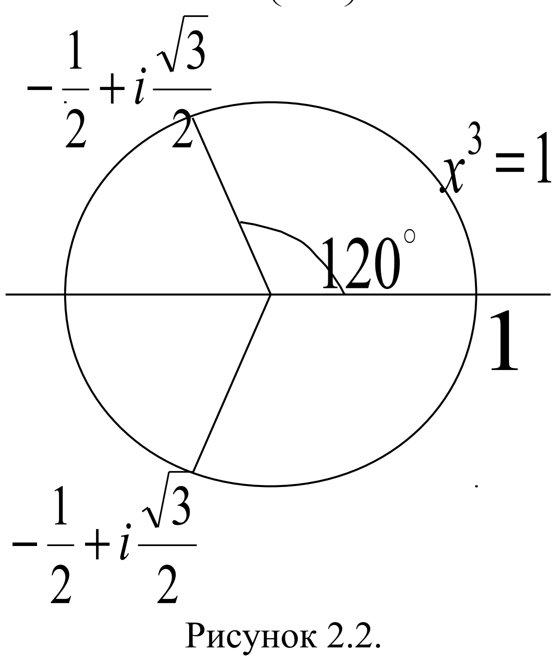


Рисунок 2.2.

В общем случае корни

$$\varepsilon_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}, \quad (k, n) = 1,$$

являются первообразными корнями из единицы и могут быть определены следующим равенством:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1^k = \left(e^{2\pi i \frac{1}{n}} \right)^k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}.$$

Пусть $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n-1}$ - все корни степени n из единицы. Возьмем среди них любой первообразный корень ε_k, $(k,n)=1$. Если возвести этот корень в степень k=0,1,2,…,n-1, то получатся все корни степени n из единицы, другими словами:

$$\varepsilon_k^1 = \varepsilon_k,$$

$$\varepsilon_k^2 = \left(e^{2\pi i \frac{k}{n}} \right)^2 = \left(e^{2\pi i \frac{2}{n}} \right)^k = \varepsilon_2^k = \varepsilon_1^{2k},$$

$$\varepsilon_k^{n-1} = \varepsilon_1^{k(n-1)},$$

$$\varepsilon_k^n = \varepsilon_1^{kn} = 1.$$

Пример:

$$z = \sqrt[8]{1} = \cos\frac{2\pi k}{8} + i\sin\frac{2\pi k}{8} = e^{2\pi i \frac{k}{8}}$$

$$\varepsilon_k^8 = \left(\cos\frac{2\pi k}{8} + i\sin\frac{2\pi k}{8} \right)^8 = \cos\frac{2\pi 8}{8} + i\sin\frac{2\pi 8}{8} = 0.$$

Корни при $k = 1,3,5,7$ будут первообразными, поскольку при данных значениях $(k,8)=1$. Докажем, что корень ε_1 - первообразный.

$$\varepsilon_1^0 = \left(e^{2\pi i \frac{1}{8}} \right)^0 = 1,$$

$$\varepsilon_1^1 = \left(e^{2\pi i \frac{1}{8}} \right)^1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_1^2 = \left(e^{2\pi i \frac{1}{8}} \right)^2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$\varepsilon_1^3 = \left(e^{2\pi i \frac{1}{8}} \right)^3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_1^4 = \left(e^{2\pi i \frac{1}{8}} \right)^4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$\varepsilon_1^5 = \left(e^{2\pi i\frac{1}{8}}\right)^5 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_1^6 = \left(e^{2\pi i\frac{1}{8}}\right)^6 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i,$$

$$\varepsilon_1^7 = \left(e^{2\pi i\frac{1}{8}}\right)^7 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Аналогично доказываются остальные первообразные корни. В итоге получим, что $\varepsilon_k = e^{2\pi i\frac{k}{8}}$, при $k = 1,3,5,7$ дадут все остальные корни.

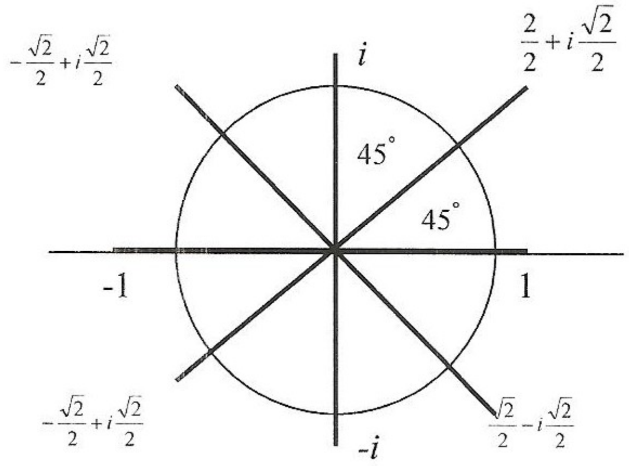


Рисунок 2.3.

2.2 Полная сумма корней степени n из единицы

Рассмотрим некоторые примеры на суммирование арифметических функций.

Лемма 2.1. Пусть корни уравнения

$$x^n - 1 = 0 \tag{2.3}$$

выражаются как:

$$\varepsilon_k = e^{2\pi i\frac{k}{n}}. \tag{2.4}$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$G(n) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i\frac{k}{n}} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}.$$

Доказательство. Совершенно очевидно, что $G(1)=1$. Пусть $n>1$. Если просуммировать члены геометрической прогрессии, где $q=\varepsilon_1=e^{2\pi i\frac{1}{n}}$, то получим следующее:

$$G(n)=\frac{1-e^{2\pi i\frac{n}{n}}}{1-q}=0.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 2.2. Пусть задано любое целое число α, тогда:

$$G(\alpha,n)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{2\pi i\frac{\alpha k}{n}}=\begin{cases}1, & n \text{ делит } \alpha\\ 0, & n \text{ неделит } \alpha\end{cases}.$$

Доказательство. Допустим $\alpha\equiv 0(\operatorname{mod} n)$, тогда имеем:

$$e^{2\pi i\frac{\alpha k}{n}}=\cos 2\pi m+i\sin 2\pi m=1+i\cdot 0=1,\quad m\in Z.$$

Значит:

$$G(\alpha,n)=\sum_{k=0}^{n-1}1=n.$$

Допустим $n/\alpha\Rightarrow\alpha=r+tn$, $1<r<n-1$, $t\in Z$. Значит:

$$e^{2\pi i\frac{\alpha k}{n}}=e^{2\pi i\frac{rk}{n}}\cdot e^{2\pi itk}.$$

Пусть $q=e^{2\pi i\frac{r}{n}}=\varepsilon_1^r=\varepsilon_r\neq 1$, тогда, используя формулу суммы геометрической прогрессии, получится:

$$G(\alpha,n)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{2\pi i\frac{\alpha k}{n}}=\sum_{k=0}^{n-1}q^k=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Поскольку $q^n=e^{2\pi i\frac{\alpha kn}{n}}=1$, то в данном случае $G(\alpha,n)=0$. Чем и докажем данную лемму.

Лемма 2.3. Сумма первообразных корней из единицы будет равняться $\mu(n)$, по другому:

$$G'(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} e^{2\pi i \frac{k}{n}} = \mu(n).$$

Доказательство. Из определения $\varepsilon_{(n,k)}$, имеем следуещее:

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{(n,k)} \cdot e^{2\pi i \frac{\alpha k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d/k}} \mu(d) \right) \cdot e^{2\pi i \frac{k}{\frac{n}{d}}} =$$

$$= \sum_{d/n} \mu(d) \cdot \sum_{k_1=1}^{n/d} e^{2\pi i \frac{k}{\frac{n}{d}}} = \sum_{d/n} \mu(d) \cdot G\left(\frac{n}{d} \right).$$

Основываясь на лемме 2.1., получим следующее:

$$G'(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} e^{2\pi i \frac{k}{n}} = \sum_{d/n} \mu(d) \cdot G\left(\frac{n}{d} \right),$$

поскольку

$$G\left(\frac{n}{d} \right) = \begin{cases} 1, & n/d = 1 \\ 0, & n/d > 1 \end{cases}.$$

Исходя из этого, получим:

$$G'(n) = \sum_{d/n} \mu(d) \cdot G\left(\frac{n}{d} \right) \cdot \mu(n) + \sum_{\substack{d/n \\ d/k}} \mu(d) \cdot G\left(\frac{n}{d} \right) = \mu(n).$$

Также будет справедлива следующая формула:

$$G(n) = \sum_{d/n} \mu(n) \cdot \mu\left(\frac{n}{d} \right).$$

2.3 Порядок роста функции Эйлера в среднем. Предварительные леммы

Лемма 2.4. Справедливо следующее равенство:

$$\xi(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \qquad (2.5)$$

Сперва докажем одно общее утверждение с использованием теории рядов Фурье.

Утверждение 2.1. Допустим, $-\pi\le x\le\pi$, тогда будет справедливо следующее равенство:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}. \qquad (2.6)$$

Доказательство. Исходя из общей теории рядов Фурье, необходимо на промежутке $[-\pi,\pi]$ найти разложение по косинусам функции $f(x)=x^2$. Известно, что если на промежутке $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$ - четная, то для этой функции ряд Фурье содержит только косинусы:

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx. \qquad (2.7)$$

Поскольку $f(x)$ - функция четная, то $f(-x)=f(x)$.

Найдем $\frac{\alpha_0}{2}$ и α_0, где $n=1,2,...$

$$\frac{\alpha_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$$

$$\alpha_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad n=1,2,...$$

$$\frac{\alpha_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}.$$

Дважды проинтегрируем α_n по частям:

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x \sin ndx =$$

$$= \frac{4}{n\pi} x \frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^2\pi} \cdot \frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} =$$

$$= (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

$$(n > 0)$$

Примечание. Поскольку

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1, & n - \textit{нечетное} \\ 1, & n - \textit{четное} \end{cases},$$

то получили $(-1)^n$. Теперь подставим полученные значения $\frac{\alpha_0}{2}$ и α_n. Получилось следующее:

$$x^2 = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Чем и доказали утверждение 2.1.

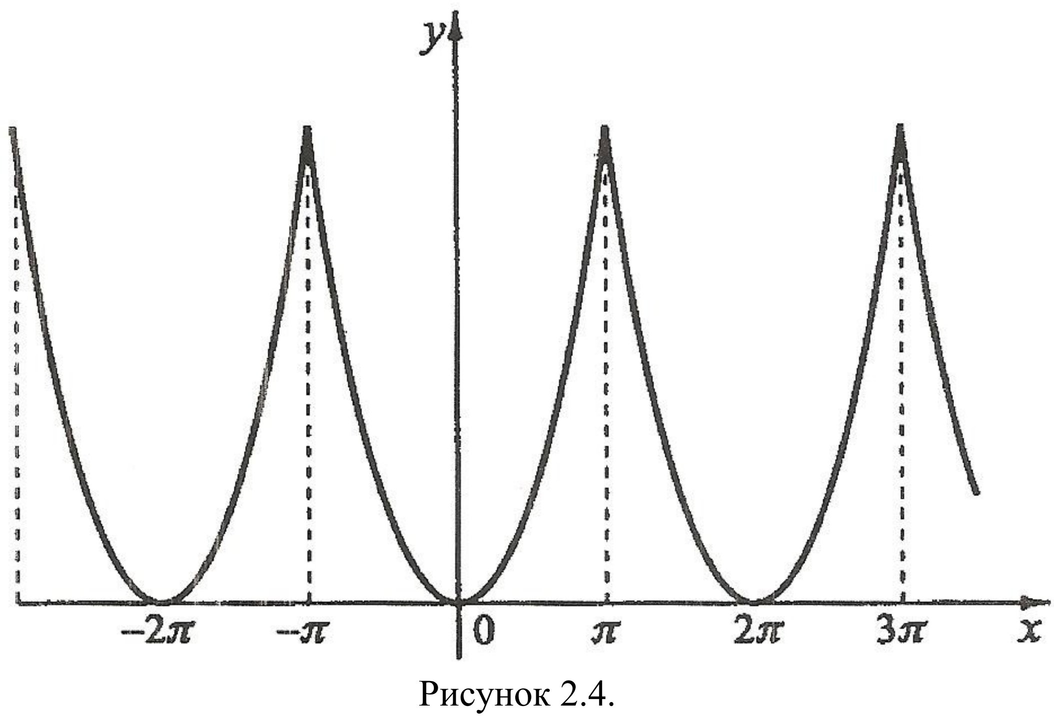


Рисунок 2.4.

На рисунке 2.4 отображен график суммы ряда, который состоит из бесконечного числа параболических дуг, примыкающих одна к другой.

Следствие 2.1. Если в разложении

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

$x = \pi$ и $x = 0$, то получим следующие результаты:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. $$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$$

Покажем первое равенство:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

$$x = \pi$$

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1, & n - \textit{нечетное} \\ 1, & n - \textit{четное} \end{cases}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n - \textit{нечетное} \\ 1, & n - \textit{четное} \end{cases}$$

$$\frac{(-1)^n \cos n\pi}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, & n - \textit{нечетное} \\ \dfrac{1}{n^2}, & n - \textit{четное} \end{cases}$$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos n\pi}{n^2}.$$

Откуда следует:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Теперь, чтобы показать второе равенство, в разложении

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

Положим $x = 0$. Тогда:

$$0^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$$
$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$$
$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

Чем и докажем лемму 2.4.

Лемма 2.5. (Вторая формула обращения Мебиуса).

Пусть для всех $x \geq 1$ определена функция $f(x)$ и

$$g(x) = \sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}\right). \tag{2.8}$$

Тогда, при $1 \leq x \to \infty$ будет справедлива следующая эквивалентность:

$$f(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \cdot g\left(\frac{n}{x}\right) \Leftrightarrow g(x) \sum_{1 \leq n \leq x} f\left(\frac{n}{x}\right).$$

Доказательство. Исходя из определения $g(x)$, имеем $x \geq 1$

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \cdot g\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \cdot \left(\sum_{m \leq \frac{x}{n}} f\left(\frac{x}{nm}\right)\right) = \sum_{\substack{\{m,n\} \\ 1 \leq mn \leq x}} \mu(n) \cdot f\left(\frac{x}{nm}\right).$$

Если обозначить через $1 = nm$, где $1 \leq q \leq x$, то получим:

$$\sum_{\substack{\{m,n\} \\ 1 \leq mn \leq x}} \mu(n) \cdot f\left(\frac{x}{nm}\right) = \sum_{1 \leq q \leq x} f\left(\frac{x}{q}\right) \cdot \sum_{n/q} \mu(n).$$

Однако, для любого натурального $q \geq 1$, имеем:

$$\varepsilon_n = \sum_{d/q} \mu(d) = \begin{cases} 1, & q = 1 \\ 0, & q > 1 \end{cases}.$$

Тогда, учитывая последнее, получим:

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \cdot g\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{1 \leq q \leq x} f\left(\frac{x}{q}\right) \cdot \varepsilon_q = \sum_{q=1} f(x) \cdot 1 + \sum_{1 \leq q \leq x} f\left(\frac{x}{q}\right) \cdot 0 = f(x).$$

Значит, при условии (2.8), обратим $f(x)$, то есть:

$$f(x)=\sum_{n\le x}\mu(n)\cdot g\left(\frac{x}{n}\right) \tag{2.9}$$

Обратно: пусть справедливо (2.9), значит:

$$\sum_{m\le x} f\left(\frac{x}{m}\right)=\sum_{m\le x}\sum_{m\le x}\mu(n)\cdot g\left(\frac{x}{nm}\right)=\sum_{1\le q\le x} g\left(\frac{x}{q}\right)\cdot\sum_{nm=q}\mu(n)=\sum_{1\le q\le x} g\left(\frac{x}{q}\right)\cdot\varepsilon_q=$$

$$=\sum_{q=1} g\left(\frac{x}{1}\right)\cdot 1+\sum_{1\le q\le x} g\left(\frac{x}{q}\right)\cdot 0=g(x)$$

чем и докажем формулу:

$$g(x)=\sum_{m\le x} f\left(\frac{x}{m}\right).$$

Лемма 2.5. доказана.

Следствие 2.2. Для любого $x\ge 1$ справедливо:

$$g(x)=[x]=\sum_{n\le x}1\Leftrightarrow 1=\sum_{1\le n\le x}\mu(x)\cdot\left[\frac{x}{n}\right].$$

Допустим $f(x)\equiv 1$,

$$g(x)=\sum_{n\le x} f\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\le x}1=\sum_{1\le n\le [x]}1=[x].$$

Следовательно:

$$f(x)\equiv 1=\sum_{n\le x}\mu(n)\cdot g\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\le x}\mu(d)\cdot\left[\frac{x}{n}\right].$$

Следствие 2.3. (Первая формула обращения Мебиуса). Допустим:

$$f(x)=\begin{cases} f(x), & x=n\in N\\ 0, & x\notin N\end{cases}$$

$$g(n)=\sum_{d/n} f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{m/n} f(m)$$

значит

$$f(n)=\sum_{d/n}\mu(d)\cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$$

и наоборот.

Доказательство данного следствия следует непосредственно из следующего равенства:

$$g(n)=\sum_{1\le d\le n} f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d/n} f\left(\frac{n}{d}\right),$$

которое, вместе с формулой

$$f(n)=\sum_{d/n}\mu(d)\cdot g\left(\frac{n}{d}\right),$$

называют первой формулой обращения Мебиуса.

Лемма 2.6. (О преобразовании Абеля в интегральной форме). Пусть функция $f(x)$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ а C_n - произвольные комплексные числа,

$$C(x)=\sum_{\alpha<n\le x} C_n.$$

Значит:

$$\sum_{\alpha<n\le b} C_n\, f(n)=-\int_a^b C(x)f'(x)dx+C(b)f(b)$$

Доказательство. Рассмотрим разность:

$$C(b)f(b)-\sum_{\alpha<n\le b} C_n f(n)=\sum_{\alpha<n\le b} C_n\big(f(b)-f(n)\big).$$

Поскольку функция $f(x)$ - дифференцируемая и

$$\int_a^b f'(t)dt=f(b)-f(a),$$

то

$$C(b)f(b)=\sum_{\alpha<n\le b}\int_a^b C_n f'(x)dx=\sum_{\alpha<n\le b} C_n f(n).$$

Введем следующую функцию:

$$g(n,t)=\begin{cases}1, & n=t\le b\\ 0, & t<n\end{cases}.$$

Тогда:

$$\sum_{\alpha<n\le b}\int_a^b C_n f'(x)dx=\sum_{\alpha<n\le b}C_n g(n,x)f'(x)dx.$$

Если поменять порядок интегрирования и суммирования, то получится следующее:

$$C(b)f(b)=\sum_{\alpha<n\le b_n}C_n f(x)+\int_a^b\left(\sum_{\alpha<n\le b}C_n g(n,x)\right)\cdot f'(x)dx.$$

Поскольку

$$\sum_{\alpha<n\le b}C_n g(n,x)=\sum_{\alpha<n\le x}C_n=C(x)$$

значит:

$$C(b)f(b)=\sum_{\alpha<n\le b_n}f(x)+\int_a^b C(x)f'(x)dx.$$

Откуда найдем:

$$\sum_{\alpha<n\le b_n}C_n f(x)=-\int_a^b C(x)f'(x)dx+C(b)f(b).$$

Следствие 2.4. Существует постоянная Эйлера γ_0, такая что

$$\sum_{1<n\le x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma_0+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Постоянная Эйлера γ_0=0,57721566490.

Доказательство. Если в лемме 2.6. положить $\alpha=0$ и $C_n=1$,

$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

Тогда, учитывая

$$C(x)=\sum_{1\le n\le x}1=[x]=x-[x],\quad 0\le\{x\}<1,$$

получим следующее:

$$\sum_{1\le n\le x}\frac{1}{n}=\int_1^x C(x)\frac{dx}{x^2}+C(x)f(x)=\int_1^x\left(x-\{x\}\right)\frac{dx}{x^2}+\frac{[x]}{x}=$$
$$=\int_1^x\frac{dx}{x}-\int_1^x\frac{\{x\}}{x^2}dx+\frac{[x]}{x}=$$
$$=\log x+\gamma+\left(-\int_1^\infty\frac{\{x\}}{x^2}dx+\frac{[x]}{x}\right)+\int_1^\infty\frac{\{x\}}{x^2}dx.$$

Поскольку $0\le\{x\}<1$, следовательно:

$$\left|\int_1^\infty\frac{\{x\}}{x^2}dx\right|<\left|\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}\right|=O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Значит следствие 2.4. доказано. По определению, постоянная Эйлера вычисляется следующим образом:

$$\gamma_0=\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n}-\log x\right).$$

Следствие 2.5. При $x\to\infty$ справедливо следующее:

$$\sum_{\alpha\le n\le x}\frac{1}{n\log^\alpha n}=\frac{1}{1-\alpha}(\log x)^{\alpha-1}+\alpha\log^\alpha n+\frac{[x]}{x\log^\alpha x}=$$
$$=\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\log^{\alpha-1}x}+\gamma_\alpha+O\left(\frac{1}{x\log^\alpha x}\right),$$

где $\gamma_\alpha\to\gamma_0$, $\alpha\to 0$. При $0<\alpha<1$ и $\alpha>1$ ряд сходится, а при $\alpha=0$ и $\alpha=1$ ряд расходится.

$$\sum_{\alpha\le n\le x}\frac{1}{n\log\ n}=\log\log x+\bar{\gamma}+O\left(\frac{1}{x\log\ x}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left|\sum_{n\le x}\frac{1}{n\log\ n}-\left(\log\log x+\bar{\gamma}\right)\right|<B_1\frac{1}{x\log\ x},$$

Где $\bar{\gamma}$ - некоторое постоянное число.

2.4 Явная формула о числе целых точек в квадрате с взаимно простыми координатами

Пусть дан квадрат со сторонами $[1,N]\times[1,N]$. Поставим следующую задачу: необходимо найти количество целых точек $\{x,y\}$ при условии, что НОД $\{x,y\}=(x,y)=1$. Общее число целых точек в данном квадрате можно посчитать следующим образом:

$$[N]^2=\sum_{\substack{1\le x\le N\\1\le y\le N}}1, \quad [N]=N-\{N\},$$

где $[N]$ - целая часть числа N, а $\{N\}$ - соответственно дробная.

Допустим $d=(x,y)\Rightarrow x=dx',y=dy',1\le d\le N,(x',y')=1$. Значит:

$$[N]^2=\sum_{1\le d\le N}\sum_{\substack{1\le x\le N\\1\le y\le N\\(x,y)=1}}1 \tag{2.10}$$

Поскольку $(x',y')=\left(\frac{x}{d},\frac{y}{d}\right)=1$, значит существует взаимно однозначное соответствие между парами целых чисел x',y', где

$$0<x'\le\frac{N}{d},\quad 0<y'\le\frac{N}{d},\quad (x',y')=1,$$

и целыми точками с координатами x,y, где

$$0<x\le N,\quad 0<y\le N,\quad (x,y)=d.$$

Число целых точек с взаимно простыми координатами обозначим через $\psi(N)$. Тогда:

$$\psi(N)=\sum_{\substack{1\le m,n\le N\\(m,n)=1}}1. \tag{2.11}$$

Исходя из (2.10) и (2.1 можно получить следующее тождество:

$$[N]^2=\sum_{1\le d\le N}\sum_{\substack{0\le x',y'\le\frac{N}{d}\\(x',y')=1}}1=\sum_{1\le d\le N}\Psi\left(\frac{N}{d}\right). \tag{2.12}$$

Применив вторую формулу обращения Мебиуса, можно получить следующее утверждение:

Лемма 2.7. Если $N \to \infty$, тогда справедлива следующая формула:

$$\Psi(N) = \sum_{\substack{0\le x,y\le N \\ (x,y)=1}} 1 = \sum_{1\le d\le N} \mu(n)\cdot\left[\frac{N}{n}\right]^2.$$

Лемма 2.8. Имеет место следующее равенство:

$$\Psi(N) = 2\Phi(N) - 1 \Leftrightarrow \Phi(N) = \frac{1}{2} + \frac{\psi(N)}{2}.$$

Доказательство. Пусть дано:

$$\Phi(N) = \sum_{1\le n\le N} \sum_{1\le m\le N} 1 = \sum_{\substack{1\le m<n\le N \\ (m,n)=1}} 1.$$

Значит $\Phi(N)$ - количество целых точек с взаимно простыми координатами, лежащими в прямоугольном треугольнике $0 \le y \le x \le N$.

Пусть дан квадрат $0 < x \le N$, $0 < y \le N$. Прямая $y = x$ делит данный квадрат на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых содержится одинаковое число целых точек с взаимно простыми координатами. Можно заметить, что на прямой $y = x$ находится единственная точка с взаимно простыми координатами $y = x = 1$. (см. рис. 2.5).

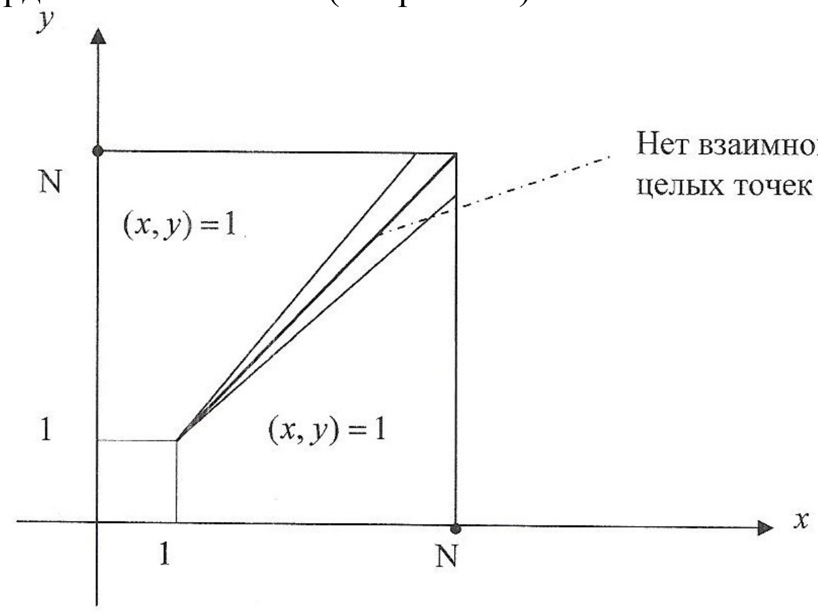


Рисунок 2.5.

Поскольку вверху и внизу от прямой $y = x$ находится одинаковое количество точек. Однако единица учитывается дважды, поэтому ее нужно один раз отнять. Таким образом число всех точек равно удвоенной функции $\Phi(N)-1$, то есть

$$2\Phi(N)-1=\psi(N).$$

Лемма доказана.

2.5 Асимптотическая формула для суммы значений функции Эйлера

Теорема 2.1.

$$\psi(N)=\frac{6}{\pi^2}N^2+O(N\log N)$$

или

$$\left|\psi(N)-\frac{6}{\pi^2}N^2\right|\le BN\log N,$$

Где B - положительное постоянное число, которое не зависит от N.

Доказательство. Основываясь на лемме 2.7. имеем следующее:

$$\psi(N)=\sum_{n\le N}\mu(n)\cdot\left[\frac{N}{n}\right]^2.$$

$$\left[\frac{N}{n}\right]^2=\left(\frac{N}{n}-\left\{\frac{N}{n}\right\}\right)^2=\frac{N^2}{n^2}-\frac{2N}{n}\cdot\left\{\frac{N}{n}\right\}+\left\{\frac{N}{n}\right\}^2=\frac{N^2}{n^2}+O\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}\right),$$

где $O\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}\right)\Leftrightarrow C\cdot\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}$, C - абсолютная константа.

Учитывая, что $|\mu(n)|\le 1$, получим:

$$\psi(N)=\sum_{n\le N}\mu(n)\cdot\left[\frac{N}{n}\right]^2=\sum_{n\le N}\mu(n)\cdot\left(\frac{N^2}{n^2}+O\left(\frac{N}{n}\right)\right)=\sum_{n\le N}\mu(n)\cdot\frac{N^2}{n^2}+O\sum_{n\le N}\frac{N}{n}$$

Исходя из следствия 2.4., имеем:

$$\psi(N) = N^2 \cdot \sum_{n\le N} \frac{\mu(n)}{n^2} + O(N\log N). \qquad (2.13)$$

Поскольку:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

то по формуле умножения рядов в области их равной и абсолютной сходимости:

$$\left(\sum_{b=1} \frac{a_d}{d^s}\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s}\right) = \sum_{n=1} \frac{\sum\limits_{dm=n} a_d b_m}{n^s}, \qquad (2.14)$$

получаем следующее:

$$\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^2} = 1 + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{3^2} + \ldots$$

$$\varepsilon_n = \sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases} \qquad (2.15)$$

С другой стороны, принимая во внимание лемму 2.4., из (2.14) получим:

$$\frac{\pi^2}{6} \cdot \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 1 \Rightarrow \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Значит,

$$\sum_{n\le N} \frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n>N} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\sum_{n>N} \frac{1}{n^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\int_N^{\infty} \frac{dn}{n^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Исходя из полученного, имеем:

$$\psi(N) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O(N\log N).$$

В итоге, при $N \to \infty$, получилось:

$$\psi(N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O(N\log N). \qquad (2.16)$$

Что и требовалось доказать.

Можно заметить, что (2.16) равносильно следующему неравенству:

$$\left|\psi(N)-\frac{6}{\pi^2}N^2\right|\le BN\log N,\ \ B>0.$$

2.6 Асимптотическая функция суммы функции Эйлера и его дополнения

Основываясь на теореме 2.1. и лемме 2.8. можно получить следующую теорему.

Теорема 2.2. (теорема Мерсена). При $n\to\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\Phi(N)=\sum_{n\le N}\Phi(N)=\frac{3}{\pi^2}N^2+O\left(N\log N\right)$$

или

$$\left|\Phi(N)-\frac{3}{\pi^2}N^2\right|\le B_1 N\log N,$$

где $0<B_1$ - некоторая постоянная.

Доказательство. Исходя из леммы 2.8., имеем:

$$\Phi(N)=\frac{1}{2}\left(1+\psi(N)\right).$$

Используя теорему 2.1., получим следующее:

$$\Phi(N)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{6}{\pi^2}N^2+O(N\log N)\right)=\frac{3}{\pi^2}N^2+\frac{3}{\pi^2}+O\left(N\log N\right)=$$
$$=\frac{3}{\pi^2}N^2+O\left(N\log N\right).$$

То есть:

$$\Phi(N)=\frac{3}{\pi^2}N^2+O\left(N\log N\right).$$

Данное равенство можно переписать следующим образом:

$$\left|\Phi(N)-\frac{3}{\pi^2}N^2\right|=O(N\log N)\Rightarrow \exists B_1>0$$

такое, что

$$\left|\Phi(N)-\frac{3}{\pi^2}N^2\right|\le B_1 N\log N.$$

Следствие 2.6. Если $N\to\infty$, тогда будет справедлива формула:

$$S(n)=\frac{1}{N}\sum_{1\le n\le N}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}\cdot N^2+O(N\log N).$$

В пункте 1.4 было рассмотрено дополнение к функции Эйлера. Рассмотрим асимптотическую формулу для суммы этого дополнения.

Согласно пункта 1.4, имеем:

$$\eta(n)=n-\varphi(n).$$

Пусть

$$F(N)=\eta(1)+\eta(2)+...+\eta([N])=\sum_{1\le n\le N}\eta(N).$$

Основываясь на теореме 2.2. и следствию 2.6., получится следующее:

$$\sum_{n=1}^{N}\eta(n)=\sum_{n=1}^{N}n-\sum_{n=1}^{N}\varphi(n).$$

Согласно

$$\sum_{n=1}^{N}n=S_1(n)=\frac{N\cdot(N+1)}{2}\ \text{ и }\ \sum_{n=1}^{N}\varphi(n)=S_1(n)=\frac{3}{\pi^2}N^2+O(N\log N)$$

Получим $F(n)$.

Теорема 2.3. При $N\to\infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

1.
$$F(n)=\left(\frac{N^2}{2}+\frac{N}{2}\right)-\frac{3}{\pi^2}\cdot N^2+O(N\log N)=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{\pi^2}\right)\cdot N^2+O(N\log N)=$$
$$=\left(\frac{\pi^2-6}{2\pi^2}\right)\cdot N^2+O(N\log N).$$

2. $$\frac{F(N)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n\le N}\eta(n) = \left(\frac{\pi^2-6}{2\pi^2}\right)\cdot N + O(N\log N).$$

3 Общая теорема о суммировании значений арифметических функций и её применение к числу целых точек под гиперболой и в круге

3.1 Общая теорема о суммировании значений арифметических функций

Теорема 3.1. Пусть f - монотонно убывающая функция действительного переменного t, определенная при $t \ge 0$. Тогда

$$\sum_{1\le n\le X} f(n) = \int_1^X f(t)\,dt + A_f + O(f(X)), \tag{3.1}$$

где n - целое положительное число, $X \ge 1$, A_f - постоянная, зависящая только от f.

Доказательство. Рассмотрим интервал $[n, n+1]$. Поскольку функция f убывающая, то

$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(t)\,dt \le f(n).$$

Следовательно

$$0 \le A_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \le f(n) - f(n+1).$$

Пусть M и N - произвольные положительные целые числа, причем $M < N$. Тогда

$$\sum_{n=M}^{N} A_n \le \sum_{n=M}^{N} \{f(n) - f(n+1)\} = f(M) - f(N+1).$$

Поскольку $f(t) > 0,\ t \ge 1$, получим

$$\sum_{n=M}^{N} A_n \le f(M), \quad \forall N > M \tag{3.2}$$

в частности, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \le f(1)$ следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_f$, тогда в силу (3.2) имеем

$$A_f = \sum_{n=1}^{N} A_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{N} A_n + O(f(N+1))$$

$$A_f = \sum_{n=1}^{N} \left\{ f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt \right\} + O(f(N+1)).$$

Откуда следует

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^{N+1} f(t)\,dt + A_f + O(f(N+1)).$$

Пусть $N = [X]$, тогда

$$\sum_{1 \le n \le X} f(n) = \int_1^{[X]+1} f(t)\,dt + A_f + O(f([X]+1)),$$

где n - пробегает только целые значения. Так как функция f - положительная и убывающая, то

$$\int_X^{[X]+1} f(t)\,dt \le f(X), \quad 0 < f([X]+1) \le f(X),$$

откуда

$$\sum_{1\le n\le X} f(n) = \int_1^X f(t)\,dt + A_f + O\left(f(X)\right).$$

3.2 Применение общей теоремы к суммированию числовых рядов

Пусть имеется ряд вида

$$\sum_{n\le X} \frac{1}{n\log^\alpha n} \tag{3.3}$$

1) Положим $\alpha = 0$, тогда ряд (3.3) примет следующий вид

$$\sum_{n\le X} \frac{1}{n} = \log X + \gamma_0 + O\left(\frac{1}{X}\right), \tag{3.4}$$

где γ_0 - постоянная Эйлера. Получили гармонический ряд, который, как известно, расходится, т.е. $\sum_{n\le X} \frac{1}{n} \to \infty$, при $X \to \infty$.

2) Пусть $\alpha = 1$, тогда ряд (3.3) запишется в виде

$$\sum_{n\le X} \frac{1}{n\log n}.$$

Вычислим этот ряд, используя (3.1)

$$\sum_{n\le X} \frac{1}{n\log n} = \int_1^X \frac{d(\log t)}{\log t} + A_f + O\left(\frac{1}{X\log X}\right) =$$
$$= \log\log X + A_f + O\left(\frac{1}{X\log X}\right).$$

Полученный ряд расходится, поскольку $\log\log X \to \infty$, при $X \to \infty$.

3) Теперь рассмотрим случай для $0 < \alpha < 1$. Для этого воспользуемся формулой (3.1) для нахождения ряда (3.3)

$$\sum_{n\le X} \frac{1}{n\log^\alpha n} = \int_1^X \frac{dt}{t\log^\alpha t} + A_f + O\left(\frac{1}{X\log^\alpha X}\right).$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части

$$\int_1^X \frac{dt}{t\log^\alpha t} = \int_1^X \log^{-\alpha} t\, d(\log t) = \{u = \log t\} = \int_1^X u^{-\alpha}\, du =$$

$$= \left.\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^X = \left.\frac{\log^{1-\alpha} t}{1-\alpha}\right|_1^X = \frac{\log^{1-\alpha} X}{1-\alpha}.$$

Подставим полученное значение

$$\sum_{n\le X} \frac{1}{n\log^\alpha n} = \frac{\log^{1-\alpha} X}{1-\alpha} + A_f + O\left(\frac{1}{X\log^\alpha X}\right). \tag{3.5}$$

Отсюда видно, что $\alpha \ne 1$, а при $0 < \alpha < 1$ ряд (3.5) расходится, поскольку $\frac{\log^{1-\alpha} X}{1-\alpha} \to \infty$, при $X \to \infty$.

4) Рассмотрим случай, где $\alpha > 1$. Аналогично с предыдущем случаем, получим (3.5). Однако, поскольку $\alpha > 1$, то $1-\alpha < 0$. Следовательно ряд (3.5) запишется в следующем виде

$$\sum_{n\le X} \frac{1}{n\log^\alpha n} = \frac{1}{(1-\alpha)\cdot \log^{\alpha-1} X} + A_f + O\left(\frac{1}{X\log^\alpha X}\right), \quad \alpha + 1 > 0.$$

Отсюда видно, что при $\alpha > 1$ ряд (3.3) сходится, так как

$$\frac{1}{(1-\alpha)\cdot \log^{\alpha-1} X} \to 0, \quad X \to \infty.$$

В итоге получили, что ряд (3.3) расходится при $0 \le \alpha \le 1$ и сходится при $\alpha > 1$.

3.3 Применение общей теоремы к числу целых точек в круге и под гиперболой

Докажем следующую теорему

Теорема 3.2 (Дирихле).

$$D(N) = N\log N + (2\gamma_0 - 1)\cdot N + O(\sqrt{N}),$$

где γ_0 - постоянная Эйлера.

Доказательство. Пусть дана гипербола $xy = N$ симметричная относительно прямой $x = y$ (см. рис. 3.1).

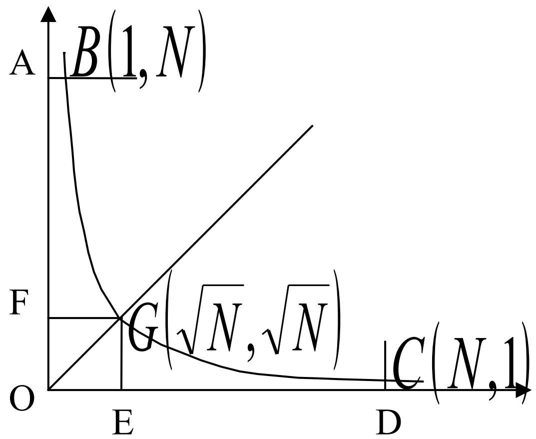


Рисунок 3.1

Из рисунка 3.1 видно, что области $ABGEO$ и $CDOFG$ содержат одно и то же число целых точек. Общее число целых точек, которые лежат на или ниже гиперболы (но не лежат на осях координат) равно удвоенному числу целых точек в области $ABGEO$ минус число целых точек в квадрате $OFGE$.

$$D(N) = 2\sum_{1\le x\le\sqrt{N}}\sum_{1\le y\le\frac{N}{x}} 1 - \left[\sqrt{N}\right]^2 = 2\sum_{1\le x\le\sqrt{N}}\frac{N}{x} - 2\sum_{1\le x\le\sqrt{N}}\left\{\frac{N}{x}\right\} - \left[\sqrt{N}\right]^2 =$$
$$= 2N\cdot\left(\sum_{1\le x\le\sqrt{N}}\frac{1}{x}\right) + O\left(\sqrt{N}\right) - \left[\sqrt{N}\right]^2 \tag{3.6}$$

Вычислим ряд $\sum_{1\le x\le\sqrt{N}}\frac{1}{x}$ используя теорему 3.1, а точнее формулу (3.4)

$$\sum_{1\le x\le\sqrt{N}}\frac{1}{x} = \log\sqrt{N} + \gamma_0 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \tag{3.7}$$

Поскольку $[f(x)] = f(x) - \{f(x)\}$, то

$$\left[\sqrt{N}\right]^2 = \left(\sqrt{N} - \left\{\sqrt{N}\right\}\right)^2 = N - 2\cdot\sqrt{N}\cdot\left\{\sqrt{N}\right\} + \left\{\sqrt{N}\right\}^2 = N + O\left(\sqrt{N}\right). \tag{3.8}$$

Подставим (3.7) и (3.8) в (3.6)

$$D(N) = 2N \cdot \left(\log\sqrt{N} + \gamma_0 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \right) - N + O\left(\sqrt{N}\right) =$$
$$= N\log N + (2\gamma_0 - 1) \cdot N + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Теорема 3.3 (Гаусс). Для $K(R)$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$K(R) = \pi R + O\left(\sqrt{R}\right).$$

Доказательство. Пусть дан круг $x^2 + y^2 = R$.

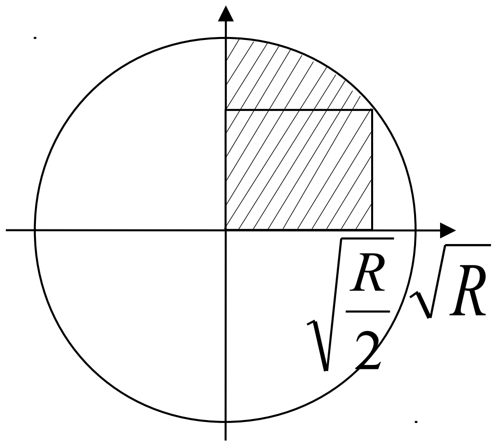


Рисунок 3.2

Необходимо определить число целых точек в круге. Для этого найдем число целых точек на осях. Так как радиус круга равен $\sqrt{R}$, то число целых точек на осях равно

$$4 \cdot \sum_{0<x\le\sqrt{R}} 1 = 4 \cdot \left[\sqrt{R}\right].$$

Точка с координатами (0; 0) не входит в эту сумму, так как $x > 0$. Следовательно, её нужно добавить

$$4 \cdot \sum_{0<x\le\sqrt{R}} 1 + 1 = 4 \cdot \left[\sqrt{R}\right] + 1. \tag{3.9}$$

Рассмотрим криволинейную трапецию $0 < x \le \sqrt{\frac{R}{2}}$, $0 < y \le \sqrt{R - x^2}$ (см. рис 3.2).

$$\sum_{0<x^2+y^2\le R} 1 = \sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}} \sum_{0<y\le\sqrt{R-x^2}} 1 = \sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}} \left\lfloor \sqrt{R-x^2} \right\rfloor.$$

Весь круг состоит из восьми таких трапеций, а учитывая пересечения по квадратам со стороной $\sqrt{\frac{R}{2}}$ и принимая во внимание (3.9), получим

$$K(R) = 1 + 4\cdot\left[\sqrt{R}\right] + 8\cdot \sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}} \left[\sqrt{R-x^2}\right] - 4\cdot\left(\left[\sqrt{\frac{R}{2}}\right]\right)^2.$$

Воспользуемся формулой $[f(x)] = f(x) - \{f(x)\}$, почленно вычислим полученное равенство.

1) $4\cdot\left[\sqrt{R}\right] = 4\sqrt{R} - 4\left\{\sqrt{R}\right\} = 4\sqrt{R} + O(1).$

2) $\displaystyle\sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}} \left\lfloor\sqrt{R-x^2}\right\rfloor = \sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}} \left(\sqrt{R-x^2} - \left\{\sqrt{R-x^2}\right\}\right) = \sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}} \sqrt{R-x^2} + O\left(\sqrt{R}\right).$

Применяя теорему (3.1) , получим

$$\sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}} \sqrt{R-x^2} = \int_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}} \sqrt{R-t^2}\,dt + A + O\left(\sqrt{R}\right).$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части

$$\int_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}} \sqrt{R-t^2}\,dt = \left\{\begin{aligned} t &= \sqrt{R}\sin u \\ dt &= \sqrt{R}\cos u\,du \end{aligned}\right\} = \int_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}} \sqrt{R - R\sin^2 u}\cdot\sqrt{R}\cos u\,du =$$

$$= R\cdot\int\limits_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}}\cos^2 u\,du = R\cdot\int\limits_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}}\frac{1+\cos 2u}{2}\,du = \frac{R}{2}\cdot\int\limits_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}}du + \frac{R}{4}\cdot\int\limits_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}}\cos 2u\,d2u =$$

$$= \frac{R}{2}\cdot u\Big|_0^{\sqrt{R/2}} + \frac{R}{4}\cdot\sin 2u\Big|_0^{\sqrt{R/2}} = \left\{u = \arcsin\frac{t}{\sqrt{R}}\right\} =$$

$$= \frac{R}{2}\cdot\arcsin\frac{t}{\sqrt{R}}\Bigg|_0^{\sqrt{R/2}} + \frac{R}{4}\cdot\sin 2\arcsin\frac{t}{\sqrt{R}}\Bigg|_0^{\sqrt{R/2}} = \frac{\pi\cdot R}{8} + \frac{R}{4},$$

отсюда

$$8\cdot\sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}}\left[\sqrt{R-x^2}\right] = \pi\cdot R + 2R + O\left(\sqrt{R}\right).$$

3) $$-4\cdot\left(\left[\sqrt{\frac{R}{2}}\right]\right)^2 = -4\cdot\left(\sqrt{\frac{R}{2}}-\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}\right)^2 = -4\cdot\left(\frac{R}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{R}{2}}\cdot\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}+\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}^2\right) =$$

$$= -2R + O\left(\sqrt{R}\right).$$

В итоге получили

$$K(R) = \pi\cdot R + 2R - 2R + O\left(\sqrt{R}\right) = \pi R + O\left(\sqrt{R}\right).$$

В книге Карацуба А.Л. «Основы аналитической теории чисел» [28] применяя специальную технику теории оценок тригонометрических сумм и теории рядов Фурье указан более точный результат. Там степень $\frac{1}{2}$ в остаточном члене заменяется на $\frac{1}{3}-\frac{1}{264}=\frac{261}{792}=0{,}3295$ для теоремы Гаусса и на $\frac{1}{3}-\frac{1}{246}=\frac{241}{738}=0{,}3265$ для теоремы Дирихле.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были подробно рассмотрены числовые последовательности, связанные с суммированием арифметических функций, а также задача об асимптотическом поведении функции Эйлера. Функция Эйлера имеет многочисленные связи с другими задачами классической теории чисел: теорией сравнения над кольцом целых чисел, теория конечных групп с первообразными корнями данной степени из единицы, количеством целых точек с взаимно простыми координатами и другими.

Среди великих математиков XVIII века Эйлер является одним из основателей основы современного математического анализа. Работа Эйлера по теории чисел посвящена весьма разнообразным вопросам, в том числе проблеме асимптотической формулы функций Эйлера.

Также в данной работе рассмотрена одна из классических проблем аналитической теории чисел, а именно задача нахождения асимптотической формулы для количества точек с целочисленными координатами под гиперболой и в круге. Применяется общая теорема суммирования арифметических функций для доказательства теоремы Дирихле и Гаусса.

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы при чтении специальных курсов по теории чисел.

В первой части данной работы были рассмотрены простейшие суммы некоторых числовых последовательностей, связь функции Эйлера с арифметическими функциями, рассмотрены основные свойства мультипликативных функций.

Во второй части кратко рассмотрели связь функции Эйлера с теорией корней степени n из единицы, привели ряд утверждений, связанных с суммированием корней степени n из единицы. Также здесь рассмотрен порядок роста функции Эйлера в среднем, а также более конкретное поведение суммарной функции для функции Эйлера.

В третьей части была рассмотрена общая теорема суммирования арифметических функций и она была применена для доказательства теорем Дирихле (о числе целых точек в круге) и Гаусса (о числе целых точек в круге).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – Москва: Наука, 2004
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. – Москва: Просвещение, 1966
3. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. – Москва: Наука, 1980
4. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. – Москва: Наука, 1976
5. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. – Москва: Мир, 1974
6. Э.Беккенбах, Р.Беллман. Неравенства. – Москва: Мир, 1965
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – Москва: Наука, 1971
8. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – Москва: Высшая школа, 1979
9. Чандрасекхаран К. Арифметические функции. – Москва: Наука, 1975
10. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теоря чисел. – Москва: Мир, 1974
11. Фаддев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – Москва: Наука, 1977
12. Хуа Ло-кен. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. – Москва: Мир, 1964
13. Александров В.А., Горшенин С.М. Задачник-практикум по теории чисел. – Москва: Просвещение, 1972
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Москва: Физматлит, 2002 – TII
15. З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич. Теория чисел. Москва: Наука, 1985 – 3-е изд.доп.
16. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Москва: Физматлит, 2002 – TIII
17. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – Москва: Лань, 2004 – Т III
18. Монтгомери Х. Мультипликативная теория чисел. – Москва: Мир 1974
19. Сизый С.В. Лекции по теории чисел: Учебное пособие для математических специальностей. – Екатеринбург: Уральский государственный университет им. А.М.Горького, 1999
20. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Москва: Наука, 1971
21. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. – Москва: Наука, 1971
22. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы. – Труды МИАН, 151, Москва: Наука, 1980
23. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. – Москва: Наука, 1971

24. Ингам А.Е. Распределение простых чисел. – Москва: ОНТИ, 1936
25. Коробков Н.М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения, УМН 13, №4(82), 1958
26. Прахар К. Распределение простых чисел. – Москва: Мир, 1967
27. Исмоилов Д.И. Аддитивные проблемы делителей. – Павлодар РК, 2010
28. Карацуба А.Л. Основы аналитической теории чисел. – Москва: Наука, 1983 г, 2-е издание

Список научных трудов Степьюка Ильи Антольевича.

№	Название	Характер работы	Издательство, журнал, название, номер, год	Объем (п.л.)	Соавторы
1	2	3	4	5	6
1	Об одной системе степенных уравнений	Статья	Научный журнал «Вестник ИнЕУ» № 2 (54) Павлодар 2014г	4	
2		Статья	Областная газета «Ұстаздар газеті» № 1 (264) Павлодар 1 января 2014г	2	
3		Статья	Областная газета «Ұстаздар газеті» № 2 (289) Павлодар 15 января 2015г	2	

Научный руководитель Д.И. Исмоилов

Зав. кафедрой Ж.К. Даниярова

Магистрант И.А. Степьюк

Приложение 1

Статья, опубликованная в научный журнал «Вестник ИнЕУ» № 2 (54) 2014г.

УДК 511
И.А. Степьюк, магистрант группы МТУ(м) - 102
Д.И. Исмоилов, доктор физико-математических наук
Инновационный Евразийский университет (г. Павлодар)
E-mail: step-ilia@mail.ru

Об одной системе степенных уравнений

Аннотация. *В данной статье рассмотрено решение одной системы степенных уравнений, и показано, как с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом получить оценки* $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{2}$.

Ключевые слова: *система степенных уравнений, среднее значение, квадратное уравнение, неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.*

I. Нахождение любой иррациональности – это очень сложная задача, связанная с теорией приближенности. Уточнение известных значений имеет прямое практическое применение.

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} x^3 + x - 3\sqrt{2} = 0 \\ x^5 + x - 5\sqrt{2} = 0 \\ x^7 + x - 9\sqrt{2} = 0 \\ \ldots \\ x^{2k+1} + x - \left(2^k + 1\right)\sqrt{2} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Данная система не имеет решения в натуральных числах. Чтобы решить её, рассмотрим многочлены, которые связанные с нахождением целых корней. Для этого, положим $x = -\sqrt{2}y$. Получим:

$$\begin{cases} -\sqrt{2}^3 y^3 - \sqrt{2}y - 3\sqrt{2} = 0 \\ -\sqrt{2}^5 y^5 - \sqrt{2}y - 5\sqrt{2} = 0 \\ -\sqrt{2}^7 y^7 - \sqrt{2}y - 9\sqrt{2} = 0 \\ \ldots \\ -\sqrt{2}^{2k+1} y^3 - \sqrt{2}y - \left(2^k + 1\right)\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Разделим все на $-\sqrt{2}$:

$$\begin{cases} 2y^3 + y = 3 = 0 \\ 4y^5 + y + 5 = 0 \\ 8y^7 + y + 9 = 0 \\ \ldots \\ 2^k y^{2k+1} + y + \left(2^k + 1\right) = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет одно общее решение:

$$2^k y^{2k+1} + y + \left(2^k + 1\right) = 0 \tag{2}$$

Для решения этого уравнения нужно рассмотреть все делители числа $\left(2^k + 1\right)$ (см.[1]). Делителями $\left(2^k + 1\right)$ являются ± 1, $\pm\left(2^k + 1\right)$, но могут быть и другие. Разделим уравнение (2) на $\left(y + 1\right)$, получим:

$$\left(y+1\right)\left(2^k\left(y^{2k} - y^{2k-1} + y^{2k-2} - \ldots + y^2 - y\right) + \left(2^k + 1\right)\right) = 0$$

Решим полученное уравнение по частям:

1) $2^k\left(y^{2k} - y^{2k-1} + y^{2k-2} - \ldots + y^2 - y\right) + \left(2^k + 1\right) = 0$

Поскольку $\left(2^k + 1\right)$ не делится на 2^k без остатка, то это уравнение не имеет решения в целых числах [2].

2) $\left(y + 1\right) = 0$, $y = -1$. Получили единственный корень уравнения (2).

Поскольку $x = -\sqrt{2}y$, то подставляя значение $y = -1$, получим единственное решение системы (1):

$$x = \sqrt{2}\,.$$

II. $\sqrt{2}$ играет ведущую роль при решении системы степенных уравнений. Остановимся на простой оценке $\sqrt{2}$. С помощью метода, предложенного профессором Д.И. Исмоиловым, покажем, что без использования глубоких теорий можно вычислить значение $\sqrt{2}$ с точностью до пяти знаков.

Рассмотрим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом [3]:

$$\sqrt{UV} \le \frac{U+V}{2}, \text{ где } U \ge 0 \text{ и } V \ge 0\,.$$

Представим это неравенство в виде:

$$\sqrt{UV} = \sqrt{\frac{U}{q}(qV)} \le \frac{\frac{U}{q}+qV}{2} = \frac{U+q^2V}{2q} \le \frac{U+V}{2},$$

$$\sqrt{UV} \le \frac{U+q^2V}{2q}$$

В дальнейшем будем рассматривать равенство:

$$\sqrt{UV} = \frac{U+q^2V}{2q} \tag{3}$$

Неравенство:

$$\frac{U+q^2V}{2q} \le \frac{U+V}{2},$$

путем преобразования, представим в виде:

$$Vq^2 - (U+V)q + U \le 0$$

и рассмотрим соответствующее квадратное уравнение:

$$Vq^2 - (U+V)q + U = 0 \tag{4}$$

Решим его через дискриминант.

$$D = (U+V)^2 - 4UV = U^2 + 2UV + V^2 + 4UV = U^2 - 2UV + V^2 = (U-V)^2$$

$$q_1 = \frac{(U+V)+(U-V)}{2V} = \frac{2U}{2V} = \frac{U}{V}$$

$$q_2 = \frac{(U+V)-(U-V)}{2V} = \frac{2V}{2V} = 1$$

Графиком данного квадратного уравнения является парабола с центром в точке:

$$q_0 = \frac{\frac{U}{V}+1}{2} = \frac{U+V}{2V}.$$

Поскольку можно полагать $U < V$ и $U > V$, то получим две параболы.

Представим $\sqrt{2}$ в виде $\sqrt{1\cdot 2}$, где $U = 1$, $V = 2$. Парабола пересекает ось ОХ в точке $\left(\frac{1}{2};0\right)$ и $(1;0)$

.

Возьмем $q \in (\frac{1}{2};1)$, например:

$$q = \frac{3}{4}. \tag{5}$$

Подставим его в (3):

$$\sqrt{1\cdot 2} = \frac{1+\frac{9}{16}\cdot 2}{2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{1+\frac{18}{16}}{\frac{6}{4}} = \frac{17}{12} = 1{,}41(6)$$

Получили значение $\sqrt{2}$ с точностью до двух знаков.

Интересно, что если взять:

$$q = \frac{2}{3}, \tag{6}$$

то получим такой же результат:

$$\sqrt{1\cdot 2}=\frac{1+\frac{4}{9}\cdot 2}{2\cdot\frac{2}{3}}=\frac{1+\frac{8}{9}}{\frac{4}{3}}=\frac{17}{12}=1{,}41(6)\,.$$

Возьмем среднее арифметическое (5) и (6):

$$q_{cp}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{2}=\frac{17}{24}\,.$$

И полученное значение подставим в (3):

$$\sqrt{1\cdot 2}=\frac{1+\left(\frac{17}{24}\right)^2\cdot 2}{2\cdot\frac{17}{24}}=\frac{(17\cdot 17)+(24\cdot 12)}{(24\cdot 12)\cdot\frac{17}{12}}=\frac{577}{408}=1{,}4142157$$

$$\sqrt{1\cdot 2}=1{,}4142157$$

Если сравнить полученное значение со значением, которое дает калькулятор: $\sqrt{2}=1{,}414213562$, то получим значение $\sqrt{2}$ с точностью до пяти знаков.

Теперь получим значение $\sqrt[3]{2}$.

Воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\sqrt[3]{UVW}=\sqrt[3]{\frac{U}{q}(qV)W}\le\frac{\frac{U}{q}+qV+W}{3}=\frac{U+q^2V+qW}{3q}\le\frac{U+V+W}{3}\,,$$

$$\sqrt[3]{UVW}\le\frac{U+q^2V+qW}{3q}$$

$$\sqrt[3]{UVW}=\frac{U+q^2V+qW}{3q} \qquad (7)$$

Интересно, что преобразовав:

$$\frac{U+q^2V+qW}{3q}\le\frac{U+V+W}{3}\,,$$

получим неравенство:

$$V\,q^2-(U+V)q+U\le 0$$

Следовательно, решение сводится к квадратному уравнению (4).

Представим $\sqrt[3]{2}$ в виде, $\sqrt[3]{1\cdot 2\cdot 1}$ где $U=1$, $V=2$, $W=1$ и возьмем $q\in(\frac{1}{2};1)$:

$$q=\frac{3}{4}\,. \qquad (8)$$

Это значение подставим в (7):

$$\sqrt[3]{1\cdot 2\cdot 1}=\frac{1+\frac{9}{16}\cdot 2+\frac{3}{4}\cdot 1}{3\cdot\frac{3}{4}}=\frac{1+\frac{18}{16}+\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{23}{18}=1{,}2(7)$$

Теперь представим $\sqrt[3]{2}$ в виде $\sqrt[3]{2\cdot 1\cdot 1}$, где $U=2$, $V=1$, $W=1$ и возьмем $q\in(1;2)$:

$$q=\frac{3}{2} \qquad (9)$$

Подставим в (7):

$$\sqrt[3]{2\cdot 1\cdot 1}=\frac{2+\frac{9}{4}\cdot 1+\frac{3}{2}\cdot 1}{3\cdot\frac{3}{2}}=\frac{2+\frac{9}{4}+\frac{6}{4}}{\frac{9}{2}}=\frac{23}{18}=1{,}2(7)\,.$$

Возьмем среднее арифметическое (8) и (9):

$$q_{cp} = \frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{17}{12}.$$

И полученное значение подставим в (7):

$$\sqrt[3]{2\cdot 1\cdot 1} = \frac{2+\left(\frac{17}{12}\right)^2\cdot 1+\frac{17}{12}\cdot 1}{3\cdot\frac{17}{12}} = \frac{2+\frac{289}{144}+\frac{17}{12}}{\frac{51}{12}} = \frac{781}{612} = 1{,}276143791$$

$$\sqrt[3]{2\cdot 1\cdot 1} = 1{,}27614379$$

Полученная оценка лучше, чем $\sqrt[3]{2\cdot 1\cdot 1} = 1{,}2(7)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Виноградов И.М. Основы теории чисел. – Москва, 2004
2 Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968
3 Э.Беккенбах, Р.Беллман. Неравенства. – М.: Мир, 1965

ТҮЙІН

Д.И.Исмоилов, *физика және математика ғылымдарының докторы*
И.А.Степьюк
Инновациялық Еуразия университеті (Павлодар қ.)

Дәрежелік тендеулер жүйесі туралы

Мақалада Дәрежелік тендеу шешімі қарастырылып, арифметикалық және геометриялық орталарға байланысты тенсіздіктер арқылы $\sqrt{2}$ *мен* $\sqrt[3]{2}$ *сандарының бағалауы көрсетілді.*

Негізгі сөздер: *Дәрежелік тендеулер жүйесі, орта мәні, квадраттық тендеу, арифметикалық және геометриялық орталарға байланысты тенсіздіктер.*

RESUME

D.I. Ismailov, Doctor of Physics - Mathematical Sciences, Professor
I.A. Stepiuk
Innovative University of Eurasia (Pavlodar)

About one system of sedate equalizations

This article describes a solution of one system of sedate equalizations, and shown, as by using inequality about middle arithmetic and middle geometrical receive $\sqrt{2}$ *and* $\sqrt[3]{2}$.

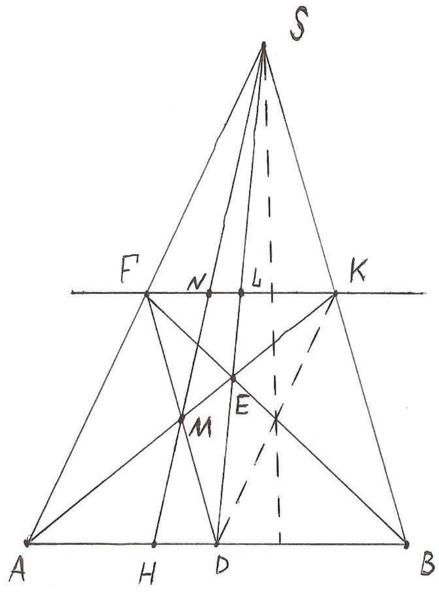
Keywords: *system of sedate equalizations, mean value, quadratic equation, inequality about middle arithmetic and middle geometrical.*

Приложение 2

Публикация в областную газету «Ұстаздар газеті» № 1 (264) 1 января 2014г

Здесь представлены решения шести задач, опубликованные 1 декабря №23 (262) 2013г. Магистрантом 1-го года обучения ИнЕУ И.А. Степьюк под редакцией доктора фмз-мат наук, проф. ИнЕУ Д.И. Исмоилова. Условия задач мы здесь не повторяем. Они приведены в вышеуказанном номере.

1.



Из чертежа следуют равенства:

$$\begin{cases} \dfrac{AD}{KL} = \dfrac{DB}{FL}, \\[2ex] \dfrac{AD}{FL} = \dfrac{DB}{LK} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{KL}{FL}, \\[2ex] \dfrac{KL}{FL} = \dfrac{DB}{AD} \end{cases}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{AD}, \quad AD = DB.$$

Из подобия треугольников ΔDHM и ΔFNM следует, что

$$\frac{HD}{FN} = \frac{FK}{FN} = \frac{AB}{AH} = \frac{2AD}{AH},$$

$$AH = 2HD, \quad AD = AH + HD,$$

$$AD = AH + \frac{1}{2}AH = \frac{3}{2}AH,$$

$$AH = \frac{2}{3}AD = \frac{1}{3}AB.$$

В трапеции $LKBD$ проводим те же построения, что и в трапеции $FLDA$ и проводятся аналогичные рассуждения, тем самым отрезок AB делится на 3 равные части.

2. Найдем соответствующие углы, для которых имеет место равенство:

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma, \quad tg\alpha + tg\beta + tg\gamma - tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma,$$

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma \cdot (1 - tg\alpha \cdot tg\beta) = 0, \quad \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} + tg\gamma = 0,$$

$$tg(\alpha + \beta) = -tg\gamma = tg(-\gamma), \quad \alpha + \beta + \gamma = k\pi.$$

3. Допустим от противного:

$$x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6 = (x + \alpha) \cdot Q_4(x), \quad x = -\alpha.$$

Получим равенство:

$$-\alpha^5 - 3\alpha^4 - 6\alpha^3 - 3\alpha^2 - 9\alpha - 6 = 0.$$

Поскольку правая часть делится на 3, то и левая часть должна делиться на 3.

$$\alpha = 3k \rightarrow -3^5 k^5 - 3^5 k^4 - 6 \cdot 3^3 k^3 - 3^3 k^2 - 9 \cdot 3k - 6 = 0.$$

Все слагаемые кроме последнего делятся на 9. Значит предположение неверное.

4. По условию задачи дано:

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + ... + \alpha_n = 0. \qquad (1)$$

Пусть $y = \frac{p}{q}$ рационально и является корнем (1). Подставим в уравнение

$$\frac{p^n}{q^n} + \alpha_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \alpha_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + ... + \alpha_n = 0.$$

Умножим обе части на q^n:

$$p^n + \alpha_1 p^{n-1} q + \alpha_2 p^{n-2} q^2 + ... + \alpha_n q^n = 0.$$

Так как все слагаемые, кроме p^n делятся на q, то p тоже делится на q, значит $p=mq$, то есть $\frac{p}{q} = \frac{mq}{q} = m$. Это доказывает, что $\frac{p}{q}$ целое число.

5. Вычислим значения функции на концах и в середине отрезка:

$$f(0) = c, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c, \quad f(1) = a + b + c,$$

умножая обе части среднего равенства на 4, получим:

$$4f\left(\frac{1}{2}\right)=a+2b+4c.$$

Следовательно,

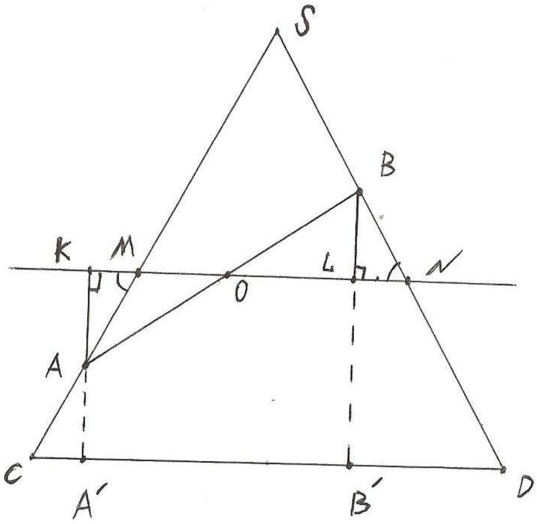
$$4f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)=b+3c.$$

Отсюда имеем:

$$|b|=\left|4f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)-3f(0)\right|\le 4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|f(1)|+3|f(0)|\le 4+1+3$$

$$f'(x)=2ax+b\Rightarrow f'(0)=b\le|b|\le 8.$$

6. Построим чертеж согласно условию задачи:



Так как $\angle AOK$ и $\angle BOL$ вертикальные и $AO=OB$, то треугольники ΔOLB и ΔOAK равны и $KC=CL$. В треугольниках ΔLNB и ΔKMA катеты LB и AK равны и против них лежат равные углы. Следовательно, они равны. Тогда $LN=KM$, $A'B'=KL=KM+ML=ML+LN=MN$. Что и требовалось доказать.

Приложение 3

Публикация в областную газету «Ұстаздар газеті» № 2 (289) 15 января 2015г.

Задачи и их решения предложены ст. преподавателем кафедры «Математика и информационные технологии» ИнЕУ, магистром естественных наук Бокаевой М.С. и магистрантом второго года обучения И.А. Степьюк, под редакцией д.ф.-м.н., профессора ИнЕУ Д. Исмоилова.

1. Решить уравнение: $\sqrt[4]{x\cdot(x+5)^2}+6\cdot\sqrt[4]{x^3}=5\cdot\sqrt[4]{x^2\cdot(x+5)}$

Решение. Видно, что $x \geq 0$, и $x_1 = 0$ – является корнем уравнения.

Пусть $x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt[4]{x^3}$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{x+5}{x}\right)^2} - 5 \cdot \sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} + 6 = 0$$

Обозначим $\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = y$. Получим квадратное уравнение $y^2 - 5y + 6 = 0$, с корнями $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. Рассмотрим уравнения $\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = 2$ и $\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = 3$ корнями которых являются $x_2 = 1/3$ и $x_3 = 1/16$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 1/16$.

2. Решить уравнение: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 2 \cdot \sqrt{2x^2 + 5x + 3} + 3x - 16$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 2 \cdot \sqrt{(2x+3)\cdot(x+1)} + (2x+3) + (x+1) - 20$$

Обозначим $\sqrt{2x+3} = u$, $\sqrt{x+1} = v$ и получим уравнение $u + v = 2uv + u^2 + v^2 - 20$, где $u \geq 0$, $v \geq 0$. Или $(u+v)^2 - (u+v) - 20 = 0$. Получили квадратное уравнение относительно $(u+v)$. С корнями $(u+v) = -4$ и $(u+v) = 5$. Поскольку $u \geq 0$, $v \geq 0$, то получаем единственный корень $(u+v) = 5$. Так как $\sqrt{2x+3} = u$ и $\sqrt{x+1} = v$, то $u^2 - 2v^2 = 1$. Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} (u+v) = 5 \\ u^2 - 2v^2 = 1 \end{cases}$$

С корнями $u_1 = 3$, $v_1 = 2$ и $u_2 = 17$, $v_2 = -12$. Поскольку $u \geq 0$, $v \geq 0$, то получаем один корень $u_1 = 3$, $v_1 = 2$. Так как $\sqrt{2x+3} = u$, $\sqrt{x+1} = v$, то $\sqrt{2x+3} = 3$, $x = 3$ и $\sqrt{x+1} = 2$, $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

3. Решить уравнение: $\left(\frac{x}{\quad}\right)^2 + \left(\frac{x}{\quad}\right)^2 = 2$.

Решение. Воспользуемся равенством $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$. Преобразуем уравнение в виде

$$\left(\frac{x}{x-2} + \frac{x}{x+2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{x-2} \cdot \frac{x}{x+2} = 2$$

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-4}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-4} = 2$$

Обозначим $\frac{2x^2}{x^2-4} = y$ и получим квадратное уравнение $y^2 - y - 2 = 0$, с корнями $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. Рассмотрим два уравнения $\frac{2x^2}{x^2-4} = 2$ и $\frac{2x^2}{x^2-4} = -1$. У первого равенства при любом x логическое противоречие $0 = -8$, а второе имеет следующие корни: $x_1 = 2\sqrt{3}/3$, $x_1 = -2\sqrt{3}/3$

Ответ: $x_1 = 2\sqrt{3}/3$, $x_1 = -2\sqrt{3}/3$.

4. Решить уравнение: $(8x+7)^2 \cdot (4x+3) \cdot (x+1) = 4.5$

Решение. Умножим обе части уравнения на 16 и получим равенство:

$$\left(8x+7\right)^2\cdot\left(8x+6\right)\cdot\left(8x+8\right)=72$$

Положим $y=8x+7$, тогда $\left(y\right)^2\cdot\left(y-1\right)\cdot\left(y+1\right)=72$ или $y^4-y^2-72=0$. Отсюда получаем y^2-9 или $y_1=3$, $y_2=-3$. Поскольку $y=8x+7$, то получили два уравнения: $8x+7=3$ с корнем $x_1=-1/2$ и $8x+7=-3$ с корнем $x_2=-5/4$.

Ответ: $x_1=-1/2$, $x_2=-5/4$.

5. Решить уравнение: $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$

Решение: Обозначим $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{1-x}$, $w=\sqrt{x-v}$ и получим систему из трех уравнений относительно переменных u, v, w.

$$\begin{cases} u+w=-1 \\ v^2=1-u^2 \\ w^2=u^2-v \end{cases}$$

Где $u\geq 0$, $v\geq 0$, $w\geq 0$.

Из первого и третьего уравнений следует $(1-u)^2=u^2-v$ или $v=2u-1$. Если подставить полученное равенство во второе уравнения системы, то получим квадратное уравнение $(2u-1)^2=1-u^2$ с корнями $u_1=0$ и $u_2=\frac{4}{5}$. Однако $u_1=0$ является посторонним корнем, поскольку при подстановке в $v=2u-1$ получаем $v=-1$, а это противоречит условию $v\geq 0$.

Так как $u=\sqrt{x}$ и $u=\frac{4}{5}$, то $x=\frac{16}{25}$.

Ответ: $x=\frac{16}{25}$.

Задание: Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x\cdot(y+z)=5 \\ y\cdot(x+z)=10 \\ z\cdot(x+y)=13 \end{cases}$$

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{2}{3}, y_1=\frac{3}{2}, z_1=6 \\ x_2=-\frac{2}{3}, y_2=-\frac{3}{2}, z_2=-6 \end{array}\right.$$

ӘОЖ 511 Қолжазба ретінде

Илья Анатольевич Степьюк

«Арифметикалық шамаларды қосындылаудың кейбір теоремалары»

6М060100 – «Математика»

магистр ғылыми дәрежесін алу үшін диссертация
рефераты

Павлодар 2015

Жұмыс Инновациялық Еуразиялық Университетінде орындалды

Ғылыми жетекшісі: Физ-мат ғылымдарының докторы,
ИнЕУ профессоры
Д.И. Исмоилов

Жетекші ұйым: Инновациялық Еуразиялық
Университеті

МАК хатшысы: С.К. Асылбекова

Көкейкестілігі. Замануи сандар теориясында арифметикалық шамаларды қосындылау теориясы ерекше орын алады. Осы теория бойынша алғашқы жалпы нәтижелер арифметикалық прогрессия, геометриялық прогрессия және оларға жүйеленетін сандық реттіліктеріне қатысты болады. Осы прогрессиялардың айырықша қасиеті - қосылғыштардың санынан тыс айқын есептеу формулаларын жазу мүмкіндігі болып келеді.

Арифметикалық шамаларды қосындылау теориясының басты міндеті - оларды кейбір нақты ізделіп отырған функцияға жақындатып, мүмкіндігінше осыны тиімді тәсілмен жүзеге асыру болып табылады. Басқаша айтқанда, біршама сома қарастырылады $\sum_{n\le N} f(n)$, мұнда $f(n)$ - арифметикалық функция және $N\to\infty$. Нышансыздық формуланың басты мүшесі - $P_f(N)$ функциясын табу тиіс және мүмкін болған жағдайда, $R_f(N)$ оның қалдық мүшесін нақты бағалау, яғни $\sum_{n\le N} f(n) = P_f(N) + R_f(N)$. Демек, негізгі міндет қосылатын функциясы мен басты мүше арасындағы айырманы бағалау болып табылады

$$\left|\sum_{n\le N} f(n) - P_f(N)\right| \le C_1 \cdot R_f(N).$$

Диссертациялық жұмыста арифметикалық шамаларды қосындылаудың келесі жалпы теориясы қарастырылады:

Егер f - $t\ge 0$ негізінде анықталған t нақты айнымалының бір сарынды азаймалы функциясы болса, онда

$$\sum_{1\le n\le X} f(n) = \int_1^X f(t)\,dt + A_f + O(f(X)),$$

мұнда n - тұтас оң сан, $X\ge 1$, A_f - тұрақты, тек f тәуелді болып келеді.

Осы теореманың түр қатарларының қосындылауына қатысты қолданылуы қарастырылады:

$$\sum_{n\le X} \frac{1}{n\log^{\alpha} n},$$

Дирихле теоремасын дәлелдеу мақсатында (гипербола астында тұтас нүктелер саны туралы)

$$D(N) = N\log N + (2\gamma_0 - 1)\cdot N + O\left(\sqrt{N}\right),$$

және Гаусс теоремасын дәлелдеу (шеңбер ішіндегі тұтас нүктелер саны туралы)

$$K(R)=\pi R+O\left(\sqrt{R}\right).$$

Зерттеу мақсаты. Арифметикалық шамаларды қосындылаудың кейбір теоремалары, сандық қатарларды қосындылау және кейбір теоремаларды дәлелдеу мақсатында олардың қолданылуын қарастыру.

Зерттеу нысаны. Сандар теориясы.

Зерттеу пәні. Арифметикалық шамаларды қосындылау.

Ғылыми жаңалығы. Диссертацияда дәлелденетін нәтижелер жаңа болып табылады. Диссертациялық жұмыс тәмамдалған ғылыми зерттеу болып келеді.

Қорғауға шығарылатын диссертацияның негізгі ережелері.

1. Арифметикалық шамаларды қосындылау теориясын меңгеру мақсатында сандар теориясы курсын жақсы білуі тиіс.
2. Арифметикалық шамаларды қосындылау жалпы теоремасы сандық қатарларды қосындылау және кейбір теоремаларды дәлелдеу мақсатында қолданылады.

Теориялық және тәжірибелік маңызы. Жұмыс теориялық сипатына ие. Нәтижелері сандар теориясы бойынша арнайы курстарды оқу барысында пайдаланылуы мүмкін.

Зерттеу нәтижелерінің жариялау. Диссертация тақырыбы бойынша «ИнЕУ хабаршысы» ғылыми журналында бір мақала және «Ұстаздар газеті» педагогикалық газетінде екі басылым жарық көрді.

Жұмыстың құрылымы мен көлемі. Жұмыс кіріспе, үш тарау, қорытынды, қолданылған әдебиет тізімі және қосымшалардан құралған. 7 сурет, 28 әдебиет қайнаркөзін қолдануымен 65 парақта баяндалған.

Диссертация тақырыбы бойынша жарияланған жұмыстардың тізімі.

1. «ИнЕУ хабаршысы» ғылыми журналы № 2 (54) Павлодар 2014 ж.
2. «Ұстаздар газеті» педагогикалық газеті № 1 (264) Павлодар 2014 ж. 1 қаңтар
3. «Ұстаздар газеті» педагогикалық газеті № 2 (289) Павлодар 2015 ж. 15 қаңтар

ТҮЙІН

Илья Анатольевич Степьюк

«Арифметикалық шамаларды қосындылаудың кейбір теоремалары»

6М060100 – «Математика»

Мақсаты. Арифметикалық шамаларды қосындылаудың кейбір теоремалары, сандық қатарларды қосындылау және кейбір теоремаларды дәлелдеу мақсатында олардың қолданылуын қарастыру.

Пәні. Сандар теориясы.

Нысаны. Арифметикалық шамаларды қосындылау.

Қорғауға шығарылатын диссертацияның негізгі ережелері.

Сандық қатарларды қосындылау және кейбір теоремалардың дәлелденуі мақсатында арифметикалық шамаларды қосындылаудың жалпы теоремасын қолдану.

УДК 511 На правах рукописи

Степьюк Илья Анатольевич

«Некоторые теоремы о суммировании арифметических функций»

6М060100 – «Математика»

Реферат

диссертации на соискание академической степени магистра
естественных наук

Павлодар 2015

Работа выполнена в Инновационном Евразийском Университете

Научный руководитель: Доктор физ-мат Наук, профессор ИнЕУ Д.И. Исмоилов

Ведущая организация: Инновационный Евразийский Университет

Секретарь ГАК: Асылбекова С.К.

Актуальность. В современной теории чисел особое место занимает теория суммирования арифметических функций. Первые общие результаты по данной теории относятся к арифметической прогрессии, геометрической прогрессии и приводящимся к ним числовым последовательностям. Отличительным свойством этих прогрессий является то, что вне зависимости от числа слагаемых для них удается записать явные вычислительные формулы.

Главной задачей теории суммирования арифметических функций является их приближения к некоторой конкретной искомой функции и по возможности сделать это оптимальным способом. Иными словами рассматривается некоторая сумма $\sum_{n\le N} f(n)$, где $f(n)$ - арифметическая функция и $N\to\infty$. Нужно найти главный член асимптотической формулы – функцию $P_f(N)$ и, если это возможно, наиболее точно оценить её остаточный член $R_f(N)$, то есть $\sum_{n\le N} f(n) = P_f(N) + R_f(N)$. Значит, основной задачей является оценить разность между суммируемой функцией и главным членом

$$\left|\sum_{n\le N} f(n) - P_f(N)\right| \le C_1 \cdot R_f(N).$$

В диссертационной работе рассматривается следующая общая теорема о суммировании значений арифметических функций:

Пусть f - монотонно убывающая функция действительного переменного t, определенная при $t \ge 0$. Тогда

$$\sum_{1\le n\le X} f(n) = \int_1^X f(t)\,dt + A_f + O(f(X)),$$

где n - целое положительное число, $X \ge 1$, A_f - постоянная, зависящая только от f.

Рассматривается применение этой теоремы к суммированию рядов вида:

$$\sum_{n\le X} \frac{1}{n\log^{\alpha} n},$$

для доказательства теоремы Дирихле (о числе целых точек под гиперболой)

$$D(N) = N\log N + (2\gamma_0 - 1)\cdot N + O(\sqrt{N}),$$

и доказательства теоремы Гаусса (о числе целых точек в круге)

$$K(R) = \pi R + O(\sqrt{R}).$$

Цель исследования. Рассмотреть некоторые теоремы о суммировании арифметических функций, их применение к суммированию числовых рядов и для доказательства некоторых теорем.

Объект исследования. Аналитическая теория чисел.

Предмет исследования. Суммирование арифметических функций.

Научная новизна. Результаты, доказываемые в диссертации, являются новыми. Диссертационная работа является законченным научным исследованием.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Для освоения теории суммирования арифметических функций необходимо хорошее знание курса теории чисел.
2. Применения общей теоремы суммирования арифметических функций для суммирования числовых рядов и для доказательства некоторых теорем.

Теоретическое и практическое значение. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы при чтении специальных курсов по теории чисел.

Публикации результатов исследования. По теме диссертации опубликована одна статья в научный журнал «Вестник ИнЕУ» и две публикации в областную газету «Ұстаздар газеті».

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы, приложений. Изложена на 65 страницах с использованием 7 рисунков, 28 источников литературы.

Список опубликованных работ по теме диссертации.

1. Научный журнал «Вестник ИнЕУ» № 2 (54) Павлодар 2014г.
2. Областная газета «Ұстаздар газеті» № 1 (264) Павлодар 1 января 2014г.
3. Областная газета «Ұстаздар газеті» № 2 (289) Павлодар 15 января 2015г.

РЕЗЮМЕ

Степьюк Илья Анатольевич

«Некоторые теоремы о суммировании арифметических функций»
6М060100 – «Математика»

Цель. Рассмотреть некоторые теоремы о суммировании арифметических функций, их применение к суммированию числовых рядов и для доказательства некоторых теорем.

Объект. Аналитическая теория чисел.

Предмет. Суммирование арифметических функций

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Применения общей теоремы суммирования арифметических функций к суммированию числовых рядов и для доказательства некоторых теорем.

UDC 511 On rights for a manuscript

Stepyuk Ilya Anatolievich

«Some theorems of adding up of arithmetic functions»

6M060100 – «Mathematics»

Report

of dissertation on the competition of academic master's degree of natural sciences

Pavlodar 2015

Work is executed in Innovative Eurasian University

Scientific leader: Doctor of phys-math sciences, Professor of InEU D.I. Ismoilov

Leading organization: Innovative Eurasian University

Secretary GAC: Asilbekova S.K.

Actuality. In the modern theory of numbers the special place is occupied by the theory of adding up of arithmetic functions. The first general results on this theory behave to arithmetic progression, geometrical progression and the numerical sequences over brought to them. Distinctive property of these progressions is that without depending on the number of elements for them it is succeeded to write down obvious calculable formulas.

The main task of theory of adding up of arithmetic functions is their approaching to some certain sought after function and on possibility to do it by an optimal method. In other words, examined sum $\sum_{n\le N} f(n)$, where $f(n)$ - arithmetic function and $N\to\infty$. We need to find main member of asymptotic formula – function $P_f(N)$ and, most exactly to estimate it's remaining member $R_f(N)$, id est $\sum_{n\le N} f(n)=P_f(N)+R_f(N)$. So, a basic task is to estimate a difference between a summable function and main member

$$\left|\sum_{n\le N} f(n)-P_f(N)\right|\le C_1\cdot R_f(N).$$

In dissertation work a next general theorem is examined about adding up of values of arithmetic functions:

Let's f - droningly decreasing function actual variable t, certain at $t\ge 0$. Then

$$\sum_{1\le n\le X} f(n)=\int_1^X f(t)\,dt+A_f+O(f(X)),$$

where n - positive integer, $X\ge 1$, A_f - constant, depending only on f.

Application of this theorem is examined to adding up of rows of kind:

$$\sum_{n\le X}\frac{1}{n\log^{\alpha} n},$$

for proof of theorem Dirichlet (about the number of whole points under hyperbola)

$$D(N)=N\log N+(2\gamma_0-1)\cdot N+O(\sqrt{N}),$$

and proofs of theorem of Gausse (about the number of whole points in a circle)

$$K(R)=\pi R+O(\sqrt{R}).$$

Research aim. To consider some theorems about adding up of arithmetic functions, their application to adding up of numerical rows and for proof of some theorems.

Research object. Analytical theory of numbers.

Article of research. Adding up of arithmetic functions.

Scientific novelty. The results proved in dissertation are new. Dissertation work is complete scientific research.

Substantive provisions are the dissertations taken away on defence.

1. For mastering of theory of adding up of arithmetic functions good knowledge of course of theory of numbers is needed.
2. Applications of general theorem of adding up of arithmetic functions for adding up of numerical rows and for proof of some theorems.

Theoretical and practical value. Work carries theoretical character. Results can be drawn on at reading of the special courses on the theory of numbers.

Publications of research results. On the topic of dissertation one article is published in a scientific magazine «Вестник ИнЕУ» and two publications in a regional newspaper «Ұстаздар газеті».

Structure and volume of work. Work consists of introduction, three heads, conclusion, list of the used literature, appendixes. Expounded on 65 pages with the use of 7 pictures, 28 sources of literature.

List of the published works on the topic of dissertation.

1. Scientific magazine «Вестник ИнЕУ» № 2 (54) Pavlodar 2014г.
2. Regional newspaper «Ұстаздар газеті» № 1 (264) Pavlodar 1 January 2014г.
3. Regional newspaper «Ұстаздар газеті» № 2 (289) Pavlodar 15 January 2015г.

RESUME

Stepyuk Ilya Anatolievich

"Some theorems of adding up of arithmetic functions"

6M060100 – "Mathematics"

Aim. To consider some theorems about adding up of arithmetic functions, their application to adding up of numerical rows and for proof of some theorems.
Object. Analytical theory of numbers.
Subject. Adding up of arithmetic functions
Substantive provisions are the dissertations taken away on defence.
Applications of general theorem of adding up of arithmetic functions to adding up of numerical rows and for proof of some theorems.

Список научных трудов Степьюка Ильи Антольевича.

№	Название	Характер работы	Издательство, журнал, название, номер, год	Объем (п.л.)	Соавторы
1	2	3	4	5	6
1	Об одной системе степенных уравнений	Статья	Научный журнал «Вестник ИнЕУ» № 2 (54) Павлодар 2014г	4	
2		Статья	Областная газета «Ұстаздар газеті» № 1 (264) Павлодар 1 января 2014г	2	
3		Статья	Областная газета «Ұстаздар газеті» № 2 (289) Павлодар 15 января 2015г	2	

Научный руководитель Д.И. Исмоилов

Зав. кафедрой Ж.К. Даниярова

Магистрант И.А. Степьюк