

**Министерство образования и науки Республики Казахстан**

**Инновационный Евразийский Университет**

**К.О. Омарова**

**Элементы теории вероятностей в школьном курсе математики**

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

**специальность 6М060100 – «Математика»**

**Павлодар 2015**

**Министерство образования и науки Республики Казахстан**

**Инновационный Евразийский Университет**

**Кафедра «Математика и информационные технологии»**

«Допущен к защите»

\_\_\_\_\_заведующий  
кафедрой \_\_\_\_\_ Ж.К. Даниярова

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

**На тему: «Элементы теории вероятностей в школьном курсе  
математики»**

**по специальности 6М060100 - «Математика»**

**Выполнила магистрант  
группы МТу-202м**

**К.О. Омарова**

**Научный руководитель  
д.ф.м.н., проф.**

**Д.И. Исмоилов**

**Павлодар 2015**



## РЕЗЮМЕ

Омарова Кымбат Ораловна

«Элементы теории вероятностей в школьном курсе математики»

6M060100 – «Математика»

**Цель исследования** - показать методику работы использования элементов теории вероятностей на уроках математики в средней школе.

**Объект исследования** - выявление элементов теории вероятности в школьном курсе математики.

**Предметом исследования** является влияние системы задач на формирование вероятностных понятий у учеников.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

Применение функционального уравнения к теории распределения случайных событий.

## ТҮЙІН

Омарова Кымбат Ораловна

«Мектептің математика курсындағы ықтималдықтар теориясы элементтері»

6M060100 – «Математика»

**Зерттеу мақсаты** - математика сабағында ықтималдықтар теориясы элементтерін қолдану әдістемесін қарастыру.

**Зерттеу нысаны** - мектептің математика курсындағы ықтималдықтар теориясы элементтерін анықтау.

Оқушылардың ықтималдықтар теориясының негізгі түсініктерін қалыптастыруға есептер жинағының ықпалы **зерттеу пәні** болып табылады.

**Қорғауға шығарылатын диссертацияның негізгі ережелері.**

Функционалдық теңдеудің ықтималдықтар теориясында қолдануы.

## RESUME

Omarova Kymbat Oralovna

«Elements of probability theory in the school course of mathematics»

6M060100 – «Mathematics»

**Purpose of research** - to show the working procedure of using elements of probability theory in mathematics lessons in secondary school.

**Object of research** - identify elements of probability theory in the school course of mathematics.

The **subject of research** is the impact of objectives on the formation of probabilistic concepts in students.

**Substantive provisions are the dissertations taken away on defense.**

The application of functional equations to the theory of distribution of random events.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| Введение.....                                                  | 8  |
| 1 Элементы комбинаторики.....                                  | 10 |
| 1.1 Различные комбинации из трех элементов.....                | 10 |
| 1.2 Таблица вариантов и правило произведения.....              | 12 |
| 1.3 Понятия: «перестановка», «размещения», «сочетания».....    | 13 |
| 1.3.1 Число перестановок.....                                  | 16 |
| 1.3.2 Число сочетаний.....                                     | 18 |
| 1.3.3 Число размещений.....                                    | 19 |
| 2 Теория вероятности.....                                      | 20 |
| 2.1 Случайные события.....                                     | 20 |
| 2.1.1 Основные понятия.....                                    | 20 |
| 2.1.2 Классификация событий.....                               | 21 |
| 2.1.3 Пространство элементарных событий.....                   | 22 |
| 2.1.4 Отношения между событиями.....                           | 23 |
| 2.1.5 Операции над событиями.....                              | 24 |
| 2.1.6 Диаграммы Эйлера-Венна.....                              | 25 |
| 2.2 Классическое определение вероятности.....                  | 26 |
| 2.3 Статистическое определение вероятности.....                | 28 |
| 2.4 Геометрическое определение вероятности.....                | 31 |
| 2.5 Теорема сложения вероятностей.....                         | 34 |
| 2.6 Условные вероятности.....                                  | 37 |
| 2.7 Теорема умножения вероятностей.....                        | 38 |
| 2.8 Формула полной вероятности.....                            | 42 |
| 3 Решение задач по теории вероятностей.....                    | 46 |
| 3.1 Решение задач с применением основ теории вероятностей..... | 46 |
| 3.2 Решение задач повышенной сложности.....                    | 58 |
| 3.3 Об одном функциональном уравнении и его приложений.....    | 65 |
| Заключение.....                                                | 70 |
| Список использованных источников.....                          | 71 |
| Приложения.....                                                | 73 |

## ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятности изучает закономерности, возникающие при массовых, однородных явлениях, исходы которых являются случайными. В настоящее время трудно найти область человеческой деятельности, как теоретического, так и прикладного характера, где бы ни применялись методы теории вероятностей.

В течение последних десятилетий элементы теории вероятностей и комбинаторики то вводились разделом в курс математики общеобразовательной школы, то исключались вообще. Внимание, которое уделяется этому учебному предмету во всем мире, позволяет предположить, что концепция его введения является актуальной.

Тем не менее, новые учебные программы по математике, принимаемые поэтапно в настоящее время в Казахстане, предполагают обязательное проведение основ теории вероятностей и математической статистики как в школах с углубленным изучением математики, так и в общеобразовательных школах.

Знакомство с элементами теории вероятностей становится обязательным уже в рамках основной школы. При этом вопросам комбинаторики предполагается уделять немалое внимание, так как она является неотъемлемой частью аппарата теории вероятностей.

Основная цель изучения комбинаторики в старших классах – это получение средств решения вероятностных задач. В основной же школе комбинаторика призвана, в основном, сформировать так называемое комбинаторное мышление, позволяющее человеку разумно организовать прибор ограниченного числа данных, подсчитать всевозможные комбинации элементов, составленных по определенному правилу.

**Объект исследования** - выявление элементов теории вероятности в школьном курсе математики.

**Предметом исследования** является влияние системы задач на формирование вероятностных понятий у учеников.

**Цель исследования** - показать методику работы использования элементов теории вероятностей на уроках математики в средней школе.

Исходя из цели исследования, были поставлены следующие **задачи исследования**:

1) проанализировать современные тенденции в исследованиях, посвященных вопросам введения в школьную математику элементов теории вероятностей;

2) показать роль задач и экспериментов в усвоении элементарных знаний о теории вероятностей;

3) отразить основные подходы к изучению теории вероятности в школьном курсе математики;

4) представить практический материал – решение задач по данной теме, с выработанными методическими указаниями и рекомендациями.



В ходе решения поставленных задач использовались следующие **методы исследования**:

1) изучение и анализ научной учебно-методической литературы, программ по математике для общеобразовательных учреждений;

2) теоретический анализ проблемы, определение основных положений исследования;

3) решение задач по данной теме.

**Практическая значимость** работы заключается в следующем:

- большой объем практических заданий поможет учащимся без труда освоить основы комбинаторики, теории вероятностей;

- материал, изложенный в работе, может быть полезен и школьным учителям при подготовке к урокам, и преподавателям методики обучения математике в школе, и родителям учащихся.

## 1 Элементы комбинаторики

### 1.1 Различные комбинации из трех элементов

В математике существует немало задач, в которых требуется из имеющихся элементов составить различные наборы, подсчитать количество всевозможных комбинаций элементов, образованных по определенному правилу. Такие задачи называются *комбинаторными*, а раздел математики, занимающийся решением этих задач, называется *комбинаторикой*.

Некоторые комбинаторные задачи решали еще в Древнем Китае, позднее - в Римской империи. Однако как самостоятельный раздел математики комбинаторика оформилась Европе лишь XVIII веке в связи с развитием теории вероятностей.

Нередко в жизни возникают ситуации, когда задача имеет не одно, а несколько решений, которые нужно сравнить, а может быть, и выбрать наиболее подходящее для конкретной ситуации. Например, при рассмотрении меню обеда человек мысленно составляет комбинации из различных блюд, после чего делает выбор согласно своему вкусу и совместимости продуктов.

Рассмотрим простейшие задачи, связанные с составлением различных комбинаций из трех элементов.

**Задача 1.** Три друга, Антон, Борис и Виктор, приобрели два билета на футбольный матч. Сколько существует различных вариантов похода на футбол?

**Решение.** По имеющимся трем билетам на матч могут пойти: 1) либо Антон и Борис; 2) либо Антон и Виктор; 3) либо Борис и Виктор.

Ответ: 3 варианта.

**Задача 2.** Три друга, Антон, Борис и Виктор, приобрели два билета на футбольный матч на 1-е и 2-е места первого ряда стадиона. Сколько существует способов занять эти два места на стадионе?

**Решение.** Для удобства перечисления всех возможных вариантов размещения друзей на 1-е и 2-е места будем вместо полных имен мальчиков записывать лишь их первые буквы. При этом запись АБ будет означать, что на первом месте сидит Антон, а на втором – Борис. Способ составления комбинаций будет следующим: после записи каждой пары имен мальчиков, идущих на матч (по результатам решения предыдущей задачи таких пар три), запишем новые пары, полученные перестановкой букв. Такая перестановка обозначает результат пересаживания мальчика со своего места на место друга.

Ответ: 6 способов: АБ; БА; АВ; ВА; БВ; ВБ.

Заметим, что пары мальчиков, составленные в задачах 1 и 2, существенно отличаются друг от друга. В первой задаче нас интересовал порядок рассаживания двух мальчиков по местам, т.е. пары А и Б, Б и А считалось одной и той же парой мальчиков, идущих на матч. Во второй же задаче пары АБ и БА были различными парами, так как нас интересовал и порядок рассаживания мальчиков на двух местах (поэтому в задаче 2 количество вариантов пар было в два раза больше, чем в первой).

Говоря математическим языком, в задаче 1 были составлены всевозможные *сочетания* из трех элементов по два: пары элементов, выбранных из имеющихся трех элементов А, Б и В. Пары отличаются друг от друга лишь составом элементов, а порядок расположения элементов не учитывается. В задаче 2 из тех же трех элементов выбирались пары элементов, и фиксировался их порядок расположения в паре, т.е. все составленные пары отличались друг от друга либо составом элементов, либо их расположением в паре. В комбинаторике такие пары называют *размещениями* из трех элементов по два.

Договоримся, что, если нужно представить комбинацию некоторых элементов, в которой *порядок* расположения элементов *не важен*, будем записывать (перечислять) эти элементы через запятую (например, А, Б, и Б, А – одна и та же пара элементов). Если же *порядок* расположения элементов комбинации *важен*, то в последовательной записи элементов отделять их друг от друга запятой не будем (например: АБ и БА – разные пары).

**Задача 3.** Антону, Борису и Виктору повезло, они купили 3 билета на футбол на 1-е, 2-е и 3-е места первого ряда стадиона. Сколькими способами могут занять мальчики эти места?

**Решение.** Число способов будет таким же, как и в задаче 2. Действительно, если к каждой паре мальчиков, сидящих на 1-м и 2-м местах, посадить на 3-е место их друга, не попавшего ранее по условию задачи 2 на матч, то будут составлены всевозможные варианты (обозначенные тройками букв) рассаживания мальчиков по трем местам: АБВ, БАВ, АВБ, ВАБ, БВА, ВБА.

Ответ: 6 способами.

Говоря языком математики, в задаче 3 были составлены всевозможные *перестановки* из трех элементов – комбинации из трех элементов, отличающиеся друг от друга порядком расположения в них элементов. Элементы в комбинации не повторялись.

**Задача 4.** Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2 и 3 при условии, что: 1) цифры в числе должны быть различны; 2) цифры в числе могут повторяться?

**Решение.** 1) Способ составления трехзначных чисел из трех различных цифр аналогичен способу записи троек букв в задаче 3. 123, 213, 132, 312, 231, 321. Получили 6 чисел.

2) Перебор вариантов организуем следующим образом. Выпишем все числа в три блока: в первом – числа, начинающиеся цифрой 1, в порядке их возрастания; во втором – числа, начинающиеся с цифры 2, в порядке возрастания; в третьем – начинающиеся цифрой 3, в порядке возрастания.

111; 112; 113;    211; 212; 213;    311; 312; 313;  
121; 122; 123;    221; 222; 223;    321; 322; 323;  
131; 132; 133;    232; 233; 233;    331; 332; 333.

Получили 27 чисел.

Ответ: 1) 6; 2) 27.

## 1.2 Таблица вариантов и правило произведения

При решении комбинаторных задач существует опасность потери какой-либо комбинации элементов, поэтому и появились приемы, исключающие эту возможность. Например, для подсчета числа комбинаций из двух элементов подходящим средством является *таблица вариантов*.

**Задача 1.** Записать всевозможные двузначные числа, используя при этом: 1) цифры 1, 2 и 3; 2) цифры 0, 1, 2 и 3. Подсчитать их количество  $N$ .

**Решение.** Для каждого случая составим таблицу вариантов (таблица 1, 2).

Таблица 1

| 1-я цифра | 2-я цифра |    |    |
|-----------|-----------|----|----|
|           | 1         | 2  | 3  |
| 1         | 11        | 12 | 13 |
| 2         | 21        | 22 | 23 |
| 3         | 31        | 32 | 33 |

$$N = 3 \cdot 3 = 9$$

Таблица 2

| 1-я цифра | 2-я цифра |    |    |    |
|-----------|-----------|----|----|----|
|           | 0         | 1  | 2  | 3  |
| 1         | 10        | 11 | 21 | 31 |
| 2         | 20        | 21 | 22 | 32 |
| 3         | 30        | 31 | 23 | 33 |

$$N = 3 \cdot 4 = 12$$

Ответ: 1)  $N = 9$ ; 2)  $N = 12$ .

**Задача 2.** Бросают две игральные кости (каждая кость - кубик с отмеченными на его гранях точками от одной до шести, причем на различных гранях разное число точек). Сколько различных пар точек может появиться на верхних гранях костей?

**Решение.** С помощью составленной ниже таблицы (таблица 3) пар выпавших точек можно утверждать, что число всевозможных пар равно

$$6 \cdot 6 = 36.$$

Таблица 3

| Число точек на I кости | Число точек на II кости |    |    |    |    |    |
|------------------------|-------------------------|----|----|----|----|----|
|                        | 1                       | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 1                      | 11                      | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 2                      | 21                      | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 3                      | 31                      | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 4                      | 41                      | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 5                      | 51                      | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 6                      | 61                      | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |

Ответ: 36.

При решении задач, аналогичных задачам 1 и 2, необязательно каждый раз составлять таблицу вариантов. Можно пользоваться правилом, которое получило в комбинаторике название «*Правило произведения*»: если существует  $n$  вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть  $m$  вариантов

выбора второго элемента, то всего существует  $n \times m$  различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

**Задача 3.** Катя и Оля пришли в магазин, где продаются в любом количестве плитки шоколада трех видов. Каждая девочка хочет купить одну  $m = 3$  плитку. Сколько существует способов покупки?

**Решение.** Катя может купить плитку любого из трех видов шоколада ( $n = 3$ ). Аналогично может поступить и Оля ( $m = 3$ ). Пара шоколадок для Кати и для Оли может быть куплена  $n \times m = 3 \times 3 = 9$  различными способами.

Ответ: 9.

**Задача 4.** Имеются три различные плитки шоколада. Катя и Оля по очереди выбирают себе по одной плитке. Сколько существует различных способов выбора шоколадок для Кати и Оли?

**Решение.** Допустим, первой шоколадку выбирает Катя. У нее есть 3 возможности выбора плитки ( $n = 3$ ). После этого Оля может выбрать одну из двух оставшихся плиток ( $m = 2$ ). Тогда способов выбрать пару шоколадок для Кати и для Оли существует  $n \times m = 3 \times 2 = 6$ .

Ответ: 6.

**Задача 5.** Сколько существует различных двузначных кодов, составленных с помощью букв А, Б, В, Г и Д, если: 1) буквы в коде могут повторяться; 2) буквы в коде должны быть различны?

**Решение.** 1) Первой буквой в коде может быть любая из данных 5 букв ( $n = 5$ ), второй — также любая из 5 букв ( $m = 5$ ). Согласно правилу произведения число всевозможных пар букв (с возможным их повторением в паре) равно  $n \times m = 5 \times 5 = 25$ .

2) Первой буквой в коде может быть любая из 5 данных букв ( $n = 5$ ), а второй — любая из 4 оставшихся ( $m = 4$ ). Согласно правилу произведения число двузначных кодов с различными буквами равно  $n \times m = 5 \times 4 = 20$ .

Ответ: 1) 25; 2) 20.

### 1.3 Понятия: «перестановка», «размещения», «сочетания»

Применяя метод целесообразных задач, некоторые учителя подбирают чрезмерно большое число подготовительных задач. Каждая из них готовит учащихся к лучшему пониманию отдельных вопросов новой темы. Однако при этом излишне расходуется учебное время, а главное, из-за обилия подготовительных упражнений от учащихся нередко ускользает основная идея новой темы.

С целью экономии учебного времени и для большей четкости и ясности излагаемого материала желательно подбирать минимальное число подготовительных задач. Наилучшие результаты получаются в тех случаях, когда одна и та же подготовительная задача используется несколько раз при изложении новой темы, помогая оценить различные ее моменты.

Это общее положение мы и покажем на примере изложения некоторых теоретических вопросов данной темы.

В соответствии с этим общим положением подбираем минимальное число простейших примеров, с помощью которых вводится и усваивается понятие упорядоченного множества.

*Пример.* Пусть дано множество  $\{a, b\}$ . Тогда известно, что  $a$  и  $b$  - его элементы.  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{a, b\}$ ,  $\emptyset$  - его подмножества. Порядок элементов не играет никакой роли, т.е.  $\{a, b\} = \{b, a\}$ .

Часто мы встречаемся и с такими множествами, где порядок элементов играет существенную роль, например, при написании чисел: 21, 12.

Множество вместе с заданным порядком его элементов называется *упорядоченным множеством*.

*Пример.* Из данного множества  $\{a, b\}$ , переставляя местами элементы, можно получить два упорядоченных подмножества, содержащих по два элемента:  $(a, b)$ ,  $(b, a)$ . (Элементы упорядоченного множества записываются в круглых скобках). Очевидно,  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $\emptyset$  - также можно считать упорядоченными подмножествами множества  $\{a, b\}$ .

**Задача 1.** Пусть дано множество  $\{x, y, z\}$ . Составьте все его подмножества и упорядоченные подмножества.

При решении этой задачи учитель рекомендует решение задачи 1 оформить в виде таблицы. Сначала выписываются все подмножества: в 1-й строке – пустое, во 2-й строке – по одному элементу и т.д. Аналогичным образом ниже записываются упорядоченные подмножества. С левой стороны таблицы оставляется место в 2 – 2,5 см для выполнения последующих упражнений.

**Решение.**

Подмножества

$$C_3^0 = 1$$

$\emptyset$

$$C_3^1 = 3$$

$\{x\}, \{y\}, \{z\}$

$$C_3^2 = 3$$

$\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$

$$C_3^3 = 1$$

$\{x, y, z\}$

Упорядоченные подмножества

$$A_3^0 = 1$$

$\emptyset$

$$A_3^1 = 3$$

$(x), (y), (z)$

$$A_3^2 = 6$$

$(x, y), (y, x), (x, z), (z, x), (z, y), (y, z)$

$$A_3^3 = P_3 = 6$$

$(x, y, z), (x, z, y), (y, x, z), (y, z, x), (z, x, y), (z, y, x)$

Решение задачи на доске записывает и комментирует учитель. Он начинает каждую строчку, показывая наиболее удобный способ составления подмножеств и упорядоченных подмножеств. Заканчивает записи строчек он с помощи учащихся.

Чтобы облегчить восприятие таблицы и ее составления, попарно подчеркиваются упорядоченные множества в двух последних строках: в

предпоследней – те, которые получаются из одного и того же подмножества, в последней строке – те, которые начинаются с одного и того же элемента.

Способ решения задачи дает гарантию, что мы не пропустили ни одного подмножества или упорядоченного подмножества и не записали его дважды.

Решенная задача подготавливает учащихся к пониманию и усвоению новых понятий.

**Определение 1.** Пусть дано множество, состоящее из  $n$  элементов. Все его подмножества, каждое из которых содержит  $k$  элементов, называют *сочетаниями* из  $n$  элементов по  $k$ .

Число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  обозначают  $C_n^k$ .

*Упражнение.* Укажите в составленной таблице сочетания и в соответствующих строчках запишите обозначения числа сочетаний.

**Определение 2.** Пусть дано множество из  $n$  элементов. Все его упорядоченные подмножества, каждое из которых содержит  $k$  элементов, называют *размещениями* из  $n$  элементов по  $k$ .

Число размещений из  $n$  элементов по  $k$  обозначают  $A_n^k$ .

**Определение 3.** Пусть дано множество, состоящее из  $n$  элементов. Все его упорядоченные подмножества, каждое из которых содержит  $n$  элементов, называют *перестановками* из  $n$  элементов.

Число перестановок из  $n$  элементов обозначают  $P_n$ .

*Упражнение.* Чем отличается последнее определение от предыдущих? Укажите в составленной таблице перестановки и в соответствующих строчках запишите обозначения числа перестановок. Дайте определение перестановки через размещение.

В определениях и упражнениях используются рассмотренный ранее прием повторения одной и той же мысли в одних и тех же выражениях, но с большими вариациями. Этот прием в соответствии с закономерностями психологии облегчает учащимся понимание и запоминание материала.

Решенная задача 1 подсказывает, что между числами  $C_n^k$ ,  $A_n^k$  и  $P_n$  существует некоторая зависимость. Чтобы обнаружить ее, рассмотрим третьи строчки в составленной таблице. Сначала мы составляли подмножества. Их оказалось  $C_3^2 = 3$ . Потом каждое из них упорядочили, выполняя перестановки из двух элементов ( $P_2 = 2$ ), и получили упорядоченные подмножества. Их оказалось  $A_3^2 = 6$ . Следовательно,  $C_3^2 \times P_2 = A_3^2$ .

Эта же зависимость выполняется и для четвертых строчек таблицы:  $A_3^3 = C_3^3 \times P_3$ .

Рассмотрим общий случай. Пусть дано множество из  $n$  элементов. Составом все его подмножества по  $k$  элементов. Это можно сделать  $C_n^k$  способами. В каждом подмножестве упорядочим элементы, что можно сделать  $P_k$  способами. Всего получим  $C_n^k \times P_k$  упорядоченных подмножеств, т.е. размещений  $A_n^k$ :

$$A_n^k = C_n^k \times P_k. \quad (1)$$

Причем при использованном способе мы не могли пропустить ни одного размещения или записать его дважды.

В дальнейшем мы займемся выводом формул для вычисления чисел  $A_n^k$ ,  $P_k$ ,  $C_n^k$ . Зависимость (1) существенно облегчит работу, так как достаточно найти формулы для вычисления двух из этих чисел, например  $P_k$  и  $C_n^k$ .

Таким образом, в соответствии с высказыванием начале этой главы положением подготовительная задача 1 использовалась несколько раз. Она выполняет ряд функций, помогая: 1) закрепить понятия множества и упорядоченного множества; 2) ввести новые понятия: «размещения», «перестановки», «сочетания» - и закрепить их; 3) обнаружить и доказать формулу (1). К этой задаче мы вернемся еще раз, когда будем объяснять, почему считают, что  $C_n^0 = 1$  и  $C_m^n = 1$ .

### 1.3.1 Число перестановок

**Задача 2.** Составьте различные: а) двухзначные числа из цифр 1 и 2; б) трехзначные – из цифр 1, 2, 3. в) четырехзначные – из цифр 1, 2, 3, 4 так, чтобы одна и та же цифра в числе не повторялась. Обратите внимание на способ составления чисел.

**Решение.**

а) 12, 21.

б) Каждую цифру выписываем в начале строчки и приписываем остающиеся цифра, меня последние местами.

|     |     |
|-----|-----|
| 123 | 132 |
| 213 | 231 |
| 312 | 321 |

в) Опять выписываем каждую цифру в начале строчки. Затем приписываем остающиеся цифры, переставляя их местами, что можно сделать согласно задаче 2б шестью способами.

Для примера запишем первую строчку.

|       |       |       |       |       |      |            |
|-------|-------|-------|-------|-------|------|------------|
| 1234, | 1243, | 1324, | 1342, | 1423, | 1432 | } 4 строки |
| 2     | .     | .     | .     | .     | .    |            |
| 3     | .     | .     | .     | .     | .    |            |
| 4     | .     | .     | .     | .     | .    |            |

6 чисел

Всего имеем  $6 \times 4 = 24$  числа.

Для контроля можно предложить учащимся выписать числа в остальных строчках таблицы.

Из решенной задачи следует, что  $P_2 = 2, P_3 = 6, P_4 = 24$ , что можно записать так



$$P_4 = 1 \times 2 \times 4$$

### Теорема.

$$P_n = n! \quad (2)$$

2.  $n = k$ . Предложим, что верно равенство

$$P_k = k! \quad (3)$$

$$P_{k+1} = (k+1)!$$
$$\left. \begin{array}{l} (\underline{a_1} a_2 a_3 \dots); \quad (\underline{a_1} a_3 a_2 \dots); \quad (\underline{a_1} a a_2 \dots); \dots \\ a_2 \dots\dots\dots \\ a_3 \dots\dots\dots \\ \vdots \end{array} \right\} (k+1) \text{ строчек}$$
$$q_{1^k 4^4 4^4 4^4 4^4 4^4 4^4 4^4 4^4 2^4 4^4 4^4 4^4 4^4 4^4 4^4 4^4 3}$$
$$k! \text{ постановок}$$

Подготовительная задача 2 также выполняет несколько функций. Она помогает подвести учащихся к самостоятельному «открытию» формулы  $P_n = n!$  и подготавливает их к пониманию доказательства теоремы. Здесь, следовательно, используется прием двукратного доказательства. Эта же задача 2 будет использована еще раз при выводе формулы числа сочетаний.

### 1.3.2 Число сочетаний

Задачу 2в решим другим способом. Из цифр 1, 2, 3, 4 будем отбирать по две цифры, не обращая пока внимания на их порядок. Значит, это будут все подмножества по два элемента. Их число  $C_4^2$ : 12, 13, 14, 23, 24, 34.

В каждом полученном числе меняем местами цифры. Это можно сделать каждый раз  $(n - k) 2!$  способами. А так как чисел было  $C_4^2$ , то всего получим  $C_4^2 \times 2!$  чисел: 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43.

Остающиеся каждый раз  $(4 - 2)$  цифры упорядочиваем, что можно сделать  $(4 - 2)!$  способами. Приписывая их к каждому из ранее полученных чисел, получим  $C_4^2 \times 2! \times (4 - 2)!$  чисел. Учитывая прежний способ решения, мы должны получить равенство:

$$4! = C_4^2 \times 2! \times (4 - 2)!$$

Убедимся, что этим способом мы опять получили 24 числа. В последний раз у нас получилось 12 чисел. Возьмем первое число 12 и припишем к нему оставшиеся числа, а затем поменяем их местами. Получим числа 1234 и 1243. Прделаем это с каждым из 12 чисел. Значит, всего чисел будет  $12 \times 2 = 24$ .

Решенная задача поможет нам разобраться в общем случае.

Пусть дано множество, состоящее из  $n$  элементов. Из них можно составить  $n!$  перестановок. Будем составлять их тем же способом, как только что при решении задачи 2в.

- 1) Из данных  $n$  элементов составляем подмножество по  $k$  элементов. Получим  $C_n^k$  подмножеств.
- 2) В каждом из отобранных подмножеств переставляем элементы, что можно сделать  $k!$  способами. Всего получим  $C_n^k \times k!$  упорядоченных подмножеств.
- 3) Из остающихся каждый раз  $(n - k)$  элементов составляем  $(n - k)!$  перестановок. Присоединяя их к каждой из ранее полученных  $C_n^k \times k!$  перестановок, получим  $C_n^k \times k! \times (n - k)!$  перестановок.

Ясно, что таким путем мы получим все перестановки и ни одну из них не повторим дважды.

Следовательно,

$$\begin{aligned} n! &= C_n^k \times k! \times (n - k)! \\ C_n^k &= \frac{n!}{k! \times (n - k)!}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решая задачу 1, мы видели, что  $C_3^0 = 1$  и  $C_3^3 = 1$ . Вообще, при любом  $n$   $C_n^0 = 1$ , так как имеется только одно пустое подмножество, и  $C_n^n = 1$ , так как имеется только одно подмножество, содержащее все элементы данного множества.

Чтобы формула (4) была верна при  $k = 0$  и  $k = n$ , и чтобы  $C_n^0 = 1$  и  $C_n^n = 1$ , надо положить  $0! = 1$ . Тогда  $P_0 = 0! = 1$ , что соответствует нашему соглашению считать пустое множество также и упорядоченным множеством.

### 1.3.3 Число размещений

Из формул (1), (2) и (4) имеем:

$$A_n^k = C_n^k \times P_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) чисто используются в другой форме:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)),$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} \times \frac{A_n^k}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{1 \times 2 \times \dots \times k}.$$

Итак, при изучении теоретического материала данной темы можно использовать только две подготовительные задачи, возвращаясь к ним неоднократно. Удобное расположение записей при их решении, попарно прочерчивание упорядоченных множеств и т.п. в соответствии с закономерностью восприятия облегчается учащимся понимание материала. Этому способствуют и другие использованные методы и приемы обучения.

## 2 Теория вероятности

### 2.1 Случайные события

#### 2.1.1 Основные понятия

Исходными понятиями теории вероятностей являются понятия стохастического эксперимента и случайного события. Стохастическим называется такой эксперимент, результат которого, заранее до его проведения, невозможно предугадать. Этот эксперимент может быть специально организован, т.е. при его проведении осуществляется ряд заранее запланированных действий; в качестве этого эксперимента могут выступать и наблюдения тех природных и социальных явлений, наступление которых предсказать невозможно, т.е., при реализации определённых условий, они могут произойти или не произойти.

**Определение 1.** Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате стохастического эксперимента.

В дальнейшем, вместо стохастического эксперимента будем говорить об опыте или испытании и вместо словосочетания «случайное событие» будем для краткости говорить - «событие». События обозначаются большими печатными буквами латинского алфавита:

$$A_1; A_2; \dots; A_i; A; B; C; \dots; X; Y; Z.$$

Таким образом, событие можно рассматривать как возможный исход (или результат) опыта.

#### Пример 1.

- а) Опыт - бросание монеты;  $A$  – событие, состоявшееся в появлении герба;
- б) Опыт - выстрел по мишени; Событие  $B$  – попадание в мишень;
- в) Опыт - бросание двух игральных кубиков;  $C$  – событие, состоящее в том, что сумма выпавших очков - четна;
- г) Опыт - вынимание карты из колоды; событие  $D$  – появление короля;
- д) Опыт - проверка изделия на стандартность;  $A_1$  – событие, состоящее в том, что проверяемое изделие не удовлетворяет требованиям стандарта;
- е) Опыт - испытание технического устройства на длительность безотказной работы;  $B_1$  – событие, состоящее в том, что это устройство проработает не менее 100 часов до 1-го отказа;
- ж) Опыт - проверка выполнения правил уличного движения пешеходами на определённом участке дороги;  $C_1$  – событие, состоящее в том, что в промежутке времени с 15<sup>00</sup> до 18<sup>00</sup> произойдет не более 15 нарушений;
- з) Опыт - определение веса каждого из 50 животных одного вида; Событие  $E$  – средний вес животного, рассматриваемой партии не менее, 70 кг.

Отметим, что в примерах вышеприведённых опытов могут наблюдаться и другие события. Так, в опыте бросания 2-х игральных кубиков могут произойти

(или не произойти) и такие события:  $X_1$  - сумма выпавших очков четна;  $X_2$  - число очков, выпавших на 1-ом кубике не меньше числа очков, выпавших на 2-ом;  $X_3$  - абсолютная величина разности очков, выпавших на кубиках, равна 2;  $X_4$  - сумма числа очков, выпавших на кубиках, равна 15;  $X_5$  - число очков, выпавших на 1-ом кубике больше 3-х, а на 2-ом кубике не больше 2-х и т.д. Всякий «не разлагаемый» исход опыта называется – *элементарным событием*.

Ясно так же, что в одном и том же опыте различные события могут происходить одновременно (или их совместное появление в этом опыте может оказаться невозможным); может иметь место и такая ситуация, что появление события  $A$  влечёт за собой появление события  $B$ . Так, в опыте г) с выниманием игральной карты, событие  $Y_1$  - появление короля и событие  $Y_2$  - появление карты пиковой масти могут произойти одновременно, в то время как, одновременное появление событий:  $Z_1$  - состоящего в том, что вынутая карта крестовой масти и  $Z_2$  - состоящего в том, что вынутая карта бубновой масти, невозможно.

### 2.1.2 Классификация событий

Рассматривая примеры событий а) - з) пункта 1 можно отметить, что каждое из них обладает определённой степенью возможности. Интуиция подсказывает нам, что при бросании двух игральных костей (кубиков), событие, состоящее в том, что сумма очков, выпавших на обоих кубиках равна 12 обладает меньшей степенью возможности, чем событие, состоящее в том, что сумма выпавших на кубиках очков - нечётна; событие же состоящее в том, что сумма выпавших очков равна 15 вообще в этом опыте никогда не произойдёт.

**Определение 2.** Пусть  $A$  - событие, являющееся одним из возможных результатов опыта  $S$ . Событие  $A$  называется: а) *достоверным*, если в результате проведения опыта  $S$  оно обязательно произойдёт; б) *невозможным* если в результате проведения опыта  $S$  оно заведомо не может произойти.

Через  $S^*$  - обозначим множество всех возможных событий, которые могут произойти (или не произойти) в опыте  $S$ .

**Пример 2.** Опыт - два выстрела по мишени. Событие  $A$ , состоящее в том, что мишень или поражена или не поражена, является достоверным. Событие  $B$ , состоящее в 3-х кратном поражении мишени, является невозможным.

**Определение 3.** Пусть  $A_1; A_2; \dots; A_i \in S^*$ . События  $A_1; A_2; \dots; A_i$  называются: а) *несовместными* в опыте  $S$ , если одновременное появление любых двух из них в этом опыте не возможно, б) *равновозможными* в опыте  $S$ , если есть все основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

**Пример 3.** а) Опыт - бросание монеты. События:  $A$  - выпадение орла и  $B$  - выпадение решки являются равновозможными и несовместными. (Естественно предполагается, что монета, при её бросании, не может стать на ребро или исчезнуть из поля зрения.) б) Опыт - вынимание карты из стандартной колоды.

События:  $A$  - появление карты бубновой масти и  $B$  - появление шестёрки являются совместными, но не являются равновозможными.

**Определение 4.** Пусть  $A_1; A_2; \dots; A_l \in S^*$ . Говорят, что события  $A_1; A_2; \dots; A_l$  в опыте  $S$  образуют *полную группу событий*, если в результате опыта  $S$  обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

**Пример 4.** а) Опыт - выстрел по мишени. События:  $A_1$  - промах и  $A_2$  - поражение мишени образуют полную группу.

### 2.1.3 Пространство элементарных событий

В специально организованных опытах (типа азартных игр) наблюдается определённая симметрия возможных исходов; в таких опытах равновозможность исходов изначально обеспечена правилами их проведения (правилами игры). В силу геометрической симметрии игрального кубика и однородности материала, из которого он изготовлен, можно считать, что события  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ , где  $E_i$  - событие, состоящее в выпадении  $i$  очков в опыте бросания кубика ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) являются равновозможными.

Отметим, что кроме этого, совокупность событий является полной группой несовместных событий. Аналогичными свойствами обладают события  $P; K; B; Ч$ , состоящие соответственно в появлении карты пиковой, крестовой, бубновой, и червовой масти в опыте вынимания карты из колоды. Примеры, подобные вышеприведённым, охватываются, так называемой классической схемой теории вероятностей. В рамках этой схемы рассматриваются такие опыты  $S$ , из совокупности  $S^*$  которых можно выделить конечную подсовокупность  $\Omega_S$  событий, обладающих следующими свойствами:

а)  $\Omega_S$  образует полную группу несовместных равновозможных событий.

б) Для любого события  $A \in S^*$ , по появившемуся событию из  $\Omega_S$  можно достоверно судить о том, произошло событие  $A$  или нет.

События из подсовокупности  $\Omega_S$  называются элементарными событиями. Пару  $\langle S; \Omega_S \rangle$  будем называть пространством элементарных событий опыта  $S$ . В дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать опыты, сводящиеся к классической схеме. Несмотря на определённую недостаточность классической схемы, её рамки позволяют решать многие практические задачи.

Требование в), налагаемое на  $\Omega_S$  позволяет для каждого события  $A$  (как одного из возможных результатов опыта  $S$ ) выделить подмножество  $\Omega_S(A)$  множества  $\Omega_S$ , включающее в себе те элементарные события, наступление которых гарантирует появление события  $A$ . Элементарные события из  $\Omega_S(A)$  называются благоприятствующими событию  $A$ .

**Пример 5.** а) Опыт  $S$  - бросание игрального кубика;  $A$  - событие, состоящее в том, что число выпавших очков - больше двух;  $B$  - событие, состоящее в том, что число выпавших очков - чётно. Тогда

$$\Omega_S(A) = \{E_3, E_4, E_5, E_6\}; \quad \Omega_S(B) = \{E_2, E_4, E_6\},$$

где как и раньше  $E_i$ - событие состоящее в том, что число выпавших очков равно  $i$  ( $i=1,2,3,\dots,6$ );

б) Опыт  $S$  - бросание 2-х монет. Совокупность  $\Omega_S$  содержит четыре элементарных события, которые символически можно обозначать так:

$$\langle p, p \rangle; \langle o, o \rangle; \langle o, p \rangle; \langle p, o \rangle,$$

где, к примеру событие  $\langle p, o \rangle$  состоит в том, что на первой монете выпала решка, а на второй - орёл. Аналогичным способом расшифровываются и другие события. Пусть  $A$  - событие, состоящее в том, что в результате опыта  $S$  «орёл» появится хотя бы один раз. Тогда  $\Omega_S(A) = \{\langle o, o \rangle; \langle o, p \rangle; \langle p, o \rangle\}$ . Очевидно, что если  $A$  - достоверное событие, то  $\Omega_S(A) = \Omega_S$ ; если же  $A$  - невозможное событие, то  $\Omega_S(A) = \emptyset$ . Если  $M$  произвольное множество, то через  $B(M)$  обозначается множество всех его подмножеств. ( $B(M)$  называется *булеаном* множества  $M$ ). Нетрудно видеть, что отмеченное выше соответствие между множествами  $S^*$  и  $B(\Omega_S)$  является отображением первого из этих множеств на второе.

#### 2.1.4 Отношения между событиями

Ранее мы уже встречались с ситуацией, когда появление одного из двух событий  $A, B \in S^*$  гарантирует появление другого, т.е. между событиями из  $S^*$  существуют определённые отношения. Определим важнейшие из них.

**Определение 5.** Пусть  $A, B \in S^*$ . Будем говорить, что: а) Событие  $B$  является *следствием* события  $A$  (символически  $A \rightarrow B$ ), если появление события  $A$  влечет за собой появление события  $B$ . б) События  $A$  и  $B$  являются *равносильными* (символически  $A \equiv B$ ), если одновременно  $B$  является следствием  $A$  и  $A$  является следствием  $B$ .

**Пример 6.** а) Опыт  $S$  - бросание монеты. Пусть  $A$  - событие, состоящее в не выпадении решки. Тогда  $A \in B$ .

б) Опыт  $S$  - вынимание карты из колоды;  $A$  - событие, состоящее в появлении червовой дамы,  $B$  - событие, состоящее в появлении карты червовой масти, т.е.  $A \rightarrow B$ .

Отметим следующие свойства введённых отношений:

- 1)  $A \rightarrow B$ ;
- 2) Если  $A \rightarrow B$  и  $B \rightarrow C$ , то  $A \rightarrow C$ ;
- 3) Если  $H$  - невозможное событие, а  $D$  - достоверное событие, то  $H \rightarrow A$  и  $A \rightarrow D$ ;
- 4) Если  $A \rightarrow B$  и  $B \rightarrow A$ , то  $A \equiv B$ ;
- 5)  $A \equiv B$ ;

- 6) Если  $A \equiv B$ , то  $B \equiv A$ ;  
 7) Если  $A \equiv B$ ,  $B \equiv C$ , то  $A \equiv C$ ;  
 для любых событий  $A, B, C \in S^*$

### 2.1.5 Операции над событиями

Выше было отмечено, что между событиями наблюдается определённые отношения. При этом, нетрудно видеть, что отношение  $\rightarrow$  - следования аналогично отношению  $<$  - меньше для множества действительных чисел, а отношение  $\equiv$  - равносильности – отношению  $=$  - равно. Естественным продолжением этих аналогий является определение алгебраических операций на множестве  $S^*$

**Определение 6.** Пусть  $A, B \in S^*$ .

а) *Суммой* (или объединением) событий  $A$  и  $B$  называется событие  $A + B$ , которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие  $A$  или событие  $B$  или события  $A$  и  $B$  происходят одновременно.

б) *Произведением* (или пересечением) событий  $A$  и  $B$  называется событие  $A \times B$ , которое происходит тогда и только тогда, когда события  $A$  и  $B$  происходят одновременно.

в) *Противоположным* к событию  $A$  называется событие  $\bar{A}$ , которое происходит тогда и только тогда, когда событие  $A$  не происходит.

г) *Разностью* событий  $A$  и  $B$  называется событие  $A \setminus B$ , которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие  $A$  и не происходит событие  $B$ .

Из этого определения следует, что если  $A, B \in S^*$ , то  $A + B, A \times B, A \setminus B$  также принадлежат  $S^*$ .

**Пример 7.** а) Опыт - бросание игрального кубика,  $A$  - появление нечетного числа очков;  $B$  - появление числа оков большего 2-х. Тогда  $A \times B$  - событие, состоящее в том что выпало 3 или 5 очков;  $\bar{A}$  - событие, состоящее в выпадении нечетного числа очков;  $A + B$  - событие, состоящее в не выпадении 2-х очков;  $A \setminus B$  - событие состоящее в том, что выпало одно очко.

б) Опыт - вынимание карты из колоды,  $A$  - появление туза;  $B$  - появление карты пиковой масти. Тогда  $A + B$  - появление или туза или карты пиковой масти;  $A \times B$  - появление пикового туза.

Отметим простейшие свойства введенных операций:

- 1)  $A + B = B + A$
- 2)  $A \times B = B \times A$
- 3)  $A + A = A$
- 4)  $A \times A = A$
- 5)  $\bar{\bar{A}} = A$
- 6)  $(A + B) + C = A + (B + C)$



- 7)  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$   
 8)  $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$   
 9) Если  $D$  - достоверное, а  $H$  - невозможное событие, то  
 а)  $A + H = A$   
 б)  $A + D = D$   
 в)  $A \times H = H$   
 г)  $A \times D = A$   
 д)  $A + \bar{A} = D$   
 е)  $A \times \bar{A} = H$   
 ж) Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то  $A \times B = H$   
 з) Если события  $\{A_i / i = 1, 2, \dots, t\}$  образуют полную группу, то  $\sum_{i=1}^t A_i = D$ .

Эти свойства показывают, что введённые операции обладают многими свойствами, присущими операциям над действительными числами. В частности, операции «+» и « $\times$ » коммутативны и ассоциативны; операция « $\times$ » дистрибутивна относительно операции «+».

### 2.1.6 Диаграммы Эйлера-Венна

Отождествление событий с подмножеством элементарных событий, им благоприятствующих, даёт возможность наглядной интерпретации операций над событиями посредством, так называемых диаграмм Эйлера-Венна. Делается это так. Множество  $\Omega_S$  и его подмножества  $\Omega_S(A)$  изображаются плоскими выпуклыми геометрическими фигурами. Обычно, в качестве фигуры соответствующей  $\Omega_S$  берут прямоугольник, а в качестве фигур, соответствующих  $\Omega_S(A)$  берут круги или эллипсы, полностью лежащие в этом прямоугольнике, при этом всякая точка фигуры, изображающей  $\Omega_S(A)$  интерпретируется, как элементарное событие, благоприятствующее событию  $A \in S^*$ .

Фигура, соответствующая результату операции, обычно заштриховывается (рисунок 2.1.6.1).

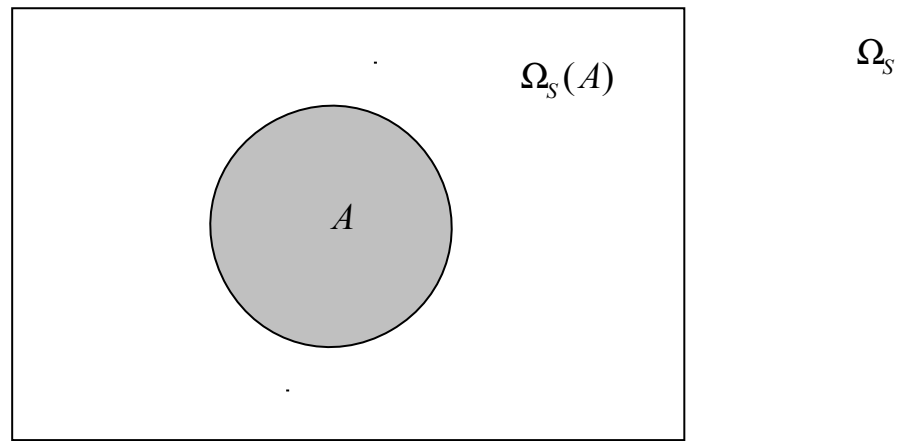


Рисунок 2.1.6.1

Диаграммы интерпретирующие операции, выглядят следующим образом (рисунок 2.1.6.2: а, б, в, г):

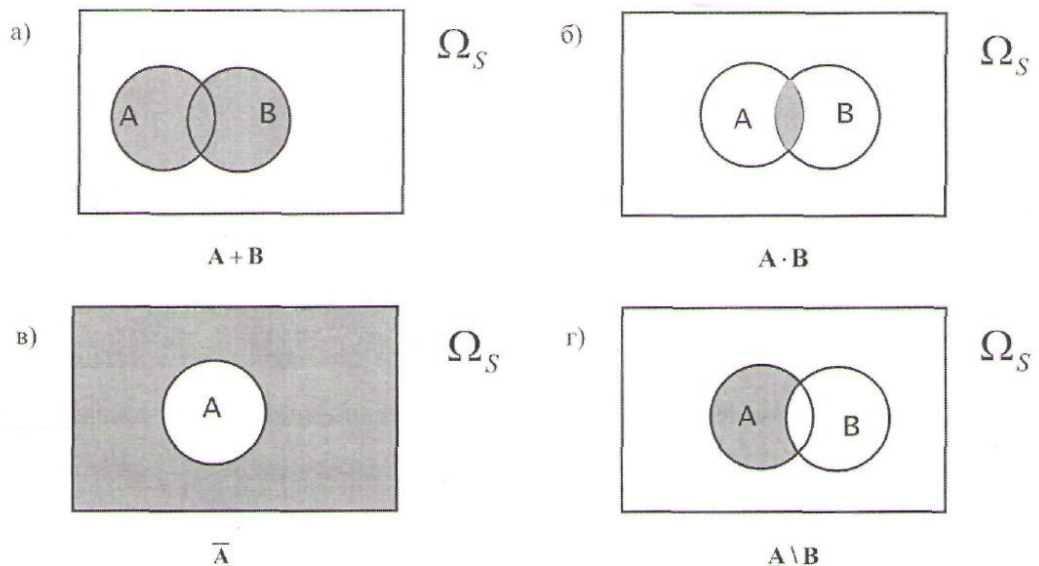


Рисунок 2.1.6.2

## 2.2 Классическое определение вероятности

В классической схеме теории вероятностей предполагается, что элементарные события из  $\Omega_S$  являются равновероятными. Это дает следующий способ числовой оценки  $P(A)$  меры возможности появления любого события  $A \in \Omega_S$ . Пусть  $\Omega_S$  состоит из элементарных событий:  $\Omega_S = \{E_i / i = 1, 2, \dots\}$ . Каждому элементарному событию  $E_i$  припишем в качестве числовой оценки меры возможностей его появления, число  $P(E_i) = 1/n (i = 1, 2, \dots, n)$ . Так как для всякого события  $A \in S^*$  имеет место равенство:

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} + \dots + E_{i_m}.$$

где  $\{E_{i_1} + E_{i_2} + \dots + E_{i_k}\} = \Omega_A$ , то естественно положить  $P(A)$  равным

$$P(E_{i_1}) + P(E_{i_2}) + \dots + P(E_{i_m}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ раз}} = \frac{m}{n}.$$

Это дает возможность дать следующее определение:

**Определение 7.** Вероятностью случайного события  $A \in S$ , где  $S$  - опыт, сводящийся к классической схеме, называется отношение числа  $m$  -элементарных событий (исходов), благоприятствующих событию  $A$  к общему числу  $n$  элементарных событий (исходов).

Формула  $P(A) = \frac{m}{n}$  дает классическое определение вероятности.

**Пример 8.** Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:  $A$  - события, состоящего в том, что сумма выпавших очков равна семи;  $B$  - событие, состоящее в том, что сумма выпавших очков равна восьми, а разность - четырем.

Прежде всего, определим пространство элементарных событий  $\langle S, \Omega_S \rangle$  этого опыта. Элементарными его исходами будут события, состоящие в выпадении некоторого числа очков  $r$  на 1-ой кости и некоторого числа очков  $s$  на 2-ой кости, т.е., с математической точки зрения, пары чисел  $\langle r, s \rangle$ , где  $1 \leq r \leq 6, 1 \leq s \leq 6$ . Так как с каждым значением числа  $r$  можно связать шесть различных значений числа  $s$ , то число элементарных событий множества  $\Omega_S$  равно  $6 \cdot 6 = 36$ , т.е.  $n = 36$ . Подсчитаем число  $m_A$  - число событий, благоприятствующих  $A$  и  $m_B$  - число событий, благоприятствующих  $B$ .

По условию  $\langle r, s \rangle \in \Omega_S(A)$  тогда и только тогда, когда  $r + s = 7$ . Выпишем все пары, удовлетворяющие этому условию:

$$\langle 1, 6 \rangle; \langle 2, 5 \rangle; \langle 3, 4 \rangle; \langle 4, 3 \rangle; \langle 5, 2 \rangle; \langle 6, 1 \rangle.$$

Их число равно 6, т.е.  $m_A = 6$ . Отсюда

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Аналогично, выписывая все пары  $\langle r, s \rangle$ , удовлетворяющие условиям:  $(r + s = 8)$  и  $(r - s = 4)$  или  $(s - r = 4)$ , т.е. пары  $\langle 6, 2 \rangle$  и  $\langle 2, 6 \rangle$ , получаем, что  $m_B = 2$ . Отсюда

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Отметим, что прежде чем принимать формулу  $P(A) = \frac{m_A}{n}$  классического определения вероятностей для вычисления вероятности события  $A \in S^*$ , нужно

предварительно установить, что опыт  $S$  охватывается классической схемой, т.е. найти ответы на вопросы:

1. Какие события в опыте  $S$  являются элементарными, т.е. определить пространство элементарных событий  $\langle S, \Omega_s \rangle$ .
2. Найти число  $n$  этих элементарных событий (исходов).
3. Определить какие исходы благоприятствуют событию  $A$  и найти число  $m_A$ .

Из формулы  $P(A) = \frac{m_A}{n}$ , с учетом того, что  $0 \leq m_A \leq n$ , вытекают следующие свойства вероятности  $P(A)$ :

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$
2.  $P(\emptyset) = 0$
3.  $P(\Omega) = 1$
4. Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .

Свойства 1, 2, 3 - очевидны. Свойство 4 проиллюстрируем посредством диаграммы Эйлера-Венна (рисунок 2.2.1):

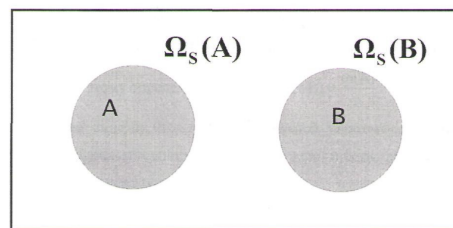


Рисунок 2.2.1

Так как события  $A$  и  $B$  - несовместны, то множества  $\Omega_s(A)$  и  $\Omega_s(B)$  не пересекаются. Отсюда следует, что  $|\Omega_s(A) + \Omega_s(B)| = |\Omega_s(A)| + |\Omega_s(B)|$  (здесь под  $|M|$  понимается число элементов конечного множества  $M$ . т.е. число  $m_{A+B}$  элементарных событий, благоприятствующих событию  $A+B$  равно сумме  $m_A + m_B$  числа  $m_A$  - элементарных событий, благоприятствующих  $A$  и числа  $m_B$  - элементарных событий, благоприятствующих  $B$ ). Отсюда

$$P(A + B) = \frac{m_{A+B}}{n} = \frac{m_A}{n} = P(A) + P(B)$$

## 2.3 Статистическое определение вероятности

Очевидно, что далеко не всякий опыт охватывается классической схемой. События, происходящие (или не происходящие) в опытах, не сводящихся к классической схеме, тем не менее также обладают определенной степенью объективной возможности, причем часто возникает потребность находить численную меру этой возможности. В связи с необходимостью были введены

другие определения вероятности. Одним из них, особенно полезным при решении практических задач, является статистическое определение вероятности.

Пусть  $S$  - некоторый опыт (испытание). Повторим испытание  $S$   $n$  раз, причем для обеспечения независимости этих испытаний, каждое последующее испытание серии будем проводить при одних и тех же неизменных условиях. Для всякого события  $A \in S^*$  через  $m(A)$  обозначим число тех испытаний рассматриваемой серии, в которых событие  $A$  - произошло.

**Определение 8.** Относительной частотой события  $A$  (символически  $q(A)$ ), в серии из  $n$  независимых испытаний, называется отношение числа тех испытаний серии, в которых событие  $A$  произошло, к общему числу испытаний.

$$\text{Согласно этому определению } q(A) = P(A) = \frac{m(A)}{n}.$$

Нетрудно видеть, что для относительной частоты  $q(A)$  выполняются свойства, аналогичные свойствам 1, 2, 3 вероятности  $P(A)$  события  $A$  в классическом определении вероятности:

1.  $0 \leq q \leq 1$
2.  $P(\emptyset) = 0$
3.  $P(\Omega) = 1$

Тем не менее, следует отметить, что относительная частота события определяется только после проведения соответствующей серии опытов (испытаний) и, в общем случае, может меняться от серии к серии, а вероятность событий в опытах, охватываемых классической схемой, определяется до проведения эксперимента (без проведения эксперимента).

Несмотря на то, что  $q(A)$  может меняться от серии к серии, практика показывает, что при увеличении количества независимых испытаний относительная частота приближается к некоторому определенному числу. Этот факт устойчивости относительной частоты неоднократно проверялся экспериментально. Так, некоторые ученые проводили серии испытаний с реальными монетами для того, чтобы выяснить относительную частоту появления орла при достаточно большом числе  $n$  бросания монеты. Приведем некоторые из этих результатов (таблица 4).

Таблица 4

| Исследователь | Число бросков монеты | Относительная частота появления орла |
|---------------|----------------------|--------------------------------------|
|---------------|----------------------|--------------------------------------|

|        |       |        |
|--------|-------|--------|
| Пюффон | 4040  | 0,507  |
| Феллер | 10000 | 0,4979 |
| Пирсон | 24000 | 0,5005 |

Эти результаты показывают, что теоретические предложения о равно возможности (равно вероятности) орла и решки практически согласуются с опытом.

Свойство устойчивости частот является одной из наиболее характерных закономерностей, наблюдаемых в мире случайных явлений. И если практика указывает, что при увеличении числа опытов, относительная частота события, несмотря на ряд случайных отклонений, стремиться к некоторому постоянному числу, то есть все основания считать, что это число и является вероятностью события  $A$ . Описанный подход к определению вероятности называют статистическим определением вероятности.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности, т.е.  $P(A) = q(A)$ . (Другими словами, при статистическом определении в качестве вероятности события берут его относительную частоту.)

Неоднозначность статистической вероятности является существенным недостатком статистического определения вероятности.

**Пример 9.** Отдел технического контроля обнаружил 7 бракованных изделий в партии из 500 случайно отобранных изделий. Найти относительную частоту появления бракованных изделий.

В качестве испытания  $S$ , в этой задаче выступает проверка одного изделия на стандартность. Это испытание дублируется  $n = 500$  раз. В качестве события  $A \in S^*$  рассматривается событие, состоящее в том, что проверяемое изделие нестандартно. По условию:  $m(A) = 7$ . Таким образом,

$$q(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{7}{500} = 0,014.$$

Одним из основных условий, предъявляемых классической схемой к стохастическому эксперименту является требование равно возможности исходов. На практике часто встречаются испытания (эксперименты)  $S$ , которые удовлетворяют всем требованиям классической схемы, кроме одного - нет никаких оснований предполагать, что все исходы опыта равно возможны. В этом случае для определения вероятности любого из событий  $A \in S^*$  поступают следующим образом. Пусть  $\langle S, \Omega \rangle$  - пространство элементарных событий опыта  $S$  и  $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ . Предположим, что найдены статистические вероятности  $q_1 = q(E_1); q_2 = q(E_2); \dots; q_n = q(E_n)$ .

Пусть теперь  $A \in S^*$  и  $\Omega_s(A) = \{E_{i1}, E_{i2}, \dots, E_{it}\}$ . Тогда  $A = E_{i1} + E_{i2} + \dots + E_{it}$  и в качестве статистической вероятности события  $A$  естественно взять число

$$q(A) = q(E_{i_1}) + q(E_{i_2}) + \dots + q(E_{i_t}) = \sum_{j=1}^t q_{i_j}.$$

Таким образом, для испытаний  $S$ , сводящихся к схеме случаев с неравновозможными исходами, достаточно опытным путем установить только вероятность элементарных событий (исходов) и воспользоваться формулой

$$q(A) = \sum_{j=1}^t q_{i_j},$$

где  $A = \sum_{i=1}^t E_{i_j}; q(E_{i_j}) = q_{i_j}; E_{i_j} \in \Omega_A (j = 1, 2, \dots, t)$

Нетрудно проверить, что для так определенной статистической вероятности  $q(A)$  также выполняются условия:

1.  $0 \leq q(A) \leq 1$ ;
2.  $q(0) = 0$ ;
3.  $q(\Omega_S) = 1$ ;
4. Если  $A$  и  $B$  - несовместные события, то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .

## 2.4 Геометрические вероятности

Наряду с требованием равновозможности исходов, условие их конечности существенно ограничивает совокупность испытаний, охватываемых классической схемой. На практике чаще приходится сталкиваться с испытаниями, число возможных исходов которых бесконечно. В связи с этим рассматривается, так называемая геометрическая вероятность.

Рассмотрим следующий эксперимент.

Пусть отрезок длины  $l$  составляет часть отрезка длины  $L$ . Опыт  $S$  состоит в том, что на большем отрезке случайным образом выбирается точка (часто говорят, что на больший отрезок случайным образом брошена точка). В качестве события  $A$  рассматривается событие, состоящее в том, что эта случайным образом выбранная точка окажется на меньшем отрезке (рисунок 2.4.1):

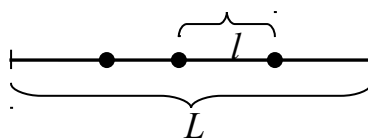


Рисунок 2.4.1

Пространством элементарных событий (исходов опыта  $S$ )  $\langle S, \Omega_S \rangle$  можно считать множество всех точек отрезка  $L$ . Так как точка выбирается случайным образом, то можно считать, что попадания в любую точку этого отрезка равновозможны. Таким образом, опыт  $S$  удовлетворяет всем требованиям классической схемы за исключением одного: множество возможных исходов опыта - бесконечно. Если считать, что вероятность попадания точки в отрезок пропорциональна его длине, то естественно приписать событию  $A$  вероятность равную  $\frac{l}{L}$  т.е.

$$P(A) = \frac{l}{L}.$$

Нетрудно обобщить описанную ситуацию на двумерный и трехмерный случай. В частности, в двухмерном случае вместо отрезка  $L$  берется плоская фигура площади  $S$ , а вместо отрезка  $l$  берется плоская фигура площади  $s$ , целиком лежащая внутри большей фигуры (рисунок 2.4.2):

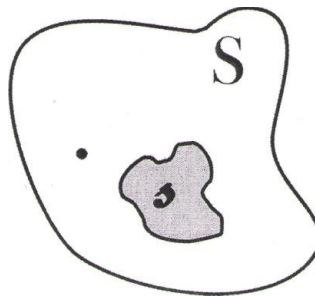


Рисунок 2.4.2

В качестве события  $A$  рассматривается событие, состоящее в том, что точка, случайным образом брошенная на большую фигуру, упадет на меньшую, площади  $S$ . В этом случае,

$$P(A) = \frac{s}{S}.$$

В трехмерном случае рассматривается пространственное тело, объема  $V$  и, полностью содержащаяся в нем тело, объема  $v$ . Опыт  $S$  и событие  $A$  задаются аналогично.

В этом случае,

$$P(A) = \frac{v}{V}.$$

**Пример 10.** а) Перпендикулярно фарватеру реки установлен один ряд мин, расстояние между которыми равно 100 метров (рисунок 2.4.3). Найти



вероятность того, что корабль с наибольшей шириной 30 метров пройдет линию заграждения без столкновения с миной.

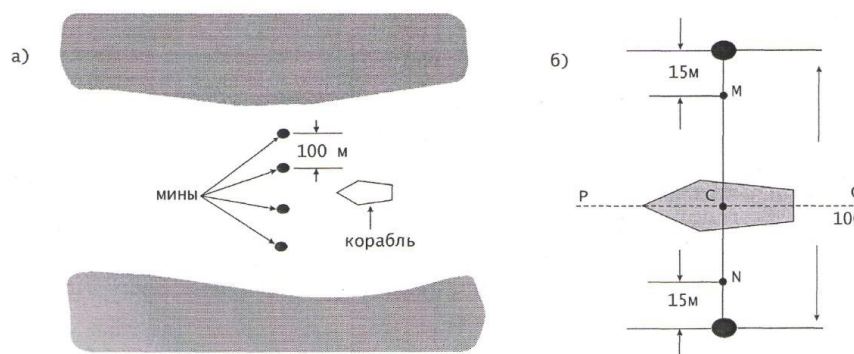


Рисунок 2.4.3

Пусть  $PQ$  - линия симметрии корабля и  $C$  - произвольная точка, лежащая на этой линии. Очевидно, что корабль не столкнется с миной, если точка  $C$  будет принадлежать отрезку  $MN$ . Таким образом, математической моделью этой задачи является опыт, состоящий в случайном бросании точки  $C$  на отрезок  $AB$  для решения задачи необходимо найти вероятность события  $X$ , состоящего в том, что эта точка  $C$  попадет на отрезок  $MN$ . Отсюда:

$$P(A) = \frac{\text{длина } MN}{\text{длина } AB} = \frac{70}{100} = 0,7.$$

б) Паркетный пол составлен из прямоугольных плашек размерами  $6 \times 24$  см. Определить вероятность того, что упавшая на пол монета полностью окажется на одной плитке, если ее диаметр равен 2 см.

Рассмотрим одну плашку (рисунок 2.4.4):

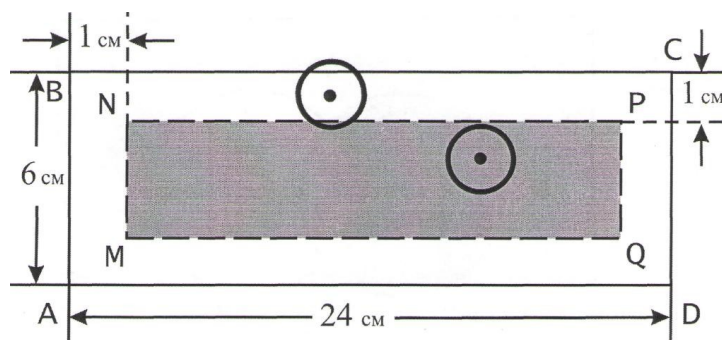


Рисунок 2.4.4

Очевидно, что монета целиком попадет в прямоугольник  $ABCD$ , если ее центр попадет в прямоугольник  $MNPQ$ . Т.е. задача будет решена, если будет найдена вероятность события, состоящего в том, что точка (центр монеты),

случайным образом брошенная на прямоугольник  $ABCD$ , упадет на прямоугольник  $MNPQ$ .

Отсюда:

$$P(A) = \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{2 \cdot 26}{6 \cdot 24} = \frac{11}{18}.$$

## 2.5 Теорема сложения вероятностей

Пусть  $A, B \in S^*$  и вероятности  $P(A)$  и  $P(B)$  событий известны. Возникает естественный вопрос: как вероятность  $P(A+B)$  события  $A+B$  выразить через  $P(A)$  и  $P(B)$ . Для несовместных событий  $A$  и  $B$  ответ на этот вопрос был получен ранее:  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ , т.е. вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. Следует отметить, что хотя это утверждение было получено для классической схемы, оно имеет место в общем случае.

**Теорема 1.** Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

*Доказательство.* Используя свойства операции над событиями, представим событие  $A+B$  в виде суммы двух несовместных событий.

$$A+B = B \cdot \Omega = A+B \cdot (A+\bar{A}) = A+(B \cdot A+B \cdot \bar{A}) = (A+B \cdot A) + B \cdot \bar{A} = A+B \cdot \bar{A}.$$

Т.к.  $A \cdot (B \cdot \bar{A}) = (A \cdot B) \cdot \bar{A} = (B \cdot A) \cdot \bar{A} = B \cdot (A \cdot \bar{A}) = B \cdot \emptyset = \emptyset$ , то события  $A$  и  $B \cdot \bar{A}$  действительно несовместны. Наглядное представление  $A+B$  в виде  $A+B \cdot \bar{A}$  можно продемонстрировать на диаграмме Эйлера-Венна (рисунок 2.5.1).

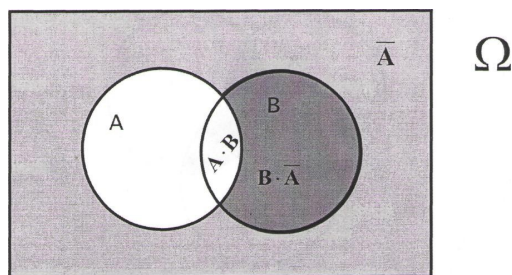


Рисунок 2.5.1

Т.к.  $A+B = A+B \cdot \bar{A}$  и события  $A$  и  $B \cdot \bar{A}$  несовместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B \cdot \bar{A}) \quad (6)$$

Аналогично находим представление  $B = A \cdot B + B \cdot \bar{A}$  события  $B$  в виде суммы двух несовместных событий  $A \cdot B$  и  $B \cdot \bar{A}$ .

Т.е.

$$P(B) = P(A \cdot B) + P(B \cdot \bar{A}) \quad (7)$$

Из (7) получаем, что

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cdot B) \quad (8)$$

Подставляя в (6) выражение для  $P(B \cdot \bar{A})$  из (8), получим:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Очевидно, что если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Если же  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - любые события, то применяя метод полной математической индукции по  $n$ , можно доказать, что

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i \cdot A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

Не выводя эту формулу в общем случае, покажем как она получается из свойств операций над событиями и теоремы 1 при  $n=3$ :

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + A_3) &= P((A_1 + A_2) + A_3) = P(A_1 + A_2) + P(A_3) - P((A_1 + A_2) \cdot A_3) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_3) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cdot A_2) - (P(A_1 \cdot A_3) + P(A_2 \cdot A_3) - P((A_1 \cdot A_3) \cdot (A_2 \cdot A_3))) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cdot A_2) - P(A_1 \cdot A_3) - P(A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3). \end{aligned}$$

Наглядное подтверждение этой формулы дает диаграмма Эйлера-Венна (рисунок 2.5.2).

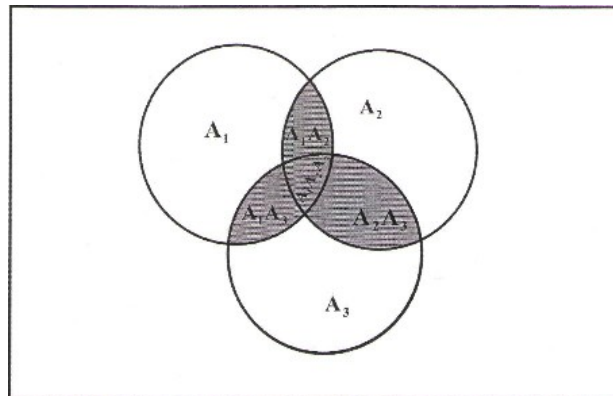


Рисунок 2.5.2

При объединении конечных множеств  $A_1, A_2, A_3$  элементы каждого из множеств  $A_1 \cdot A_2, A_2 \cdot A_3, A_1 \cdot A_3$  учитываются дважды, а множества  $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$  трижды.

В соответствии с этим, чтобы найти число всех различных элементов множества  $A_1 + A_2 + A_3$  нужно один раз исключить элементы каждого из множеств  $A_1 \cdot A_2$ ,  $A_2 \cdot A_3$ ,  $A_1 \cdot A_3$ , но при этом элементы множества  $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$  будут исключены трижды, т.е. окажутся неучтенными. В связи с этим и появляется последнее слагаемое рассматриваемой формулы.

*Следствие 1.* Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n \in S^*$  образуют полную группу событий, то сумма вероятностей этих событий равна 1, т.е.

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

*Доказательство:* Так как  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ , то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(\Omega) = 1 \quad (9)$$

Так как события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  попарно несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (10)$$

Из равенств (9) и (10) получаем:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 \quad (11)$$

Наглядная интерпретация этой формулы приведена на диаграмме Эйлера-Венна (Рисунок 2.5.3).

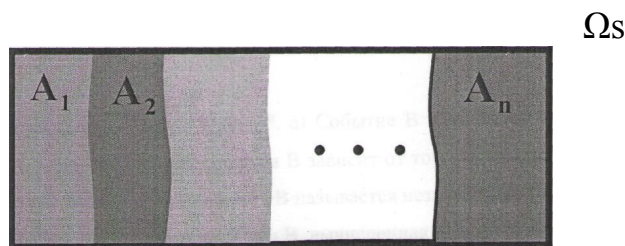


Рисунок 2.5.3

*Следствие 2.* Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, т.е.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (12)$$

*Доказательство:* Так как события  $A$  и  $\bar{A}$  образуют полную группу событий, то равенство (12) есть частный случай равенства (11).

Формула (12) часто применяется на практике, так как дает возможность выразить вероятности  $P(A)$  и  $P(\bar{A})$  друг через друга:  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ;  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

При решении задач может возникнуть ситуация, в которой вероятность интересующего нас события  $A$  найти значительно труднее, чем вероятность события  $\bar{A}$ . В таких  $\bar{A}$  случаях находят  $P(\bar{A})$  и за тем по формуле  $P(A)=1-P(\bar{A})$  находят  $P(A)$ .

## 2.6 Условные вероятности

Рассмотрим опыт, состоящий в последовательном вынимании (наугад, т.е. случайном вынимании) двух шаров из урны, содержащей 5 белых и 7 черных шаров.

Рассмотрим два события:  $A$  - событие, состоящее в том, что 1-ый вынутый шар оказался белым;  $B$  - событие, состоящее в том, что 2-ой вынутый шар оказался белым. Очевидно, что  $P(A)=\frac{5}{12}$ , так как из 12 находящихся в урне шаров только 5 белых. Пытаясь вычислить вероятность события  $B$ , мы сталкиваемся со следующей ситуацией:

а) если событие  $A$  не произошло, то  $P(B)=\frac{5}{11}$ , так как после вынимания 1-го (черного) шара в урне останется 11 шаров, из которых 5 будут белыми;

б) если же событие  $A$  произошло, то  $P(B)=\frac{4}{11}$ , так как после вынимания 1-го шара (белого) в урне останется 11 шаров, из которых 4 будут белыми. Т.е. в рассматриваемой ситуации вероятность события  $B$  зависит от того произошло или не произошло событие  $A$ , т.е. вероятность появления события  $A$  является условной.

**Определение 9.** Пусть  $A, B \in S^*$ . а) Событие  $B$  называется зависимым от события  $A$ , если вероятность события  $B$  зависит от того, произошло событие  $A$  или нет, в противном случае событие  $B$  называется независимым от события  $A$ .

Условная вероятность события  $B$ , вычисленная при условии, что событие  $A$  произошло будет обозначаться  $P(B/A)$ .

## 2.7 Теорема умножения вероятностей

В теореме 1 была получена формула  $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$ , которая показывает, что вероятность суммы 2-х событий выражается через вероятности этих событий и вероятность их произведения. Но вопрос о способе нахождения вероятности произведения пока оставался открытым.

**Теорема 2.** Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло, т.е.  $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B/A)$ .

*Доказательство:* Докажем эту теорему для опытов  $S$  охватываемых классической схемой. Пусть  $n$  - число всех возможных исходов опыта  $S$  (т.е. пространство  $(S; \Omega_s)$  состоит из  $n$  элементарных событий). Через  $m_A$ ,  $m_B$ , и  $m_{A \cdot B}$  обозначим число элементарных событий, благоприятствующих событиям  $A$ ;  $B$  и  $A \cdot B$  соответственно. Тогда

$$P(A) = \frac{m_A}{n} \quad (13)$$

$$P(A \cdot B) = \frac{m_{AB}}{n} \quad (14)$$

Предположим теперь, что событие  $A$  произошло. При этом условии из  $n$  возможных исходов опыта остаются только те, которые благоприятствуют событию  $A$ , т.е.  $m_A$  исходов. Из этих оставшихся  $m_A$  исходов событию  $B$  теперь будут благоприятствовать только  $m_{AB}$  исходов. Отсюда получаем, что

$$P(B/A) = \frac{m_{AB}}{m_A} \quad (15)$$

Из равенств (3) и (15) получаем, что

$$P(A) \cdot P(B/A) = \frac{m_A}{n} \cdot \frac{m_{AB}}{m_A} = \frac{m_{AB}}{n} \quad (16)$$

Из (4) и (16) следует, что  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$ .

Если событие  $B$  не зависит от события  $A$ , то появление события  $A$  не изменяет вероятности события  $B$ , т.е. вероятность события  $B$  становится безусловной.

Равенство  $P(B/A) = P(B)$  формально выражает факт независимости события  $B$  от события  $A$ .

*Следствие 3.* Если событие  $B$  не зависит от события  $A$ , то и событие  $A$  не зависит от события  $B$ .

*Доказательство.* Так как операция умножения событий коммутативна  $A \cdot B = B \cdot A$ , то в произведении  $A \cdot B$  безразлично какой сомножитель считать первым. В соответствии с этим, из теоремы 2 получаем:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) \quad (17)$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (18)$$

По условию  $P(B/A) = P(B)$ , т.е. равенство (17) можно переписать в виде:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (19)$$

Из равенств (18) и (19) следует, что  $P(B)P(A/B)=P(A)P(B)$ . Отсюда, предполагая, что  $P(B) \neq 0$ , получаем равенство  $P(A/B)=P(A)$ , формально выражающее факт независимости события  $A$  от события  $B$ .

Следствие 3 показывает, что отношение независимости событий является взаимным (т.е. симметричным).

*Следствие 4.* Если событие  $A$  и  $B$  независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (20)$$

*Доказательство.* Формула (20) следует из общей формулы (17), так как по условию:  $P(B/A)=P(B)$ .

**Пример 11.** а) Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для 1-го стрелка равна 0,7, а для второго 0,8. Найти вероятность того, что а) при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков; б) при одном залпе в мишень попадет хотя бы один из стрелков.

В этой задаче роль эксперимента играет залп двух стрелков по мишени. Возможные исходы эксперимента можно схематически представить следующим образом:

$$<-;->; <-; +>; <+;->; <+; +>,$$

где, например, исход  $<+; ->$  представляет событие состоящее в том, что 1-ый стрелок поразил мишень, а второй - нет. Введем в рассмотрение следующие события:

$A_1$  - событие состоящее в том, что 1-ый стрелок поразил мишень;

$A_2$  - событие состоящее в том, что 2-ой стрелок поразил мишень.

Тогда события, соответствующие возможным исходам через  $A_1$  и  $A_2$  можно выразить так:

$$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2; \bar{A}_1 \cdot A_2; A_1 \cdot \bar{A}_2; A_1 \cdot A_2.$$

Очевидно, что эти события образуют полную группу элементарных, но неравновозможных, событий.

Нам нужно найти вероятности событий:

а)  $C$  - события, состоящего в том, что в мишень попадет только один из стрелков и б)  $D$  - события состоящего в том, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков. Событию  $C$  благоприятствуют исходы:  $\bar{A}_1 \cdot A_2$  и  $A_1 \cdot \bar{A}_2$ , т.е.  $C = \bar{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot \bar{A}_2$ . Аналогично  $D = \bar{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot \bar{A}_2 + A_1 \cdot A_2$ . Таким образом нам удалось выразить события  $C$  и  $D$  через события  $A_1$  и  $A_2$ , вероятности которых известны. Так как каждый стрелок стрелял из своего оружия, независимо от другого, то события  $A_1$  и  $A_2$  независимы (т.е. независимыми будут и события  $\bar{A}_1 \cdot A_2; A_1 \cdot \bar{A}_2$ ). Отсюда:

$$а) P(C) = P(\bar{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1 \cdot A_2) + P(A_1 \cdot \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) =$$

$$=(1-P(A_1)) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot (1-P(A_2)) = (1-0,7) \cdot 0,8 + (1-0,8) \cdot 0,7 = 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,38.$$

б) Аналогично находим  $P(D)=0,94$ .

в) Из 30 экзаменационных билетов ученик подготовил только 25. Если он вытащил билет, которого он не знает, то ему разрешается взять второй билет. Экзамен считается выдержанным, если школьник ответил на 1-ый билет или, отказавшись отвечать на первый билет, обязательно ответил на второй. Найти вероятность того, что ученик выдержит экзамен.

Введем в рассмотрение событие  $A$ , заключающееся в том, что школьник ответил на 1-ый билет; событие  $B$ , заключающееся в том, что он ответил на 2-ой билет и событие  $C$ , состоящее в том, что он выдержал экзамен. Нетрудно видеть, что  $OA+AB$ , так как экзамен будет сдан тогда и только тогда когда произойдет событие  $A$  и событие  $A$  и  $B$  произойдут одновременно. Заметим, что события  $A$  и  $\bar{A} \cdot B$  несовместны, т.к. несовместными являются  $A$  и  $\bar{A}$ .

Используя теоремы сложения и умножения вероятностей получаем:

$$P(C)=P(A)+P(\bar{A} \cdot B)=P(A)+P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}).$$

Очевидно, что  $P(A)=\frac{25}{30}$ ;  $P(A)=\frac{5}{30}$ . Вычислим  $P(B/\bar{A})$ . Предположим, что событие  $\bar{A}$  произошло, т.е. школьник сначала вытащил билет, которого он не знает. Тогда второй билет ему придется выбирать уже из 29 из которых 25 он не знает. Поэтому  $P(B/\bar{A})=\frac{25}{29}$ .

$$\text{Отсюда: } P(C)=\frac{25}{30} + \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29} \approx 0.977.$$

Другой (и более простой) способ решения этой задачи получается, если перейти к событию  $C$ . Вероятность этого события подсчитывается несколько проще. Имеем:  $C=\bar{A} \cdot B$ , так как по условию задачи, в случае отказа отвечать и на 1-ый и на 2-ой взятые билеты, экзамен считается не сданным. Отсюда:

$$P(C)=1-P(\bar{C})=1-P(\bar{A} \cdot B)=1-P(\bar{A}) P(\frac{\bar{B}}{\bar{A}})=1-\frac{5}{30} \cdot \frac{4}{29} \approx 0.977$$

так как

$$P(\frac{\bar{B}}{\bar{A}} = \frac{4}{29}) \text{ (почему?)}$$

Следствие 4 по вероятностям  $P(A)$  и  $P(B)$  событий  $A$  и  $B$  позволяет выяснять являются они зависимыми или нет.

**Пример 12.** Пусть опыт состоит в том, что на квадрате единичный площади случайным образом выбирается точка. Рассмотрим три события  $A, B, C$ :

$A$  - событие, состоящее в том, что выбранная точка находится выше центра квадрата;



$B$  - событие, состоящее в том, что выбранная точка находится правее центра квадрата;

$C$  - событие, состоящее в том, что выбранная точка находится над главной диагональю квадрата (рисунок 2.7.1 а, б, в).

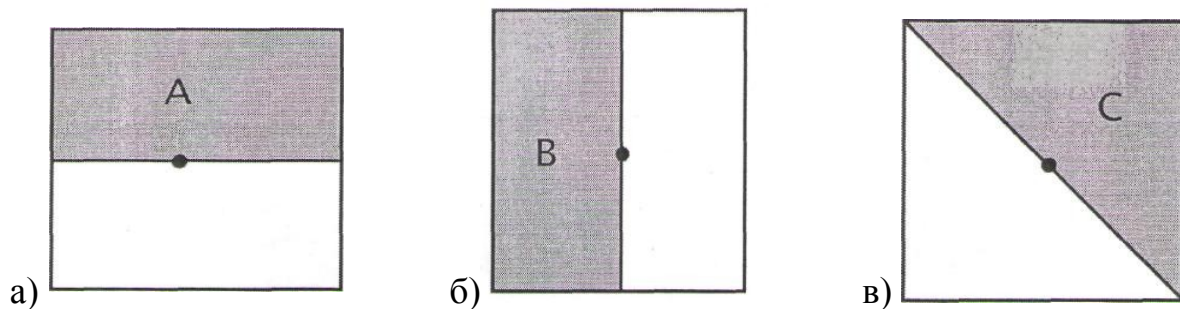


Рисунок 2.7.1

Согласно принципа геометрической вероятности:

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2} ,$$

т.е.

$$P(A) \cdot P(B)=P(A) \cdot P(C)=\frac{1}{4} .$$

Событиям  $A \cdot B$  и  $A \cdot C$  будут тогда соответствовать области а) и б) рисунок 2.7.2 соответственно:

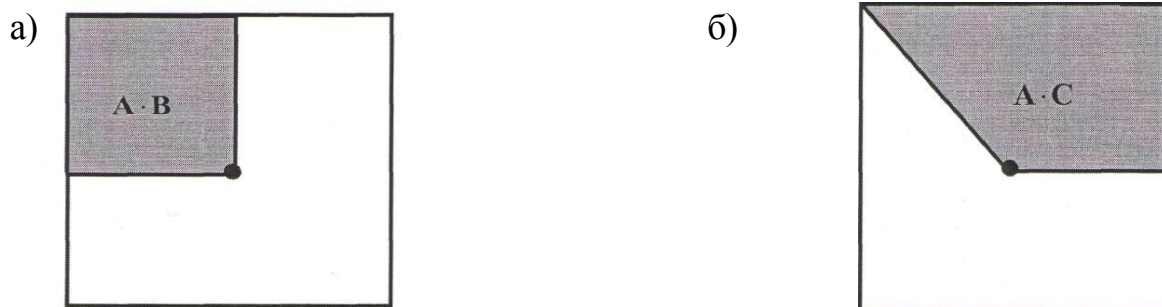


Рисунок 2.7.2

$$\text{Следовательно, } P(A \cdot B)=\frac{1}{4} ; P(A \cdot C)=\frac{3}{8} .$$

Эти вычисления показывает, что события  $A$  и  $B$  независимы ( $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ), а события  $A$  и  $C$  - зависимы ( $\frac{1}{4} \neq \frac{3}{8}$ ).

## 2.8 Формула полной вероятности

Пусть события  $H_1, H_2, \dots, H_n \in S^*$  образуют полную группу несовместных событий и  $A \in S^*$ . Предположим, что событие  $A$  может произойти вместе с одним из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ .

Описанная ситуация иллюстрируется следующей диаграммой Эйлера-Венна (рисунок 2.8.1).

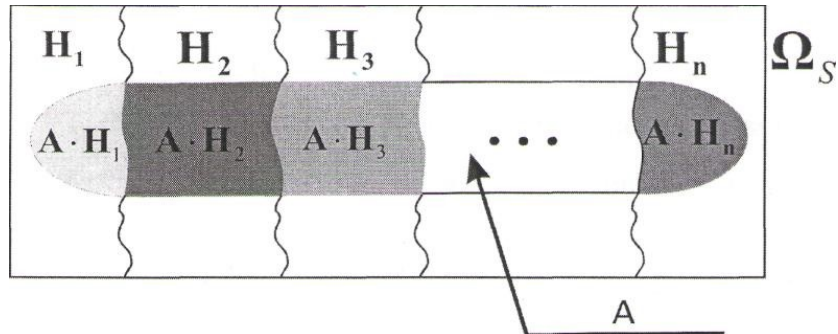


Рисунок 2.8.1

Так как заранее неизвестно, какое из событий  $H_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) наступит, то эти события называют гипотезами.

Предполагается, что известны вероятности  $P(H_i)$  гипотез и условные вероятности  $P(A/H_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Требуется, исходя из этих предположений, определить вероятность события  $A$ . Покажем, что

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n) \quad (21)$$

(или коротко:  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$ )

Эта формула называется формулой полной вероятности и утверждает, что вероятность события  $A$  равна сумме произведений вероятностей гипотез на условные вероятности события  $A$ , вычисленные при условии реализации этих (соответствующих) гипотез.

Формула (21) является простым следствием теорем сложения и умножения вероятностей. Действительно:

$$A = H_1 A + H_2 \cdot A + \dots + H_n \cdot A \quad (22)$$

**Пример 13.** а) На сборку поступают однотипные детали с трех предприятий, причем 1-ое из них поставляет 50%, второе - 30% и третье - остальное количество деталей. Вероятность отправки бракованной детали для 1-го, 2-го и 3-го предприятий равны 0,05; 0,1 и 0,15 соответственно. При сборке наудачу была взята деталь. Какова вероятность того, что она бракована?

Относительно взятой детали можно выдвинуть три гипотезы:  $H_1$ ;  $H_2$ ;  $H_3$ , причем гипотеза  $H_i$  состоит в том, что эта деталь была изготовлена на  $i$ -ом предприятии ( $i=1, 2, 3$ ). Процентное распределение деталей, поступающих на сборку от предприятий-поставщиков, позволяет вычислить вероятности этих

гипотез  $P(H_1)=0,5$ ;  $P(H_2)=0,3$ ;  $P(H_3)=0,2$ . Условные вероятности события  $A$  даны по условию:  $P(A/H_1)=0,05$ ;  $P(A/H_2)=0,1$ ;  $P(A/H_3)=0,15$ . Отсюда, по формуле (21) получаем:

$$P(A)=P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) = \\ = 0,5 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,15 = 0,025 + 0,03 + 0,03 = 0,085.$$

б) По данной схеме дорог (рисунок 2.8.2) определить вероятность того, что пешеход вышедший из пункта  $A$  попадет в пункт  $B$ , если на каждой из развилок дорог он случайным образом выбирает любую дорогу (кроме обратной).

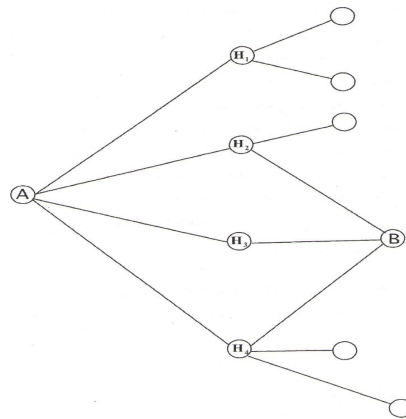


Рисунок 2.8.2

В этой задаче в качестве гипотез возьмем события, состоящие в том, что пешеход попал в один из пунктов  $H_1$ ;  $H_2$ ;  $H_3$ ;  $H_4$ . Обозначим эти гипотезы теми же буквами. Так как любая из дорог выбирается наудачу, то есть все направления из  $A$  для пешехода равновозможны, то

$$P(H) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}.$$

Событие состоящее в том, что пешеход попадет в пункт  $B$  обозначим той же буквой  $B$ . Тогда  $P(B/H_1)=0$ , так как если пешеход попал в пункт  $H_1$  (т.е. если реализовалась гипотеза  $H_1$ ), то ни одна из 2-х дорог, выходящих из этого пункта, не приведет его в пункт  $B$ ;  $P(B/H_2) = \frac{1}{2}$ , так как из пункта  $H_2$  выходят 2 дороги, одна из которых ведет в  $B$ ; аналогично:  $P(A/H_3) = 1$ ;  $P(A/H_4) = \frac{1}{3}$ .

Отсюда, по формуле (15) получаем:

$$P(B) = P(H_1) \cdot P(B/H_1) + P(H_2) \cdot P(B/H_2) + P(H_3) \cdot P(B/H_3) + P(H_4) \cdot P(B/H_4) = \\ = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}.$$

Заметим, что одним из условий правильности выбора гипотез  $H_1, H_2, \dots, H_n$  при решении задач на вычисление полной вероятности является условие:

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1. \text{ (Почему?)}$$

Будем считать теперь, что при тех же самых предположениях относительно гипотез  $H_1, H_2, \dots, H_n$  и события  $A$ , в результате проведения эксперимента  $S$  событие  $A$  произошло. Вероятности оценки гипотез до проведения опыта  $S$ , т.е. до появления события  $A$ , были известны. Естественно возникает вопрос переоценки гипотез в связи с появлением события  $A$ . Т.е. речь идет о нахождении условных вероятностей  $P(H_i/A)$  гипотез  $H_i$  при условии, что событие  $A$  произошло. Покажем, что эти вероятности вычисляются по формуле (она называется формулой Байеса):

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

где  $P(A)$  - полная вероятность события  $A$ .

Действительно, по формуле (2):

$$P(H_i \cdot A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i) \quad (23)$$

С другой стороны по этой же теореме:

$$P(H_i \cdot A) = P(A) \cdot P(H_i/A) \quad (24)$$

Из (23) и (24) получаем:

$$P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(A) \cdot P(H_i/A).$$

Отсюда:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$$

**Пример 14.** В пирамиде 7 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9; для обычной винтовки эта вероятность равна 0,6. Стрелок произвел один выстрел наудачу взятой винтовки и поразил цель. Найти вероятность того, что цель была поражена из винтовки с оптическим прицелом.

Обозначим через  $A$  событие состоящее в том, что при выстреле цель была поражена. В качестве гипотез, естественно, нужно взять события:  $H_1$  - выстрел произведен из винтовки с оптическим прицелом;  $H_2$  - выстрел произведен из обычной винтовки. Из условия задачи следует, что  $P(H_1) = \frac{3}{7}$ ;  $P(H_2) = \frac{4}{7}$ ;  $P(A/H_1) = 0,9$ ;  $P(A/H_2) = 0,6$ . По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{3}{7} \frac{9}{10} + \frac{4}{7} \frac{6}{10} = \frac{51}{70}.$$

По формуле Бейеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{27}{70} : \frac{51}{70} = \frac{27}{51} = \frac{9}{17}.$$

### 3 Решение задач по теории вероятностей

#### 3.1 Решение задач с применением основ теории вероятностей

В процессе обучения математике задачи выполняют разнообразные функции. Учебные математические задачи являются очень эффективным и часто незаменимым средством усвоения учащимися понятий и методов школьного курса математики, вообще математических теорий. Велика роль задач в развитии мышления и в математическом воспитании учащихся, в формировании у них умений и навыков в практических применениях математики. Решение задач хорошо служит достижению всех тех целей, которые ставятся перед обучением математике.

Рассмотрим ряд задач, решение которых не только поможет освоить материал, но и способствует формированию высокого уровня математических знаний, умений и навыков учащихся.

**Задача 1.** Сколькими способами  $m$  школьников могут разместиться по  $n$  аудиториям, если для каждого школьника обязательным условием является только номер аудитории, куда он должен войти, а не занимаемое им в аудитории место?

**Решение.** Перенумеруем всех школьников по прибытию к месту назначения и условимся, кого из них мы считаем первым, кого вторым и т.д. Пусть  $x_1$  номер выбранной аудитории, первым студентом,  $x_2$  - номер аудитории, выбранной вторым студентом и т.д. Строка  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  полностью характеризует распределение школьников по аудиториям. Каждое из чисел  $x_1, x_2, \dots, x_m$  может принимать любое целое значение от 1 до  $n$ . Таким образом, различных распределений по аудиториям будет столько, сколько строк длиной  $m$  можно составить из элементов множества  $M = \{1, 2, \dots, n\}$ . Следовательно, их будет  $\overline{A}_n^m$ .

Ответ:  $\overline{A}_n^m$ .

**Задача 2.** В группе 20 студентов. Сколькими способами можно назначит старосту и помощника старосты группы?

**Решение.** Из 20 студентов старосту можно выбрать только 20 способами. Помощника из оставшихся 19 студентов можно выбрать только 19 способами. Поскольку, для каждого выбранного старосты можно подобрать помощника только 19 способами, то общее число всех возможных способов назначить в группе из 2-х человек старостой и помощника старосты, будет всего  $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$  - число размещений из 20 по два.

Ответ: 380.

**Задача 3.** Для праздника в школе ученики раскрашивали флажки в разные цвета. Верхнюю половину флажка красили в один цвет, а нижнюю – в другой. Для раскраски у них имелись синяя, красная, жёлтая и зелёная краски. Сколько различных двухцветных флажков могли подготовить дети к празднику?

**Решение.** В этом примере тоже размещение из 4 по 2, то есть  $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ .

Ответ: 12.

**Задача 4.** Сколько двухзначных, трёхзначных или четырёхзначных чисел по отдельности из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить, если цифры в любом наборе не повторяются?

**Решение.** Двухзначных чисел  $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$ . Трёхзначных чисел  $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ . Четырёхзначных чисел  $A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ .

Ответ: 120.

**Задача 5.** Сколькими способами 10 человек могут занять очередь в банкомат для получения зарплаты? [3]

**Решение.** Первым может быть любой из десяти человек (десять способов), вторым любой из оставшихся девяти (девять способов), третьим любой из оставшихся восьми (восемь способов), четвёртым любой из оставшихся семи (семь способов), и т.д. В результате получим  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3628800$ . Это число и есть общее количество всех способов, которыми могут десять человек образовать очередь.

**Вывод.** Для того чтобы найти число всех способов, которыми могут десять человек образовать очередь, необходимо перемножить число всех возможных способов занятия каждым из них места в очереди.

Ответ: 3628800.

**Задача 6.** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

**Решение:** Искомое число трехзначных чисел:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Ответ: 6.

**Задача 7.** Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

**Решение:** Искомое число сигналов:

$$A_6^2 = \frac{6!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 30.$$

Ответ: 30.

**Задача 8.** Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

**Решение:** Искомое число способов:  $C_{10}^2 = 10 \cdot 9 / 1 \cdot 2 = 45$ .

Ответ: 45.

**Задача 9.** Какое количество партий сыграли 8 шахматистов, встречаясь с каждым партнером только один раз? [3]

**Решение.** В данной задаче набор пар несущественен.

Двухэлементное множество можно упорядочить только  $2! = 2$  способами ( $2! = P_2$  – число перестановок). Следовательно, общее число партий (пар) будет в

$2!$  меньше, чем число размещений  $A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$ . Поэтому, общее число партий равно:

$$A_8^2 / 2! = 56 / 2 = 28.$$

Решение этой задачи можно изящно иллюстрировать геометрически (рисунок 3.1.1). Рассмотрим выпуклый восьмиугольник  $ABCDEFGKL$ . С каждой любой вершины восьмиугольника можно провести к другим вершинам семь отрезков, т.е. количество встреч партий шахматистов с другими партнерами равно числу отрезков, соединяющих с остальными. Общее число вершин (шахматистов) равно 8, а так как отрезки  $AB$  и  $BA$  и т.д. являются равными, то различных отрезков (партий) будет равно  $8 \cdot 7 / 2$ .

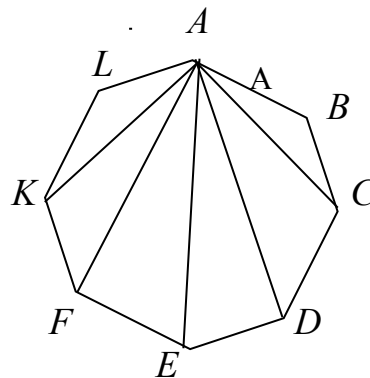


Рисунок 3.1.1 Р

и  
с.  
1

Ответ: 28.

**Задача 10.** Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

**Решение.** Пример относится к классическому определению вероятности. Обозначим через  $A$  событие – «набрана нужная цифра». Абонент мог набрать любую цифру из 10 (т.е. из  $0, 1, 2, \dots, 9$ ) цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможные и образуют полную группу. Благоприятствует событию  $A$  лишь один исход (нужная цифра лишь одна).

Искомая вероятность равна:

$$p(A) = 1/10.$$

Ответ:  $1/10$ .

**Задача 11.** Из пяти букв разрезанной азбуки составлено слово «книга». Котёнок случайно разбросал буквы. Какова вероятность того, что пятилетний Пётр, не умеющий читать, вновь соберёт слово «книга» (событие  $A$ )?

**Решение.** В данном примере мы имеем с числом перестановок из пяти букв. Следовательно,



$$P_5 = 5! = 120.$$

Значит, вероятность этого события равна:

$$P(A) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}.$$

Ответ:  $\frac{1}{120}$ .

**Задача 12.** Из целых чисел от 1 до 20 включительно наугад выбрали одно число. Пусть событие  $A$  выражает все числа, кратные 2; событие  $B$  выражает все числа, кратные 3; событие  $C$  выражает все числа, кратные 5; событие  $D$  выражает все числа, кратные 2, но среди которых нет чисел, кратных 3 или 5; событие  $E$  выражает все числа, кратные 3, но среди которых нет чисел, кратных 2 или 5; событие  $F$  выражает все числа, кратные 5, но среди которых нет чисел, кратных 2 или 3; событие  $G$  выражает все числа, не кратные 2, 3 и 5. Найти вероятности каждого события.

**Решение.** Выпишем для каждого события благоприятствующие элементарные им события, затем находим их вероятности.

$$1) A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}; \quad P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2};$$

$$2) B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}; \quad P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10};$$

$$3) C = \{5, 10, 15, 20\}; \quad P(C) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5};$$

$$4) D = \{2, 4, 8, 14, 16\}; \quad P(D) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4};$$

$$5) E = \{3, 9\}; \quad P(E) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10};$$

$$6) F = \{5\}; \quad P(F) = \frac{1}{20};$$

$$7) G = \{1, 7, 11, 13, 17, 19\}; \quad P(G) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Ответ:  $\frac{1}{2}; \frac{3}{10}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{10}; \frac{1}{20}; \frac{3}{10}$ .

**Задача 13.** При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей утеряна 1 деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной.

Найти вероятность того, какая деталь была утеряна:

1. Стандартная деталь,
2. Нестандартная деталь.

**Решение:** 1. Извлеченная из ящика стандартная деталь, очевидно, не могла быть утеряна; могла быть утеряна одна из остальных 30 деталей  $21 + 10 - 1 = 30$ , причем среди них было 20 стандартных  $21 - 1 = 20$ . Вероятность того, что была утеряна стандартная деталь:

$$p = 20/30 = 2/3.$$

2. Среди 30 деталей, каждая из которых могла быть утеряна, было 10 нестандартных. Вероятность того, что утеряна нестандартная деталь:

$$p = 10/30 = 1/3.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3}; \frac{1}{3}.$$

**Задача 14.** На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых соответственно 5 и 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга.

**Решение.** Площадь кольца (фигуры  $g$ ):  $S_g = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi$ . Площадь большого круга (фигуры  $G$ ):  $S_G = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$ . Искомая вероятность равна:  $p = 0,75$ .

$$\text{Ответ: } 0,75.$$

**Задача 15.** Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекают три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один «король». Этот пример решим двумя способами.

**Решение.** Пусть  $A$  – интересующее нас событие,  $B$  – появление одного короля,  $C$  – появление двух королей,  $D$  – появление трёх королей. Тогда  $A = B + C + D$ , причём события  $B, C, D$  несовместны. Поэтому  $P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$ . Найдём число всевозможных случаев выбора трёх карт из 36, оно равно  $C_{36}^3$ . Число случаев благоприятных событиям  $B, C, D$ , соответственно равно:

$$m_1 = C_4^1 \cdot C_{32}^2; \quad m_2 = C_4^2 \cdot C_{32}^1; \quad m_3 = C_4^3 \cdot C_{32}^0.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2 + C_4^2 \cdot C_{32}^1 + C_4^3 \cdot C_{32}^0}{C_{36}^3} \approx 0,31.$$

$$\text{Ответ: } 0,31.$$

**Задача 16.** В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих, 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

**Решение:** Появление цветного шара означает появление красного или синего.

Пусть  $A$  выражает появление красного шара,  $B$  – появление синего шара. Тогда  $P(A) = 10/30 = 1/3$ ,  $P(B) = 5/30 = 1/6$ , т.к. события  $A$  и  $B$  несовместны, то теорема сложения вероятностей применима, и искомая вероятность равна:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2 .$$

Ответ: 1/2.

**Задача 17.** Стрелок стреляет по мишени разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую равна 0,35. Найти вероятность того, что стрелок попадает либо в первую, либо во вторую область.

**Решение:** События  $A$  - стрелок попал в первую область, событие  $B$  - стрелок попал во вторую область, эти события несовместимы (т.к. попадание в одну область исключает попадание в другую, при одном испытании), следовательно теорема сложения в данном случае применима. Искомая вероятность равна:

$$P(A+B) = 0,45+0,35=0,8.$$

Ответ: 0,8.

**Задача 18.** На Павлодарском заводе выпущены 65% всех имеющихся в крестьянском хозяйстве области тракторов. Требуется найти вероятность того, что выбранный трактор окажется не произведенным на Павлодарском заводе.

**Решение:** Вероятность противоположного события  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ , поэтому

$$p(\bar{A}) = 1 - 0,65 = 0,35.$$

Ответ: 0,35.

**Задача 19.** В ящике имеется  $n$  деталей, из которых  $m$  стандартных. Найти вероятность того, что среди  $k$  наудачу извлечённых деталей (событие  $A$ ) есть хотя бы одна стандартная.

**Решение.** События «среди извлечённых деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди извлечённых деталей нет ни одной стандартной» являются противоположными.

Следовательно,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Найдём вероятность противоположного события  $q = P(\bar{A})$ . Общее число способов, которыми можно извлечь  $k$  деталей среди  $n$  деталей, равно  $C_n^k$ . Число нестандартных деталей равно  $n - m$ ; из этого числа можно  $C_{n-m}^k$  способами извлечь  $k$  нестандартных деталей. В связи с этим вероятность того, что среди извлечённых  $k$  деталей нет ни одной стандартной, равна

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

Ответ:  $1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$

**Задача 20.** Бросаются две игральные кости. Найти вероятность появления хотя бы одной пятёрки?

**Решение.** Пусть  $A$  обозначает событие - «появление хотя бы одной пятёрки на первой кости»,  $B$  - «появление хотя бы одной пятёрки на второй кости». Тогда событие  $A+B$  обозначает событие - «появление хотя бы одной пятёрки при бросании костей». События  $A$  и  $B$  совместные. По формуле находим

$$P(A+B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}.$$

Ответ:  $\frac{11}{36}.$

**Задача 21.** В урне находится 4 белых, 3 синих и 2 чёрных шара. Наудачу последовательно вынимают три шара. Какова вероятность того, что 1-й шар белый, 2-й - синий, 3-й - чёрный.

**Решение.** Введём следующие события: интересующее событие  $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ . Согласно правилам умножения вероятностей  $A_1$  - первым извлекли белый шар,  $A_2$  - вторым - синий,  $A_3$  - третьим будет чёрный шар. Тогда

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2).$$

но

$$P(A_1) = \frac{4}{9}; P(A_2 / A_1) = \frac{3}{8}; P(A_3 / A_2 \cdot A_1) = \frac{2}{7}.$$

Следовательно, перемножая полученных значений, имеем:

$$P(A) = \frac{1}{21} \approx 0,05.$$

Ответ: 0,05.

**Задача 22.** В двух ящиках имеются по 12 деталей. В одном ящике 8, а в другом 9 стандартных деталей. Из каждого ящика вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что:

- а) вынутые детали будут стандартными;  
 б) что одна деталь стандартная, а другая – нет.

**Решение:**  $A$  – событие, что деталь из первого ящика стандартная,  $B$  – событие, что деталь из второго ящика стандартная. Тогда

$$а) \quad P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Так как события  $A$  и  $B$  независимые, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

- б)  $C$  – событие, что одна деталь стандартная, а другая – нет, то

$$C = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

и

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}; \frac{5}{12}.$$

**Задача 23.** В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором – черный, и при третьем – синий.

**Решение:** Пусть событие  $A$  – появление белого шара,  $B$  – появление черного шара,  $C$  – появление синего шара. Тогда  $P(A) = 5/12$ . Вероятность появления черного шара во втором испытании, при условии, что в первом испытании выпал белый шар, т.е. условная вероятность равна:  $P_A(B) = 4/11$ . Вероятность появления синего шара в третьем испытании, при условии, что в первом испытании выпал белый шар, а во втором черный, т.е. условная вероятность равна:  $P_{AB}(C) = 3/10$ . Таким образом, искомая вероятность равна:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = (5/12) \cdot (4/11) \cdot (3/10) = 1/22.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{22}.$$

**Задача 24.** Слово «каре́та», составленное из шести «букв - кубиков», рассыпалось на отдельные буквы, которые затем собраны и положены в коробку. Из коробки наугад извлекают буквы одну за другой и расставляют их друг за другом (слева на право). Какова вероятность получения при таком действии слово «раке́та»?

**Решение.** В этом примере отсутствует схема случайного выбора в прежнем понимании, так как буквы, сложенные в коробке, не все различны (две одинаковых буквы «а»). Представим себе, что одинаковые буквы (в данном случае «а, а») индивидуализированы с помощью знаков 1, 2 (превратились в  $a_1, a_2$ ). Тогда число всевозможных выборок без возвращения будет  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ . Среди них благоприятными для слова «ракета» будет  $2!$  выборков (число перестановок букв  $a_1, a_2$ ). Следовательно,

$$P(A) = \frac{2!}{6!} = \frac{2}{720} = \frac{1}{360} \approx 0,00278.$$

Если исходную задачу решить непосредственно по смыслу, например, для случая слово «ракета», то достаточно ограничиться перестановками трёх первых букв. Число перестановок всего будет  $3! = 6$ . Таким образом, вероятность достижения цели будет равна  $\frac{1}{6}$ . Этот пример показывает, что наши умственные (наглядные) возможности повышают наш «шанс» для решения задач.

Ответ: 0,00278.

**Задача 25.** В первой урне 3 белых и 5 красных шара, во второй 6 белых и 4 красных. Из второй урны в первую наудачу перекалывают 2 шара. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из первой урны, будет белым.

**Решение:**  $A$  – событие, что шар будет белым. Составим гипотезу (полную группу возможных событий) относительно двух шаров, переложённых наудачу из второй урны в первую.

$H_1$  – событие, что оба шара белые;

$H_2$  – событие, что оба шара красные;

$H_3$  – событие, что один шар белый и один красный.

Других вариантов гипотез быть не может, а одно из этих событий обязательно наступит, поэтому  $H_1, H_2, H_3$  – составляют полную группу событий. Тогда применима формула полной вероятности. Найдем вероятности гипотез

$$P(H_1) = P(BC) = P(B) \cdot p(C / B),$$

где  $B$  – событие, что первый шар белый,  $C$  – событие, что второй шар белый.

$$P(H_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}, \quad P(A / H_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};$$

$$P(H_2) = P(\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C} / \overline{B}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}; \quad P(A / H_2) = \frac{3}{10}.$$

$$P(H_3) = P(B\overline{C} + \overline{B}C) = P(B\overline{C}) + P(\overline{B}C) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}, \quad P(A / H_3) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Подставляя в формулу, получим

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{10} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{25} + \frac{16}{75} = \frac{21}{50} = 0,42.$$

Ответ: 0,42.

**Задача 26.** Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет:

а) один раз - (событие  $A$ );

б) не менее двух раз - (событие  $B$ ).

**Решение:** а) По формуле Бернулли, где  $n = 5$ ,  $m = 1$ ,  $p = 0,5$ , получим

$$P_5(1) = \frac{5!}{1!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}.$$

б) Аналогично, находим

$$P_5(0) = \frac{5!}{0!5!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$

События  $A$  и  $B$  образуют полную группу, поэтому  $P_5(0) + P_5(1) + P_5(B) = 1$ . Следовательно,

$$P_5(B) = 1 - \frac{5}{32} - \frac{1}{32} = \frac{13}{16}.$$

Ответ:  $\frac{5}{32}; \frac{1}{32}$ .

**Задача 27.** В коробке находятся 12 белых и 8 чёрных шаров. Найти вероятность того, что среди наугад вынутых 5 шаров 3 из них окажутся чёрными?

**Решение.** Выбрать 5 шаров из 20 можно  $C_{20}^5$  различными способами (все выборки – неупорядоченные подмножества, состоящее из 5 элементов), определим число случаев, благоприятствующих событию  $A$  – (среди 5 извлечённых шаров 3 из них окажется черными). Число способов выбрать 3 черных шара из 8, находящихся в урне, равно  $C_8^3$ . Каждому такому выбору соответствует  $C_{12}^2$  способов выбора 2-х белых шаров из 12 белых шаров в урне. Следовательно, имеем  $C_8^3 \cdot C_{12}^2 = 3696$ ;  $C_{20}^5 = 1550$ .

Согласно формуле  $m = 3$ ;  $n = 5$ ;  $n - m = 2$ ;  $N = 20$ ;  $M = 8$ ;  $N - M = 12$ , получим

$$P(A) = \frac{C_8^3 \cdot C_{12}^2}{C_{20}^5} = \frac{3696}{15504} = 0,23839.$$

Ответ: 0,23839.

**Задача 28.** Пусть в партии из 50 изделий имеется 20 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлечённых 5 изделий окажется ровно три стандартных изделий.

**Решение.** По условию примера  $N = 50$ ;  $M = 20$ ;  $n = 5$ ;  $m = 3$ .  
Искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{C_{20}^3 \cdot C_{30}^2}{C_{50}^5} = 0,234.$$

Ответ: 0,234.

**Задача 29.** Вероятность выпуска бракованного изделия на станке равна 0,2. Определить вероятность того что в партии из десяти выпущенных на данном станке деталей ровно  $k$  будет без брака. Решить задачу для  $k = 0, 1, 10$ .

**Решение:** По условию, нас интересует событие  $A$  выпуска изделий без брака, которое случается каждый раз с вероятностью  $p = 1 - 0,2 = 0,8$ . Нужно определить вероятность того, что это событие произойдет  $k$  раз. Событию  $A$  противопоставляются событие «не  $A$ », т.е. выпуск бракованного изделия. Таким образом, имеем:

$$n = 10; p = 0,8; q = 0,2.$$

Итак, находим вероятность того, что в партии все детали бракованные  $k = 0$ , что только одна деталь без брака  $k = 1$ , и что бракованных деталей нет вообще  $k = 10$ :

$$P_{10}(0) = C_{10}^0 p^0 q^{10} = \frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{10} \approx 10^{-7},$$

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 p^1 q^9 = \frac{10!}{1! \cdot 9!} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^9 \approx 4 \cdot 10^{-6},$$

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10} p^{10} q^0 = \frac{10!}{10! \cdot 0!} \cdot 0,8^{10} \cdot 0,2^0 \approx 0,1.$$

Ответ:  $10^{-7}$ ;  $4 \cdot 10^{-6}$ ; 0,1.

**Задача 30.** Монету бросают 6 раз. Выпадение герба и решки равновероятно. Найти вероятность того, что:

1. герб выпадет три раза;
2. герб выпадет один раз;
3. герб выпадет не менее двух раз.



**Решение:** Итак, нас интересует событие  $A$ , когда выпадет герб. Вероятность этого события равна  $p = 0,5$ . Событию  $A$  противопоставляется событие «не  $A$ », когда выпадает решка, что случается с вероятностью  $q = 1 - 0,5 = 0,5$ . Нужно определить вероятность того, что герб выпадет  $k$  раз.

Таким образом, имеем:

$$n = 6; p = 0,5; q = 0,5.$$

Определим, вероятность того, что герб выпал три раза, т.е.  $k = 3$ :

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^3 = \frac{5}{16}.$$

Теперь определим вероятность того, что герб выпал только один раз, т.е.  $k = 1$ :

$$P_6(1) = C_6^1 p^1 q^5 = \frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^5 = \frac{3}{32}.$$

Осталось определить, с какой вероятностью герб выпадет не менее двух раз. Получается, что нас устроит любое  $k$ , кроме 0 и 1, т.е. надо найти значение суммы:

$$X = P_6(2) + P_6(3) + \dots + P_6(6).$$

Заметим, что эта сумма также равна:

$$1 - P_6(0) - P_6(1),$$

т.е. достаточно из всех возможных вариантов «вырезать» те, когда герб выпал 1 раз ( $k = 1$ ) или не выпал вообще ( $k = 0$ ).

Поскольку  $P_6(1)$  нам уже известно, осталось найти  $P_6(0)$ :

$$P_6(0) = C_6^0 p^0 q^6 = \frac{6!}{0! \cdot 6!} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^6 = \frac{1}{64},$$

$$X = 1 - P_6(0) - P_6(1) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{3}{32} = \frac{57}{64}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{16}; \frac{3}{32}; \frac{57}{64}.$$

Выполнение этих заданий воспитывает у учащихся такие качества знаний, как глубина и полнота, осознанность и оперативность.

### 3.2 Решение задач повышенной сложности

Задачи повышенного уровня трудности необходимы в обучении математике. Использование задач повышенного уровня сложности на уроках является одним из необходимым компонентом обучения школьников математике. Объясняется это, прежде всего, возрастающими требованиями, направленными на усиление воспитывающих и развивающих функций обучения. Эти задачи:

- учат детей не только использовать готовые алгоритмы, но и самостоятельно определять оригинальные способы решения задач;
- препятствуют выработке вредных штампов при решении задач, разрушают неправильные ассоциации в знаниях и умениях учащихся и тем самым оказывают положительное влияние на формирование навыков решения типовых задач;
- предполагают развитие у учащихся способности к обнаружению новых связей в знаниях, к переносу знаний в новые условия, к овладению разнообразными приемами умственной деятельности;
- создают благоприятные условия для повышения прочности и глубины знания учащихся, обеспечивают более сознательное овладение основным содержанием курса математики.

Рассмотрим ряд задач повышенного уровня трудности.

**Задача 1.** (Задача о встрече) Два человека договорились о встрече между 12 и 13 часов дня. Условились, что тот, который придёт первым, ждёт второго в течение 15 мин, после чего уходит (если не встретились). Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый на удачу выбирает момент своего прихода. [3]

**Решение.** Пусть  $x$  время прихода первого человека, а  $y$  время прихода второго человека. Возможные значения  $x$  и  $y$ :  $0 \leq x \leq 60$ ,  $0 \leq y \leq 60$  (в качестве единиц масштаба возьмём минуты), которые на плоскости  $Oxy$  определяют квадрат со стороной равной 60. Точки этого квадрата изображают время встречи людей, (рисунок 3.2.1).

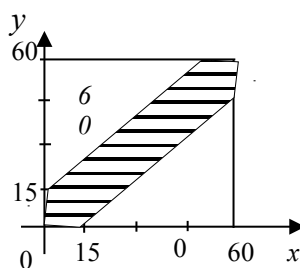


Рисунок 3.2

Тогда вероятное пространство выражается областью:  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x; y \leq 60\}$  все исходы в  $\Omega$  - равновозможные, так как лица приходят наудачу. Обозначим через  $A$  событие, когда встреча лиц произойдёт, если разность между моментами их прихода будет не более 15 мин по абсолютной величине, следовательно,  $A = \{(x, y) : |x - y| \leq 15\}$ . Неравенство

$$|x - y| \leq 15 \Leftrightarrow x - 15 \leq y \leq x + 15$$

определяет область точек (на чертеже - заштрихованная область  $(g)$ ), которая благоприятствуют исходам встрече двух лиц.

Таким образом, искомая вероятность определяет геометрическую вероятность и определяется формулой:

$$p(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)},$$

где соответственно, площадь области  $(g)$ :  $S_g = 60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45 = 1575$ , а площадь области  $(G)$  равна:  $S_G = 60^2 = 3600$ . Следовательно

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{1575}{3600} = 0,4375.$$

Ответ: 0,4375.

**Задача 2. (о разорении игрока).** Рассмотрим игру в «орлянку», когда игрок выбирает «герб» или «решетку», после чего бросается монета. Если выпадёт сторона монеты, названная игроком, то он выигрывает, получая 1 руб., в противном случае столько же он проигрывает. Предполагается, что начальный капитал игрока составляет  $x$  руб. и игрок ставил себе целью довести свой капитал до  $y$  руб.,  $x < y$ . Игра продолжается до тех пор, пока, либо игрок наберёт заранее определённую сумму  $y$ , которую он наметил, либо разорится, проиграв весь имеющийся у него капитал. Какова вероятность того, что игрок разорится? [3]

**Решение.** Введём обозначения событий  $H_1 = \{\text{игрок выиграл на первом шаге}\}$ ,  $H_2 = \{\text{игрок проиграл на первом шаге}\}$ ,  $A = \{\text{игрок разорится, имея начальный капитал } x \text{ руб.}\}$ . Обозначим через  $p_x = P(A)$  искомую вероятность, очевидно, эта вероятность определена для любого  $x$ ,  $0 \leq x \leq y$ , а также  $p_0 = 1$ ,  $p_y = 0$ . Поскольку монета симметрична, то  $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$ . Если наступает событие  $H_1$ , то капитал игрока стал  $x+1$ , а если наступает событие  $H_2$ , то капитал игрока стал  $x-1$ . После этого можно считать, что игра начинается снова и согласно принятому обозначению  $P(A/H_1) = p_{x+1}$ ;  $P(A/H_2) = p_{x-1}$ ; где  $x$  - любое число,  $1 \leq x \leq y-1$ . Поскольку  $A = A\Omega = A(H_1 + H_2) = AH_1 + AH_2$  и события  $H_1$  и  $H_2$  несовместны, то по формуле сложения вероятностей (с учётом равенства  $HA = AH$ ) получим

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2).$$

Применяя формулу умножения вероятностей, получим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)$$

Это в силу принятых обозначений даёт следующее рекуррентное уравнение для вероятностей  $p_x = P(A)$ :

$$p_x = \frac{1}{2} p_{x+1} + \frac{1}{2} p_{x-1}, \quad 1 \leq x \leq y-1.$$

Известно, что решением этого уравнения является только линейная функция  $p_x = c_1 + c_2 x$ , где  $c_1, c_2$  - произвольные коэффициенты. Эти коэффициенты можно определить, пользуясь граничными условиями  $p_0 = 1; p_y = 0$ , подставляя их в выражение для  $p_x$  значения  $x = 0$  и  $x = y$ . Имеем  $c_1 = 1, c_1 + c_2 y = 0$ . Откуда следует, что  $c_1 = 1, c_2 = -y^{-1}$  и значит,

$$p_x = 1 - \frac{x}{y}, \quad 0 \leq x \leq y.$$

В частности, если игрок желает увеличить свой вклад до  $y = \alpha \cdot x$  ( $\alpha > 0$ ), то вероятность такого пожелания игрока равна

$$p_x = 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

**Задача 3** (Де Мере). Ещё в XVII веке Шевалье Де Мере задался вопросом: какая сумма очков имеет больше шансов выпасть при бросании двух игральных костей. Число 11 (событие  $A$ ) или 12 (событие  $B$ )? Сумму 11 могут составить лишь два числа; 5 и 6, а сумму 12 тоже два числа, 6 и 6. На первый взгляд шансы у этих событий равны. Так ли это?

**Решение.** Будем считать игральные кости различные. Пусть (мысленно) одна будет красной, а другая – жёлтой. Согласно правилу комбинаторики, различные комбинаций очков на разноцветных костях всего возможно  $6 \cdot 6 = 36$ . Из них для наступления первого события  $A$  благоприятствует два элементарных события  $\{(5,6); (6,5)\}$ , а для наступления события  $B$  всего одно элементарное событие  $\{6;6\}$ . Таким образом, вероятность  $P(A) = \frac{2}{36}; P(B) = \frac{1}{36}$ . Поэтому,  $P(A) = 2 \cdot P(B)$ , т.е. шансов наступления событие  $A$  в два раза больше по сравнению с шансов наступления событие  $B$ .

**Задача 4.** Мимо заправки проезжают в 4 раза больше легковых машин, чем грузовых. При этом заправляются каждая вторая грузовая машина и каждая пятая легковая. Найти вероятности того, что заправившаяся машина – легковая.

**Решение:** Составим гипотезу:  $H_1$  – событие, что заправилась легковая машина,  $H_2$  – событие, что заправилась грузовая.  $A$  – событие, что машина заправилась. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2).$$

найдем эти вероятности  $P(H_1) = \frac{4}{5}$  и  $P(H_2) = \frac{1}{5}$ , так как по условию легковых в 4 раза больше грузовых  $P(A|H_1) = \frac{1}{5}$  и  $P(A|H_2) = \frac{1}{2}$ , так как по условию задачи из легковых машин заправляется каждая пятая, а из грузовых – каждая вторая. Тогда  $P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{50}$ . Теперь по формуле Байеса найдем

$$P(H_1 / A) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{13}{50}} = \frac{8}{13}, \quad P(H_2 / A) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{50}} = \frac{5}{13}.$$

Ответ:  $\frac{8}{13}$ .

**Задача 5.** В отборочный цех завода поступает 40% деталей из 1 цеха и 60% процентов из второго цеха. В первом цехе производится 90% стандартных деталей, а во втором 95% стандартных деталей. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется

1. Стандартной.

2. Найти вероятность того, что эта стандартная деталь изготовлена вторым цехом

**Решение.** Выбор детали можно разбить на два этапа. Первый – это выбор цеха. Имеется две гипотезы:  $H_1$  – деталь изготовлена первым цехом,  $H_2$  – деталь изготовлена вторым цехом. Второй этап выбор детали. Событие  $A$  – извлечённая на удачу деталь оказалась стандартной. Понятно, что события  $H_1$  и  $H_2$  образуют полную группу,  $P(H_1) = 0,4$   $P(H_2) = 0,6$ . Числа 0,90 и 0,95 являются условными вероятностями события  $A$  при условии гипотез  $H_1$  и  $H_2$  соответственно, т.е.  $P(A|H_1) = 0,90$ ;  $P(A|H_2) = 0,95$ . По формуле полной вероятности вычисляем

$$P(A) = \sum_{i=1}^2 P(H_i)P(A|H_i) = 0,4 \cdot 0,90 + 0,6 \cdot 0,95 = 0,93.$$

Следовательно, наудачу взятая сборщиком деталь с вероятностью 0,93 будет *стандартной*.

Теперь найдём вероятности того, что эта стандартная деталь изготовлена вторым цехом.

Определим вероятность гипотезы  $H_2$ , способствующего данному результату (т.е. событие  $A$  уже произошло). Применим формулы, получим

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,95}{0,93} = \frac{19}{31} \approx 0,613.$$

Ответ: 0,93; 0,613.

**Задача 6.** Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из лука равна  $\frac{1}{3}$ . Производится шесть выстрелов. Причём выстрелы не зависят друг от друга.

- а) Какова вероятность ровно двух попаданий?
- в) Какова вероятность не менее двух попаданий?
- с) Каково наивероятнейшее число попаданий?

**Решение.** Обозначим через  $A$  событие «попадание при одном выстреле»,  $P(A) = p = 1/3$ ,  $q = P(\bar{A}) = 2/3$ . Число выстрелов  $n = 6$ . Ответ на первый вопрос вычисляем по формуле Бернулли

$$P_6(2) = C_6^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{15 \cdot 16}{3^6} = \frac{80}{243} \approx \frac{1}{3}.$$

Ответим на второй вопрос. Воспользуемся равенствами (4) и (5). Получим

$$P_6(2;6) = 1 - C_6^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 - C_6^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{2^6}{3^6} - \frac{6 \cdot 2^5}{3^6} = \frac{473}{729} \approx \frac{2}{3}.$$

Наивероятнейшее число попаданий лежит в пределах от  $6 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$  до  $6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ , т.е.

$$m_0 = \left[ \frac{4}{3} \right] + 1 = 2.$$

Ответ:  $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 2$ .

**Задача 7.** Пусть игральную кость бросают 20 раз, каково наибольшее вероятностное число выпадения грани 5.

**Решение.**

$$n = 20; p = 1/6; q = 5/6; \alpha_n = np - q = 20 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = 2,5 \Rightarrow m_0 = [2,5] + 1 = 3.$$

Ответ: 3.

**Задача 8 (об одном применении теории чисел в криптографии).** В урне лежат шары, пронумерованные трехзначными числами:  $a \in \{100, 101, 102, \dots, 999\}$ . Наудачу взяли один шар. Какова вероятность того, что все цифры в записи номера вытащенного шара являются нечетными, четными и смешанными (и четные, и нечетные)?

**Решение.** Обозначим:

Событие  $A$  - появление шара, номер которого составлен только из нечетных цифр;

Событие  $B$  - появление шара, номер которого составлен только из четных цифр;

Событие  $C$  - появление шара, номер которого составлен из смешанных, то есть и четных, и нечетных цифр.

Ясно, что  $n$  количество всех трехзначных чисел имеется ровно 900. Найдем  $m_1$  общее количество трехзначных чисел, составленных только из нечетных цифр. Они формируются из следующих однозначных нечетных цифр (разрядов):

$$\{ 1; 3; 5; 7; 9 \}$$

Их количество равно 125

Следовательно, число случаев благоприятствующих появлению события  $A$  равно 125. Поэтому вероятность появления каждого из них равна:

$$p_1 = m_1 / n = 125 / 900 \approx 0,139.$$

Для формирования всех трехзначных чисел с четными цифрами мы должны воспользоваться следующими однозначными числами:

$$\{ 0; 2; 4; 6; 8 \}$$

Их количество равно  $m_2 = 100$ .

Следовательно, число случаев благоприятствующих появлению события  $B$  равно 100. Поэтому вероятность появления каждого из них равна:

$$p_2 = 100 / 900 \approx 0,111.$$

Для того чтобы найти  $m_3$  количество шаров, номера которых составлены из смешанных, то есть и четных, и нечетных цифр мы должны вычесть из общего количества 900 количество уже найденных 125 трехзначных чисел только с нечетными и 100 – только с четными цифрами.

Таким образом, количество указанных чисел будет:

$$m_3 = 900 - 125 - 100 = 675.$$

Поэтому вероятность появления каждого из них равна:

$$p_3 = 675 / 900 = 0,75.$$

Далее составим таблицу (закон) распределения случайной величины  $X = \{125; 100; 675\}$  с соответствующими им вероятностями:

$$P_1 \approx 0.139; P_2 \approx 0.111; P_3 = 0.75,$$

где  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ , то есть мы имеем полную группу событий.

|     |       |       |      |
|-----|-------|-------|------|
| $X$ | 125   | 100   | 675  |
| $P$ | 0,139 | 0,111 | 0,75 |

Здесь учитель может предложить учащимся решить аналогичные задачи для случаев однозначных, двузначных, четырехзначных, пятизначных и шестизначных чисел, что способствуют развитию познавательной самостоятельности школьников, умение применять свои знания на практике.

Рассматривая подобных задач можно вывести формулу для общего случая:

$m_1$  общее количество  $n$ -значных чисел, составленных только из нечетных цифр будет равно –  $5^n$ ,  $n \geq 2$ ;

$m_2$  общее количество  $n$ -значных чисел, составленных только из четных цифр будет равно -  $4 \cdot 5^{n-1}$ ,  $n \geq 2$ ;

Количество всех  $n$ -значных чисел будет равно -  $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 5^{n-1}$ ,  $n \geq 2$ .

Приведем примеры на случаи при  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Сразу заметим, что для  $n = 1$  задача очевидна:

$$X_1 = \{5; 5; 0\} \leftrightarrow P\{0,5; 0,5; 0\}$$

В остальных случаях:

$$X_2 = \{25; 20; 45\} \leftrightarrow P\{0,278; 0,222; 0,5\},$$

$$X_3 = \{125; 100; 675\} \leftrightarrow P\{0,139; 0,111; 0,75\},$$

$$X_4 = \{625; 500; 78755\} \leftrightarrow P\{0,069; 0,056; 0,875\},$$

$$X_5 = \{3125; 2500; 84375\} \leftrightarrow P\{0,035; 0,028; 0,937\}$$

$$X_6 = \{15625; 12500; 871875\} \leftrightarrow P\{0,017; 0,014; 0,969\}.$$

**Вывод:** В общем случае когда  $n$  достаточно большое, легко увидеть, что вероятности появления  $n$ -значных чисел, составленных только с четными и нечетными цифрами убывают:

$$P_1^{(n)} < P_1^{(n-1)} < \dots < P_1^{(1)};$$

$$P_2^{(n)} < P_2^{(n-1)} < \dots < P_2^{(1)}.$$

И вероятность появления  $n$ -значного числа с четными цифрами всегда меньше вероятности появления  $n$ -значного числа с нечетными цифрами. А



вероятность появления  $n$ -значного числа со смешанными цифрами приближается к 1.

Эту задачу можно применить к теории кодирования и криптографии. При кодировании пароля выгоднее всего занумеровать с четными цифрами и чем больше знаков, тем труднее взломать пароль.

### 3.3 Об одном функциональном уравнении и его приложений

Рассмотрим одну вероятностную функцию:

$$f(x) = 3x^2 - 3x + 1$$

Тогда имеет место функциональное уравнение:

$$f(x) = f(1-x)$$

*Доказательство:*

$$3x^2 - 3x + 1 = 3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1 = 3 - 6x + 3x^2 - 3 + 3x + 1 = 3x^2 - 3x + 1.$$

Примеры:

$$1) \quad f(\sin \alpha) = f(1 - \sin \alpha)$$

$$3 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha + 1 = 3(1 - \sin \alpha)^2 - 3(1 - \sin \alpha) + 1$$

$$3 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha + 1 = 3(1 - 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha) - 3(1 - \sin \alpha) + 1$$

$$3 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha + 1 = 3 - 6 \sin \alpha + 3 \sin^2 \alpha - 3 + 3 \sin \alpha + 1$$

$$3 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha + 1 = 3 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha + 1$$

$$2) \quad f(\cos \alpha) = f(1 - \cos \alpha)$$

$$3 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 3(1 - \cos \alpha)^2 - 3(1 - \cos \alpha) + 1$$

$$3 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 3(1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha) - 3(1 - \cos \alpha) + 1$$

$$3 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 3 - 6 \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 3 + 3 \cos \alpha + 1$$

$$3 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 3 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1$$

$$3) \quad f(\operatorname{tg} \alpha) = f(1 - \operatorname{tg} \alpha)$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 3(1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 - 3(1 - \operatorname{tg} \alpha) + 1$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 3(1 - 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 3(1 - \operatorname{tg} \alpha) + 1$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 3 - 6 \operatorname{tg} \alpha + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 + 3 \operatorname{tg} \alpha + 1$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 1$$

$$4) \quad f(\operatorname{ctg} \alpha) = f(1 - \operatorname{ctg} \alpha)$$

$$3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha + 1 = 3(1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 - 3(1 - \operatorname{ctg} \alpha) + 1$$

$$3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha + 1 = 3(1 - 2 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 3(1 - \operatorname{ctg} \alpha) + 1$$

$$3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha + 1 = 3 - 6 \operatorname{ctg} \alpha + 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 3 + 3 \operatorname{ctg} \alpha + 1$$

$$3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha + 1 = 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha + 1$$

$$5) \quad f(a^k) = f(1 - a^k)$$

$$\begin{aligned}
3a^{2k} - 3a^k + 1 &= 3(1 - a^k)^2 - 3(1 - a^k) + 1 \\
3a^{2k} - 3a^k + 1 &= 3(1 - 2a^k + a^{2k}) - 3(1 - a^k) + 1 \\
3a^{2k} - 3a^k + 1 &= 3 - 6a^k + 3a^{2k} - 3 + 3a^k + 1 \\
3a^{2k} - 3a^k + 1 &= 3a^{2k} - 3a^k + 1
\end{aligned}$$

$$6) \quad f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
3\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 3 \cdot \frac{k}{n} + 1 &= 3\left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 - 3\left(1 - \frac{k}{n}\right) + 1 \\
3\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 3 \cdot \frac{k}{n} + 1 &= 3\left(1 - 2 \cdot \frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) - 3\left(1 - \frac{k}{n}\right) + 1 \\
3\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 3 \cdot \frac{k}{n} + 1 &= 3 - 6 \cdot \frac{k}{n} + 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 3 + 3 \cdot \frac{k}{n} + 1 \\
3\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 3 \cdot \frac{k}{n} + 1 &= 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 3 \cdot \frac{k}{n} + 1
\end{aligned}$$

7) Пусть  $x = \zeta(s)$  - дзета-функция Римана. Известно, что  $\zeta(s)$  определяется равенством:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

при  $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ ;  $s = \sigma + it$  - комплексное число. Тогда,

$$f(\zeta(s)) = f(1 - \zeta(s))$$

или

$$\begin{aligned}
3\zeta^2(s) - 3\zeta(s) + 1 &= 3(1 - \zeta(s))^2 - 3(1 - \zeta(s)) + 1 \\
3\zeta^2(s) - 3\zeta(s) + 1 &= 3(1 - 2\zeta(s) + \zeta^2(s)) - 3(1 - \zeta(s)) + 1 \\
3\zeta^2(s) - 3\zeta(s) + 1 &= 3 - 6\zeta(s) + 3\zeta^2(s) - 3 + 3\zeta(s) + 1 \\
3\zeta^2(s) - 3\zeta(s) + 1 &= 3\zeta^2(s) - 3\zeta(s) + 1
\end{aligned}$$

Далее, имеет место функциональное равенство.

**Теорема:**

$$\frac{x^3}{f(x)} + \frac{(1-x)^3}{f(1-x)} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1.$$

*Доказательство:* Представим это уравнение в виде:

$$\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1 \quad (25)$$

Преобразуем левую часть равенства.

Имеем,

$$\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3 - 6x + 3x^2 - 3 + 3x + 1} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1$$

Приведем подобные слагаемые и видим, что знаменатели стали одинаковыми:

$$\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3x^2 - 3x + 1} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1$$

Далее, складываем их, и получаем, что левая часть стала такой же как и правая часть:

$$\frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Приведем одно следствие:

$$\frac{\zeta^3(s)}{f(\zeta(s))} + \frac{(1 - \zeta(s))^3}{f(1 - \zeta(s))} = 1,$$

где  $\zeta(s)$  - дзета-функция Римана.

Функциональное уравнение (25) может быть применено к теории распределения случайных событий.

Именно, рассмотрим следующую задачу.

**Задача (о геометрическом применении функционального уравнения).**

В прямоугольник со сторонами  $a = (x^3)$  уч. ед. и  $b = 1$  уч. ед. помещен меньший прямоугольник со сторонами  $a = (3x^2 - 3x + 1)$  уч. ед. и  $b = 1$  уч. ед., где  $x \in (0; 1)$ .

Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой прямоугольник, попадет также и в малый прямоугольник. Предполагается, что вероятность попадания точки в прямоугольник пропорциональна площади прямоугольника и не зависит от его расположения.

**Решение:** Вероятность события  $A$  «наудачу брошенная точка попала в малый прямоугольник» определяется равенством:

$$p(A) = \frac{S}{S'}, \text{ где}$$

$S$  - площадь малого прямоугольника,

$S'$  - площадь большого прямоугольника,

Изобразим графически (рисунок 3.3.1):

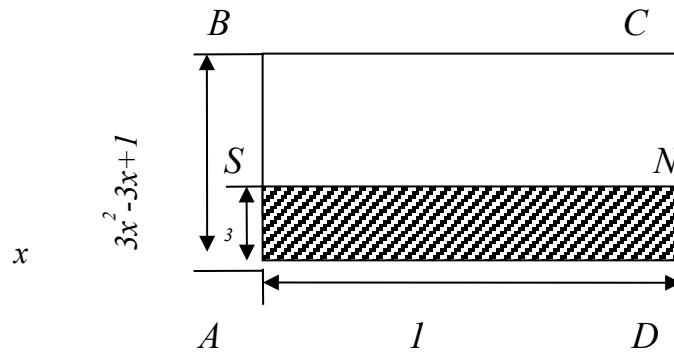


Рисунок 3.3.1

Находим:

$$s = x^3 \cdot 1 = x^3,$$

$$S = (3x^2 - 3x + 1) \cdot 1 = 3x^2 - 3x + 1.$$

Тогда вероятность события  $A$  равна:

$$p(A) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1},$$

$$q(\bar{A}) = \frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1}.$$

$$p + q = 1$$

$$f(x) = 3x^2 - 3x + 1 = q = f(1-x) = 3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1.$$

Заметим, что данная задача может быть применена в физике, химии (теория распада элементарных частиц), а также в военном деле – теории стрельбы.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе были изучены теоретические аспекты, и были отражены основные подходы к изучению теории вероятности в школьном курсе математики.

В первом и во втором разделе были определены основные понятия и раскрыты общие вопросы «Элементы теории вероятностей».

В третьем разделе был представлен практический материал – решение задач по данной теме, с выработанными методическими указаниями и рекомендациями.

Изложенные основные теоретические вопросы были подкреплены практическими задачами.

В результате выполнения диссертационной работы поставленная цель достигнута, задачи выполнены.

Перспектива дальнейшего применения материала выпускной квалификационной работы состоит в том, что она может быть использована в качестве дополнительного пособия при ознакомлении с методикой преподавания основ теорией вероятностей в средней школе как студентами и преподавателями вузов, так и учителями общеобразовательных школ при обучении теории вероятностей.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Андронов А.М., Копытов Е.А., Гринглаз Л.Я. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2004. – 272 с.
- 2 Афанасьев В.В. Теория вероятностей в вопросах и задачах. – М.: Наука, 2007. – 350 с.
- 3 Бокаева М.С., Исмоилов Д., Сарбасова Н.Д. Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике. – Павлодар: ИнЕУ, 2014. – 430 с.
- 4 Боровков А. А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 400 с.
- 5 Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973. – 388 с.
- 6 Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 460 с.
- 7 Виленкин Н.Я. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1998. – 412 с.
- 8 Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1979. – 387 с.
- 9 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 479 с.
- 10 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 400 с.
- 11 Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
- 12 Гутер Р.С. Основы теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1967. – 159 с.
- 13 Исмоилов Д. Аддитивные проблемы делителей. – Павлодар: ИнЕУ, 2010. – 243 с.
- 14 Каменкова Н. Г. Элементы теории вероятностей: Учебное пособие. – М.: Наука, 1993. – 459 с.
- 15 Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 355 с.
- 16 Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 400 с.
- 17 Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 543 с.
- 18 Лютикас В.С. Факультативный курс по математике теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 255 с.
- 19 Майстров Л.Е. Теория вероятностей: Исторический очерк. – М.: Наука, 1967. – 320 с.

- 20 Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: Наука, 1979. – 495 с.
- 21 Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982. – 207 с.
- 22 Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 152 с.
- 23 Солодовников А.С. Теория вероятностей: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по матем. спец. — М.: Просвещение, 1983. – 207 с.
- 24 Шыныбеков А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – Алматы: Экономика, 2008. – 244 с.
- 25 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – 270 с.

## Приложение 1

Статья, опубликованная в научный журнал «Вестник ИнЕУ» № 2 (54) 2014г.

УДК 519.21 (075.8)

**К.О. Омарова**, магистрант группы МТУ(м) - 102

ГУ «Специализированная школа «Жас дарын» г. Павлодара»

E-mail: [kika\\_1990.90@mail.ru](mailto:kika_1990.90@mail.ru)

### Об одном функциональном уравнении и его приложениях

**Аннотация.** В данной статье рассмотрены практические задачи по теории вероятности, решаемые по схеме Бернулли, а также рассмотрено одно функциональное уравнение и его применение к теории распределения случайных событий.

**Ключевые слова:** схема Бернулли, тождество, формула Бернулли, вероятность, событие.

*I. Одна из распространенных вероятностных моделей – это схема Бернулли.*

Под схемой Бернулли понимают конечную серию  $n$  повторных независимых испытаний с двумя исходами. Вероятность появления (удачи) одного исхода при одном испытании обозначают  $p = P(A)$ , а не появления (неудачи) его  $p(B) = q = 1 - p$ .

Бернулли установил, что вероятность ровно  $m$  успехов в серии из  $n$  повторных независимых испытаний вычисляется по следующей формуле [1]:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

**Пример 1.** Вероятность выпуска бракованного изделия на станке равна 0,2. Определить вероятность того что в партии из десяти выпущенных на данном станке деталей ровно  $k$  будет без брака. Решить задачу для  $k = 0, 1, 10$ .

**Решение:** По условию, нас интересует событие  $A$  выпуска изделий без брака, которое случается каждый раз с вероятностью  $p = 1 - 0,2 = 0,8$ . Нужно определить вероятность того, что это событие произойдет  $k$  раз. Событию  $A$  противопоставляются событие «не  $A$ », т.е. выпуск бракованного изделия.

Таким образом, имеем:

$$n = 10; p = 0,8; q = 0,2.$$

Итак, находим вероятность того, что в партии все детали бракованные  $k = 0$ , что только одна деталь без брака  $k = 1$ , и что бракованных деталей нет вообще  $k = 10$ :

$$P_{10}(0) = C_{10}^0 p^0 q^{10} = \frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{10} \approx 10^{-7},$$

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 p^1 q^9 = \frac{10!}{1! \cdot 9!} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^9 \approx 4 \cdot 10^{-6},$$

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10} p^{10} q^0 = \frac{10!}{10! \cdot 0!} \cdot 0,8^{10} \cdot 0,2^0 \approx 0,1.$$

**Пример 2.** Монету бросают 6 раз. Выпадение герба и решки равновероятно. Найти вероятность того, что:

1. герб выпадет три раза;
2. герб выпадет один раз;
3. герб выпадет не менее двух раз.

**Решение:** Итак, нас интересует событие  $A$ , когда выпадет герб. Вероятность этого события равна  $p = 0,5$ . Событию  $A$  противопоставляется событие «не  $A$ », когда выпадает решка, что случается с вероятностью  $q = 1 - 0,5 = 0,5$ . Нужно определить вероятность того, что герб выпадет  $k$  раз [2].

Таким образом, имеем:

$$n = 6; p = 0,5; q = 0,5.$$

Определим, вероятность того, что герб выпал три раза, т.е.  $k = 3$ :

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^3 = \frac{5}{16}.$$

Теперь определим вероятность того, что герб выпал только один раз, т.е.  $k = 1$ :



$$P_6(1) = C_6^1 p^1 q^5 = \frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^5 = \frac{3}{32}.$$

Осталось определить, с какой вероятностью герб выпадет не менее двух раз. Получается, что нас устроит любое  $k$ , кроме 0 и 1, т.е. надо найти значение суммы:

$$X = P_6(2) + P_6(3) + \dots + P_6(6).$$

Заметим, что эта сумма также равна:

$$1 - P_6(0) - P_6(1),$$

т.е. достаточно из всех возможных вариантов «вырезать» те, когда герб выпал 1 раз ( $k = 1$ ) или не выпал вообще ( $k = 0$ ).

Поскольку  $P_6(1)$  нам уже известно, осталось найти  $P_6(0)$ :

$$P_6(0) = C_6^0 p^0 q^6 = \frac{6!}{0! \cdot 6!} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^6 = \frac{1}{64},$$

$$X = 1 - P_6(0) - P_6(1) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{3}{32} = \frac{57}{64}.$$

II. Далее рассмотрим одну вероятностную функцию.

$$f(x) = 3x^2 - 3x + 1$$

Тогда имеет место функциональное уравнение:

$$f(x) = f(1-x)$$

Доказательство:

$$3x^2 - 3x + 1 = 3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1 = 3 - 6x + 3x^2 - 3 + 3x + 1 = 3x^2 - 3x + 1.$$

Примеры:

$$9) \quad f(\sin \alpha) = f(1 - \sin \alpha)$$

$$3 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha + 1 = 3(1 - \sin \alpha)^2 - 3(1 - \sin \alpha) + 1$$

$$10) \quad f(\cos \alpha) = f(1 - \cos \alpha)$$

$$3 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 3(1 - \cos \alpha)^2 - 3(1 - \cos \alpha) + 1$$

$$11) \quad f(\operatorname{tg} \alpha) = f(1 - \operatorname{tg} \alpha)$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 3(1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 - 3(1 - \operatorname{tg} \alpha) + 1$$

$$12) \quad f(\operatorname{ctg} \alpha) = f(1 - \operatorname{ctg} \alpha)$$

$$3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha + 1 = 3(1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 - 3(1 - \operatorname{ctg} \alpha) + 1$$

$$13) \quad f(a^k) = f(1 - a^k)$$

$$3a^{2k} - 3a^k + 1 = 3(1 - a^k)^2 - 3(1 - a^k) + 1$$

$$14) \quad f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$3\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 3 \cdot \frac{k}{n} + 1 = 3\left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 - 3\left(1 - \frac{k}{n}\right) + 1$$

$$15) \quad \text{Пусть } x = \zeta(s) \text{ - дзета-функция Римана. Известно, что } \zeta(s) \text{ определяется равенством [3]:}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

при  $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ ;  $s = \sigma + it$  - комплексное число. Тогда,

$$f(\zeta(s)) = f(1 - \zeta(s))$$

или

$$3\zeta^2(s) - 3\zeta(s) + 1 = 3(1 - \zeta(s))^2 - 3(1 - \zeta(s)) + 1.$$

Можно было бы продолжить рассмотрения интересных и важных примеров, но здесь мы ограничимся. Далее, имеет место функциональное равенство.

**Теорема:**

$$\frac{x^3}{f(x)} + \frac{(1-x)^3}{f(1-x)} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1.$$

*Доказательство:* Представим это уравнение в виде:

$$\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1 \quad (1)$$

Преобразуем левую часть равенства.

Имеем,

$$\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3 - 6x + 3x^2 - 3 + 3x + 1} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1$$

Приведем подобные слагаемые и видим, что знаменатели стали одинаковыми:

$$\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3x^2 - 3x + 1} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1$$

Далее, складываем их, и получаем, что левая часть стала такой же как и правая часть:

$$\frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Приведем одно следствие:

$$\frac{\zeta^3(s)}{f(\zeta(s))} + \frac{(1 - \zeta(s))^3}{f(1 - \zeta(s))} = 1,$$

где  $\zeta(s)$  - дзета-функция Римана.

Функциональное уравнение (1) может быть применено к теории распределения случайных событий.

Именно, рассмотрим следующую задачу.

**Задача.** В прямоугольник со сторонами  $a = (x^3)$  уч. ед. и  $b = 1$  уч. ед. помещен меньший прямоугольник со сторонами  $a = (3x^2 - 3x + 1)$  уч. ед. и  $b = 1$  уч. ед. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой прямоугольник, попадет также и в малый прямоугольник. Предполагается, что вероятность попадания точки в прямоугольник пропорциональна площади прямоугольника и не зависит от его расположения.

**Решение:** Вероятность события  $A$  «наудачу брошенная точка попала в малый прямоугольник» определяется равенством:

$$p(A) = \frac{S}{S}, \text{ где}$$

$S$  - площадь малого прямоугольника,

$S$  - площадь большого прямоугольника,

Изобразим графически (рис. 1):

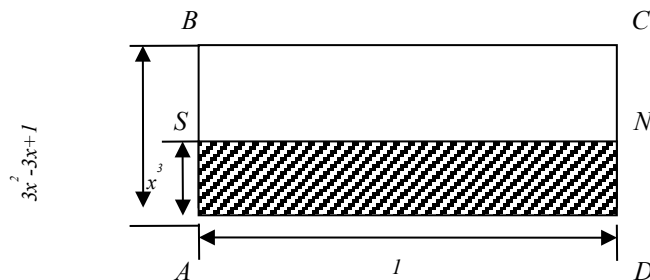


Рис. 1

Находим:

$$s = x^3 \cdot 1 = x^3,$$

$$S = (3x^2 - 3x + 1) \cdot 1 = 3x^2 - 3x + 1.$$

Тогда вероятность события  $A$  равна:

$$p(A) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1},$$

$$q(\bar{A}) = \frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1}.$$

$$p + q = 1$$

$$f(x) = 3x^2 - 3x + 1 = q = f(1-x) = 3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Афанасьев В.В. Теория вероятностей в вопросах и задачах. – М.: Наука, 2007.-350 с.
- 2 Бокаева М.С., Исмоилов Д., Сарбасова Н.Д. Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике. – Павлодар, 2014.-430 с.
- 3 Исмоилов Д. Аддитивные проблемы делителей. – Павлодар, 2010.-243 с.

## ТҮЙІН

*К.О. Омарова, МТУ(м) – 102 тобының магистранты  
«Павлодар қаласының «Жас дарын» мамандандырылған мектебі» ММ*

### **Функционалдық теңдеу және оның қосымшалары туралы**

*Мақалада ықтималдық теориясындағы Бернулли схемасы бойынша шығарылатын практикалық есептер қарастырылған, оған қоса бір функционалдық теңдеу және оның кездейсоқ оқиға теориясында қолдануы көрсетілген.*

**Негізгі сөздер:** Бернулли схемасы, тепе-теңдік, Бернулли формуласы, ықтималдық, оқиға.

## RESUME

***K.O. Omarova**, undergraduate of group MTU(m) - 102  
SO «Specialized school «Zhas daryn» Pavlodar town»*

### **About one of the functional equations and its applications**

*This article describes the practical problems of the theory of probability solved by Bernoulli and also describes one of the functional equation and its application to the theory of the distribution of random events.*

**Keywords:** chart of Bernoulli, identity, formula of Bernoulli, probability, event.

## Приложение 2

Публикация в областную газету «Ўстаздар газеті» № 1 (264) 1 января 2014г.

*В предыдущем номере «Ўстаздар газеті» были предложены задачи.*

*Из них задача №1 имеет очень интересную вероятностную трактовку, которую*

*предоставила магистрант 2-го года обучения ИнЕУ, учитель математики*

*специализированной школы «Жас дарын» К.О. Омарова. Материал публикуется*

*под редакцией профессора ИнЕУ Д.И. Исмоилова.*

**Задача.** В урне имеются шарики, пронумерованные трехзначными числами:  $a \in \{100, 101, 102, \dots, 999\}$ . Наудачу взяли один шарик. Какова вероятность того, что все цифры в записи этого числа являются нечетными, четными и смешанными (и четные, и нечетные)?

**Решение.** Во первых, ясно, что количество всех трехзначных чисел имеется ровно 900. Они формируются из следующих однозначных нечетных цифр (разрядов):

$$\{ 1; 3; 5; 7; 9 \} \quad (1)$$

Найдем общее количество трехзначных чисел, составленных только из нечетных цифр (1). Их количество равно  $m_1 = 125$  (**Проверьте самостоятельно!**).

Следовательно, число благоприятствующих нам шариков с указанными номерами 125. Поэтому вероятность появления каждого из них равна:

$$p_1 = 125/900 \approx 0,139.$$

Для формирования всех трехзначных чисел с четными цифрами мы должны воспользоваться следующими однозначными числами:

$$\{ 0; 2; 4; 6; 8 \} \quad (2)$$

Их количество равно  $m_2 = 100$  (**Проверьте самостоятельно!**).

Следовательно, число благоприятствующих нам шариков с указанными номерами 120. Поэтому вероятность появления каждого из них равна:

$$p_2 = 100/900 \approx 0,111.$$

Теперь для формирования всех трехзначных чисел с четными и нечетными (смешанными) цифрами мы должны воспользоваться всеми однозначными числами:

$$\{ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 \} \quad (3)$$

Для этого мы должны вычесть из общего количества 900 количество уже найденных трехзначных чисел 125 - только с нечетными и 100 - только с четными цифрами. Таким образом, количество указанных чисел будет:

$$m_3 = 900 - 125 - 100 = 675.$$

Поэтому вероятность появления каждого из них равна:

$$p_3 = 675/900 = 0,75.$$

Далее составим таблицу (закон) распределения случайной величины  $X = \{125; 100; 675\}$  с соответствующими им вероятностями:

$$P_1 \approx 0.139; P_2 \approx 0.111; P_3 = 0.75,$$

где  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ , то есть мы имеем полную группу событий.

|     |       |       |      |
|-----|-------|-------|------|
| $X$ | 125   | 100   | 675  |
| $P$ | 0,139 | 0,111 | 0,75 |

**Задание.** 1) Предлагаем решить аналогичные задачи для случаев однозначных, двузначных, четырехзначных, пятизначных и шестизначных чисел.

2) Найти число  $a = MX = m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 + m_3 \cdot p_3, D = M(X - a)^2 = M(X^2) - a^2$ .

3) Доказать неравенство  $D = M(X^2) - a^2 \geq 0$ .

4) Вычислить для случаев, указанных в пункте 1) численное значение величины  $\sigma = \sqrt{D}$ .

**В науке теории вероятностей величины:**  $a = MX$  - математическое ожидание случайной величины  $X = \{125; 100; 675\}$ ;  $D = M(X^2) - a^2$  - дисперсия;  $\sigma = \sqrt{D}$  - среднее квадратичное отклонение (или стандарт) случайной величины  $X$ , называются числовыми характеристиками случайной величины  $X$ .

Найдем для нашего случая указанные величины.

$$a = MX = 534,725.$$

Для определения дисперсии составим закон распределения случайной величины  $\bar{X} = X - a = \{125 - a = -409,725; 100 - a = -434,725; 675 - a = 140,275\}$ .

|           |          |          |         |
|-----------|----------|----------|---------|
| $\bar{X}$ | -409,725 | -434,725 | 140,275 |
| $P$       | 0,139    | 0,111    | 0,75    |

$$D = M[(X - a)^2] = M(\bar{X}^2) \approx 59069,8.$$

$$\sigma = \sqrt{D} \approx 243,043.$$

**Вывод:** Эту задачу можно применить к криптографии и теории кодирования (например, при кодировании пароля выгоднее всего занумеровать четными цифрами. Чем больше знаков, тем труднее «взломать» ваш пароль). Потому, что вероятность этих наборов чисел *всегда меньше*, по сравнению с двумя другими наборами чисел.

**Задание.** Исследуйте задачу для случаев любого  $n$ -значного числа по основанию десять.

**Омарова Кымбат Ораловна**

**«Элементы теории вероятностей в школьном курсе математики»**

6M060100 – «Математика»

**Реферат**

диссертации на соискание академической степени магистра  
естественных наук

Павлодар 2015

Работа выполнена в Инновационном Евразийском Университете

Научный руководитель:

Доктор физ-мат наук,  
профессор ИнЕУ  
Д.И. Исмоилов

Ведущая организация:

Инновационный  
Евразийский  
Университет

Секретарь ГАК:

Асылбекова С.К.

**Актуальность.** Теория вероятности изучает закономерности, возникающие при массовых, однородных явлениях, исходы которых являются случайными. В настоящее время трудно найти область человеческой деятельности, как теоретического, так и прикладного характера, где бы ни применялись методы теории вероятностей.

В течение последних десятилетий элементы теории вероятностей и комбинаторики то вводились разделом в курс математики общеобразовательной школы, то исключались вообще. Внимание, которое уделяется этому учебному предмету во всем мире, позволяет предположить, что концепция его введения является актуальной.

Тем не менее, новые учебные программы по математике, принимаемые поэтапно в настоящее время в Казахстане, предполагают обязательное проведение основ теории вероятностей и математической статистики как в школах с углубленным изучением математики, так и в общеобразовательных школах.

**Объект исследования** - выявление элементов теории вероятности в школьном курсе математики.

**Предметом исследования** является влияние системы задач на формирование вероятностных понятий у учеников.

**Цель исследования** - показать методику работы использования элементов теории вероятностей на уроках математики в средней школе.

Исходя из цели исследования, были поставлены следующие **задачи исследования:**

- 1) проанализировать современные тенденции в исследованиях, посвященных вопросам введения в школьную математику элементов теории вероятностей;
- 2) показать роль задач и экспериментов в усвоении элементарных знаний о теории вероятностей;
- 3) отразить основные подходы к изучению теории вероятности в школьном курсе математики;
- 4) представить практический материал – решение задач по данной теме, с выработанными методическими указаниями и рекомендациями.

В ходе решения поставленных задач использовались следующие **методы исследования:**

- 1) изучение и анализ научной учебно-методической литературы, программ по математике для общеобразовательных учреждений;
- 2) теоретический анализ проблемы, определение основных положений исследования;
- 3) решение задач по данной теме.

**Теоретическая и практическая значимость исследования.** Работа носит теоретическо-методологический характер. Материал, изложенный в работе, может быть полезен и школьным учителям при подготовке к урокам, и преподавателям методики обучения математике в школе, и родителям учащихся.



**Публикации результатов исследования.** По теме диссертации опубликована одна статья в научный журнал «Вестник ИнЕУ» и две публикации в областную газету «Ұстаздар газеті».

**Структура и объем работы.** Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников, приложений. Изложена на 78 страницах с использованием 17 рисунков, 25 источников литературы.

**Ключевые слова:** теория вероятностей, случайное событие, эксперимент, комбинаторика, математические методы.

## **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

1. Научный журнал «Вестник ИнЕУ» № 4 (54) Павлодар 2015 г.
2. Областная газета «Ұстаздар газеті» № 1 (264) Павлодар 15 июня 2014 г.
3. Областная газета «Ұстаздар газеті» № 12 (299) Павлодар 15 июня 2015 г.

**Omarova Kymbat Oralovna**

**«Elements of probability theory in the school course of mathematics»**

6M060100 – «Mathematics»

**Report**

of dissertation on the competition of academic master's degree of  
natural sciences

Pavlodar 2015

Work is executed in Innovative Eurasian University

Scientific leader:

Doctor of phys-math sciences,  
Professor of InEU  
D.I. Ismoilov

Leading organization:

Innovative  
Eurasian  
University

Secretary GAC:

Asylbekova S.K.

**Relevance.** Probability theory deals with regularities that occur when massive, homogeneous phenomena, the outcomes of which are random. Currently it is difficult to find an area of human activity, both theoretical and applied nature, wherever we have applied the methods of probability theory.

In the past decades, elements of probability theory and combinatorics that are introduced in section a mathematics course in secondary schools, were excluded altogether. The attention paid to this subject in the world, suggests that the concept of administration is topical.

However, the new curricula for mathematics taken in stages currently in Kazakhstan require the carrying out of the basic theory of probability and mathematical statistics in schools with profound studying of mathematics and in secondary schools.

The **object of the research** is to identify the elements of probability theory in the school mathematics course.

The **subject of research** is the impact of objectives on the formation of probabilistic concepts in students.

The **purpose of research** - to show the working procedure of using elements of probability theory in mathematics lessons in secondary school.

Based on the objectives of the study had the following **research objectives**:

1) to analyze current trends in studies on the introduction to high school mathematics elements of probability theory;

2) show the role of tasks and experiments in the basic knowledge about probability theory;

3) to reflect the major approaches to the study of probability theory in the school course of mathematics;

4) to provide practical material – problem solving on the topic, developed with guidance and recommendations.

In the course of solving the tasks we used the following **research methods**:

1) study and analysis of scientific and methodical literature, program in mathematics for General educational establishments;

2) theoretical analysis of the problem, definition of the main provisions of the research;

3) the decision of tasks on the topic.

**Theoretical and practical significance of the research.** The work is theoretical and methodological in nature. The material presented in this paper may be useful to classroom teachers in preparing their lessons, and teachers methods of teaching mathematics at school, students and parents.

**Publication of research results.** On the topic of the dissertation published an article in the scientific journal «Bulletin of InEU» and two publications in the regional newspaper «Үстәздар газеті».

**The structure and scope of work.** The work consists of introduction, three chapters, conclusion, list of references, appendices. Set out on 78 pages with 17 figures, 19 references.

**Keywords:** probability theory, random event, experiment, combinatorics, mathematical methods.

## **LIST OF PUBLICATIONS ON THE DISSERTATION TOPIC**

1. The scientific journal «Bulletin of InEU» No. 4 (54) Pavlodar 2015.
2. Regional newspaper «Ұстаздар газеті» No. 1 (264) Pavlodar June 15, 2014.
3. Regional newspaper «Ұстаздар газеті» No. 12 (299) Pavlodar June 15, 2015.

**Омарова Кымбат Ораловна**

**«Мектептің математика курсындағы ықтималдықтар теориясы  
элементтері»**

6M060100 – «Математика»

магистр ғылыми дәрежесін алу үшін диссертация  
**рефераты**

Павлодар 2015

Жұмыс Инновациялық Еуразия Университетінде орындалды

Ғылыми жетекшісі:

Физ-мат ғылымдарының докторы,  
ИнЕУ профессоры  
Д.И. Исмоилов

Жетекші ұйым:

Инновациялық Еуразия  
Университеті

МАК хатшысы:

С.А. Асылбекова

**Өзектілігі.** Ықтималдықтар теориясы өмірдегі кездейсоқтықтарды зерттеп, олардың заңдылықтарын ашады. Қазіргі уақытта ықтималдық теориясының әдістері қолданылмайтын сала жоқ.

Соңғы онжылдықта комбинаторика және ықтималдықтар теориясы жалпы білім беру мектептеріндегі математика курсына бірде енгізіліп, бірде мүлдем алынып тасталынып отырды. Барлық әлемнің ықтималдықтар теориясын оқыту курсына енгізудің маңыздылығын талқылауларына қарағанда, бүгінгі таңда ол өзекті мәселелердің бірі екенін көрсетеді.

Алайда, Қазақстанның оқу бағдарламаларында ықтималдықтар теориясын математика пәнін тереңдетіп оқытатын мектептермен қатар орта мектептерде де оқытылуы тиіс екені көрсетілген.

В настоящее время трудно найти область человеческой деятельности, как теоретического, так и прикладного характера, где бы ни применялись методы теории вероятностей.

**Зерттеу мақсаты** - математика сабағында ықтималдықтар теориясы элементтерін қолдану әдістемесін қарастыру.

**Зерттеу нысаны** - мектептің математика курсынағы ықтималдықтар теориясы элементтерін анықтау.

Оқушылардың ықтималдықтар теориясының негізгі түсініктерін қалыптастыруға есептер жинағының ықпалы **зерттеу пәні** болып табылады.

Зерттеу мақсатына сүйене отырып, келесі **міндеттер** қойылды:

1) ықтималдықтар теориясы элементтерін мектептің математика курсына енгізу жөніндегі зерттеулердің өзекті мәселелерін талдау;

2) ықтималдық теориясының негізгі түсініктерін игерудегі тәжірибенің рөлін көрсету;

3) мектептің математика курсынағы ықтималдықтар теориясын оқытудың негізгі тәсілдерін көрсету;

4) нұсқаулар мен ұсынымдар көрсетілген практикалық материалдар, есептер, жинақтау.

Міндеттерді шешу барысында келесі **әдістер** қолданылды:

1) жалпы білім беру мектептеріне арналған математиканы оқытудың бағдарламасын және ғылыми әдебиеттерді зерттеу және талдау;

2) мәселені теориялық талдау, зерттеудің негізгі ережелерін анықтау;

3) осы тақырып бойынша есептер шығару.

**Зерттеудің теориялық және практикалық маңызы.** Жұмыс теориялық және әдіснамалық сипаты болып табылады. Жұмыста ұсынылған материал, мектептегі математика пәнінің мұғалімдері үшін, сондай-ақ, ата-аналар мен жоғары оқу орындарының мұғалімдері үшін математиканы оқыту барысында пайдалы.

**Зерттеу нәтижелерін жариялау.** Диссертация тақырыбы бойынша «ИнЕУ хабаршысы» ғылыми журналына бір, ал «Ұстаздар газеті» педагогикалық газетіне екі мақала шықты.

**Жұмыстың құрылымы мен көлемі.** Жұмыс кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен, қосымшалардан



тұрады. Суреттер саны - 17, қолданылған әдебиет тізімі – 19, жұмыс көлемі - 78 бет.

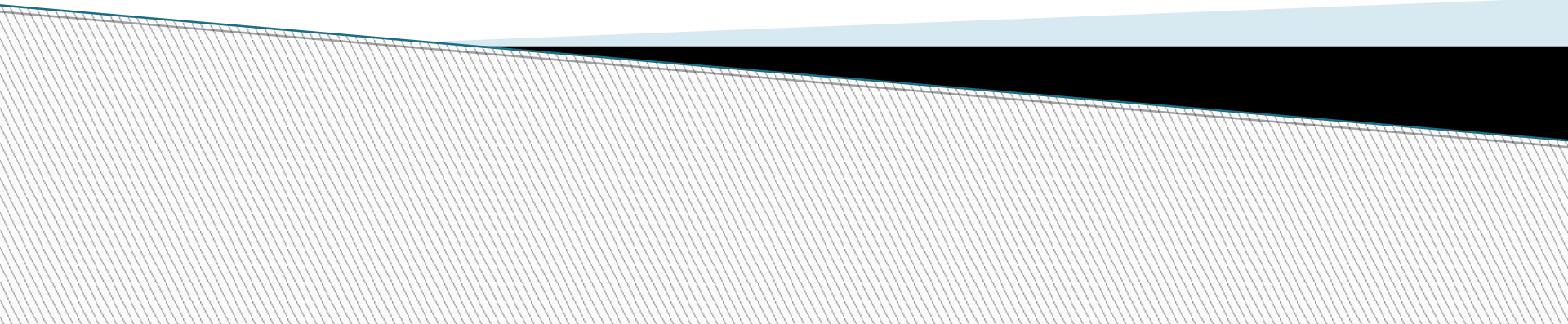
**Түйін сөздер:** ықтималдық теориясы, кездейсоқ оқиға, эксперимент, комбинаторика, математикалық әдістер.

### **ДИССЕРТАЦИЯ ТАҚЫРЫБЫ БОЙЫНША ЖАРИЯЛЫМДАР ТІЗІМІ**

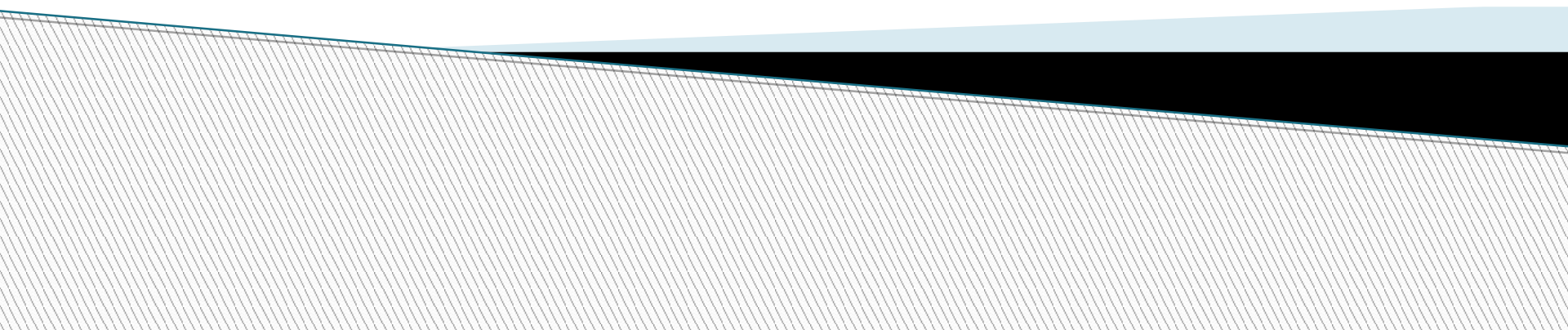
1. «ИнЕУ хабаршысы» ғылыми журналы № 4 (54) Павлодар 2015 ж.
2. «Ұстаздар газеті» педагогикалық газеті № 1 (264) Павлодар 15 маусым 2014 ж.
3. «Ұстаздар газеті» педагогикалық газеті № 12 (299) Павлодар 15 маусым 2015 ж.

**Элементы теории  
вероятностей  
в школьном курсе  
математики**

**Рассмотрение и представление  
решения практических задач по  
теории вероятности,  
с выработанными методическими  
указаниями и рекомендациями.**



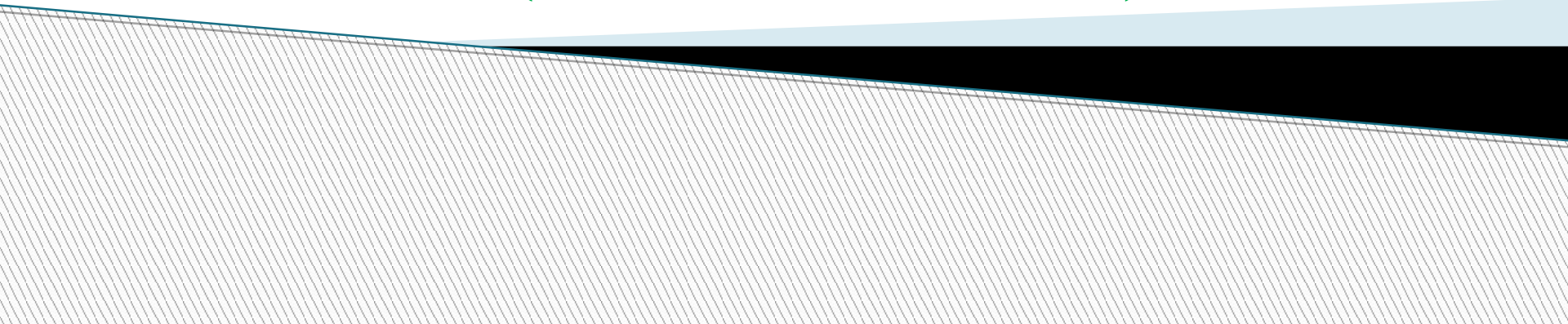
Исходя из цели исследования, были поставлены следующие задачи:

- 1) проанализировать современные тенденции в исследованиях, посвященных вопросам введения в школьную математику элементов теории вероятностей;
  - 2) показать роль задач и экспериментов в усвоении элементарных знаний о теории вероятностей;
  - 3) отразить основные подходы к изучению теории вероятности в школьном курсе математики.
- 

**Задача. В урне лежат шары,  
пронумерованные трехзначными числами:**

$$a \in \{100, 101, 102, \dots, 999\}.$$

**Наудачу взяли один шар. Какова вероятность того, что все цифры в записи номера вытащенного шара являются нечетными, четными и смешанными (и четные, и нечетные)?**



# Решение.

**Обозначим:**

**Событие  $A$**

**появление шара, номер которого  
составлен только из нечетных цифр;**

**Событие  $B$**

**появление шара, номер которого  
составлен только из четных цифр;**

**Событие  $C$**

**появление шара, номер которого  
составлен из смешанных, то есть  
и четных, и нечетных цифр.**

Ясно, что количество всех трехзначных чисел имеется ровно **900**.

Найдем общее количество трехзначных чисел, составленных только из нечетных цифр. Они формируются из следующих однозначных нечетных цифр (разрядов):

$$\{ 1; 3; 5; 7; 9 \}$$

Их количество равно **125**.

Следовательно, число случаев благоприятствующих появлению события **A** равно **125**. Поэтому вероятность появления каждого из них равна:

$$p_1 = 125/900 \approx 0,139.$$

Для формирования всех трехзначных чисел с четными цифрами мы должны воспользоваться следующими однозначными числами:

$$\{0; 2; 4; 6; 8\}$$

Их количество равно 100.

Следовательно, число случаев благоприятствующих появлению события  $B$  равно 100. Поэтому вероятность появления каждого из них равна:

$$p_2 = 100/900 \approx 0,111.$$



Для того чтобы найти количество шаров, номера которых составлены из смешанных, то есть и четных, и нечетных цифр можно вычесть из общего количества **900** количество уже найденных **125** трехзначных чисел только с нечетными и **100** – только с четными цифрами.

Таким образом, количество указанных чисел будет:

$$900 - 125 - 100 = 675.$$

Поэтому вероятность появления каждого из них равна:

$$p_3 = 675/900 = 0,75.$$

**В работе я привела примеры при**

$$n = 2, 3, 4, 5, 6.$$

**Получила следующие результаты:**

$$X_2 = \{25; 20; 45\} \leftrightarrow P\{0,278; 0,222; 0,5\},$$

$$X_3 = \{125; 100; 675\} \leftrightarrow P\{0,139; 0,111; 0,75\},$$

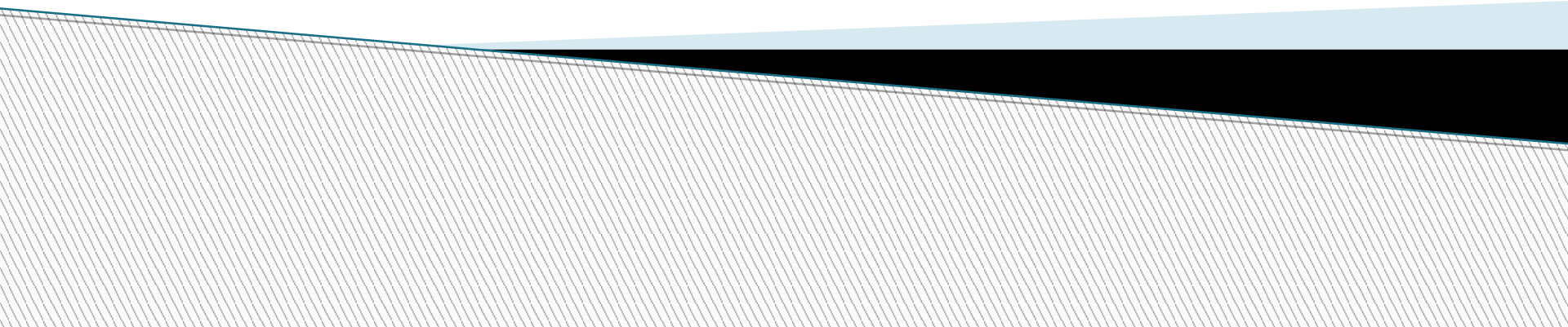
$$X_4 = \{625; 500; 78755\} \leftrightarrow P\{0,069; 0,056; 0,875\},$$

$$X_5 = \{3125; 2500; 84375\} \leftrightarrow P\{0,035; 0,028; 0,937\}$$

$$X_6 = \{15625; 12500; 871875\} \leftrightarrow P\{0,017; 0,014; 0,969\}.$$

$$X_n = \left\{ 5^n; \quad 4 \cdot 5^{n-1}; \quad 9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 5^{n-1} \right\}$$

$$\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1} = 1$$



**при**  $x = \frac{1}{6}:$

$$\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3}{3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{6} + 1} + \frac{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^3}{3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 - 3 \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{216}}{\frac{1}{12} - \frac{1}{2} + 1} + \frac{\frac{125}{216}}{\frac{25}{12} - \frac{5}{2} + 1} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{216}}{\frac{1}{12}} + \frac{\frac{125}{216}}{\frac{1}{12}} = 1$$

$$1 = 1 \quad \frac{1}{126} + \frac{125}{126} = 1$$

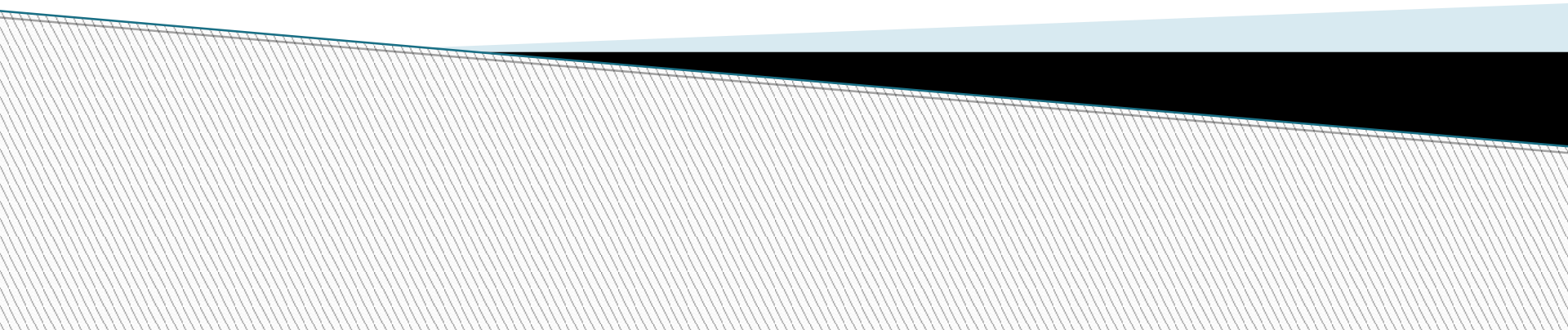
**Задача. В прямоугольник со сторонами**

$$a = (x^3) \text{ уч.ед. и } b = 1 \text{ уч.ед.}$$

**помещен меньший прямоугольник со сторонами**

$$a = (3x^2 - 3x + 1) \text{ уч.ед. и } b = 1 \text{ уч.ед.}$$

**Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой прямоугольник, попадет также и в малый прямоугольник.**



**Решение:** Вероятность события  $A$  «наудачу брошенная точка попала в малый прямоугольник» определяется равенством:

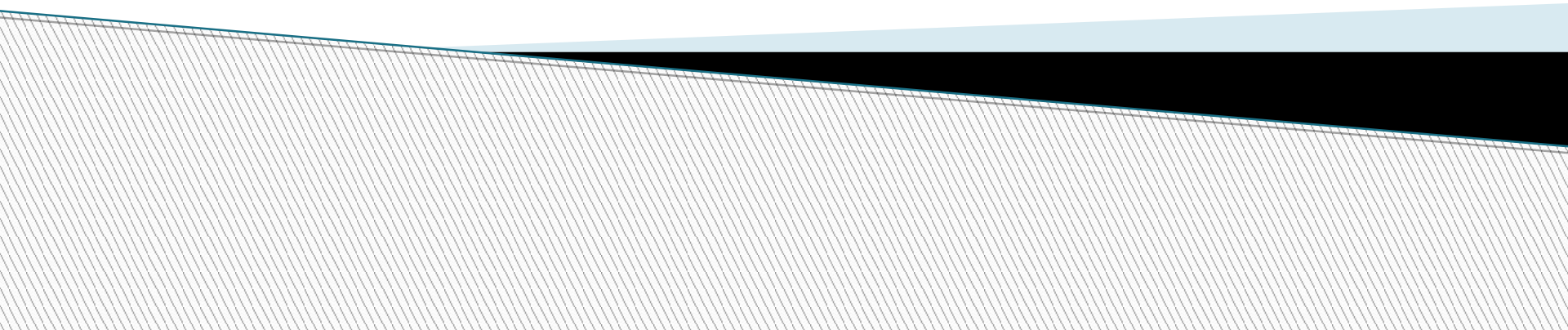
$$p(A) = \frac{s}{S},$$

где

$s$  - площадь малого прямоугольника,

$S$  - площадь большого прямоугольника,

Эта задача графически изображена на рисунке.



**Находим:**

$$S = x^3 \cdot 1 = x^3,$$

$$S = (3x^2 - 3x + 1) \cdot 1 = 3x^2 - 3x + 1.$$

**Тогда вероятность события  $A$  равна:**

$$p(A) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$$

$$p(A) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$$

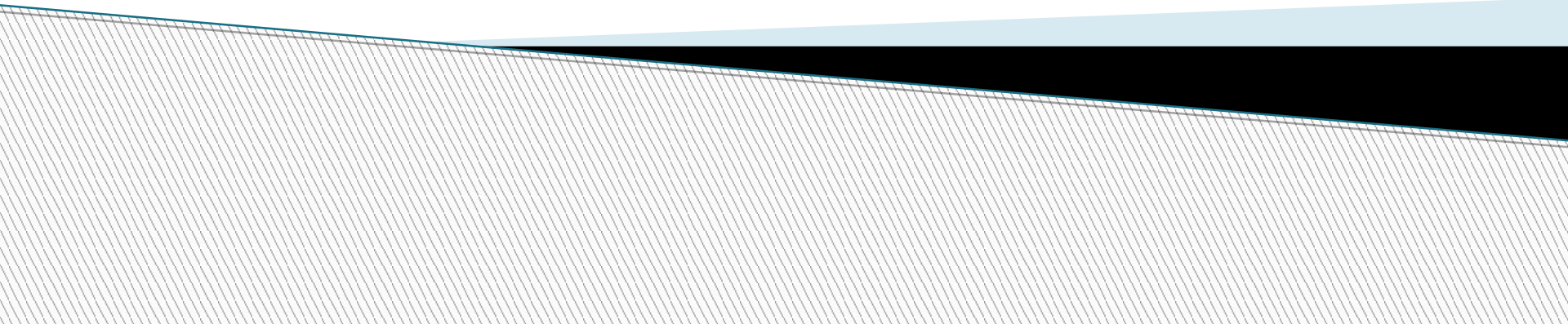
$$p + q = 1$$

$$q(\overline{A}) = \frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1}$$

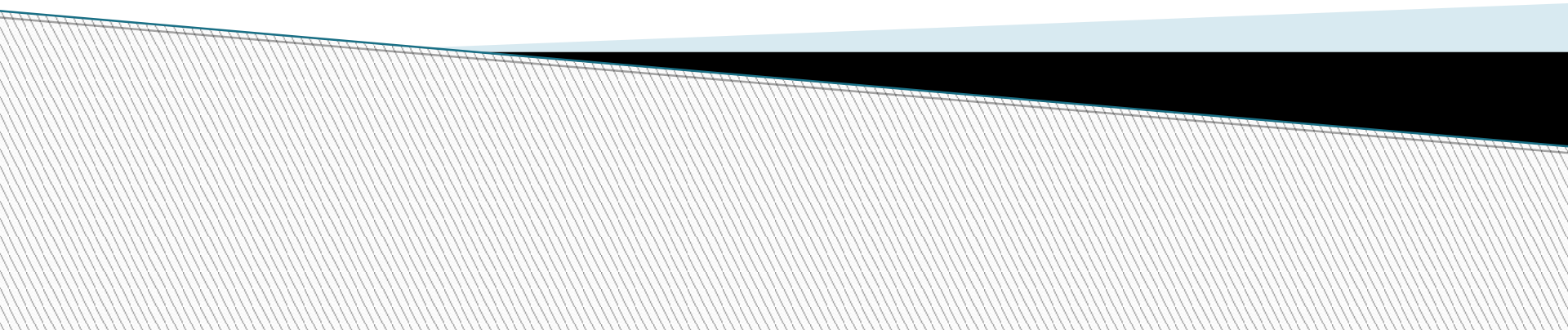
$$\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1} = 1$$



**Спасибо за внимание**



В ходе решения поставленных задач использовались следующие **методы исследования:**

- 1) изучение и анализ научной учебно-методической литературы, программ по математике для общеобразовательных учреждений;
  - 2) теоретический анализ проблемы, определение основных положений исследования;
  - 3) решение задач по данной теме
- 
- A decorative graphic element at the bottom of the slide, consisting of a series of overlapping, wavy, semi-transparent shapes in shades of blue and black, creating a modern, abstract background.