

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Инновационный Евразийский университет

Е.Ю. Налётенко

Математические методы решения краевых задач теплопроводности

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

специальность 6М060100 «Математика»

Павлодар 2015

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Инновационный Евразийский университет

Кафедра «Математики и Информационных технологий»

«Допущен к защите»:

_____ заведующий
кафедрой _____ Ж.К. Даниярова

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**На тему: «Математические методы решения краевых задач
теплопроводности»**

по специальности 6М060100 «Математика»

**Выполнил магистрант
группы МтУ(м)-202м**

Е.Ю. Налётенко

**Научный руководитель
кандидат физ – мат. наук,
доцент**

С.Н. Шарая

Павлодар 2015

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	9
1	Дифференциальное уравнение теплопроводности	1
		1
1	Вывод уравнения теплопроводности	1
.1		1
1	Постановка краевых задач	1
.2		4
2	Аналитические методы решения	1
		6
2	Метод разделения переменных	1
.1		6
2	Теория операционного метода и его приложение	2
.2		1
3	Конечно – разностный метод решения задач теории теплопроводности	3
		2
3	Теория разностных методов	3
.1		2
4	Практическое приложение	4
		4
4	Исследование температурного поля футеровки	4
.1		4
4	Задачи об охлаждении и нагревании полуограниченных тел	4
.2		7
4	Расчет температурного поля пластины	5
.3		2
5	Заключение	6
		0
6	Список использованных источников	6
		1

SUMMARY

The master's thesis consists of 62 pages. In the course of the research and analysis the following results were obtained:

- Technical and reference literature was studied;
- Theoretical materials on the means of the solution of differential equations of thermal conduction and finite difference solutions;
- By the method of separation of variables, using Fourier series, temperature distribution of the wall lining with and without water-cooled caissons was obtained;
- By Laplace transform method the mode of soil freezing was determined depending on the ambient temperature;

Scientific novelty of the obtained results lies in the following: on the basis of theoretical methods of solving equations of thermal conduction we made a calculation of temperature patterns of various technical bodies and presented an analysis of the results with practical recommendations and conclusions.

This thesis work has applied relevance. The main four methods of calculating temperature patterns were viewed. After analyzing the theory of analytical and numerical methods of solving differential equations of thermal conduction, we applied it in the research to solve practical problems.

The practical value of the thesis lies in the solution of specific engineering problems.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

В магистерской диссертации применяются следующие сокращения с соответствующими определениями.

$k(x, y, z)$ – коэффициент теплопроводности

c – удельная теплоемкость

ρ – плотность вещества

λ – коэффициент теплопроводности

C – произвольная постоянная

a – коэффициент температуропроводности

s_n – простые корни функции

ВВЕДЕНИЕ

Перенос тепла теплопроводностью имеет место во многих машинах и агрегатах, и является неотъемлемой частью любого инженерного теплотехнического расчета. Поэтому проблемные вопросы математического расчета переноса тепла температуропроводностью приобретают большую актуальность для современной техники.

Практика непрестанно выдвигает новые и разнообразные задачи, требуя от инженера умения самостоятельно и творчески использовать основные законы и методы теплопроводности. Значительно расширилась возможность прикладного использования теории теплопроводности с более широким внедрением в инженерную практику ЭВМ. Эта область науки проблемная, поскольку расширение диапазона действия теплотехнических устройств требует создания новых, более надежных методов расчета.

Существуют различные методы решения задач теплопроводности и каждый метод имеет свою область применения.

Для вычисления температурных полей имеется в основном четыре метода: аналитический, графический, численный и экспериментальный.

Аналитический метод требует получения математического решения для температуры, как функции координат и времени. Решение должно удовлетворять дифференциальному уравнению, из которого оно получено, и определенным начальным и граничным условиям, для конкретной задачи.

Графические методы основаны на свойствах дифференциальных уравнений поля и численных принципах.

Численный метод основан на исчислении конечных разностей и поэтому носит приближенный характер.

Этот метод является прямым, гибким и часто дает хорошее приближение к решению задачи, которая не могла бы быть разрешимой аналитическим способом.

Метод непосредственного эксперимента используется для такого класса задач, которые не могут быть решены математическими методами. В этом случае производятся фактические измерения температуры в точках физической модели.

Магистерская работа выполнялась по логичной и рациональной схеме приведения математических и прикладных исследований и включала следующие этапы:

- теоретический анализ аналитических и численных методов решения;
- применение теоретических исследований для решения практических инженерных задач.

Цель работы:

- проанализировать методы решения уравнения теплопроводности;
- решить нестационарные задачи на нагревание и охлаждение тел.

Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

- на основе теоретических методов решения уравнения теплопроводности произведен расчет температурных полей различных технических тел;
- дан анализ полученных результатов с практическими рекомендациями и выводами.

Работа состоит из 4 глав, вывод дифференциального уравнения теплопроводности, аналитические методы решения, конечно – разностные методы решения задач теории теплопроводности, практическое приложение.

В первой главе вводится понятие теплопроводности и на основании закона Ж. Фурье, который определяет нестационарный тепловой поток, выводится дифференциальное уравнение теплопроводности в трехмерном пространстве. Приводится постановка краевых задач и граничных условий.

Далее в работе рассматриваются аналитические методы решения:

- метод разделения переменных (метод Фурье);
- метод интегральных преобразований (метод Лапласа).

Сила аналитических методов в такой общей форме решения, которая позволяет в любой точке в любой момент времени оценить тепловой режим, отразить влияние всех факторов, оценить их значимость.

Слабость этих методов в том, что они не могут быть применены для исследования температурных полей тел сложной конфигурации.

В работе вначале описаны методы Фурье и операционный метод, а затем на примерах показано, как они применяются для решения задач.

Особое внимание уделено численным методам решения, к которому относится универсальный метод приближенного решения – метод конечных разностей.

Приводится ряд разностных схем, явных и неявных, обсуждаются условия устойчивости и сходимости.

Практическая часть работы представлена решением конкретных инженерных задач.

Методом разделения переменных используя ряды Фурье исследуется температурное поле огнеупорной футеровки. Получено распределение температуры стенки футеровки при наличии водоохлаждаемых кессонов и без кессонов.

Методом преобразования Лапласа изучается процесс нагревания и охлаждения тел. Был установлен режим промерзания грунта в зависимости от температуры окружающей среды.

В технических расчетах рассматривается процесс нагревания плоских пластин, изучается характер изменения температуры с течением времени. Эта задача решена методом конечных разностей. Приведена диаграмма значений температуры в узловых точках разностной сетки.

При написании магистерской работы был изучен и проанализирован достаточно обширный круг научной, технической и справочной литературы, список которой приведен в работе.

1. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Для решения задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо составить дифференциальное уравнение теплопроводности. Под дифференциальным уравнением обычно понимают математическую зависимость, выражаемую дифференциальным уравнением между физическими величинами, характеризующими изучаемое явление, причем эти физические величины являются функциями пространства и времени. Такое уравнение описывает протекание физического явления в любой точке тела в любой момент времени.

Дифференциальное уравнение теплопроводности устанавливает зависимость между температурой, временем и координатами элементарного объема.

1.1 Вывод уравнения теплопроводности

Рассмотрим в трехмерном пространстве некоторое тело, проводящее тепло. Пусть температура в его произвольной точке M с координатами (x, y, z) в момент времени t задается функцией $u(x, y, z, t)$. Известно, что для вектора теплового потока $\vec{W}$ справедлива формула закона Фурье:

$$\vec{W} = -k \text{grad} u,$$

где $k(x, y, z)$ – коэффициент теплопроводности.

Если тело задается в пространстве E областью Ω с границей Σ , тогда количество тепла в Ω в момент времени t считается по формуле:

$$Q(t) = \iiint_{\Omega} c(M) \rho(M) u(M, t) d\tau_M,$$

где c – удельная теплоемкость, а ρ – плотность вещества.

Рассмотрим промежуток времени $[t_1; t_2]$ ($Q(t_1) = Q_1, Q(t_2) = Q_2$). Тогда

$$Q_2 - Q_1 = \iiint_{\Omega} c(M) \rho(M) u(M, t_2) d\tau_M - \iiint_{\Omega} c(M) \rho(M) u(M, t_1) d\tau_M.$$

Изменение количества тепла происходит вследствие притока (оттока) тепла извне и действия некоторых внутренних источников (стоков):

$$Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[- \iint_{\Sigma} (\vec{W}, \vec{n}) d\sigma \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} F(M, t) d\tau_M \right] dt.$$

Применим формулу Остроградского – Гаусса $\left(\iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} d\tau \right)$,
 $\left(\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = f(t^*) (t_2 - t_1) \right)$,
 для первого интеграла и формулу среднего значения
 для второго интеграла:

$$Q_2 - Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{W}) d\tau \right] dt + (t_2 - t_1) \iiint_{\Omega} F(M, t_4) d\tau_M,$$

где $t_4 \in [t_2; t_1]$.

Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$u(M, t_2) - u(M, t_1) = u_t(M, t_3)(t_2 - t_1), t_3 \in [t_1; t_2]$$

для гладкой функции u . Получим:

$$\begin{aligned} Q_2 - Q_1 &= \iiint_{\Omega} c(M) \rho(M) u(M, t_2) d\tau_M - \iiint_{\Omega} c(M) \rho(M) u(M, t_1) d\tau_M = \\ &= (t_2 - t_1) \iiint_{\Omega} c(M) \rho(M) u_t(M, t_3) d\tau_M. \end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$(t_2 - t_1) \iiint_{\Omega} c(M) \rho(M) u_t(M, t_3) d\tau_M = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{W}) d\tau_M \right] dt + (t_2 - t_1) \iiint_{\Omega} F(M, t_4) d\tau_M.$$

Для всех интегралов применим обобщенную формулу среднего значения
 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = f(P^*) V_{\Omega}$, тогда:

$$c(M_1) \rho(M_1) u_t(M_1, t_3) V_{\Omega} (t_2 - t_1) = - \operatorname{div} \vec{W} \Big|_{t=t_5, M=M_2} V_{\Omega} (t_2 - t_1) + F(M_3, t_4) V_{\Omega} (t_2 - t_1),$$

где $t_5 \in [t_1; t_2]; M_1, M_2, M_3 \in \Omega, V_{\Omega}$ – объем Ω .

Сокращая на $V_{\Omega} (t_2 - t_1)$, получим:

$$c(M_1) \rho(M_1) u_t(M_1, t_3) = - \operatorname{div} \vec{W} \Big|_{t=t_5, M=M_2} + F(M_3, t_4)$$

для некоторых точек M_1, M_2, M_3 из Ω . Выражение Ω свернем в некоторую точку M_0 , а отрезок $[t_1; t_2]$ в точку t_0 .

Следовательно, точки M_1, M_2, M_3 перейдут M_0 , а точки t_3, t_4, t_5 в t_0 . Тогда получим:

$$c(M_0)\rho(M_0)u_t(M_0, t_0) = -\operatorname{div}\vec{W}\Big|_{t=t_0, M=M_0} + F(M_0, t_0).$$

Записав для $\vec{W}$ закон Фурье, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{W} &= \operatorname{div}(-k\operatorname{grad}u) = -\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow \\ \Rightarrow c(M_0)\rho(M_0)u_t(M_0, t_0) &= \frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial u}{\partial z} + F(M_0, t_0). \end{aligned}$$

Так как, точки M_0 и t_0 выбраны произвольно, то можно распространить полученную формулу на весь отрезок $[t_1; t_2]$ и на всю область Ω :

$$\begin{aligned} c(x, y, z)\rho(x, y, z)u_t(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial x}(k(x, y, z)u_x(x, y, z, t)) + \frac{\partial}{\partial y}(k(x, y, z)u_y(x, y, z, t)) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(k(x, y, z)u_z(x, y, z, t)) + F(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Полученное выражение называется *уравнением распространения тепла в пространстве*.

Предположим, c, ρ, k — константы, тогда получим уравнения следующего вида:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, f = \frac{F}{c\rho}. \quad (1.1)$$

Если u, f зависят только от переменных x и t , то это уравнение запишется так:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (1.2)$$

В физической интерпретации это уравнение распространения тепла в однородном тонком стержне.

1.2. Постановка краевых задач

Дифференциальное уравнение теплопроводности, выведенное на основе общих законов физики, устанавливает связь между временным и пространственным изменениями температуры в любой точке тела, в которой происходит процесс теплопроводности. Дифференциальное уравнение теплопроводности имеет в общем случае бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выбрать решение, характеризующее конкретно рассматриваемый процесс, и дать полное математическое описание этого процесса, необходимо к основному дифференциальному уравнению присоединить дополнительные условия, включающие: геометрические условия (форма и размеры тела); физические условия (физические свойства тела и среды, мощность внутренних источников теплоты); краевые условия (начальное условие, граничные условия).

Геометрические условия определяют форму и линейные размеры тела. Физические условия определяют теплофизические параметры: λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность тела, c – удельная теплоемкость тела. *Краевыми условиями* называют совокупность начального и граничных условий. Начальные условия задаются только при изучении нестационарных процессов и состоят в задании распределения температуры внутри тела в момент времени, выбранный за начальный.

Граничные условия отображают условия теплового взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела.

Задания начального условия заключается в том, что для некоторого времени $\tau = \tau_0$ (обычно полагают $\tau_0 = 0$) должна быть известна функция $T(x, y, z, \tau_0) = f(x, y, z)$ пространственных координат. Простейшее начальное условие имеет вид:

$$f(x, y, z) = T_0 = \text{const.}$$

К такому условию, например, относятся начальные условия вывода системы из установившегося режима (разогрев из «холодного» состояния и т.д.).

Граничные условия для изучаемой задачи могут быть заданы несколькими способами; различают граничные условия I, II, III и VI рода.

1. *Граничные условия первого рода.* Задается распределение температуры на поверхности S тела как функции координат и времени:

$$T_s = \varphi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S. \quad (1.2.1)$$

К граничным условиям первого рода можно отнести задачи разогрева и охлаждения системы при заданном изменении температуры на границе или при весьма интенсивном теплообмене на поверхности, когда температура поверхности близка к температуре среды. Однако количество таких

практических задач ограничено и граничные условия первого рода используются в основном при разработке математических методов решения краевых задач.

2. *Граничные условия второго рода.* Задается распределение плотности теплового потока на поверхности тела как функция координат и времени:

$$q_s = \psi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S \quad (1.2.2)$$

Согласно закону Фурье, данное условие запишется в виде:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = \psi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S \quad (1.2.3)$$

В частном случае, когда плотность теплового потока на поверхности тела остается постоянной для любого момента времени, выражение (1.2.2) имеет вид:

$$q_s = q_0 = const.$$

Такие условия теплообмена могут создаваться при нагревании тел высокотемпературными источниками теплоты, когда теплообмен происходит главным образом излучением по закону Стефана – Больцмана, если при этом собственная температура тела значительно меньше температуры излучающей поверхности.

3. *Граничные условия третьего рода.* На пространственных границах тела задается зависимость плотности теплового потока за счет теплопроводности со стороны тела от температур поверхности тела T_s и окружающей среды T_c .

В случае охлаждения тела ($T_s > T_c$), имеем:

$$q_s = \alpha(T_s - T_c), \quad (1.2.4)$$

где α – коэффициент пропорциональности (коэффициент теплообмена измеряемый в $Вт / м^2 \cdot град$). Он характеризует интенсивность теплового взаимодействия среды заданной температуры T_c с поверхностью тела.

Плотность теплового потока, подводимая за счет теплопроводности к поверхности тела, определяется по закону Фурье. Следовательно, на основании закона сохранения энергии с учетом уравнения (1.2.4) получаем:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) = \alpha(T_s - T_c). \quad (1.2.5)$$

Уравнение (1.2.5) является аналитическим выражением граничного условия третьего рода, которое широко используется при аналитических исследованиях теплопередачи в твердых телах, обтекаемых потоками жидкости или газа, на границе между телом и жидкостью.

4. *Граничные условия четвертого рода.* Эти условия соответствуют теплообмену поверхности тела с окружающей средой (конвективный теплообмен тела с жидкостью) или теплообмену соприкасающихся твердых тел, когда температура соприкасающихся поверхностей одинакова. Задаются они как равенства температуры и плотностей теплового потока на поверхности соприкосновения двух тел:

$$T_{1s} = T_{2s}, \quad (1.2.6)$$

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_s = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_s. \quad (1.2.7)$$

Задачи с граничными условиями четвертого рода обычно применяются при расчетах многослойных теплоизоляционных покрытий в металлургии, авиационной и космической технике.

Дифференциальные уравнения теплопроводности вместе с заданными дополнительными условиями полностью определяют краевую задачу теплопроводности, которая подлежит решению.

2. Аналитические методы решения

2.1 Метод разделения переменных

Классический метод решения дифференциального уравнения теплопроводности состоит в том, что находится совокупность частных решений T_n , удовлетворяющих уравнению и граничному условию, а затем по принципу наложения составляется ряд этих решений.

1. *Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре.*

Задача состоит в отыскании решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1.1)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (2.1.2)$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2.1.3)$$

где $\varphi(x)$ – непрерывна, имеет кусочно – непрерывную производную и обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = l$.

По методу Фурье находим частные решения (2.1.1) в виде:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.1.4)$$

Подставляя (2.1.4) в уравнение (2.1.1), получим

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t)X''(x)$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

откуда получаем два уравнения

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (2.1.5)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (2.1.6)$$

Чтобы получить нетривиальное решение уравнения (2.1.1) вида (2.1.4), удовлетворяющее граничным условиям (2.1.2), необходимо найти нетривиальное решение уравнения (2.1.6), удовлетворяющее граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (2.1.7)$$

Таким образом, для того чтобы определить функцию $X(x)$, переходим к задаче о собственных значениях, называемой задачи Штурма – Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (2.1.8)$$

Только для значений параметра λ , равных

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \quad n=1,2,3,\dots, \quad (2.1.9)$$

существуют нетривиальные решения задачи (2.1.8):

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.1.10)$$

Значениям параметра $\lambda = \lambda_n$ соответствуют решения уравнения (2.1.5):

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}, \quad (2.1.11)$$

где a_n — произвольные постоянные. Тогда, все функции удовлетворяют уравнению (2.1.1) и граничным условиям (2.1.2) при любых постоянных a_n :

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.1.12)$$

Составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.1.13)$$

Выполняя начальное условие (2.1.3), получим:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.1.14)$$

Данный ряд представляет собой разложение заданной функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам в промежутке $(0; l)$. Коэффициенты a_n определяются по формуле

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.1.15)$$

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна и имеет кусочно — непрерывную производную, обращаясь в нуль при $x=0$ и $x=l$, то ряд (2.1.14) с

коэффициентами a_n , определяемые по формуле (2.1.15), равномерно и абсолютно сходятся к $\varphi(x)$.

При $t \geq 0$

$$0 < e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \leq 1,$$

то ряд (2.1.13) при $t \geq 0$ также сходится абсолютно и равномерно. Поэтому функция $u(x, t)$, определяемая рядом (2.1.13), непрерывна в области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ и удовлетворяет начальному и граничным условиям. Покажем, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1.1) в области $0 < x < l$, $t > 0$. Ряды, полученные из уравнения (2.1.13) почленным дифференцированием по x два раза, также абсолютно и равномерно сходятся в области $0 < x < l$, $t > 0$. При любом $t > 0$

$$0 < \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1, \quad 0 < \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1,$$

если n достаточно велико. Также можно показать существование у функции $u(x, t)$ непрерывных производных любого порядка по x и t в области $0 < x < l$, $t > 0$.

2. *Распространение тепла в стержне, концы которых находятся при заданных переменных температурах.*

Данная задача сводится к решению уравнения теплопроводности (2.1.1) при граничных условиях

$$u|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u|_{x=l} = \psi_2(t) \quad (2.1.16)$$

и начальном условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2.1.17)$$

где $\psi_1(t), \psi_2(t)$ и $\varphi(x)$ – заданные функции.

Решение найдем в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (2.1.18)$$

и

$$T_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.1.19)$$

Интегрируя два раза по частям, получим

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi} [u(0, t) - (-1)^n u(l, t)] - \frac{2l}{n^2 \pi^2} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Так как $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1.1) и граничным условиями (2.1.16), то

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi} [\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)] - \frac{2l}{n^2 \pi^2 a^2} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.1.20)$$

Дифференцируя выражения (2.1.19) по t , получим:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.1.21)$$

Исключая интеграл из равенств (2.1.20) и (2.1.21) получим следующее уравнение для определения коэффициентов $T_n(t)$:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = \frac{2n\pi a^2}{l^2} [\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)]. \quad (2.1.22)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \left[C_n + \frac{2n\pi a^2}{l^2} \int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \tau} (\psi_1(\tau) - (-1)^n \psi_2(\tau)) d\tau \right] \quad (2.1.23)$$

где

$$C_n = T_n(0).$$

Чтобы удовлетворять начальному условию (2.1.17), необходимо выполнить равенство

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x),$$

тогда

$$T_n(0) = C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.1.24)$$

Таким образом, решение задачи (2.1.1), (2.1.16) – (2.1.17) будет ряд (2.1.18), где $T_n(t)$ определяются равенствами (2.1.23) и (2.1.24).

2.2 Теория операционного метода и его приложение

Для многих задач теплопроводности использование классических методов оказывается неэффективным, например, применение метода разделения переменных для задач с внутренними источниками тепла. Решения, получаемые классическими методами, не всегда удобны для практического использования. Часто требуется иметь приближенное решения, которые получить из классических решений трудно. В результате запросов техники за последние десятилетия инженерам и физиками стали широко применяться операционные методы решения. Основные правила и теоремы операционного исчисления были получены проф. М. Ващенко-Захарченко и независимо от него Хевсайдом. Наибольшее распространение они нашли в электротехнике, благодаря работам Хевсайда. Этот метод оказался настолько эффективным, что позволил решить многие задачи, считавшиеся до него почти неразрешимыми.

В дальнейшем операционные методы нашли применение в теплофизике при решении разнообразных задач нестационарной теплопроводности, в химической технологии при решении задач нестационарной диффузии. В последние годы эти методы стали использоваться при решении задач гидродинамики, переносе нейтронов в поглощающих средах т. д.

Строгое математическое обоснование операционного метода Хевисайда дано в работах Бромвича, Джефрейса, Эфроса и Данилевского, Дейча, Вандер-Поля, Диткина и др. В настоящее время он рассматривается как самостоятельный метод решения уравнений математической физики, по своей стройности равноценный классическим методам. Операционный метод Хевисайда равнозначен методу интегрального преобразования Лапласа.

Метод преобразования Лапласа состоит в том, что изучается не сама функция (оригинал), а ее видоизменение (изображение). Это преобразование осуществляется при помощи умножения на экспоненциальную функцию и интегрирования ее в определенных пределах. Поэтому преобразование Лапласа является интегральным преобразованием.

Основные теоремы операционного исчисления.

I. Теорема линейности.

Линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация изображений. $f(t) \Rightarrow F(p)$, $q(t) \Rightarrow G(p)$, то $f(t) + q(t) \Rightarrow F(p) + G(p)$.

II. Теорема подобия.

Для любого постоянного $\lambda > 0$ $f(\lambda t) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, умножение аргумента оригинала на положительное число λ приводит к делению аргумента изображения и самого изображения на то же число λ .

III. Теорема затухания (смещения).

Умножение оригинала на функцию e^{at} влечет за собой смещение независимой переменной p , $f(t)e^{at} \Rightarrow F(p-a)$.

IV. Теорема запаздывания.

Для любого постоянного $\tau > 0$, $f(t-\tau) \Rightarrow e^{-p\tau} F(p)$.

На этой теореме будет основано изображение многих функций, поэтому рассмотрим ее подробнее.

Пусть график функции $f(t)$ имеет вид:

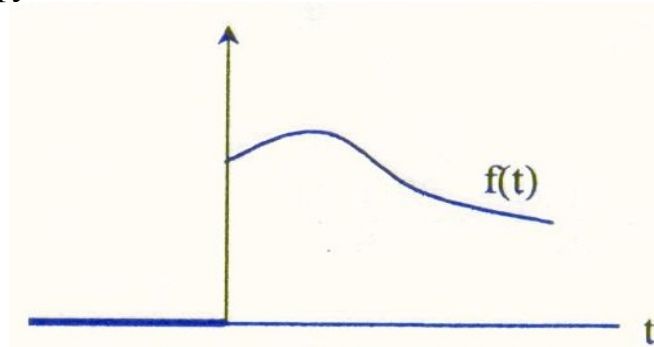


Рисунок 1

Тогда график функции $f(t-\tau)$ будет сдвинут относительно графика $f(t)$ на τ , причем на участке $(0, \tau)$ график совпадает с осью $0t$, по определению функции Лапласа, при $t < 0$ $f(0) = 0$, то есть при $t - \tau < 0$ $f(t) = 0$

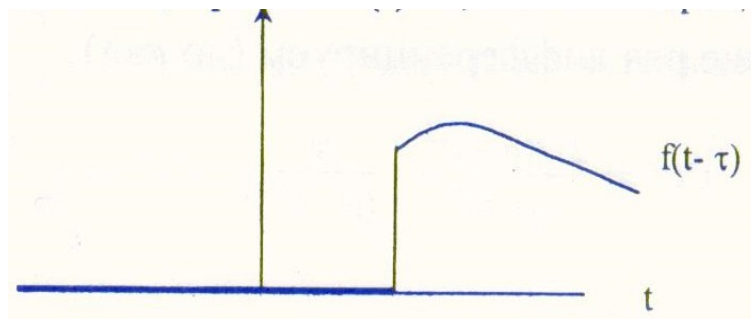


Рисунок 2

Таким образом, процесс описываемый функцией $f(t-\tau)$ начинается с опозданием на время τ .

Физическое толкование теоремы запаздывания можно записать так:

Запаздывание оригинала на время τ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$

$$f(t-\tau) \Rightarrow e^{-p\tau} F(p)$$

V. Теорема о дифференцировании по параметру.

Пусть функция $f(t, x)$ при каждом фиксированном x является оригиналом, ей соответствует изображение $F(p, x)$

$$f(t, x) \Rightarrow F(p, x) = \int_0^{\infty} f(t, x) e^{-pt} dt$$

$$\text{Если } f(t, x) \Rightarrow F(p, x), \text{ то } \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}.$$

VI. Теорема интегрирования оригинала.

Если $f(t) \Rightarrow F(p)$, то $\int_0^t f(t) dt \Rightarrow \frac{1}{p} F(p)$, интегрирование оригинала в пределах от 0 до t приводит к делению изображения на p .

Интегральное преобразование $f_L(s)$ функции $f(\tau)$ определяется формулой

$$\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F(p) \quad (2.2.1)$$

где $f(\tau)$ является оригиналом функции, а $f_L(s)$ - ее изображением, которое обозначается в виде $L[f(\tau)]$. Здесь s может быть и комплексным числом, причем предполагается, что вещественная часть его будет положительной. Для того чтобы изображение существовало, интеграл (2.2.1) должен сходиться. Это накладывает определенные ограничения на функцию $f(\tau)$.

Если задача решена в изображениях, то нахождение оригинала по изображению (обратное преобразование) в общем случае выполняется по формуле обращения

$$f(\tau) = L^{-1}[f_L(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} f_L(s) e^{s\tau} ds \quad (2.2.2)$$

Интегрирование происходит в комплексной плоскости $s = \xi + i\eta$ вдоль прямой $\sigma = const$, параллельной мнимой оси. Действительные числа ξ выбираются так, чтобы все особые точки подынтегрального выражения в

(2.2.2) лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости $s(\operatorname{Re} s \geq s_1 > \sigma_0)$. В подавляющем большинстве случаев обратное преобразование можно осуществить, не прибегая к контурному интегрированию, а воспользовавшись таблицами.

Нахождение оригинала функции по ее изображению может быть выполнено особенно быстро, если изображение совпадает с одним из изображений, содержащемся в таблице. Вместо формулы (2.2.2) для определения оригинала функции по ее изображению можно воспользоваться следующей формулой обращения [2]:

$$f(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{\tau} \right)^{n+1} f_L^{(n)} \left(\frac{n}{\tau} \right) \right] \quad (2.2.3)$$

Эта формула в принципе дает возможность получить оригинал функции лишь при помощи операций дифференцирования и перехода к пределу.

1. Если изображение представляет собой дробную функцию s :

$$f_L(s) = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \dots}{B_1 s + B_2 s^2 + \dots} \quad (2.2.4)$$

которая является частным случаем двух целых трансцендентных функций, то по теореме разложения имеем

$$f(\tau) = L^{-1} \left[\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(s_n)}{\psi'(s_n)} e^{s_n \tau} \quad (2.2.5)$$

где s_n - простые корни функции $\psi(s)$; при этом знаменатель имеет счетное множество простых корней и не содержит свободного члена при условии, что $A_0 \neq 0$, для этого необходимо, чтобы существовал интеграл (2.2.2) от функции $f_L(s)$.

2. Если изображение $f_L(s)$ представляет собой отношение двух полиномов (дробно-рациональная функция), причем степень полинома $\varphi(s)$ меньше степени полинома $\psi(s)$ и полином $\psi(s)$ имеет корни кратности k в точках s_m , то

$$f(\tau) = L^{-1} \left[\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} \right] = \sum_m \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow s_m} \left\{ \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[\frac{\varphi(s)(s-s_m)^k}{\varphi(s)} e^{s\tau} \right] \right\} \quad (2.2.6)$$

где сумма берется по всем корням $f_L(s)$. Если все корни $\psi(s)$ простые, т. е. все k равны единице, то формула (2.2.6) переходит в (2.2.4).

Рассмотрим некоторые приложения операционного метода в технических расчетах.

1. В задачах теплопроводности используется уравнение Бесселя, которое не решается в квадратурах:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0 \quad (2.2.7)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Это уравнение Бесселя, которое не решается в квадратурах.

Для решения уравнения (2.2.7) используем теорию операционного исчисления.

Представим уравнение (2.2.7) в виде

$$xy'' + y' + xy = 0$$

и применим теорему о дифференцируемости изображения. Тогда, если

$$y(x) \Rightarrow Y(p),$$

$$y'(x) \Rightarrow PY(p) - 1; \quad y''(x) \Rightarrow P^2Y - P,$$

$$\text{то } -xy \Rightarrow Y'(p), \quad xy'' \Rightarrow p^2 y' - 2PY + 1.$$

Таким образом, уравнение в изображениях, соответствующее уравнению (2.2.7) запишется :

$$-p^2 y' - 2py + 1 + PY - 1 - Y' = 0 \quad \text{или} \quad y' = -\frac{PY}{p+1} \quad (2.2.8)$$

Уравнение (2.2.8) с разделяющимися переменными относительно операторного решения $Y(p)$. Разделяя переменные, получим

$$Y = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}, \quad c - const.$$

Используя таблицу соответствия оригиналов и изображений, имеем

$$y(x) = C \left(1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \dots \right) \quad (2.2.9)$$

используя начальное условие $y(0) = 1$, получаем $C = 1$.

Сумма ряда (2.2.9) называется функцией Бесселя нулевого порядка и обозначается $I_0(x)$.

Таким образом, решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

2. Уравнение механических колебаний может быть исследовано методом операционного исчисления.

Материальная точка массой m притягивается к неподвижному центру под действием силы, пропорциональной удалению этой точки от притягивающего центра. Кроме того, на точку действует возмущающая сила

$$F_0 = a \sin \beta t.$$

$$F_1 = kx, \quad ma = F = F_0 - F_1, \quad mx'' = a \sin \beta t - kx \quad / : m$$

$$x'' + \frac{k}{m}x = \frac{a}{m} \sin \beta t, \quad \frac{k}{m} = \omega^2, \quad \frac{a}{m} = b$$

$$x'' + \omega^2 x = b \sin \beta t$$

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = 0$$

$$k^2 + \omega^2 = 0$$

$$k = \pm \omega i$$

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + x$$

$$x = (M \cos \beta t + N \sin \beta t)t$$

Метод операционного исчисления (переходим к изображениям)

$$x(t) \Rightarrow X(p)$$

$$x''(t) \Rightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$$

$$x''(t) \Rightarrow p^2 X(p), \quad \sin \beta t \Rightarrow \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}, \quad \beta = \omega$$

$$p^2 X + \omega^2 X = b \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$X(p^2 + \omega^2) = \frac{b\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad X(p) = \frac{b\omega}{(p^2 + \omega^2)^2};$$

по таблице соответствия

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$$

$$X(t) = \frac{b\omega}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) = \frac{b}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t),$$

или

$$x(t) = \frac{b}{2\omega^2} \sin \omega t - \frac{bt}{2\omega} \cos \omega t = A \sin \omega t - Bt \cos \omega t, \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Bt (амплитуда) $\rightarrow \infty$ имеет явление резонанс.

3. Дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерного потока тепла в пластине имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (2.2.10)$$

Применим преобразование Лапласа относительно переменной τ :

$$L\left[\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau}\right] = aL\left[\frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}\right] \quad (2.2.11)$$

откуда получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно изображения:

$$a \frac{d^2 T_L(x, s)}{dx^2} - s T_L(x, s) + u(x) = 0 \quad (2.2.12)$$

где функция $u(x)$ описывает начальное распределение температуры.

В этом примере рассмотрим более простой случай, когда

$$T(x, 0) = u(x) = 0 \quad (2.2.13)$$

т. е. когда в начальный момент времени температура во всех точках была одинакова и равна нулю.

Тогда уравнение (2.2.13) примет вид

$$T''_L(x, s) - \frac{s}{a} T_L(x, s) = 0 \quad (2.2.14)$$

Решение дифференциального уравнения (2.2.14) можно написать непосредственно, а именно

$$T_L(x, s) = A \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} x + B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} x = A_1 e^{\sqrt{\frac{s}{a}} x} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} x} \quad (2.2.15)$$

где $A, B, A_1 = \frac{A+B}{2}$ и $B_1 = \frac{A-B}{2}$ - постоянные относительно x , но зависящие от s величины.

Если заданы граничные условия, то, определив постоянные A и B , или A_1 и B_1 , при помощи таблицы изображений или теоремы разложения находим оригинал $T(x, \tau)$.

Рассмотрим ту же задачу, но при начальном распределении температуры как некоторой функции x , т. е.

$$T(x, 0) = u(x) \quad (2.2.16)$$

После применения преобразования Лапласа относительно переменной τ к дифференциальному уравнению (30) получим дифференциальное уравнение для изображения (31):

$$a T''_L(x, s) - s T_L(x, s) + u(x) = 0 \quad (2.2.17)$$

Решение этого неоднородного уравнения можно получить стандартными методами, например методами вариации произвольных постоянных, изложенных в учебниках по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [4].

Оно имеет вид:

$$T_L(x, s) = Ach\sqrt{\frac{s}{a}}x + Bsh\sqrt{\frac{s}{a}}x + \sqrt{\frac{a}{s}}ch\sqrt{\frac{s}{a}}x \int_0^x u(\xi)sh\sqrt{\frac{s}{a}}\xi d\xi - \sqrt{\frac{a}{s}}sh\sqrt{\frac{s}{a}}x \int_0^x u(\xi)ch\sqrt{\frac{s}{a}}\xi d\xi \quad (37)$$

После определения произвольных постоянных A и B из граничных условий решение задачи сведется к определению оригинала по изображению $T_L(x, s)$.

Если в начальный момент времени температура во всех точках одинакова и равна T_0 , т. е. $u(x) = T_0 = const$, то из (37) получаем

$$T_L(x, s) - \frac{T_0}{s} = A'ch\sqrt{\frac{s}{a}}x + B'sh\sqrt{\frac{s}{a}}x = A'_1 e^{\sqrt{\frac{s}{a}}x} + B'_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x} \quad (2.2.18)$$

где

$$A' = T_L(0, s) - \frac{T_0}{s} = A - \frac{T_0}{s} \quad (2.2.19)$$

$$B' = B \quad (2.2.20)$$

$$A'_1 = \frac{A' + B'}{2}, \quad B'_1 = \frac{A' - B'}{2} \quad (2.2.21)$$

К этому же результату можно было прийти, если в дифференциальном уравнении (2.2.16) при постоянной начальной температуре $u(x) = T_0 = const$

сделать замену переменной $T_L(x, s) = U(x, s) - \frac{T_0}{s}$, в результате чего уравнение (2.2.16) превратилось бы в уравнение (2.2.13), а решение последнего известно.

Так как A', B', A'_1, B'_1 - постоянные относительно x и определяются из граничных условий, то верхние индексы можно отбросить и написать решение дифференциального уравнения (2.2.16) при постоянной начальной температуре в таком виде:

$$T_L(x, s) - \frac{T_0}{s} = Ach\sqrt{\frac{s}{a}}x + Bsh\sqrt{\frac{s}{a}}x = A_1 e^{\sqrt{\frac{s}{a}}x} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x} \quad (2.2.22)$$

Постоянные A и B каждый раз определяются из соответствующих граничных условий.

Наибольшая трудность в решении уравнения теплопроводности для разнообразных краевых условий состоит в нахождении оригинала по полученному изображению T_L .

Применение интегрального преобразования Лапласа к решению уравнения теплопроводности имеет ряд преимуществ перед классическими методами интегрирования дифференциальных уравнений и перед некоторыми другими методами интегральных преобразований.

Во-первых, процесс применения интегрального преобразования Лапласа однотипен для задач самого различного характера и различных форм тела, способ решения является более прямым, не требующим особого искусства и подхода к решению каждого нового типа задач.

Во-вторых, интегральные преобразования Лапласа позволяют одинаково хорошо решать задачи при граничных условиях первого, второго, третьего и четвертого родов, без введения каких-либо новых допущений или преобразований.

В-третьих, наличие большого числа простых теорем позволяет получить наиболее подходящее для конкретной обстановки результаты; в частности, получать решения в форме, удобной для расчета при малых и больших значениях времени.

В-четвертых, этот метод позволяет особенно легко решать задачи с простыми начальными условиями; наиболее эффективно использование преобразование Лапласа по временной координате, а также по пространственной координате для тел, имеющих неограниченную или полуограниченную протяженность.

В-пятых, эффективность решения разнообразных задач методом преобразования Лапласа в значительной мере усиливается наличием весьма подробных таблиц изображений.

Интегральное преобразование Лапласа имеет свои недостатки. В частности, известные трудности возникают при решении задач, когда начальные условия заданы в виде функции пространственных координат, или при решении некоторых многомерных задач. В этой связи был предложен ряд методов интегральных преобразований по пространственным координатам в соответствии с геометрической формой тела.

Если преобразование берется по пространственной координате x , то интегральное преобразование функции $f(x)$ может быть представлено так:

$$[f(p)]_{F,H} = \int_0^{\infty} K(p,x) f(x) dx \quad (2.2.23)$$

Если ядро преобразования $K(p,x)$ берется в виде $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \rho x$ или $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \rho x$, то это интегральное преобразование соответственно называется синус- или косинус-преобразованием Фурье. Если же ядром преобразования выбрана

функция Бесселя $K(p, x) = xJ_\nu(px)$, то оно носит название преобразование Ханкеля. В частном случае, если пределы интегрирования изменяются от $-\infty$

до $+\infty$, а ядро имеет вид $K(p, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ipx)$, то получаем комплексное интегральное преобразование Фурье. Комплексное преобразование Фурье удобно применять для тел неограниченной протяженности, синус-преобразование Фурье следует использовать, когда на поверхности тела задано значение функции, т. е. имеют место граничные условия первого рода, а косинус-преобразование Фурье – когда решаются дифференциальные уравнения переноса при граничных условиях второго рода. Преобразование Ханкеля применяются в том случае, когда тело имеет осевую симметрию. Практическое применение названных интегральных преобразований после появления подробных таблиц изображения не вызывает особых затруднений.

В тех случаях, когда использование преобразований Фурье оправдано, а значения интересующих нас изображений отсутствуют, оригиналы изображений можно найти по следующим достаточно простым формулам обращения для:

— комплексного преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(p)]_F \exp(-ipx) dp \quad (2.2.24)$$

— синус-преобразования Фурье

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [f_S(p)]_{F_S} \sin px dp, \quad (2.2.25)$$

— косинус-преобразования Фурье

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [f_C(p)]_{F_C} \cos px dp \quad (2.2.26)$$

— преобразование Ханкеля

$$f(r) = \int_0^{\infty} r [f_\nu(p)]_H J_\nu(pr) dp \quad (2.2.27)$$

Особенностью названных преобразований является то, что верхний предел интегрирования равен бесконечности. Если в преобразовании Лапласа (2.2.3), которое в большинстве случаев применяется по отношению к временной координате, бесконечный предел интегрирования обусловлен

самим ходом нестационарного временного процесса, то в преобразованиях Фурье и Ханкеля (2.2.24)-(2.2.27) по пространственным координатам наличие бесконечного предела суживает круг применения этих методов. Другими словами, интегральное преобразование (2.2.24)-(2.2.27) успешно можно применять только к задачам для тел полуограниченной протяженности. Кроме того, следует отметить, что при использовании преобразований Фурье, особенно синус- и косинус-преобразований, необходимо обращать большое внимание на сходимость интегралов, так как условия сходимости здесь становятся более жесткими, чем условия сходимости соответствующих интегралов для преобразования Лапласа.

3. Конечно – разностный метод решения задач теории теплопроводности.

3.1 Теория разностных методов

Классические методы математической физики (Фурье и др.) позволяют решать уравнение теплопроводности только для частных случаев, когда начальные и граничные условия имеют достаточно простой вид.

Однако, для построения математических моделей адекватной реальному процессу, необходимо учитывать зависимость от температуры теплофизических характеристик материала, изменение формы тела, возможность фазовых превращений – это приводит к необходимости использовать приближенные методы расчета.

В практике вычислений чаще всего применяется метод сеток (конечных разностей), основанный на замене производных, входящих в дифференциальное уравнение, разностными отношениями.

Конечно – разностный метод интегрирования уравнений в частных производных, является сравнительно молодой отраслью прикладного анализа.

Первая работа, положившая основу метода сеток, принадлежит немецкому математику К. Рунге и вышла в свет в 1908 г.. В дальнейшем ряд авторов применяли метод сеток к различным типам линейных и даже нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

К задачам теплопроводности этот метод был впервые применен в 1924 году Шмидтом. Одной из важнейших работ в этой области является монография советского математика Ш. Е. Микеладзе, вышедшая в свет в 1936 г.. С 1932 года начали печататься работы Д. Ю. Панова, а в 1938 г. вышла его книга, в которой собраны практически ценные результаты, имеющиеся в русской и иностранной литературе. Можно считать, что с появлением этих работ задача численного интегрирования уравнений в частных производных получила твердые основания для своего теоретического и практического решения.

В 1955 году возник метод дробных шагов как метод построения экономичных конечно-разностных схем. Этот метод явился ответом на реальную потребность возникшую в прикладной математике – создание простых экономичных разностных схем решения сложных многомерных задач теории теплопроводности. Этот метод расширялся и углублялся советскими и американскими учеными Дуглас, Рэкфорд, Самарский А.А., Марчук Г.И., Яненко Н.Н. и др.

Метод конечных разностей основан на замене производных их приближенным значением, выраженным через разности значений функции в отдельных дискретных точках – узлах сетки. Дифференциальное уравнение в результате таких преобразований заменяется эквивалентным соотношением в конечных разностях, решение которого сводится к выполнению несложных

алгебраических операций. Окончательный результат решения дается выражением, по которому значение «будущего» потенциала (температуры) в данной точке (узле) является функцией времени, ее «настоящего» потенциала и «настоящего» потенциала смежных узловых точек. Повторяемость одинаковых операций при расчете полей температуры создает большие удобства для применения современной вычислительной техники, благодаря чему эффективность работы во много раз увеличивается.

Метод конечных разностей позволяет успешно решать как одномерные, так и двух- и трехмерные задачи. Случай, когда на область изменения переменных x и y наносится квадратная сетка, полностью исследован Ш. Е. Микеладзе. Треугольные и полярные сетки рассмотрены П. П. Юшковым. Необходимо отметить, что полярные сетки особенно удобны для решения задач с осевой симметрией.

Метод конечных разностей, как показал П. П. Юшков, позволяет эффективно решать также систему дифференциальных уравнений теплопроводности как при постоянных, так и при переменных коэффициентах.

Численные методы решения имеют большие потенциальные возможности, однако до последнего времени их широкое применение к решению уравнений переноса сдерживалось большим объемом вычислительной работы. Быстрое развитие и распространение электронно-вычислительной техники кардинально меняет их роль в исследовании явлений переноса.

Использование моделей для исследования явлений переноса основывается на формальной одинаковости в аналитическом описании ряда процессов, которая является следствием далеко идущего соответствия в поведении сравниваемых систем, их аналогии. Метод моделирования позволяет исследовать процессы реального объекта с помощью других процессов, протекающих в модели.

Численные решения дифференциальных уравнений в частных производных связаны с различными типами погрешностей.

1. *Ошибки разбиения*: происходят из замены дифференциального уравнения сеточным. Чем меньше сетка, тем ближе численное решение приближается к точному. Это называется сходимостью численного решения. Функция $U(x, y)$ - непрерывного аргумента, а $U(x_i, y_i)$ - дискретного аргумента, они принадлежат к разным функциональным пространствам, и для оценки их близости рассматривается норма

$$\|U - U_i^k\|$$

в пространстве сеточных функций.

Если при бесконечном дроблении сетки величина $\|U - U_i^k\| \rightarrow 0$, то решение разностной задачи сходится к решению краевой задачи.

2. Ошибки округления (числовая ошибка).

При численном расчете используют конечное число десятичных знаков, если бы использовали бесконечное число знаков, то эта ошибка не возникала бы.

Если в процессе вычисления возникающая погрешность имеет тенденцию убывать (по крайней мере не возрастать), то разностная схема устойчива.

Понятие устойчивости было введено Нейманом.

Разностные схемы. Устойчивые при любом соотношении шагов сетки, называют абсолютно устойчивыми.

Схемы, неустойчивые при любых шагах сетки, называют абсолютно неустойчивыми.

Сходимость и устойчивость связаны теоремой.

Теорема: Если решение краевой задачи $U(x,t)$ существует, разностная схема аппроксимирующая задачу, устойчива, то решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи.

Схема называется *явной*, если каждое значение неизвестной функции выражаются через уже найденные (матрица системы разностных уравнений треугольная) значения.

Неявные схемы, в отличии от явных, приводят к необходимости решать системы большого числа алгебраических уравнений.

Явные схемы преимущественны по своей простоте, однако, они часто оказываются неудобными из – за ограничений, связанными с требованием устойчивости.

Интегрирование дифференциального уравнения теплопроводности, справедливого для бесконечно малого объема тела, позволяет получить среднемассовую температуру для этого объема тела в виде непрерывной функции от координат x, y, z и времени t . Однако, при этом практически теряется возможность учесть изменение теплофизических параметров тела и коэффициента теплоотдачи по ходу процесса нагрева, неравномерность нагрева для тел сложной формы, изменение формы и размеров тела.

Для решения таких сложных задач используется формально приближенный, но абсолютно надежный по своим результатам численный метод конечных разностей.

Исходные дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия разложением в ряд Тейлора приводятся к конечно-разностной форме с необходимой степенью точности.

Разностные формулы могут быть двух существенно различных типов. К первому из них относятся так называемые явные схемы. Они построены так, что каждое значение неизвестной функции выражается через уже найденные (матрица системы разностных уравнений треугольная).

Уравнение теплопроводности в одномерной постановке, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.1.1)$$

$$0 \leq x \leq H; t > 0$$

Интервал $(0, H)$ изменения переменной x разобьем на N равных отрезков $x_n = n\Delta x$, аналогично отрезок $(0, G)$ изменения переменной t разделим на k равных частей с шагом $\Delta t = G/k$. Совокупность точек плоскости x, t с координатами $x = n\Delta x$ и $t = k\Delta t$ ($n = 0, 1, \dots, N; k = 0, 1, 2, \dots, G$) будем называть сеткой. Значение температуры в узле n в момент времени $k\Delta t$ обозначим через T_n^k . Заменяя в простейшем случае производные, входящие в уравнение (3.1.1) по формулам:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_n^{k+1} - T_n^k}{\Delta t} + O(\Delta t); \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{n-1}^k - 2T_n^k + T_{n+1}^k}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2.$$

Получим классическое явное уравнение

$$T_n^{k+1} = \frac{1}{p} [(T_{n-1}^k + T_{n+1}^k) + (p-2)T_n^k], p = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \cdot \Delta t} \quad (3.1.2)$$

Принцип экстремальных значений обеспечивает устойчивость разностного уравнения при $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$.

В качестве обобщения классического явного уравнения (3.1.2) можно считать сеточное уравнение вида:

$$T_n^{k+1} = \frac{1}{p + \alpha} [\alpha \cdot T_{n-1}^{k+1} + (1 - \alpha) \cdot T_{n-1}^k + T_{n+1}^k - (2 - p - \alpha) \cdot T_n^k], 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.1.3)$$

и

$$T_n^{k+1} = \frac{1}{p + \alpha} [\alpha \cdot T_{n+1}^{k+1} + (1 - \alpha) \cdot T_{n+1}^k + T_{n-1}^k - (2 - p - \alpha) \cdot T_n^k] \quad (3.1.4)$$

с условием устойчивости

$$p \geq \max \left\{ \frac{3}{2} - \alpha, 1 - \alpha + \sqrt{1 - \alpha} \right\}.$$

Уравнение (3.1.3) и (3.1.4) дают большую погрешность $O\left[\alpha \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} + (\Delta x)^2 + \Delta t\right]$, поэтому их практическое применение целесообразно. Однако поочередное использование формул (3.1.3) и (3.1.4) частично компенсирует асимметрию этих уравнений и особенно при достаточно большом количестве шагов по x , влияние компонентов погрешности $O(\Delta x)$ заметно ослабляется. Метод поочередного использования уравнений (3.1.3) и (3.1.4) называют перемежающимся методом.

Значительно превосходит по точности перемежающийся метод – метод среднего арифметического, которое имеет слабое ограничение устойчивости

$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot (1 - \alpha)}$ и погрешность аппроксимации почти $O(\Delta x)^2$:

$$AT^{(k+1)} = (A + C) \cdot T^{(k)} \quad (3.1.5)$$

$$A^*T^{(k+1)} = (A + C) \cdot T^{(k)}, \quad (3.1.6)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} p + \alpha & & & & & \\ -\alpha & p + \alpha & & & & \\ & \bullet & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & \bullet & & \\ & & & & -\alpha & p + \alpha \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & \bullet & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

A^* – матрица, транспортированная к матрице A , $T^{(k)}, T^{(k+1)}$ – столбцовые матрицы.

Уравнение (3.1.5) подсчитывается слева направо, уравнение (3.1.6) – справа налево, среднее арифметическое двух просчетов дает искомый результат.

Из анализа этих схем видно, что чем больше α , тем сильнее асимметрия, а значит, больше погрешность и слабее условие устойчивости. Поэтому при вычислении берут оптимальные значения

$$\alpha_{ij} = 1 - \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}.$$

Известный математик Микеладзе, для производных входящих в уравнение (3.1.1), предлагает следующую аппроксимацию:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha \cdot T_n^{k+1} + \beta \cdot T_n^{k+2} - (\alpha + \beta) \cdot T_n^k}{\Delta t \cdot (\alpha + 2\beta)}, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{n-1}^k - 2T_n^k + T_{n+1}^k}{(\Delta x)^2}. \quad (3.1.8)$$

для второй производной берется ее обычное выражение, а выражение первой производной числа α и β подбираются так, чтобы применение получаемого при этом арифметического соотношения имело погрешность порядка $(\Delta t)^4$.

Это соотношение имеет вид:

$$\beta T_n^{k+1} = -\alpha T_n^{k+1} + (\alpha + \beta - 2) \cdot T_n^k + T_{n+1}^k + T_{n-1}^k \quad (3.1.9)$$

а значения α и β получаются как решения системы линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + 2\beta &= p \\ \frac{\alpha}{2} + 2\beta &= \frac{p^2}{12} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.10)$$

При $p = 16$ из формулы (3.1.10) получаем $\alpha = -\frac{32}{3}; \beta = \frac{40}{3}$ и уравнение (3.1.9) преобразуется к аналогичному виду:

$$T_n^{k+2} = \frac{2T_n^k + 32T_n^{k+1} + 3(T_{n+1}^k + T_{n-1}^k)}{40}. \quad (3.1.11)$$

Для сходимости вычислительной схемы, формулы (3.1.9), достаточно взять p так, чтобы выполнилось неравенство:

$$12 \leq p \leq 9 + \sqrt{57}.$$

Эта схема, обладает большими теоретическими достоинствами, обеспечивает сходимость только для малых значений шага Δt , что влечет за собой увеличение объема счетной работы. Максимально допустимый интервал по времени в формуле (3.1.9) будет при $p = 12$.

Существует ряд схем, дающих погрешность порядка $(\Delta x)^4$ при меньших значениях p , что позволяет увеличить шаг по времени, при том же значении Δx , если производную по времени аппроксимировать выражением:

$$\frac{\alpha T}{\partial t} = \frac{\beta T_n^{k+1} - 2T_n^{k-1} - (\beta - \alpha) \cdot T_n^k}{\Delta t(\beta + \alpha)}, \quad (3.1.12)$$

а вторую производную по x определять по прежнему формулой (3.1.8). Тогда,

$$\beta T_n^{k+1} = \alpha T_n^{k-1} + (\beta - \alpha - 2) \cdot T_n^k + T_{n-1}^k + T_{n+1}^k, \quad (3.1.13)$$

где α и β удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = \frac{p^2}{6} \end{cases}.$$

Используя те же разностные аппроксимации (3.1.13) и (3.1.7) исходного уравнения (3.1.1), получаем формулу:

$$T_n^{k+1} = \frac{\alpha T_n^{k-1} + (\beta - \alpha - 2)T_n^k + T_{n-1}^k + T_{n+1}^k}{\beta}, \quad (3.1.14)$$

где α и β определяются из равенства:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{p}{6} \right) \\ \beta = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{p}{6} \right) \end{cases} \quad (3.1.15)$$

с погрешностью аппроксимации не ниже четвертого порядка малости относительно Δx при любых Δx и Δt удовлетворяющих условию:

$$\sqrt{12} \leq p \leq 6.$$

В частности, при $p = 4, \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{10}{3}$ формула (3.14) принимает вид:

$$T_n^{k+1} = \frac{3(T_{n-1}^k + T_{n+1}^k) + 2(T_n^k + T_n^{k-1})}{10}, \quad (3.1.16)$$

Формула (3.1.16) имеет порядок аппроксимации тот же, что и (3.1.11) - $(\Delta x)^4$, при использовании формулы (3.1.16) шаг по времени существенно увеличивается, по сравнению с формулой (3.1.11) в 4 раза и в 1,5 раза по сравнению с формулой (3.1.7).

Из рассмотренных формул, имеющих порядок аппроксимации $(\Delta x)^4$, наиболее экономичной в смысле выбора величины шага по времени, является:

$$133T_n^{k+1} = 35T_{n-1}^{k-1} + 2T_n^k + 48(T_{n+1}^k + T_{n-1}^k), \quad (3.1.17)$$

$$\Delta t = \frac{2(\Delta x)^2}{7a}, \alpha = \frac{35}{48}, \beta = \frac{133}{48},$$

самая простая в вычислительном отношении формула (3.1.16).

Манн и Тимлайк исходя из соотношения

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t(\Delta x)^2} (T_{n-1}^k - 2T_n^k + T_{n+1}^k - T_{n-1}^{k-1} + 2T_n^{k-1} - T_{n+1}^{k-1}) + O(t + x^2) \quad (3.1.18)$$

составим разностную схему:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \left(\frac{7}{6} - \frac{3}{p} \right) T_n^k + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{p} - \frac{1}{6} \right) (T_{n-1}^k + T_{n+1}^k) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{6} \right) (T_{n-1}^{k-1} - 2T_n^{k-1} + T_{n+1}^{k-1}) \quad (3.1.19)$$

Можно получить более экономичную схему, чем «оптимальная явная формула» Манна и Тимлайка (3.1.19), если аппроксимировать ее четвертый член выражения:

$$\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} = \frac{1}{(\Delta x)^4 \Delta t} (T_{n+1}^k - 2T_n^k + T_{n-1}^k - T_{n+1}^{k-1} + 2T_n^{k-1} - T_{n-1}^{k-1}),$$

получим уравнение:

$$T_n^{k+1}(\alpha - r) = (r + \alpha)(T_{n+1}^k + T_{n-1}^k) + T_n^k(1 + 2\alpha) - \alpha(T_{n+1}^{k-1} + T_{n-1}^{k-1}) + 2\alpha T_n^{k-1}, \quad (3.1.20)$$

$$\tau = \frac{\Delta t}{\alpha(\Delta x)^2}, \alpha = \frac{12\tau^2 - 6\tau - 1}{12} \quad \text{устойчиво при} \quad r < \sqrt{\frac{19}{48}} - \frac{1}{4}.$$

Трехслойная разностная схема:

$$\begin{aligned} T_n^{k+1}(1+r) = & \left(\tau + \frac{\alpha}{1+r} \right) \cdot (T_{n+1}^k + T_{n-1}^k) + T_n^k \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{1-r} \right) - r \cdot T_n^{k-1} - \frac{\alpha}{1+r} \cdot (T_{n+1}^{k-1} + T_{n-1}^{k-1}) + \\ & + \frac{\alpha}{1+r} \cdot T_n^{k+2} \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

при аппроксимации получим:

$$\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} = \frac{1}{\Delta t \cdot \Delta x (1+r)} (T_{n+1}^k - 2T_n^k + T_{n-1}^k - T_{n-1}^{k-1} + T_n^{k+1} + T_{n+1}^{k-2}), \quad (3.1.22)$$

обладает более благоприятным условием устойчивости $r < \sqrt{\frac{7}{12}}$.

Применение этой схемы дает возможность использовать большие шаги по времени, что дает экономию в объеме вычислительной работы на 13 % по сравнению со схемой (3.1.19).

Исходя из соотношения (3.1.18) и равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} = \frac{1}{\Delta t (\Delta x)^4} & (T_{n-2}^k - 4T_{n-1}^k + 6T_n^k - 4T_{n+1}^k + T_{n+2}^k - T_{n-2}^{k-1} + 4T_{n-1}^{k-1} - 6T_n^{k-1} + 4T_{n+1}^{k-1} - T_{n+2}^{k-1}) + \\ & + [(\Delta t) + (\Delta x)^2] \end{aligned}$$

Получаем двухшаговое уравнение вида (3.1.22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^4} = & \left(\tau^2 - 3\tau + \frac{23}{30} \right) \cdot T_n^k + \left(\frac{3}{2}\tau - \frac{2}{3}\tau^2 - \frac{13}{180} \right) \cdot (T_{n-1}^k + T_{n+1}^k) + \frac{1}{6} \cdot \left(\tau^2 - \frac{1}{60} \right) \cdot (T_{n-2}^{k-1} + T_{n+2}^k) + \\ & + \left(3\tau - \tau^2 - \frac{3}{20} \right) \cdot T_n^k + \left(\frac{2}{3}\tau^2 - \frac{1}{2}\tau + \frac{13}{180} \right) \cdot (T_{n-1}^{k-1} + T_{n+1}^{k-1}) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{60} - \tau^2 \right) \cdot (T_{n-2}^{k-1} + T_{n+2}^{k-1}). \end{aligned}$$

Если $\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{\sqrt[3]{840}}$, то уравнение (3.1.22) имеет еще меньшую погрешность:

$$O[(\Delta t)^4 + (\Delta x)^8].$$

Для численного решения уравнения (3.1) Ричардсон предложил разностную схему:

$$\frac{T_n^{k+1} - T_n^{k-1}}{2\Delta t} = \frac{T_{n-1}^k - 2T_n^k + T_{n+1}^k}{(\Delta x)^2}, \quad (3.1.23)$$

При этом использование центральной разности по времени приводит к сравнительно малой погрешности аппроксимации $O[(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2]$.

Однако практическое применение формулы (3.23) полностью исключается, так как это абсолютно неустойчивое разностное уравнение.

На основе абсолютно неустойчивой разностной схемы Ричардсона (3.23), можно получить устойчивое сеточное уравнение, взяв следующую аппроксимацию остаточного члена:

$$\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} = \frac{1}{\Delta t} (T_{n+1}^k - 2T_n^k + T_{n-1}^k + T_n^{k-1} + 2T_n^{k-1} - T_{n-1}^{k-1}),$$

и

$$T_n^{k+1} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{6} \right) (T_{n+1}^k - 2T_n^k + T_{n-1}^k) + T_n^{k-1} + \frac{1}{6} (T_{n+1}^{k-1} - 2T_n^{k-1} + T_{n-1}^{k-1}). \quad (3.1.24)$$

Исследование формулы (3.24) методом Неймана показало, что это разностное уравнение устойчиво при $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{3}$.

Неустойчивую схему Ричардсона можно превратить в абсолютно устойчивую схему Дюфорта и Франкела, если заменить $T(x; t)$ средним арифметическим $\frac{1}{2}(T_n^{k+1} + T_n^{k-1})$. в этом случае разностный аналог уравнения запишем в виде:

$$\frac{T_n^{k+1} - T_n^{k-1}}{2\Delta t} = \frac{T_{n+1}^k - T_n^{k+1} - T_n^{k-1} + T_{n-1}^k}{(\Delta x)^2}. \quad (3.1.25)$$

Прежде чем начать вычисление по формуле (3.25), нужно неким методом получить значения функции на k -ом слое. По схеме Дюфорта – Франкела при расчете имеется некоторая свобода в выборе порядка присоединения новых точек. Хотя схема Дюфорта – Франкела и отличается высокой точностью, решение разностного уравнения сводится к дифференциальному,

если только $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$, при $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$.

Если аппроксимировать уравнение (3.1.1):

$$\frac{T_n^{k+1} - T_n^k}{\Delta t} = \frac{a}{(\Delta x)^2} (T_{n-1}^{k+1} - 2T_n^{k+1} + T_{n+1}^{k+1}), \quad (3.1.26)$$

то каждая последующая величина будет являться функцией одного значения, который относится к настоящему слою и нескольких – к последующему. Схемы такого типа называются неявными, при использовании их для каждого слоя приходится решать систему линейных уравнений. Неявные уравнения

решать сложнее, они являются устойчивыми при любых соотношениях между Δt и Δx , поэтому величину временного шага всегда можно выбрать так, чтобы сократить расчетное время без потери точности. Неявный метод обладает большой гибкостью, так как он позволяет:

- в целях повышения точности расчета менять расстояние между узлами сетки без одновременного изменения временного шага;
- применять переменный временной шаг, например в виде геометрической прогрессии, для сокращения объема вычислений.

Также существует неявная схема Кранка – Никольсона. Его уравнение получено заменой производных по времени и координате в точке $\left[n\Delta x, \left(k + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right]$ обычным конечно – разностным отношением:

$$\frac{T_n^{k+1} - T_n^k}{\Delta t} = \frac{a}{2(\Delta x)^2} \left[(T_{n-1}^k - 2T_n^k + T_{n+1}^k) + (T_{n+1}^{k+1} - 2T_n^{k+1} + T_{n-1}^{k+1}) \right]. \quad (3.1.27)$$

Применение данной формулы приводит к устойчивому вычислительному процессу при любых соотношениях между шагами Δt и Δx . Температуру T_n^{k+1} находят итерацией целой строки. Если положить, что $\frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\sqrt{20}}$, то погрешность метода станет $O[(\Delta x)^6]$ вместо $O[(\Delta x)^2]$ в общем случае.

Метод Кранка – Никольсона в начальный период счета менее точен, чем неявный метод: вначале наблюдается некоторое колебание устойчивости, которое можно устранить использованием малого приращения времени для первых нескольких шагов, пока высокочастотные составляющие не становятся несущественными. Безусловная устойчивость метода Кранка – Никольсона позволяет затем увеличить шаг по времени.

Таким образом, все решения необходимо начинать с метода Кранка – Никольсона с нескольких достаточно малых шагов по времени, чтобы

обеспечить соотношение $\frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$.

Формулы (3.2), (3.26) и (3.27) Крендал объединяет в одной записи, тогда:

$$T_n^{k+1} - \frac{\eta}{p} (T_{n-1}^{k+1} - 2T_n^{k+1} + T_{n+1}^{k+1}) = T_n^k + \frac{1}{p} (1 - \eta) (T_{n-1}^k - 2T_n^k + T_{n+1}^k), \quad (3.1.28)$$

при $\eta = 0$ из уравнения (3.27) получается явная рекуррентная формула (3.2),

при $\eta = \frac{1}{2}$ шеститочечная схема Кранка – Никольсона, при $\eta = 1$ неявная четырехточечная формула (3.26) Либмана. Уравнения (3.1.26) и (3.1.27)

обладают погрешностью аппроксимации порядка $O[(\Delta x)^2]$ и устойчивы при всех $\Delta t \rightarrow \infty$.

Для быстро меняющихся или разрывных начальных данных лучше применять схему:

$$\frac{3}{2}(T_n^{k+1} - T_n^k) - \frac{1}{2}(T_n^k - T_n^{k-1}) = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}(T_{n+1}^{k+1} - 2T_n^{k+1} + T_{n-1}^{k+1}), \quad (3.1.29)$$

с погрешностью аппроксимации $O[(\Delta t)] + O[(\Delta x)^2]$. Точность формулы (3.1.29) можно повысить введением других весовых частей.

В результате математического исследования устойчивости установлено, что неявное уравнение таит в себе некоторый запас устойчивости, который при вычислениях никак не используется. Попеременное применение явно – неявного метода требует меньшее число арифметических операций, а запас устойчивости неявного уравнения компенсирует недостачу устойчивости в явной схеме. Если уравнение (3.2) применять при нечетных k , а уравнение (3.1.26) для четных, то метод:

$$\begin{aligned} \frac{T_n^{2k+1} - T_n^{2k}}{\Delta t} &= \frac{T_{n-1} - 2T_n + T_{n+1}}{(\Delta x)^2}, \\ \frac{T_n^{2k+2} - T_n^{2k+1}}{\Delta t} &= \frac{T_{n-1} - 2T_n + T_{n+1}}{(\Delta x)^2}, \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

абсолютно устойчив, при Δx постоянном или меняющимся через четное число шагов.

Классическое явное уравнение дает приближение к истинному решению снизу, а уравнение (3.1.26 – 3.1.30) сверху. При использовании схемы (3.1.30) происходит компенсация погрешности. Уравнения (3.1.2) и (3.1.26) имеют погрешность $O[\Delta t + (\Delta x)^2]$, а формула (3.1.30) - $O[(\Delta t)^2 + (\Delta x)^4]$.

Все описанные разностные схемы используются для многомерных параболических уравнений типа теплопроводности. Однако, для численного решения с несколькими пространственными переменными, естественные многомерные схемы виды уравнения (3.1.2) и (3.1.26) оказываются неэффективными, так как приходится решать многомерную систему алгебраических уравнений, что даже для двух пространственных переменных требует очень много численных операций, поэтому в последнее время появилось так называемые «экономичные схемы».

4. Практическое приложение

4.1. Исследование температурного поля футеровки

Производительность высокотемпературных агрегатов по производству меди тесно связана с ее техническим состоянием. В процессе эксплуатации элементы огнеупорной кладки подвергаются разрушающему воздействию. Знание степени разрушения различных участков агрегата дает возможность своевременно проводить текущие и капитальные ремонты, правильно рассчитывать режимы работы, повысить безопасность обслуживания.

Наибольшему износу подвергается кладка торцовых стен, так как в них расположены шпуровые отверстия для выпуска штейна и шлака и при выпуске продуктов плавки футеровка стен в области шпуров постепенно размывается.

Одним из основных методов контроля толщины футеровки является установление зависимости температуры от толщины кладки. Температура – это единственный внешний фактор, по которому можно судить о прогаре футеровки. Вначале исследуем температурное поле стены без кессонов.

Математическими методами исследовано температурное поле огнеупорной кладки печи. Получено распределение температуры в стенке при установке водоохлаждаемых кессонов.

Для понижения температуры стен в футеровке современных руднотермических печей монтируются водоохлаждаемые кессоны. Математически задача описывается одномерным стационарным уравнением теплопроводности

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (4.1.1)$$

С граничными условиями

$$-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=H} = \alpha(T - T_b) \Big|_{x=H} \quad (4.1.2)$$

$$T \Big|_{x=0} = T_M \quad (4.1.3)$$

где x - координата вдоль толщины стенки, H - толщина стенки, λ - коэффициент теплопроводности, α - коэффициент теплопередачи стенки в воздух, T_M - температура расплавленной меди, T_b - температура окружающего воздуха.

Интегрируя уравнение (4.1.1), получим

$$T(x) = ax + b \quad (4.1.4)$$

Решение (4.1.4) должно удовлетворять граничным условиям (4.1.3) и (4.1.2):

$$\begin{aligned}
 T|_{x=0} &= T_M = b, \text{ то есть } b = T_M, \\
 -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=H} &= \alpha(ax + T_M - T_b) \Big|_{x=H} \\
 -\lambda a &= \alpha(aH + T_M - T_b) \\
 a &= -\frac{\alpha(T_M - T_b)}{\lambda + \alpha H}.
 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Подставляя (4.1.5) в формулу (4.1.4), получим

$$T(x) = -\frac{\alpha(T_M - T_b)}{\lambda + \alpha H}x + T_M. \tag{4.1.6}$$

Обозначим $k = \frac{\alpha}{\lambda}$, тогда

$$T(x) = -\frac{k(T_M - T_b)}{kH + 1}x + T_M. \tag{4.1.7}$$

Таким образом, если в футеровку не вмонтированы кессоны, то ее температура линейно зависит от толщины стенки.

Определим как изменится распределение температуры в стенке при установке водоохлаждаемых кессонов. Температуру кессона обозначим T_k , координаты расположения (x_0, y_0) , расстояние между кессонами l . Математически процесс описывается двумерным уравнением Лапласа с соответствующими граничными условиями

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{4.1.8}$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=H} = \alpha(T - T_b) \Big|_{x=h} \tag{4.1.9}$$

$$T|_{x=0} = T_M, \quad T(x_0, y_0) = T_k \tag{4.1.10}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=l} = 0 \quad (4.1.11)$$

Решение этой задачи находим в виде двух функций

$$T(x, y) = \varphi(x) + f(x, y),$$

где $\varphi(x)$ - решение в случае без кессонов.

Решение $f(x, y)$ ищем методом Фурье в виде равномерно сходящегося ряда:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x}) \cdot \sin \lambda_n y$$

Общее решение

$$T(x, y) = \varphi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x}) \cdot \sin \lambda_n y \quad (4.1.12)$$

коэффициент A_n и B_n определяются в соответствии с граничными условиями.

Найдем частную производную $\frac{\partial T}{\partial y}$:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y,$$

причем $(A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x}) \lambda_n \neq 0$, следовательно $\cos \lambda_n y|_{y=0} = 0$

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}.$$

Значения λ_n , при которых задача (4.1.8) – (4.1.11) имеет нетривиальное решение, называются собственными значениями, а сами решения собственными функциями. Эту задачу называют задачей Штурма – Лиувилля.

По условию (4.1.10) $T(x, y)|_{x=0} = T_M$, поэтому учитывая (4.1.7), где $\varphi(0) = T_M$ получим из (4.1.12)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n) \sin \lambda_n y = 0,$$

но $\sin \lambda_n y \neq 0$, следовательно $A_n = -B_n$.

Общее решение (12) запишется в виде:

$$T(x, y) = \varphi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{\lambda_n x} - A_n e^{-\lambda_n x}) \sin \lambda_n y \quad (4.1.13)$$

Общее решение (4.1.13) должно удовлетворять граничным условиям (4.1.9), которые преобразуем следующим образом:

$$-\lambda \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{df}{dx} \right) \Big|_{x=H} = \alpha (\varphi + f - T_b) \Big|_{x=H}$$

или

$$-\lambda \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=H} = \alpha (\varphi - c) \quad (4.1.14)$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$T(x, y) = T_M + \frac{T_k - T_M}{x_0} + \frac{2k}{l} \left[T_b - T_M - \frac{(1 + kH)(T_k - T_M)}{kx_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n x} - e^{-\lambda_n x}}{\lambda_n ((\lambda_n + k)e^{\lambda_n H} + (\lambda_n - k)e^{-\lambda_n H})} \sin \lambda_n y \right]$$

и зная реальные значения $T_M, T_k, x_0, \lambda, \alpha, T_b, l, H$ можно оценить температуру поверхности внешней стенки печи, как при наличии кессона, так и без него.

4.2 Задачи об охлаждении и нагревании ограниченных тел

Для многих задач теплопроводности решения, получаемые классическими методами не всегда удобны для практического использования. В связи с этим наряду с классическими методами в инженерных расчетах используются приближенные методы. В последнее время широкое распространение получили операционные методы решения.

Метод преобразования Лапласа состоит в том, что изучается не сама функция (оригинал), а ее видоизменение (изображение). Это преобразование осуществляется при помощи умножения на экспоненциальную функцию и интегрирования ее в определенных пределах. Поэтому преобразование Лапласа является интегральным преобразованием.

Применение преобразование Лапласа к решению уравнения теплопроводности имеет ряд преимуществ перед классическими методами интегрирования.

Во-первых, этот метод однотипен для задач различного характера и различных форм тела.

Во-вторых, преобразование Лапласа можно применять при граничных условиях всех типов.

В третьих, этот метод позволяет особенно легко решать задачи с простыми начальными условиями, а используемые теоремы дают возможность получить решение в форме, удобной для расчета при малых и больших значениях времени.

Однако, при использовании метода преобразования Лапласа могут возникнуть трудности, связанные с обратным преобразованием при рассмотрении многомерных задач.

Методом интегрального преобразования Лапласа рассмотрено решение задачи об охлаждении полуограниченного тела.

В начальный момент времени температура полуограниченного тела постоянна и равна U_0 . Начиная с момента времени $t = 0$ и во время всего процесса на поверхности полуограниченного тела поддерживается постоянная температура U_c . Найти распределение температуры в пластине в любой точке и в любой момент времени.

Математически задача формулируется следующим образом [1]. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (4.2.1)$$

где $t > 0$; $0 < x < \infty$; $a = const$

при краевых условиях

$$U(x; 0) = U_0 = const \quad (4.2.2)$$

$$U(0; t) = U_c = const \quad (4.2.3)$$

перепад температуры в бесконечно удаленной точке отсутствует:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x}(x; t) \right|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (4.2.4)$$

Интегральное преобразование Лапласа записывается в виде:

$$U(x; t) = \int_0^{\infty} U(x; t) e^{-pt} dt = V(x; p)$$

Если к левой части уравнения (4.2.1) применить теорему о дифференцировании оригинала функции, то исходное уравнение (4.2.1) можно записать:

$$pV(x; p) - U_0 = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Таким образом, уравнение в частных производных (4.2.1) превращается для изображения $V(p; x)$ в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, при этом используется начальное условие (4.2.2).

В изображениях уравнение (4.2.1) записывается в виде:

$$V(x; p) - \frac{p}{a} V(x; p) - \frac{U_0}{p} = 0. \quad (4.2.5)$$

Уравнение (4.2.5) однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $V(x; p) - \frac{U_0}{p}$.

Для его решения используется метод Эйлера, составлено соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 - \frac{p}{a} = 0$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{p}{a}}, \quad k_2 = -\sqrt{\frac{p}{a}}.$$

Общее решение уравнения (4.2.5):

$$V(x; p) - \frac{1}{p} U_0 = C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x},$$

C_1 и C_2 определяются из граничных условий (4.2.3), (4.2.4), которые в изображениях имеют вид:

$$V(0; p) = \frac{U_c}{p}, \quad (4.2.6)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x}(x; t) \right|_{x \rightarrow \infty} = \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (4.2.7)$$

Из условия (4.2.7) следует, что, при $x \rightarrow \infty$

$$\frac{dV}{dx} = C_1 \sqrt{\frac{p}{a}} e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} - C_2 \sqrt{\frac{p}{a}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} = 0,$$

что возможно при условии $C_1 = 0$.

Таким образом,

$$V(x; p) = C_2 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} + \frac{U_0}{p},$$

при $x = 0$

$$V(0; p) = C_2 + \frac{U_0}{p},$$

из условия (6) следует, что $\frac{U_c}{p} - \frac{U_0}{p} = C_2$, или $C_2 = \frac{U_c - U_0}{p}$.

Следовательно, решение в изображениях запишется в виде:

$$V(x; p) = \frac{U_c - U_0}{p} e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} + \frac{U_0}{p}.$$

Для нахождения оригинала, используем таблицу соответствия [2], тогда

$$U(x; t) = (U_c - U_0) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} + U_0 \quad (4.2.8)$$

где $\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} = 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}}$.

Решение уравнения (4.2.1) с условиями (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) имеет вид:

$$\frac{U(x; t) - U_c}{U_c - U_0} = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}. \quad (4.2.9)$$

Относительная избыточная температура θ определяется формулой

$$\theta = \frac{U(x; t) - U_c}{U_0 - U_c} = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}} = \operatorname{erf} \frac{1}{2\sqrt{Fo_x}}, \quad (4.2.10)$$

где $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ - функции ошибок Гаусса,

$$Fo_x = \frac{at}{x^2} \quad (4.2.11)$$

где Fo_x - число Фурье для координаты x .

Графики зависимости между относительной избыточной температурой θ и числом Фурье для малых и больших чисел Фурье приведены в работах [2], [3].

Задача на нагревание и охлаждение тел имеет важное техническое и промышленное применение.

Определим температуру земли на глубине 0,04 м., которая до похолодания была равномерно прогрета до $15^\circ C$. Внезапное похолодание понижает и в дальнейшем сохраняет поверхностную температуру земли при $-23^\circ C$. Коэффициент температуропроводности земли $a = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{час}$, время охлаждения равно трем часам.

При решении задачи пренебрегаем скрытыми теплотами и считаем, что температура воздуха внезапно понизилась и в дальнейшем сохранялась при температуре $-23^\circ C$.

Полагая $U_0 = -23^\circ C, U_c = 15^\circ C, x = 0,004 \text{ м}$, можно по формуле (4.2.11) вычислить параметр Фурье

$$Fo_x = \frac{at}{x^2} = \frac{8 \cdot 10^{-5} \cdot 3}{(0,04)^2} = 0,15.$$

По графику зависимости избыточной температуры θ от числа Фурье [2] находим, что $\theta = 0,45$. Температуру замерзания на глубине 0,04 м определим по формуле (4.2.10)

$$\frac{U(x;t) - 15}{-23 - 15} = 0,45; \quad U(x;t) = -2,1^\circ C.$$

Температура земли после трехчасового охлаждения на глубине 0,04 м установилась равной $-2,1^\circ C$.

Найдем решение инженерной задачи о прогревании промышленной площадки.

Промышленная площадка грунта прогревается в течении 12 часов при постоянной температуре $300^\circ C$. До подогрева температура площадки равна $20^\circ C$. Коэффициент температуропроводности грунта $a = 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{сек}$. Определить температуру площадки на глубине 0,5 м если предположить, что испарение влаги из грунта отсутствует.

Задачу на нагревание тела можно свести к задаче об охлаждении, вводя замену переменных

$$V(x;t) = 300 - \varphi(x;t).$$

Тогда $V_c = V(0;t) = 0$,

$$V_0 = V(x;0) = 300 - 20 = 280^\circ C.$$

Вычислим коэффициенты Фурье на глубине $0,5m$ по формуле:

$$Fo_x = \frac{at}{x^2} = \frac{7 \cdot 10^{-7} \cdot 12 \cdot 3600}{25 \cdot 10^{-2}} = 0,12.$$

Зная число Фурье, можно найти относительную температуру θ по графику зависимости между относительной температурой и числом Фурье [1], [2], она равна $\theta = 0,788$.

Температуру грунта находим по формуле (4.2.10):

$$0,788 = \frac{V(x;t) - V_c}{V_0 - V_c},$$

$$V(x;t) = 0,788 \cdot U_0 = 0,788 \cdot 280 = 220^\circ C.$$

Возвращаясь к переменной $U(x;t)$ получим:

$$U(x;t) = 300^\circ - 220^\circ = 80^\circ C.$$

Таким образом, после 12 – ти часового подогрева температура грунта промышленной площадки на глубине $0,5m$ равна $80^\circ C$.

Рассмотренный метод преобразования Лапласа можно использовать в таких задачах как охлаждение бетона, сварке, таянии, в строительстве и в ряде геологических расчетах.

4.3 Расчет температурного поля пластины

В качестве примера рассмотрим одну из инженерных задач, которая используется в технических расчетах – распространение тепла в пластине с течением времени.

Рассмотрим неограниченную пластину с постоянным коэффициентом температуропроводности $a = 0,25 \text{ фут}^2/\text{час}$. Лицевая поверхность пластины $x = L = 2,4$ дюйма теплоизолирована. Начальная температура $T_1 = 500^\circ F$, а в момент времени $\tau = 0$ она повышается до $T_1 = 500^\circ F$. Необходимо найти характер изменения температуры пластины в течении 4 минут.

Для удобства решения, опишем процесс математически. Так распространение тепла происходит по одной координатной оси, то уравнение теплопроводности запишем в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.3.1)$$

где a - коэффициент температуропроводности, равный в данной задаче $a=0,25 \text{ фут}^2/\text{час}$, этот коэффициент идет с начальным условием

$$T(x; \tau)|_{\tau=0} = 100 \quad (4.3.2)$$

и граничными условиями первого рода

$$\left. \begin{aligned} T(x; \tau)|_{x=0} &= 0 \\ T(x; \tau)|_{x=\tau} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.3)$$

Решение аналитическими методами нецелесообразно, так как необходимо найти простое практическое решение, применимое в инженерных расчетах. Для решения поставленной задачи удобнее использовать численные методы, в частности – метод конечных разностей, так как, решая задачу аналитически, мы получим довольно громоздкий ответ.

Составим задачу в конечно-разностном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &= \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau} = a^2 \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (4.3.5)$$

Обозначим $\frac{a^2 \Delta \tau}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{P}$. Тогда

$$T_i^{k+1} = P \left[T_{i+1}^k + T_i^k \left(\frac{1}{P} - 2 \right) + T_{i-1}^k \right] \quad (4.3.6)$$

В уравнении (4.3.6) для выполнения первого закона термодинамик; необходимо чтобы член $(P-2)$ был больше нуля. Таким образом, знаменитель критерия Фурье ограничивается условием

$$\frac{a^2 \Delta \tau}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{P} \leq \frac{1}{2}.$$

Исходя из формулы (4.3.6) можно получить сколь угодно разностных схем.

Если выберем наивысшее допустимое значение критерия Фурье, т.е. $P = 2$ то схема будет выглядеть следующим образом:

$$T_i^{k+1} = \frac{T_{i+1}^k + T_{i-1}^k}{2} \quad (4.3.7)$$

т.е. температура точки [1] равна среднему арифметическому из температур обеих смежных узловых точек [2] и [3].

Исходя из данных задачи и полученного уравнения (4.3.7), перейдем к непосредственным вычислениям.

Разделим пластину на 4 слоя, как показано на рисунке 11, толщиной

$$\delta = \frac{2,4}{4 \cdot 12} = 0,05 \text{ фута}$$

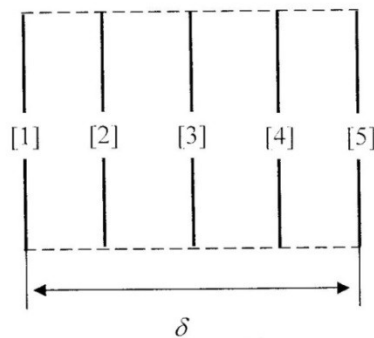


Рисунок 3
Пластина, разделенная на 4 части;
[1] - узловая точка

Тогда, если положить $P = \frac{1}{2}$ найдем значение приращения времени для каждого шага

$$\Delta \tau = \frac{\delta^2 P}{a} = \frac{0,05^2 \cdot 0,5}{0,25} = 0,005 \text{ часов} = 0,3 \text{ минут.}$$

В этом случае для каждой из четырех внутренних узловых точек [2], [3], [4] и [5] можно воспользоваться приведенным разностным уравнением (4.3.6).

В качестве начальных значений возьмем среднюю поверхностную температуру 300°F , а 100°F - температура внутренних узловых точек. Начиная с этого времени поверхностная температура сохранится при значении $T = 500^{\circ}\text{F}$. После первого интервала времени $\tau = 0,3$ минут температура точки [2] будет равна

$$T_2^{k+1} = \frac{T_1 + T_3}{2} = \frac{300 + 100}{2} = 200^{\circ}\text{F}.$$

Далее температура точки [3] соответственно будет равна

$$T_3^{k+1} = \frac{T_2 + T_4}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100^{\circ}\text{F}$$

и т.д. температура точки [5] будет равна двойному значению температуры в точке [4], т.е.

$$T_5^{k+1} = \frac{1}{2}(2T_4) = T_4$$

т.к. противоположная поверхность точки [5] изолирована, и соответственно и соответственно градиент температуры в ней равен 0.

Решение, основанное на уравнении (4.3.7) приведено в Таблице 1.

Таблица 1 – Численные значения температур в бесконечной пластине, $^{\circ}\text{C}$

τ , мин.	Узловые точки				
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
0,0	300	100	100	100	100
0,3	500	200	100	100	100
0,6	500	300	150	100	100
0,9	500	325	200	125	100
1,2	500	350	225	150	125
1,5	500	362,5	280	175	150
1,8	500	375	268,8	200	175
2,1	500	384,4	287,5	221,9	200
2,4	500	393,8	303,2	243,8	221,9
2,7	500	401,6	318,8	262,6	243,8
3,0	500	409,4	332,1	281,3	262,6

3,3	500	416,0	345,4	297,4	281,3
3,6	500	422,7	356,7	313,4	297,4
3,9	500	428,4	368,0	327,0	313,4

Примечание: в данном случае $P = \frac{1}{2}, T_i^{k+1} = \frac{T_{i+1}^k + T_{i-1}^k}{2}$.

Теперь рассмотрим ход изменения температуры при $P = \frac{1}{3}$. При подстановке значения τ в уравнение (4.3.6) получим

$$T_i^{k+1} = \frac{T_{i+1}^k + T_i^k + T_{i-1}^k}{3}.$$

Можно заметить, что при изменении значения P , изменится и приращение времени

$$\Delta\tau = \frac{\delta^2 P}{a} = \frac{0,05^2 \cdot 0,33}{0,25} = 0,003 \text{ часов} = 0,2 \text{ мин.}$$

Температура точки [5] будет равна

$$T_5^{k+1} = \frac{2T_4 + T_5}{3}.$$

Результаты вычислений приведены в Таблице 2.
При вычислениях, основанных на уравнении

$$T_i^{k+1} = \frac{T_{i+1}^k + 2T_i^k + T_{i-1}^k}{4}$$

для $P = \frac{1}{4}$ приращение времени сокращается до

$$\Delta\tau = \frac{\partial^2 P}{a} = \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,25} = 0,025 \text{ часов} = 0,15 \text{ мин.},$$

а температура точки [5] будет равна

$$T_5^{k+1} = \frac{T_4 + T_5}{2}.$$

Результаты вычислений приведены в Таблице 3.

Таблица 2 – Численные значения температур в бесконечной пластине, °C

τ , мин.	Узловые точки				
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
0,0	300	100	100	100	100
0,2	500	166,7	100	100	100
0,4	500	255,6	122,2	100	100
0,6	500	292,6	159,3	107,4	100
0,8	500	317,3	186,4	122,2	104,9
1,0	500	334,6	208,6	137,8	116,4
1,2	500	347,7	227	154,3	130,7
1,4	500	358,2	243	170,7	146,4
1,6	500	367,1	257,3	186,7	162,6
1,8	500	374,8	270,4	202,2	178,7
2,0	500	381,7	282,5	217,1	194,4
2,2	500	388,1	293,8	231,3	209,5
2,4	500	394	304,4	244,9	224
2,6	500	399,5	314,4	257,8	237,9
2,8	500	404,6	323,9	270	251,2
3,0	500	409,5	332,8	281,7	263,7
3,2	500	414,1	341,3	292,7	275,7
3,4	500	418,5	349,4	303,2	287
3,6	500	422,6	357	313,2	297,8
3,8	500	426,5	364,3	322,7	308,1
4,0	500	430,3	371,2	331,7	317,8

$$P = \frac{1}{3}, \quad T_i^{k+1} = \frac{T_{i+1}^k + T_i^k + T_{i-1}^k}{3}.$$

Примечание:

Таблица 3 – Численные значения температур в бесконечной пластине, °C

τ , мин.	Узловые точки				
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
0,0	300	100	100	100	100
0,15	500	150	100	100	100
0,3	500	225	112,5	100	100
0,45	500	265,6	137,5	103,1	100

0,6	500	292,2	160,9	110,9	101,6
0,75	500	311,3	181,2	121,1	106,3
0,9	500	326	198,7	132,4	113,7
1,05	500	337,7	214	144,3	123,1
1,2	500	347,4	227,5	156,4	133,7
1,35	500	355,6	239,7	168,5	145,05
1,5	500	362,7	250,9	180,4	156,8
1,65	500	369,1	261,2	192,1	168,6
1,8	500	374,9	270,9	203,5	180,4
1,95	500	380,2	280,1	214,6	192
2,1	500	385,1	288,8	225,3	203,3
2,25	500	389,8	297	235,7	214,3
2,4	500	394,2	304,9	245,7	225
2,55	500	398,3	312,4	255,3	235,4
2,7	500	402,3	319,6	264,6	245,4
2,85	500	406,1	326,5	273,6	255
3,0	500	409,7	333,2	282,2	264,3
3,15	500	413,2	339,6	290,5	273,3
3,3	500	416,5	345,7	298,5	281,9
3,45	500	419,7	351,6	306,2	290,2
3,6	500	422,8	357,3	313,6	298,2
3,75	500	425,7	362,8	320,7	305,9
3,9	500	428,6	368	327,5	313,3

$$P = \frac{1}{4}, \quad T_i^{k+1} = \frac{T_{i+1}^k + T_i^k + T_{i-1}^k}{4}.$$

Примечание:

На диаграмме хорошо представлено, как происходит охлаждение с течением времени в каждой узловой точке.

Диаграмма значений температурного поля бесконечной пластины при $P = \frac{1}{2}$ в каждой узловой точке

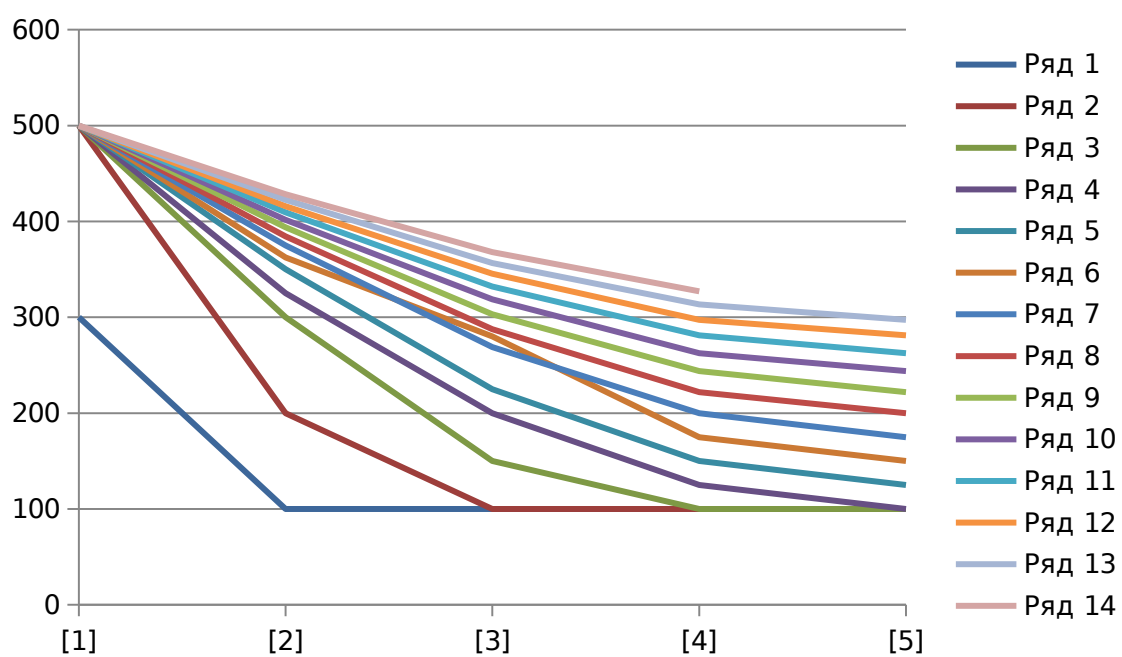


Рисунок 4

Рассмотренные задачи имеют практическое приложение в инженерных исследованиях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Магистерская работа выполнялась по логичной и рациональной схеме приведения математических и прикладных исследований и включала следующие этапы: теоретический анализ аналитических и численных методов решения; применение теоретических исследований для решения практических инженерных задач.

В работе четко связана теория с практикой. Рассмотрены инженерные задачи уравнения теплопроводности, применяемые в практике ЭВМ.

Предложены методы для вычисления температурных полей. Используются основные законы и методы теплопроводности.

В данной магистерской работе были проанализированы методы решения уравнений теплопроводности, произведены расчеты нестационарных задач на нагревание и охлаждение тел.

Методом разделения переменных при расчетах получено распределение температуры стенки футеровки при наличии водоохлаждаемых кессонов и без кессонов.

Методом преобразования Лапласа был установлен режим промерзания грунта в зависимости от температуры окружающей среды.

В технических расчетах рассматривался процесс нагревания плоских пластин, изучен характер изменения температуры с течением времени. Задача решена методом конечных разностей. Приведена диаграмма значений температуры в узловых точках разностной сетки.

При написании магистерской работы был изучен и проанализирован достаточно обширный круг научной, технической и справочной литературы, список которой приведен в работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Беляев Н.М., Рядно А.А. «Метод нестационарной теплопроводности» М. Высшая школа. 1978. 328с.
- 2 Лыков А.В. «Теория теплопроводности». М. Высшая школа. 1967. 600с.
- 3 Патанкар С.В. «Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах.» М. Издательство МЭИ, 2003. 312с.
- 4 Пискунов Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления» (том II). М. Интеграл-пресс. 2002. 410с.
- 5 Рихтмайер Р. Мортон К. «Разностные методы решения краевых задач.» М. Издательство Мир. 1972. 380с.
- 6 Сабитов К.Б. «Уравнения математической физики.» М. Высшая школа. 2003. 255с.
- 7 Форсайт Дж., Вазов В. «Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.» М. Иностранная литература. 1963. 488с.
- 8 Юшков П.П. «Приближенное решение задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей.» Труды Института энергетики АН БССР (выпуск 6.). 1958. 203с.
- 9 Яненко Н.Н. «Метод дробных шагов многомерных задач математической физики.» Новосибирск. Наука. 1967. 195с.
- 10 Саульев В.К. «Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток». –М: физматгиз, 1960. 324 с.
- 11 Карслоу Г., Егер Д. «Теплопроводность твердых тел». –М: физматгиз, 1964. 485 с.
- 12 Тихонов А.Н., Самарский А.А. «Уравнения математической физики». –М: Наука, 1966. 724 с.
- 13 Годунов С.К., Рябенький В.С. «Введение в теорию разностных схем». –М: ГИФМЛ, 1962. 340с.
- 14 Вазов В., Форсайт Д. «Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.» М. Иностранная литература. 1963. 455 с.
- 15 Козбода Л.А «Методы решения нелинейных задач теплопроводности». – М: Наука, 1975. 224 с.
- 16 Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. «Основные дифференциальные уравнения математической физики». М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 456 с.
- 17 Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1964. 255 с.
- 18 Соболев С.Л. «Уравнения математической физики». М., Высшая школа, 1947. 545 с.
- 19 Огородников А.С. «Уравнения математической физики» Учебное пособие. - 2-е изд. - Томск: ТПУ, 2010. 96 с.

- 20 Масленникова В.Н. «Дифференциальные уравнения математической физики» 2. – М.: изд-во Российского университета Дружбы народов, 1998. – 475 с.
- 21 Михайлов В.П. «Дифференциальные уравнения в частных производных» М., Наука, 1976. 375 с.
- 22 Арсенин В.Я. Математическая физика. М.: Издательство "Наука", 1966. 724 с.
- 23 Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976. 428 с.
- 24 Арефьев В.Н. Лекции по «Уравнениям математической физики» -М: Высшая школа, 1974. 366 с.
- 25 Диткин В.А., Прудников В.А. «Операционное исчисление»: -М., 1975. 324 с.
- 26 Данко П.Е., Попов А.Г. «Высшая математика в задачах»: - 2 –е изд., - М., 1991. 245 с.
- 27 Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Е.И. «Операционные исчисления. Теория устойчивости»: изд. УРСС, - М: 2003. 590 с.

АНДАТПА

Бұл магистерлік диссертация 62 беттен тұрады. Магистерлік диссертацияның негізгі идеясы- жаңалық енгізу. Жүргізілген зерттеулер және талдау барысында келесі нәтижелер алынды:

- техникалық және анықтамалық әдебиеттер зерделенді;
- Жылу өткізушіліктің дифференциалды теңдеулерін шешу тәсілдері бойынша, соңғы әр түрлілік әдістері бойынша теориялық материалдар жинақталды;
- Фурье қатарларын қолдана отырып, ауыспалықтарды бөлу тәсілімен, суды суытатын кессондармен және онсыз футеровка қабырғасының температурасын тарату алынды;
- Лапластың өзгерту әдісімен қоршаған ортаның температурасына байланысты грунттың қату режимі тағайындалды.

Алынған нәтижелердің ғылыми жаңалығы келесіде: жылу өткізушілік теңдеулерін шешудің теориялық әдістері негізінде әр түрлі техникалық денелердің температуралық полеларын есептеу жүргізілді; тәжірибелік ұсыныстар және қорытындылармен бірге алынған нәтижелердің талдауы берілген.

Бұл диссертациялық жұмыстың прикладты мәні бар. Температуралық полеларды есептеу үшін негізгі төрт әдіс қарастырылған. Жылу өткізушіліктің дифференциалды теңдеулерін шешудің аналитикалық және санды әдістерінің теориясын талдап, оны практикалық есептерді шешу үшін зерттеулерде қолданылды.

Диссертацияның практикалық мәні нақты инженерлік есептерді шешуге бағытталған.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Беляев Н.М., Рядно А.А. «Метод нестационарной теплопроводности» М. Высшая школа. 1978. 328с.
- 2 Лыков А.В. «Теория теплопроводности». М. Высшая школа. 1967. 600с.
- 3 Патанкар С.В. «Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах.» М. Издательство МЭИ, 2003. 312с.
- 4 Пискунов Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления» (том II). М. Интеграл-пресс. 2002. 410с.
- 5 Рихтмайер Р. Мортон К. «Разностные методы решения краевых задач.» М. Издательство Мир. 1972. 380с.
- 6 Сабитов К.Б. «Уравнения математической физики.» М. Высшая школа. 2003. 255с.
- 7 Форсайт Дж., Вазов В. «Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.» М. Иностранная литература. 1963. 488с.
- 8 Юшков П.П. «Приближенное решение задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей.» Труды Института энергетики АН БССР (выпуск 6.). 1958. 203с.
- 9 Яненко Н.Н. «Метод дробных шагов многомерных задач математической физики.» Новосибирск. Наука. 1967. 195с.
- 10 Саульев В.К. «Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток». –М: физматгиз, 1960. 324 с.
- 11 Карслоу Г., Егер Д. «Теплопроводность твердых тел». –М: физматгиз, 1964. 485 с.
- 12 Тихонов А.Н., Самарский А.А. «Уравнения математической физики». –М: Наука, 1966. 724 с.
- 13 Годунов С.К., Рябенький В.С. «Введение в теорию разностных схем». –М: ГИФМЛ, 1962. 340с.
- 14 Вазов В., Форсайт Д. «Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.» М. Иностранная литература. 1963. 455 с.
- 15 Козбода Л.А. «Методы решения нелинейных задач теплопроводности». – М: Наука, 1975. 224 с.
- 16 Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. «Основные дифференциальные уравнения математической физики». М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 456 с.
- 17 Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1964. 255 с.
- 18 Соболев С.Л. «Уравнения математической физики». М., Высшая школа, 1947. 545 с.
- 19 Огородников А.С. «Уравнения математической физики» Учебное пособие. - 2-е изд. - Томск: ТПУ, 2010. 96 с.
- 20 Масленникова В.Н. «Дифференциальные уравнения математической физики2. – М.: изд-во Российского университета Дружбы народов, 1998. – 475 с.

- 21 Михайлов В.П. «Дифференциальные уравнения в частных производных» М., Наука, 1976. 375 с.
- 22 Арсенин В.Я. Математическая физика. М.: Издательство "Наука", 1966. 724 с.
- 23 Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976. 428 с.
- 24 Арефьев В.Н. Лекции по «Уравнениям математической физики» -М: Высшая школа, 1974. 366 с.
- 25 Диткин В.А., Прудников В.А. «Операционное исчисление»: -М., 1975. 324 с.
- 26 Данко П.Е., Попов А.Г. «Высшая математика в задачах»: - 2 –е изд., - М., 1991. 245 с.
- 27 Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Е.И. «Операционные исчисления. Теория устойчивости»: изд. УРСС, - М: 2003. 590 с.