Министерство образования и науки Республики Казахстан

Инновационный Евразийский университет

Кафедра «Математики и информационных технологий»

«Допущен к защите»:
__________ заведующий
кафедрой _______ Ж.К. Даниярова

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

На тему: «Решение школьных задач повышенной трудности по математике»

по специальности 6М060100 «Математика»

Выполнил магистрант
группы Мту(м)-202 **В.В. Евменов**

Научный руководитель
д.ф-м.н., проф. **Д.И. Исмоилов**

Павлодар 2015

РЕЗЮМЕ

Данная магистерская диссертация состоит из 91 страниц. Основная идея магистерской диссертации заключается в рассмотрении сложных задач в школьном курсе математики, которые не входят в школьную программу. В ходе проведенных исследований и анализа в работе были получены следующие результаты:

- Изучена учебная и справочная литература
- Собраны теоретические материалы по способом решения уравнений и задач
- Разработаны алгоритмы решения уравнений и задач данного вида
- Описаны способы и методы их решений
- Рассмотрели ряд примеров и задач с применением данного вида

Научная новизна работы заключается в том, что разработаны: Решение уравнений в целых числах первой степени с двумя неизвестными методом нахождений (теорией цепных дробей). Решение сложных задач методом функциональной и комбинированной подстановки, системы относительно нелинейной системы двух уравнений с пятью неизвестными, три из которых образуют арифметическую прогрессию.

Настоящая диссертационная работа имеет прикладное значение. Рассмотрены методы решений сложных задач в школьном курсе математике. Про анализировав учебные материалы, мы сделали вывод, что Диофантовы уравнения это актуальная в наше время тема, т. к. решение уравнений, неравенств, задач, сводящихся к решению уравнений в целых числах, встречается в различных математических сборниках и сборниках ЕНТ.

Практическая значимость диссертации заключается в изучения данной темы на факультативных занятиях учениками, при подготовке к выпускным и вступительным экзаменам. Мы надеемся, что наш материал поможет старшеклассникам научиться решать уравнения такого вида.

ТҮЙІНДЕМЕ

Берілген магистрлік диссертация 91 беттен тұрады. Магистрлік диссертацияның негізгі идеясы мектеп бағдарламасына енбейтін, мектеп курсындағы математиканың күрделі есептерін қарастырумен тұжырымдалады. Жұмыста өткізілген зерттеулер мен талдаулар барысында келесі нәтижелер алынды:

- Оқу және анықтамалық әдебиеттер оқылды
- Теңдеулер мен есептерді шешу тәсілдері бойынша теориялық материалдар жинақталды
- Екі белгісіздіктері бар бірінші және екінші дәрежелі теңдеулер мен есептерді шешу алгоритмдері әзірленді
- Оларды шешу тәсілдері мен әдістері баяндалды

Жұмыстың ғылыми жаңалығы екі белгісіздігі бар бірінші дәрежелі толық сандарды табу әдісімен теңдеуді шешуді әзірлеу (тізбектік бөлшек теориясымен), үшеуі арифметикалық прогрессияны құрайтын бес белгісіздігі бар екі теңдеудің сызықсыз жүйесіне салыстырмалы жүйелерді функционалды және аралас алмастырып қою әдісімен күрделі есептерді шешу болып табылады.

Осы диссертациялық жұмыс қолданбалы мәнге ие. Күрделі есептерді математиканың мектеп курсында шешу әдістері қарастырылды. Оқу материалдарын талдай отырып, біз теңдеу Диофантовалары біздің уақытта өзекті тақырып екендігі туралы шешім жасадық, себебі толық сандардардағы теңдеуді шешуге келтірілетін есептер, теңсіздіктер, теңдеулерді шешу ҰБТ жинақтары мен әр түрлі математикалық жинақтарда кездеседі.

Диссертацияның практикалық мағынасы бітіру және түсу емтихандарына даярлау кезінде оқушылардың факультативтік сабақтарда осы тақырыптарды оқып үйретілумен тұжырымдалады. Біздің материал жоғары сынып оқушыларын екі белгісіздіктері бар бірінші және екінші дәрежелі теңдеулер мен есептерді шешуге үйретеді деп үміттенеміз.

ABSTRACT

This master thesis consists of 91 pages. The basic idea of the master's thesis is to consider the challenges in school mathematics, are not included in the school curriculum. In the course of studies and analyzes in the following results were obtained:

- Explore the educational and reference literature
- To collect theoretical materials on how to solve equations and problems
- The algorithms for solving equations and problems of the first and second degree with two unknowns
- The methods and techniques of their decisions.

The scientific novelty of the work lies in the fact that the developed solution of equations in integers of the first degree with two unknowns method of finding (the theory of continued fractions), the solution of complex problems by a combination of functional and substitution system with respect to non-linear system of two equations with five unknowns, three of which form arithmetic progression.

This thesis work has practical value. The methods of making challenges in school mathematics. After analyzing the training materials, we concluded that the Diophantine equations is relevant in our time, the theme, as the solution of equations, inequalities, problems reduced to the solution of equations in integers, is found in various mathematical books and collections of UNT.

The practical significance of the thesis is to study the topic in elective classes students in preparation for graduation and entrance examinations. We hope that our paper will help high school students learn to solve equations and problems of the first and second degree with two unknowns.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

a_i $i=\overline{1,n}$ - элемент цепной дроби

a_1 и a_0 - целые числа.

$a_k=[a_0,a_1,a_2.....,a_k]$, $k \le n$ - подходящей дробью k –го порядка для данной цепной дроби.

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

- конечная цепная дробь.

a_0 - нулевая подходящая дробь.

$[a_i]$ - неполное частное цепной дроби.

$[\alpha]$ - целая часть.

$\{\alpha\}$ - дробная часть.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Решением сложных задач в школьном курсе математики служат уравнения в целых числах, присутствующие в качестве практических заданий на каждой олимпиаде школьников по математике.

Существует много методов их решения, которые не входят в школьную программу по математике, такими уравнениями являются диофантовы уравнения.

Диофантовыми уравнениями называются алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в уравнениях должно быть не менее двух (если не ограничиваться только целыми числами). Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределенными уравнениями [20, с. 4].

Диофантовы уравнения связаны с именем древнегреческого математика Диофанта Александрийского. До нас дошли 7 книг Диофанта с алгебраическими уравнениями с целыми коэффициентами из, возможно, тринадцати, которые были объедены в «Арифметику» – сборник задач, состоящий из 189 книг. Каждое уравнение снабжено решением и необходимыми пояснениями [20, с. 4].

Индийские математики с пятого века так же рассматривали неопределенные уравнения первой степени. Некоторые такие уравнения с двумя и тремя неизвестными появились в связи с проблемами, возникшими в астрономии, например, при рассмотрении вопросов, связанных с определением периодического повторения небесных явлений [20, с. 4].

Первое общее решения уравнения

$$ax + by = c \tag{1}$$

Где a, b, c - целые числа, встречаются у индийского мудреца Брахмагупты (около 625 года), в 1624 году вышла книга французского математика Баше де Мезирьяка «Problemes plaisans et delectables que se font par les nombres» [20, с.

4]. Баше де Мезирьяк для решения уравнения $ax + by = c$ применил процесс, сводящий к последовательному вычислению неполных частных и рассмотрению подходах дробей [20, с. 4].

После Баше де Мезирьяна в XVII и XVIII веках различные правила для решения неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными давали Роль, Эйлер, Саундерсон и другие математики [20, с. 4].

Цепные дроби при решении уравнений первой степени с двумя неизвестными были применены Лагранжем [20, с. 4].

Одним из ярких представителем класса диофантовых уравнений второй степени, является уравнение Пелля (его еще называют неопределенным уравнением Ферма), то есть уравнение

$$x^2 - Ay^2 = 1 \tag{2}$$

где a - целое положительное число, не являющее полным квадратом. Первые упоминания об уравнении Пелля были найдены в работах математиков Древней Греции и Древней Индии. В общем виде задачу сформировал французский математик Пьер Ферма, поэтому во Франции данное уравнение называется «уравнением Ферма». Современное же название уравнения Пелля возникло благодаря Л.Эйлеру, ошибочно приписавшему их авторство Джону Пеллю – английскому математику, который этим уравнением никогда не занимался [20, с. 4].

Задачи повышенной сложности – это такие задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения. Условия задач повышенной сложности таковы, что позволяют ученикам довольно легко выделить тот математический аппарат, который нужен для решения задач по математике. Научить ребят решению задач повышенной сложности можно, если вызвать интерес, другими словами, предложить задачи, интересные и содержательные для современного ученика. Или же заменять формулировку вопроса, используя проблемные жизненные ситуации. Например, вместо задания «решить Диафантовое уравнение», предложить решить следующую задачу. Может ли ученик расплатиться за покупку стоимостью 19 р., если у него только трехрублевые купюры, а у продавца – десятирублевые? [20, с. 4]

Также действенен метод подбора вспомогательных задач. Это средство обучения решению задач говорит об определенном уровне достижения в решении задач. Обычно в таких случаях думающий ученик пытается самостоятельно, без помощи учителя находить вспомогательные задачи или упрощать и видоизменять условия данных задач.

Умение решать задачи повышенной сложности приобретается практикой. Не зря говорят, что математике нельзя научиться, глядя, как это делает сосед. Самостоятельная работа и помощь учителя – вот залог плодотворной учебы.

Методологической основой данного исследования является алгоритм Евклида и теория цепных дробей.

Целью работы является нахождение способа решения уравнений с двумя неизвестными первой и второй степени в целых числах, и в решении сложных задач. В связи с этим были поставлены следующие **задачи**:

- изучить учебную и справочную литературу;
- собрать теоретический материал по способам решения уравнений и задач;
- разобрать алгоритм решения уравнений и задач данного вида;
- описать способы и методы решения.
- рассмотреть ряд примеров и задач с применением данного приема.

Объектом исследования данной диссертации является решение уравнений и сложных задач в школьном курсе математики.

Предмет исследования – уравнения с одной и двумя переменными первой и второй степени в целых числах, задачи повышенной сложности.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций подтверждаются использованием фундаментальных положений теоретических основ математики: алгебры, теории чисел. Достоверность полученных результатов и выводов подтверждена выведенными теоремами и леммами.

На защиту выносятся:

- решение уравнений в целых числах (первой степени с одной неизвестной, и с двумя неизвестными);
- уравнение Пелля и его решение;
- способы решения задач повышенной трудности.

Научная новизна работы заключается в том, что разработаны решения уравнений в целых числах первой степени с двумя неизвестными методом нахождений (теорией цепных дробей) и решения сложных задач методом функциональной и комбинированной подстановки, системы относительно нелинейной системы двух уравнений с пятью неизвестными, три из которых образуют арифметическую прогрессию.

Практическая значимость диссертации заключается в изучении данной темы на факультативных занятиях учениками, при подготовке к выпускным и вступительным экзаменам. Мы надеемся, что наш материал поможет старшеклассникам научиться решать уравнения такого вида.

Настоящая диссертация состоит из введения, трех глав основной части и заключения, списка использованных источников и двух приложений. В первой главе – «Решение уравнений первой степени с одним неизвестным – содержится четыре раздела: «Уравнения с одним неизвестным», «Уравнение первой степени с двумя неизвестными», «Метод нахождения (теория цепных дробей)», «Теория цепных дробей (приближение вещественных чисел с помощью рациональных дробей)». В первом разделе рассматривается уравнение первой степени с одним неизвестным с целыми коэффициентами, где приводятся примеры, алгоритм и метод их решения. Во втором разделе рассматривается уравнение первой степени с двумя неизвестными, где решение производится с помощью алгоритма Евклида и методом спуска. В третьем разделе рассматривается метод нахождения (теория цепных дробей) для решения уравнений первой степени с двумя переменными с помощью непрерывной дроби, где отбрасывается последнее звено цепной дроби и полученную дробь сворачиваем в обыкновенную дробь. В четвертом разделе рассматривается теория цепных дробей (приближение вещественных чисел с помощью рациональных дробей), где решение уравнения первой степени с двумя неизвестными находится с помощью подходящих дробей. Первоначально раскладываем уравнение в цепную дробь, после выбираем из таблицы подходящих дробей дробь, расположенную ближе к данной дроби.

Вторая глава – «Уравнение второй степени с двумя неизвестными» – включает в себя один раздел: «Уравнение Пелля и его решения». В разделе рассматривается решения уравнения Пелля, где применяется метод разложения в цепную непрерывную дробь, разложения иррационального числа $\sqrt{A}$ применением квадратичных иррациональностей, нахождение подходящих дробей. Корнями данного уравнения являются числитель и знаменатель подходящей дроби.

В третьей главе «Решение задач повышенной сложности» рассматриваются решения сложных задач двумя методами: функциональным и комбинированным и задач относительно нелинейной системы двух уравнений с пятью неизвестными, три из которых образуют арифметическую прогрессию.

1 Теоремы. Сведения о решениях уравнений в целых числах

В этом пункте приведем формулировки определений, лемм и теорем, на основании которых будет составлен алгоритм решения неопределенных уравнений первой и второй степени от одной и двух неизвестных в целых числах.

Определение: степенью одночлена называют сумму показателей всех его букв.

Определение: если в уравнение с двумя неизвестными есть хотя бы один член второй степени относительно неизвестных, и нет члена более высокой степени, то такое уравнение называется уравнением второй степени с двумя неизвестными.

Определение: уравнение с одной неизвестной называется равенства содержащее только одну неизвестную, при которой уравнение превращается в верное числовое неравенство.

Лемма 1: пусть коэффициенты уравнения

$$a_1 x + a_0 = 0 \tag{1.1}$$

a_1 и a_0 - целые числа, то решение этого уравнения: $x = -\frac{a_0}{a_1}$ будет целым числом тогда когда a_0 нацело делится на a_1.

Лемма 2: Пусть коэффициенты уравнения

$$ax + by + c = 0 \tag{1.2}$$

a и b - целые числа, отличные от нуля, а c - произвольное целое число, где a и b имеют общий делитель единицу.

Теорема 1. Если в уравнении

$$ax + by = 1 \tag{1.3}$$

$(a,b) = 1$, то уравнение имеет, по крайней мере, одно решение.

Теорема 2. Если в уравнении

$$ax + by = c \tag{1.4}$$

$(a,b) = d > 1$ и c не делится на d, то уравнение целых решений не имеет.

Теорема 3. Уравнение

$$ax + by = c \tag{1.5}$$

разрешима в целых числах тогда и только тогда, когда (a,b) делиться на c.

Теорема 4. Если в уравнении

$$ax + by = c \tag{1.6}$$

$(a,b) = d > 1$ и $c \,\vdots\, d$, то оно равносильно уравнению

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \tag{1.7}$$

в котором $(a_1, b_1) = 1$.

Теорема 5. Если в уравнении

$$ax + by = c \qquad (1.8)$$

$(a,b)=1$, то все целые решения этого уравнения заключены в формулах:

$$\begin{aligned} x &= x_0 c + bt \\ y &= y_0 c - at \end{aligned} \qquad (1.9)$$

где x_0, y_0 – целое решение уравнения $ax + by = 1$, t - любое целое число.

Определение 1:Конечной цепной дробью называется выражение вида:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

где $a_i \in N$, $i = \overline{1,n}$, $a_0 \in Z$, $a_n \neq 1$ обозначается: $\frac{a}{b} = [a_0, a_1, a_2 ....., a_n]$.

Определение 2: элемент a_i называется элементом цепной дроби.

Определение 3: отрезок цепной дроби от a_0 до a_k называется подходящей дробью k–го порядка для данной цепной дроби и обозначается: $a_k = [a_0, a_1, a_2 ....., a_k]$, $k \leq n$.

Замечание: последняя подходящая дробь совпадает со всей дробью.

Определение 4: число a_0 называется нулевой подходящей дробью (подходящей дробью нулевого порядка), $a_0 = \frac{b_0}{g_0}$.

Теорема 1: всякое рациональное число $\frac{a}{b}$ можно однозначно представить в виде конечной цепной дроби, причем элементы цепной дроби $[a_i]$ будут являться неполными частными из алгоритма Евклида для чисел a и b.

Теорема 1.1: пусть $d = (a,b)$, тогда существуют целые числа m,n такие, что

$$am + bn = d \quad (1.10)$$

Согласно алгоритму Евклида:

$$d = r_{k+1} - r_r g_{k+1} = r_{k-1} - g_{k+1}(r_{k-2} - g_k r_{k-1}) = ... = ma + nb \quad (1.11)$$

где m,n - некоторые целые числа.

Определение 5: если $b_1 = b_2 = ... = b_s = 1$, $a_i \geq 1$ при всех $i = 1,2,...,s-1$, $a_s > 1$

То такую непрерывную дробь называют обыкновенной непрерывной дробью или цепной дробью.

1.1 Уравнения с одним неизвестным

Рассмотрим уравнение первой степени с одним неизвестным с целыми коэффициентами, которое имеет вид:

$$ax + b = 0 \quad (1.1.1)$$

Ясно, что решение этого уравнения будет

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Тогда значение x, будет целым числом только в том случае, когда b нацело делится на a.

Например:

1) $$6x + 12 = 0$$
$$x = -\frac{12}{6} = -2$$

2) $$4x - 8 = 0$$
$$x = \frac{8}{4} = 2$$

3) $$5x - 15 = 0$$
$$x = \frac{15}{5} = 3$$

Не всегда уравнение с одним неизвестным имеет целые корни, таким образом, уравнение (1.1.1) не разрешимо в целых числах, в том случае, когда b не делится нацело на a.

Например:

1) $$5x + 21 = 0$$
$$x = -\frac{21}{5} = -4{,}2$$

2) $$15x - 20 = 0$$
$$x = \frac{20}{15} = 1{,}3$$

3) $$12x + 4 = 0$$
$$x = -\frac{4}{12} = -0.3$$

С такими ситуациями мы встречаемся, и в случае уравнений, степень которых выше первой: 1) квадратное уравнение не в целых числах имеют целые решения.

Например:

1) $$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = 1; x_2 = -2$$

2) $$\begin{matrix} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x_1 = 1; x_2 = -3 \end{matrix}$$

3) $$\begin{matrix} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ x_1 = 1; x_2 = -4 \end{matrix}$$

2) квадратное уравнение в целых числах имеют не целые решения, так как его корни иррациональные.

Например:

1) $$\begin{matrix} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2} \end{matrix}$$

2) $$\begin{matrix} x^2 + 6x - 4 = 0 \\ x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{2} \end{matrix}$$

3) $$\begin{matrix} x^2 + 6x - 2 = 0 \\ x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{7} \end{matrix}$$

Нахождения целых корней уравнения n-ой степени с целыми коэффициентами:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + ax + b = 0 \tag{1.1.2}$$

При $(n \geq 0)$ решается легко. Допустим, что $x = a$ - целый корень этого уравнения. Тогда

$$a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots.. + a^2 + b = 0 \tag{1.1.3}$$

$$b = -a(a_{n-1} a^{n-1} + a_{n-2} a^{n-2} + \ldots.. + a) \tag{1.1.4}$$

Из равенства (1.1.4) видно, что b делится на a без остатка; следовательно, каждый целый корень уравнения (1.1.2) является делителем свободного члена b Для нахождения целых решений уравнения надо выбрать те значения, которые являются делителям свободного члена b уравнение (1.1.2), и при подстановке в уравнение обращают его в тождество.

Например: Из чисел 1; -1; 2 и -2, представляющих собой все делители свободного члена $b=2$ уравнения: $x^{10}+x^7+2x^3+2=0$

Только (-1) является корнем уравнения. Следовательно, это уравнение, имеет единственный целый корень $x=-1$. Этим же методом можно показать, что уравнение в целых числах будет не разрешима.

Например: $x^6-x^5+3x^4+x^2-x+3=0$, где делителями свободного члена $b=3$

, являются: -1; 1; 3; -3. Но не один из этих делителей не является корнем уравнения, следовательно, уравнения не имеет целых корней, и является не разрешимым в целых числах.

Уравнение n - й степени имеет не более n - корней.

При решении уравнений третьей и четвертой степени известны формулы корней, но эти формулы очень сложны и неудобны для практического применения. Для уравнений пятой и более высоких степеней общих формул корней не существует. Некоторые уравнения нетрудно решить с помощью разложения многочлена на множители.

Например: $x^3-8x^2-x+8=0$ - уравнение третьей степени с одной неизвестной, применяем метод разложения многочлена на множители.

Раскрадем левую часть уравнения на множители, получим:

$$x^2(x-8)-(x-8)=0,\quad (x-8)(x^2-1)=0,\quad (x-8)(x-1)(x+1)=0$$

Из данного уравнения, получаем три корня уравнения: $x-8=0$, $x-1=0$ или $x+1=0$, откуда получаем: $x_1=8$, $x_2=1$, $x_3=-1$

Уравнение, степень которых выше двух, решается методом введения новой переменой.

$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$$

Например: , если перемести все члены уравнения в левую часть и преобразовать получившееся выражение в многочлен стандартного вида, то получим уравнения:

$$x^4-10x^3+35x^2-50x-96=0$$

Для которого трудно, найти способ решения. Однако можно воспользоваться следующей особенностью данного уравнения, в левой части уравнения неизвестная x входит только в выражение x^2-5x, которое встречается в уравнении дважды.

Это позволяет решить данное уравнение с помощью введения новой переменной, обозначим x^2-5x через y:

$$x^2-5x=y$$

Тогда данное уравнение сведется к уравнению с неизвестной y:

$$(y+4)(y+6)=120.$$

Которое после упрощение примет вид:

$$y^2+10y-96=0$$

Решая полученное квадратное уравнения с одной неизвестной y, находим его корни:

$$y_1=-16, \quad y_2=6$$

Далее полученные корни подставляем в первоначальную замену замес-то y, и находим корни значения x:

$$x^2-5x=-16 \quad \text{или} \quad x^2-5x=6$$

Решая первое уравнения $x^2-5x=-16$, найдем, что оно не имеет корней, решая второе уравнение $x^2-5x=6$, найдем, что оно имеет два корня:

$$x_1=-1,\quad x_2=6.$$

Метод введения новой переменной позволяет легко решать уравнения с одной неизвестной четвертой степени, имеющий вид:

$$ax^4+bx^2+c=0,\ \text{где}\ a\neq 0.$$

Является квадратным уравнением с одним неизвестным относительно x^2, называется биквадратным уравнением.

Например: $9x^4-10x^2+1=0$, для решения этого уравнения воспользуемся метод введения новой переменной, обозначим x^2 через y:

$$x^2=y$$

После замены x^2 на y, получим квадратное уравнение с одной неизвестной относительно y:

$$9y^2-10y+1=0$$

Решаем полученное уравнение по формуле дискриминанта найдем два корня:

$$y_1=\frac{1}{9},\quad y_2=1.$$

Далее подставляем полученные корни в первоначальную замену, замес-то y, получим два уравнения с одной неизвестной x:

$$x^2 = \frac{1}{9}, \quad \text{или} \quad x^2 = \frac{1}{3}.$$

Решая первое уравнение, находим, что:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Решая второе уравнения, находим, что:

$$x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

Итак, исходное биквадратное уравнения с одной неизвестной имеет четыре корня:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{3}, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

Во многих случаях решение уравнений первой степени с одной неизвестной сводится к тому, что данное уравнение заменяется другим, ему равносильным, но более простым. Это другое заменяем третьим и так продолжаем до тех пор, пока не получим самое простое уравнение вида $x = a$, которое прямо указывает, что неизвестное должно быть равно числу a, следовательно $x = a$ должно быть корнями уравнения и всех предыдущих равносильных ему уравнений, в том числе и данного.

Например: $\dfrac{x-4}{3} + \dfrac{2(x+1)}{4} - 1 = \dfrac{5(x-3)}{2} + 2x - \dfrac{11x+43}{6}$.

Сделаем коэффициенты всех членов целыми числами.

Для этого умножим каждый член уравнения на 12, производя сокращение, получим:

$$4(x-4) + 6(x+1) - 12 = 30(x-3) + 24x - 2(11x+43)$$

Отделяем члены, содержащие неизвестные и свободные члены, раскрывая скобки:

$$4x-16+6x+6-12=30x-90+24x-22x-86$$

Сгруппируем в одной части члены, содержащие неизвестные в другой – свободные члены:

$$90+86+6-12-16=30x+24x-22x-4x-6x$$

Упростим уравнение, приведем подобные члены:

$$154=22x$$

Разделим обе его части на 22 получим:

$$x=7$$

где $x=7$ корень этого уравнения, а, следовательно, и предыдущих равносильных ему уравнений.

Из рассмотренного примера видно, что к решению уравнения первой степени можно составить алгоритм:

1) Привести уравнения к уравнению с целыми коэффициентами.
2) Раскрыть скобки.
3) Сгруппировать члены, содержащие неизвестные, в одной части уравнения, а свободные члены в другой.
4) Привести подобные члены.
5) Если коэффициенты при неизвестных не нуль, то разделить на него обе части уравнения.

Замечание: но эти указания ни в коей мере не будет, является обязательной для всякого уравнения, т.е. при решении многих более простых уравнений приходится начинать не с первого, а со второго, третьего и даже сразу с пятого этапа, при решении уравнения некоторые промежутки (этапы) могут оказаться ненужными.

Например: $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{3}$, умножим обе части уравнения на 12,получим уравнения с целыми коэффициентами:

$$4x-6=3x+4$$

И сразу переходим к третьему этапу: $4x-3x=6+4$, откуда: $x=10$

Значительно, большой интерес приставляет решение в целых числах уравнений первой степени с *n*-ми неизвестными.

1.2 Уравнение первой степени с двумя неизвестными

Рассмотрим уравнение первой степени с двумя неизвестными с целыми коэффициентами:

$$ax+by+c=0 \tag{1.2.1}$$

где a,b не равны нулю, а c - произвольное целое число. Допустим, что коэффициенты a и b не имеют общих делителей, кроме единицы. Если общий наибольший делитель этих коэффициентов, $d=(a,b)$, где (a,b) – взаимно простые числа отличные от единицы, то получим равенства:

$$a=a_1d \quad b=b_1d$$
;

подставляя эти значения в уравнение (1.2.1) получим:

$$(a_1x+b_1y)d+c=0 \tag{1.2.2}$$

Уравнение (1.2.2) может иметь целые решения только в том случае, когда c делится нацело на d. Таким образом, если наибольший делитель коэффициентов отличен от единицы, то есть $d=(a,b)\neq 1$, то все коэффициенты уравнения (1.2.1) должны делиться нацело на d, разделив уравнение (1.2.2) на d получим $\frac{(a_1x+b_1y)d}{d}+\frac{c}{d}$ или $a_1x+b_1y+\frac{c}{d}$ где коэффициенты (a_1,b_1) взаимно простые числа, а $\frac{c}{d}=c_1$. Исходя из этих значений получим уравнения:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \tag{1.2.3}$$

Рассмотрим два случая:

1) при $c = 0$;

2) при $c \neq 0$.

При $c = 0$ уравнение (1.2.1), примет вид:

$$ax + by = 0 \tag{1.2.1$'$}$$

Решая это уравнение относительно переменной x получим:

$$x = -\frac{b}{a}y$$

При решении этого уравнения, переменая x будет принимать целые значения, только тогда, когда значение переменой y будет делится на коэффициент a без остатка, то значение переменной y будет кратно коэффециенту a: $y = at$, значение t – принимает произвольные целые значения $(t = 0;\pm1;\pm2;..)$. Подставим значения y, в значение x, получим: $x = -\frac{b}{a}at = -bt$, две формулы содержащие все целые решение уравнения ($1.2.1'$):

$$y = at,\ x = -bt \tag{1.2.1$'''$}$$

При $c \neq 0$, в этом случае для нахождения всех целых рушений уравнения, достаточно найти одно какое ни будь решение, то есть найти такие целые числа, $\{x_0, y_0\}$ которые будут являться решение уравнения:

$$a_0x + b_0y + c = 0. \tag{1.2.4}$$

Теорема 1. Пусть (a,b) – взаимно простые числа и $\{a_0, y_0\}$ – целые числа, являющие решением уравнения:

$$ax + by + c = 0 \qquad (1.2.1)$$

тогда формулы:

$$x = x_0 - bt\ ;\ y = y_0 + at \qquad (1.2.1'')$$

при $(t = 0;\pm1;\pm2;..)$ дают все решения уравнения (1.2.1).

Доказательство:

Пусть $\{x, y\}$ – является произвольным решение уравнения (1.2.1), тогда, приравнивая равенства (1.2.1) (1.2.4)

$$ax + by + c = a_0x + b_0y + c\ ,$$

получаем:

$$ax - a_0x + by - b_0y = 0$$

или

$$y - y_0 = \frac{a(x_0 - x)}{b}\ ,$$

так как $y - y_0$ - целое число, (a,b) - взаимно простые, то $x - x_0$ нацело делиться на b, т.е. $x - x_0$ кратно коэффициенту b, $x - x_0 = bt$, где t - целое, тогда $y - y_0 = \frac{abt}{b} = at$. Таким образом, получаем: $x - x_0 = bt$, $y - y_0 = at$, что и требовалось доказать.

Рассматриваемое нами уравнение $5x+8y=39$ является уравнением 1-ой степени с двумя неизвестными. Для решения таких уравнений используется, так называемый метод спуска.

Выберем неизвестное, имеющее наименьший коэффициент (в нашем случае это x), и выразим его через другое неизвестное: $x=\frac{39-8y}{5}$.

Выделим целую часть: $x=(7-y)+\frac{4-3y}{5}$. Очевидно, что x будет целым, если выражение $\frac{4-3y}{5}$ окажется целым, что, в свою очередь, будет иметь место тогда, когда число $4-3y$ без остатка делится на 5.

Введем дополнительную целочисленную переменную z следующим образом: $4-3y=5z$. В результате получим уравнение такого же типа, как и первоначальное, но уже с меньшими коэффициентами. Решать его будем уже относительно переменной y: $y=\frac{4-5z}{3}$. Выделяя целую часть, получим: $y=1-z+\frac{1-2z}{3}$.

Вводим новую переменную u: $3u=1-2z$.

Выразим неизвестную с наименьшим коэффициентом, в этом случае переменную z: $z=\frac{1-3u}{2}=\frac{1-u}{2}-u$. Требуя, чтобы $\frac{1-u}{2}$ было целым, получим: $1-u=2v$, откуда $1-2v=u$. Дробей больше нет, спуск закончен.

Теперь необходимо «подняться вверх». Выразим через переменную v сначала z, потом y и затем x:

$$z=\frac{1-u}{2}-u=\frac{1-1+2v}{2}-1+2v=3v-1;$$

$$y = \frac{4-5z}{3} = \frac{4-5(3v-1)}{3} = 3-5v.$$

$$x = \frac{39-8y}{5} = \frac{39-8(3-5v)}{5} = 3+8v.$$

Формулы

$$x = 3+8v \qquad (1.2.5)$$

$$y = 3-5v \qquad (1.2.6)$$

где v – произвольное целое число, представляющее общее решение исходного уравнения в целых числах.

Для решения уравнения

$$ax+by=c \qquad (1.2.7)$$

в целых числах, требуются некоторые факты теории чисел. Наибольший общий делитель чисел a, b; обозначается символом (a,b), для нахождения наибольшего общего делителя чисел a, b, используется алгоритм Евклида:

Выбирается наибольший общий делитель по модулю из чисел a, b; $|a|>|b|$, (если $|a|=|b|$ то $(a,b)=|a|=|b|$).

Разделить a на b с остатком: (1) $a=bg_1+r_1$, где $0 \le r_1 > |b|$.

Разделить b на r_1 с остатком: (2) $b=r_1g_2+r_2$, где $0 \le r_2 > r_1$.

Разделить r_1 на r_2 с остатком: (3) $r_1=r_2g_3+r_3$, где $0 \le r_3 > r_2$.

(4) $r_{k-2}=r_{k-1}g_k+r_k$, где $0 \le r_{k-2} > r_{k-1}$.

(5) $r_{k-1}=r_kg_{k+1}+r_{k+1}$, где $0 \le r_{k+1} > r_k$.

$r_k = g_{k+2} r_{k+1}$.

(6)

Последний ненулевой остаток (6), является наибольшим общим делителям чисел: a, b, т.е $r_{k+1} = (a,b)$, (если b делит a, то $(a,b) = |b|$).

Доказательство теоремы 3 из пункта 1:

Пусть $d = (a,b)$ так как d делить (a,b), то d делит $ax + by$, т.е d делит c.

Если числа a,b взаимно простые, т.е $(a,b) = 1$ и a делит bc, то a делит и c

Так как $(a,b) = 1$, то согласно теореме 1.1, существуют целые m,n такие, что $am + bn = 1$, откуда $(ac)m + (bc)n = c$, причем a делит bc, значит a делит $(ac)m + (bc)n = c$.

Пусть (x_0, y_0) некоторое решение уравнения

$$ax + by = c \qquad (1.2.7)$$

тогда любое другое решение уравнения

$$ax + by = c \qquad (1.2.7)$$

имеет вид:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, y = y_0 - \frac{a}{d}t \qquad (1.2.8)$$

где $d = (a,b)$, $t \in z$.

Пример 1: Решим уравнение $15x + 84y = 39$ в целых числах, применяя алгоритм Евклида.

$(84;15)$, $84 > 15$,

$84 = 5 \cdot 15 + 9$,

$$15 = 1 \cdot 9 + 6,$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3,$$

$$6 = 3 \cdot 2,$$

где ненулевой остаток равен 3, значит $(84;15) = 3$, так как $(84;15) = 3$ делит 39, то согласно теореме 3, уравнение $15x + 84y = 39$ имеет решение в целых числах:

$$3 = 9 - 1 \cdot 6 = 9 - 1(15 - 1 \cdot 9) = 2 \cdot 9 - 1 \cdot 15 = 2(84 - 5 \cdot 15) - 1 \cdot 15 = 2 \cdot 84 + (-11) \cdot 15$$

значит $3 \cdot 13 = 2 \cdot 13 \cdot 84 + (-11) \cdot 13 \cdot 15$, $39 = 26 \cdot 84 + (-143) \cdot 15$, итак значения $(-143;26)$ является частным решением.

Теперь найдем все решения исходного уравнения, используя формулы (1.2.8):

$$x = -143 + \frac{84}{3}t, y = 26 - \frac{15}{3}t,$$ т.е $$x = -143 + 28t, y = 26 - 5t, t \in z$$

Ответ: ($x = -143 + 28t$; $y = 26 - 5t$, $t \in z$).

Пример 2: Рассмотрим решение уравнения $127x - 52y + 1 = 0$, с помощью алгоритма Евклида.

$$(52;127),\ 127 > 52,$$

$$127 = 2 \cdot 52 + 23,\ 0 \le 23 < 52,$$

$$52 = 2 \cdot 23 + 6,\ 0 \le 6 < 23,$$

$$23 = 3 \cdot 6 + 5,\ 0 \le 5 < 6,$$

$$6 = 1 \cdot 5 + 1,\ 0 \le 1 < 5,$$

$$5 = 1 \cdot 5$$

Конечный ненулевой остаток равен 1, т.е. $(52;127)=1$, так как $(52;127)=1$ делит (-1), то согласно теореме 3, уравнение $127x-52y=-1$ имеет решение в целых числах:

$$1=6-1\cdot5=6-1(23-3\cdot6)=6-1\cdot23+3\cdot6=6\cdot4-1\cdot23=4(52-2\cdot23)-1(127-2\cdot52)=$$

$$=4\cdot52-8\cdot23-1\cdot127+52\cdot2=52\cdot6-1\cdot127-8\cdot23=52\cdot6-1\cdot127-8(127-2\cdot52)=52\cdot6-1\cdot127-8\cdot127+16\cdot52=1$$

$$52\cdot22-127\cdot9=1,\quad -127\cdot9+52\cdot22=1,\quad 127\cdot9-52\cdot22=-1,$$

итак, значения $(9;22)$ является частным решением.
Теперь найдем все решения исходного уравнения, используя формулы (1.2.8):

$$x=9+\frac{52}{1}t,\quad y=22-\frac{127}{1}t, \text{ т.е. } x=9+52t,\quad y=22-127t,\quad t\in z$$

Ответ: ($x=9+52t$; $y=22-127t$, $t\in z$).

Пример 3: Решим уравнение $4x+2y=18$ с помощью алгоритма Евклида.

$$(4;2)=2\quad 4=2\cdot1+2,\quad 0\le2\le2$$
$$2=2\cdot1$$

Конечный ненулевой остаток равен 2, т.е. $(4;2)=2$, так как $(4;2)=2$ делится на 18, и является делителем $(2;18)$ то $(4;2)=(2;18)=2$ уравнение $4x+2y=18$ имеет решение в целых числах: $2=4+2\cdot(-1)$, так как уравнение равно 18, то умножим левую и правую часть на 9, получим: $2\cdot9=4\cdot9+2\cdot(-9)$, $4\cdot9+2\cdot(-9)=18$, сопоставляя полученное выражение с данным уравнением, полученное значение, $(9;-9)$ является частным решениям данного уравнения. Теперь найдем все решения исходного уравнения используя формулы (1.2.8):

$x = 9 + \frac{2}{2}t$, $y = -9 - \frac{4}{2}t$, т.е. $x = 9 + t$, $y = -9 - 2t$, $t \in z$

Ответ: ($x = 9 + t$; $y = -9 - 2t$, $t \in z$).

Пример 4: решим уравнение $15x + 40y = 300$ с помощью алгоритма Евклида.

$$(15;40) = 5 \quad 40 = 15 \cdot 2 + 10, \quad 0 \le 10 < 15$$
$$15 = 10 \cdot 1 + 5, \quad 0 \le 5 < 10$$
$$10 = 5 \cdot 2$$

Конечный ненулевой остаток равен 5, т.е. $(15;40) = 5$, так как $(15;40) = 5$ делится на 300, и является делителем $(15;300)$ то $(15;40) = (15;300) = 5$

Уравнение $15x + 40y = 300$ имеет решение в целых числах: $5 = 15 - 10 \cdot 1 = 15 - (40 - 15 \cdot 2) \cdot 1 = 15 - 40 + 15 \cdot 2$, $5 = 15 \cdot 3 + 40 \cdot (-1)$ так как уравнение равно 300, то умножим левую и правую часть на 60, получим: $15 \cdot 180 + 40 \cdot (-60) = 300$, сопоставляя полученное выражение с данным уравнением, полученное значение, $(180; -60)$ является частным решением данного уравнения. Теперь найдем все решения исходного уравнения, используя формулы (1.2.8):

$x = 180 + \frac{40}{5}t$, $y = -60 - \frac{15}{5}t$, т.е. $x = 180 + 8t$, $y = -60 - 3t$, $t \in z$

Ответ: ($x = 180 + 8t$; $y = -60 - 3t$, $t \in z$).

Решим уравнение $130x + 160y = 3000$, разделим данное уравнение на 10: $13x + 16y = 300$, так как $(13;16;300) = 1$ и $(13;16) = 1$ - являются диофантовыми уравнениями, и разрешимы в целых числах, для решения воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$\frac{16}{13} \Leftrightarrow 16 = 13 \cdot 1 + 3, \quad 0 \le 3 < 13$$

$$13 = 3 \cdot 4 + 1, \quad 0 \le 1 < 3$$

$$3 = 3 \cdot 1$$

Конечный ненулевой остаток равен 1, т.е. $(13;16) = 1$, так как $(13;16) = 1$ делится на 300, и является делителем $(13;300)$ то $(13;16) = (13;300) = 1$.

Уравнение $13x + 16y = 300$ имеет решение в целых числах: $1 = 13 - 3 \cdot 4$, $1 = 13 - (16 - 13 \cdot 1) \cdot 4,\ 1 = 13 - 16 \cdot 4 + 13 \cdot 4,\ 1 = 13 \cdot 5 + 16 \cdot (-4)$, так как уравнение равно 300, то умножим левую и правую часть на 300, получим: $300 = 13 \cdot 1500 + 16 \cdot (-1200)$, $13 \cdot 1500 + 16 \cdot (-1200) = 300$, сопоставляя полученное выражение с данным уравнением, где полученное значения, $(1500; -1200)$ является частным решениям данного уравнения. Теперь найдем все решения исходного уравнения используя формулы (1.2.8):

$$x = 1500 - \frac{16}{1}t, \quad y = -1200 + \frac{13}{1}t,$$

т.е. $x = 1500 - 16t$, $y = -1200 + 13t,\ t \in z$.

Рассмотрим задачи, приводящие к диофантовым уравнениям:

Стоимость товара 23 рубля, покупатель имеет только двухрублевые, а кассир пятирублевые монеты. Можно ли осуществить покупку без предварительного размена денег?

Решение: составим уравнения, пусть x - количество двухрублевых монет, y - количество пятирублевых монет, тогда: $2x - 5y = 23$, так как $(2;5;23) = 1$ и $(2;5) = 1$ - являются диофантовыми уравнениями, и разрешимы в целых числах, воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$\frac{5}{2} \Leftrightarrow 5 = 2 \cdot 2 + 1, \quad 0 \le 1 < 2$$

$$2 = 2 \cdot 1$$

Конечный ненулевой остаток равен 1, т.е $(2;5)=1$, так как $(2;5)=1$ делится на 23, и является делителям $(2;23)$ то $(2;5)=(2;23)=1$

Уравнение $2x-5y=23$, имеет решение в целых числах: $1=5-2\cdot 2$, $1=2\cdot(-2)+5\cdot 1,\ \ 1=2\cdot(-2)-5\cdot(-1),$ так как уравнение равно 23, то умножим левую и правую часть на 23, получим: $23=2\cdot(-2)\cdot 23-5\cdot(-1)\cdot 23$, $2\cdot(-46)-5\cdot(-23)=23$ сопоставляя полученное выражение с данным уравнением, полученные значения, $(-46;-23)$ являются частным решениям данного уравнения. Теперь найдем все решения исходного уравнения используя формулы (1.2.8):

$$x=-46-\frac{5}{1}t,\quad y=-23-\frac{2}{1}t, \text{ т.е. } x=-46-5t,\quad y=-23-2t,\quad t\in z.$$

В магазине галстук стоит 19 рублей. У вас одни трехрублевые, у кассира только пятирублевые. Можно ли при наличии таких денег расплатиться с кассиром?

Решение: составим уравнения, пусть x - количество трехрублевых монет, y - количество пятирублевых монет, тогда: $3x-5y=19$, так как $(3;5;19)=1$ и $(3;5)=1$ - являются диофантовыми уравнениями, и разрешимы в целых числах, воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$\frac{5}{3} \Leftrightarrow 5 = 3\cdot 1 + 2,\ \ 0 \le 2 < 3$$

$$3 = 2\cdot 1 + 1,\ \ 0 \le 1 < 2$$

$$2 = 2\cdot 1$$

Конечный ненулевой остаток равен 1, т.е. $(3;\,5)=1$, так как $(3;\,5)=1$ делится на 19, и является делителем $(3;\,19)$ то $(3;\,5)=(3;\,23)=1$

Уравнение $3x-5y=19$, имеет решение в целых числах: $1=3-2\cdot 1$, $2=5-3\cdot 1,\ \ 1=3-(5-3\cdot 1), 1=3-5+3\cdot 1,\ 1=3\cdot 2-5$, так как уравнение равно 19, то умножим левую и правую часть на 19, получим: $19=3\cdot 2\cdot 19-5\cdot 19$, $3\cdot 38-5\cdot 19=19$ сопоставляя полученное выражение с данным уравнением, полученное значения, $(38;19)$ является частным решениям данного уравнения. Теперь найдем все решения исходного уравнения, используя формулы (1.2.8):

$x=38-\frac{5}{1}t$, $y=19-\frac{3}{1}t$, т.е. $x=38-5t$, $y=19-3t$, $t\in z$.

Также можно решить эти уравнения в целых числах, применяя метод цепных дробей.

1.3 Метод нахождения (теория цепных дробей)

Для доказательства полученного результата при нахождении уравнения

$$ax+by+c=0 \tag{1.2.1}$$

методом разложения в цепную дробь, рассмотрим теорию цепных дробей.

Возьмем несократимую дробь $\frac{a}{b}$. Обозначим через g_1 - частное и через r_2 - остаток от деления a на b. Тогда:

$$a=g_1b+r_2,\quad r_2>b.$$

Пусть, g_2 - частное и r_3 - остаток от деления b на r_2. Тогда:

$$b=g_2r_2+r_3,\quad r_3>r_2,$$

Точно так же:

$$r_2 = g_3 r_3 + r_4, \quad r_4 > r_3.$$

$$r_3 = g_4 r_4 + r_5, \quad r_5 > r_4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:$$

Величины g_1, g_2 ….. называются неполными частными. Приведенное выше разложения, образовавшее неполное частное называется алгоритмам Евклида. Где остатки от деления r_2, r_3,удовлетворяют неравенству:

$$b > r_2 > r_3 > r_4 > \ldots.. \geq 0 \tag{1.3.1}$$

Т.е остатки от деления, образуют ряд убывающих неотрицательных чисел.

Так как число неотрицательных целых чисел, не превосходящих b, не может быть бесконечным, то на некотором шаге при образовании неполных частных процесс оборвется из – за обращения в нуль остатка r.

Допустим r_n - последний отличный от нуля остаток в неравенстве (1.3.1), тогда $r_{n+1} = 0$, откуда алгоритм Евклида примет вид:

$$\left.\begin{array}{l} a = g_1 b + r_2 \\ b = g_2 r_2 + r_3 \\ r_2 = g_3 r_3 + r_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2} = g_{n-1} r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} = g_n r_n \end{array}\right\} \tag{1.3.2}$$

Перепишем полученное равенство виде:

$$\frac{a}{b} = g_1 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_2}}$$

$$\frac{b}{r_2} = g_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}},$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = g_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}}, \qquad (1.3.3)$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = g_n$$

Заменяя значения $\frac{b}{r_2}$ в первой строке неравенства (1.3.3) соответствующим значением из второй строки неравенства (1.3.3), а значение $\frac{r_2}{r_3}$ заменяем третьей строкой и.т.д, в результате получаем разложения $\frac{a}{b}$ в цепную дробь:

$$\frac{a}{b} = g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \cfrac{1}{g_3 + \ddots \cfrac{1}{g_{n-1} + \cfrac{1}{g_n}}}}$$

Алгоритм Евклида дает возможность найти представление (или разложение) любого рационального числа в виде цепной дроби. В качестве элементов цепной дроби получаются неполные частные последовательных делений в системе равенств (1.3.2), поэтому элементы цепной дроби называются также неполными частными. Кроме того, равенства системы (1.3.3) показывают, что процесс разложения в цепную дробь состоит в последовательном выделении целой части и перевертывании дробной части.

Последняя точка зрения является более общей по сравнению с первой, так как она применима к разложению в непрерывную дробь не только рационального, но и любого действительного числа.

Разложение рационального числа $\frac{a}{b}$ имеет, очевидно, конечное число элементов, так как алгоритм Евклида последовательного деления a на b является конечным.

Понятно, что каждая цепная дробь представляет определенное рациональное число, то есть равна определенному рациональному числу.

Замечания: 1.В случае разложения правильной положительной дроби первый элемент $a_1 = 0$, например, $\frac{77}{187} = 0 + \frac{1}{187/77} = (0,2,2,3)$.

При разложении отрицательной дроби (отрицательный знак дроби всегда относится к числителю) первый элемент будет отрицательным, остальные положительными, так как целая часть отрицательной дроби является целым отрицательным числом, а ее дробная часть, как всегда, положительна.

Пример: $-\frac{95}{42} = -3 + \frac{1}{42/31}$, а так как $\frac{42}{31} = (1,2,1,1,4,2)$, то $-\frac{95}{42} = (-3,1,2,1,1,4,2)$.

Всякое целое число можно рассматривать как непрерывную дробь, состоящую из одного элемента.

Пример: 5=(5); $\frac{1}{m} = (0, m)$.

Единственность такого представления вытекает в силу однозначности деления с остатком.

Замечание: Если в определении 1цепной дроби, допустим, что $a_n = 1$, то тогда представления рационального числа $\frac{a}{b}$ в виде конечной цепной дроби не единственно.

Рассмотрим уравнение $127x - 52y + 1 = 0$, решив его методом цепных дробей. $127x - 52y + 1 = 0$, приоброзуем отношение коэффициентов при неизвестных,

$\frac{127}{52}$, выделем целую часть: $\frac{127}{52}=2+\frac{23}{52}$, правельную дробь $\frac{23}{53}$, заменим на обратную ей дробь, $\frac{1}{\frac{52}{23}}$ получим: $\frac{127}{52}=2+\frac{1}{\frac{52}{23}}$,проделаем такие же преоброзования с полученой в знаменателе неправельной дробью $\frac{52}{23}$: $\frac{52}{23}=2+\frac{6}{23}=2+\frac{1}{\frac{23}{6}}$, запишим:

$$\frac{127}{52}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{23}{6}}}$$

, выделим целую часть для $\frac{23}{6}$: $\frac{23}{6}=3+\frac{5}{6}=3+\frac{1}{\frac{6}{5}}$, запишим:

$$\frac{127}{52}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{6}{5}}}}$$

, выделим целую часть для $\frac{6}{5}$: $\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}$, получем оканчательный результат:

$$\frac{127}{52}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}}$$

, полученое выражение называется конечной цепной или непрерывной дробью. Отбросим последнее звено этой цепной дроби - одну пятую, сварачиваем получающуюся при этом новую цепную дробь в обыкновенную дробь:

$$2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9}$$

и вычитаем ее из исходной дроби $\frac{127}{52}$:

$$\frac{127}{52}-\frac{22}{9}=\frac{1143-1144}{52\cdot 9}=-\frac{1}{52\cdot 9},\quad \frac{127}{52}-\frac{22}{9}=-\frac{1}{52\cdot 9} \quad \text{или} \quad \frac{127}{52}-\frac{22}{9}+\frac{1}{52\cdot 9},$$

отбрасывая общий знаменатель, и сопоставляя полученное равенства: $127\cdot 9-52\cdot 22+1=0$ и первоначальное уравнения $127x-52y+1=0$, получим: $x=9$, $y=22$, это значение будет начальным решением этого уравнения $\{x_0, y_0\}$, и согласно теореме все его решения будут содержаться в прогрессии: $x = 9 + 52t$, $y = 22 + 127t$, где ($t = 0, \pm 1, \pm 2 .....$).

Пример1: $15x + 84y = 39$, преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных $\frac{15}{84}$, приведем данную дробь в неправильную, $\frac{1}{\frac{15}{84}} = \frac{1}{\frac{84}{15}}$, дальше решаем методом цепной дроби: выделяем целую часть, $\frac{1}{\frac{84}{15}} = \frac{1}{5 + \frac{9}{15}}$, проделаем такие же преобразования, полученной в знаменателе дробью $\frac{9}{15}$: $\frac{1}{\frac{15}{9}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{9}}$, $\frac{1}{\frac{9}{6}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{6}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$, получаем окончательный результат: $\frac{1}{\frac{15}{84}} = \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$, полученое выражение называется конечной цепной или непрерывной дробью. Отбрасываем последнее звено этой цепной дроби - одну вторую, сварачиваем, получивщуюся при этом новую цепную дробь в обыкновенную дробь:

$$\frac{1}{\frac{15}{84}} = \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{1}{5 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{11}{2}} = \frac{2}{11}$$

, вычитаем полученное значение от первоначального:

$$\frac{15}{84} - \frac{2}{11} = \frac{15 \cdot 11 - 84 \cdot 2}{84 \cdot 11} = \frac{165 - 168}{84 \cdot 11} = \frac{-3}{84 \cdot 11}$$

, так как заданное уравнение равно 39, то умножив обе части на (-13): $\frac{15 \cdot 11 \cdot (-13) - 84 \cdot 2 \cdot (-13)}{84 \cdot 11} = \frac{-3 \cdot (-13)}{84 \cdot 11}$, и отбрасывая общий знаменатель, сопоставляя полученное равенство: $15 \cdot (-143) + 84 \cdot 26 = 39$ с первоначальным уравнение $15x + 84y = 39$, получим: $x = -143$, $y = 26$, эти значения будут начальным решением этого уравнения $\{x_0, y_0\}$, и согласно теореме 1, все его решения будут содержаться в прогрессии: $x=-143+\frac{84}{3}t$, $y=26-\frac{15}{3}t$, или $x=-143+28t$, $y=26-5t$ $\quad (t=0;\pm 1;\pm 2....)$, где

Пример 2: $15x+40y=300$, преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных $\frac{15}{40}$, приведем данную дробь в неправильную, $\frac{1}{\frac{15}{40}}=\frac{1}{\frac{40}{15}}$, дальше решаем методом цепной дроби: выделяем целую часть, $\frac{1}{\frac{40}{15}}=\frac{1}{2+\frac{10}{15}}$, проделаем такие же преобразования, полученной в знаменателе дробью $\frac{15}{10}$: $\frac{1}{\frac{15}{10}}=\frac{1}{1+\frac{5}{10}}$, $\frac{1}{\frac{10}{5}}=\frac{1}{2}$, получаем окончательный результат: $\frac{1}{\frac{15}{40}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$, полученое вырожение называется конечной цепной или непрерывной дробью. Отбрасываем последнее звено этой цепной дроби - одну вторую, сварачиваем, получивщуюся при этом новую цепную дробь в обыкновенную дробь: $\frac{1}{\frac{15}{40}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$, вычитаем полученное значение от первоначального: $\frac{15}{40}-\frac{2}{5}=\frac{15\cdot 5-40\cdot 2}{40\cdot 5}=\frac{75-80}{40\cdot 5}=\frac{-5}{40\cdot 5}$, так как заданное уравнение равно 300, то умножив обе части на (-60): $\frac{15\cdot 5\cdot(-60)+40\cdot 2\cdot 60}{40\cdot 5}=\frac{-5\cdot(-60)}{40\cdot 5}$, и отбрасывая общий знаменатель, сопоставляя полученное равенство: $15\cdot(-300)+40\cdot 120=300$ с первоначальным уравнение $15x+40y=300$, получим: $x=-300$, $y=120$, эти значения будут начальным решением этого уравнения $\{x_0,y_0\}$, и согласно теореме все его решения будут содержаться в прогрессии: $x = -300 + \frac{15}{5}t$, $y = 120 - \frac{40}{5}t$, или $x = -300 + 3t$, $y = 120 - 8t$, где($t = 0; \pm 1; \pm 2$).

Полученные результаты наводят на мысль о том, что в общем случае для нахождения уравнения с двумя неизвестными

$$ax + by + c = 0 \tag{1.2.1}$$

будем пользоваться методом цепных дробей, раскладывая отношение коэффициентов при неизвестных в цепную дробь, отбрасывая ее последнее звено и проделывая выкладки, подобные тем, которые были проведены в наших примерах.

1.4 Теория цепных дробей (приближение вещественных чисел с помощью рациональных дробей)

Оценка Виноградова заключается в выделении остаточного члена в цепной дроби:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 = q_1 + \dfrac{1}{\alpha_2}, где: q_1 = [\alpha_1], \alpha_2 > 1, \\ \alpha_2 = q_2 + \dfrac{1}{\alpha_3}, где: q_2 = [\alpha_2], \alpha_3 > 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_k = q_k + \dfrac{1}{\alpha_{k+1}}, где: q_k = [\alpha_k], \alpha_{k+1} > 1, \end{array}\right\} \tag{1.4.1}$$

Так что:

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1}}}}}} \tag{1.4.2}$$

Числа α_k называются остаточными числами порядка k разложения α. В формуле (1.4.2) имеем кусок разложения до остаточного числа α_{k+1}.

При этом основную роль играют дроби вида:

$$\delta_1 = q_1, \delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2}, \delta_3 = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}, ..$$

или $\delta_1 = q_1, \delta_2 = (q_1, q_2), \delta_3 = (q_1, q_2, q_3), \ldots,$

которые называются подходящими дробями данной непрерывной дроби.

Считается, что подходящая дробь δ_k имеет порядок k, при этом принимается значения:

$$P_0 = 1,\ Q_0 = 0,\ P_1 = q_1,\ Q_1 = 1,\ P_2 = q_2 P_1 + P_0,\ Q_2 = q_2 Q_1 + Q_0$$

и так далее.

Приступая к вычислению подходящих дробей заметим, что δ_k переходит в δ_{k+1}, если в первой заменить δ_k выражением $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$.

Имеем: $\delta_1 = \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1}$,

$$\delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_2 q_1 + 1}{q_2} = \frac{q_2 q_1 + 1}{q_2 \cdot 1 + 0} = \frac{q_2 P_1 + P_0}{q_2 Q_1 + Q_0} = \frac{P_2}{Q_2},$$

$$\delta_3 = \frac{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right) P_1 + P_0}{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right) Q_1 + Q_0} = \frac{q_3 (q_2 P_1 + P_0) + P_1}{q_3 (q_2 Q_1 + Q_0) + Q_1} = \frac{q_3 P_2 + P_1}{q_3 Q_2 + Q_1} = \frac{P_3}{Q_3},$$

$$\delta_4 = \frac{\left(q_3 + \frac{1}{q_4}\right)P_2 + P_1}{\left(q_3 + \frac{1}{q_4}\right)Q_2 + Q_1} = \frac{q_4(q_3P_2 + P_1) + P_2}{q_4(q_3Q_2 + Q_1) + Q_2} = \frac{q_4P_3 + P_2}{q_4Q_3 + Q_2} = \frac{P_4}{Q_4}$$

……,

Закономерность, которую мы замечаем в построении формулы для δ_2 (ее числители P_2 и знаменатели Q_2), сохраняются при переходе к δ_3 и сохраняются также при переходе от k к (k+1).

Поэтому, на основании принципа математической индукции, для любого k, где $2 \le k \le n$, имеем:

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_kP_{k-1} + P_{k-2}}{q_kQ_{k-1} + Q_{k-2}} \tag{1.4.3}$$

Причем:

$$P_k = q_kP_{k-1} + P_{k-2} \tag{1.4.4}$$

$$Q_k = q_kQ_{k-1} + Q_{k-2} \tag{1.4.5}$$

Говоря о подходящих дробях δ_k (в свернутом виде), мы будем иметь в виду их форму: $\frac{P_k}{Q_k}$.

Соотношения (1.4.3) являются рекуррентными формулами для вычисления подходящих дробей, а также их числителей и знаменателей. Из формул для числителя и знаменателя сразу видно, что при увеличении k они возрастают. Последовательное вычисление числителей P_k и знаменателей Q_k подходящих дробей по формулам (1.4.4) и (1.4.5) удобно располагать в таблице:

Таблица 1.1. Подходящих дробей

		q_1	q_2	$\cdots$	q_{k-2}	q_{k-1}	q_k	$\cdots$	q_n
P_k	$P_0 = 1$	$P_1 = q_1$	P_2	$\cdots$	P_{k-2}	P_{k-1}	P_k	$\cdots$	P_n

Q_k	$Q_0=0$	$Q_1=1$	Q_2	$\dots$	Q_{k-2}	Q_{k-1}	Q_k	$\dots$	Q_n

Рассмотрем свойства подходящих дробей:

Теорема: При $k=1,2,3....n$, выполняется равенство

$$P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^k$$

Доказательство: Проведем индукцию по k:

При $k=1$ равенство справедливо, так как

$$P_1Q_0-P_0Q_1==q_1\cdot 0-1\cdot 1=-1=(-1)^1$$

Пусть это равенство верно при некотором ($1\le k\le n-1$).

Докажем справедливость равенства при $k=n+1$.

$$P_{n+1}Q_n-P_nQ_{n+1}=(q_{n+1}P_n+P_{n-1})Q_n-P_n(q_{n+1}Q_n+Q_{n-1})=$$

$$=q_{n+1}Q_nP_n+P_{n-1}Q_n-P_nq_{n+1}Q_n-P_nQ_{n-1}=-(P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n)=-(-1)^n=(-1)^{n+1}$$

то есть равенство верно при $k=n+1$.

Согласно принципу полной математической индукции равенство верно для всех k ($1\le k\le n$).

Теорема: Числитель и знаменатель любой подходящей дроби - взаимно простые числа, то есть всякая k - подходящая дробь несократима.

Доказательство: Докажем это свойство методом от противного. По предыдущему свойству имеем $P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^k$.Пусть $(P_k,Q_k)\ne 1$, то есть $(P_k,Q_k)=\alpha>1$, тогда из равенства $\delta_k=\dfrac{P_k}{Q_k}=\dfrac{q_kP_{k-1}+P_{k-2}}{q_kQ_{k-1}+Q_{k-2}}$ следует, что $(-1)^k$ делится на $\alpha>1$ без остатка, что невозможно. Значит, наше допущение неверно, а верно то, что требовалось доказать, то есть $(P_k,Q_k)=1$.

Теорема: При $1 \le k \le n$

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}} \quad (k \ge 1)$$

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = \frac{(-1)^{k-1} q_k}{Q_k Q_{k-2}} \quad (k \ge 2)$$

Доказательство: Первое соотношение можно получить из равенства $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^k$, доказанного выше, путем деления обеих частей на $Q_k Q_{k-1}$. Получаем:

$$\frac{P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k}{Q_k Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$$

$$\frac{P_k Q_{k-1}}{Q_k Q_{k-1}} - \frac{P_{k-1} Q_k}{Q_k Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}} \Rightarrow \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}},$$

что и требовалось доказать.

Докажем второе соотношение.

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = \frac{P_k Q_{k-2} - P_{k-2} Q_k}{Q_k Q_{k-2}} = \frac{Q_{k-2}(q_k P_{k-1} + P_{k-2}) - P_{k-2}(q_k Q_{k-1} + Q_{k-2})}{Q_k Q_{k-2}} =$$

$$= \frac{q_k (Q_{k-2} P_{k-1} - P_{k-2} Q_{k-1})}{Q_k Q_{k-2}} = \frac{q_k (-1)^{k-1}}{Q_k Q_{k-2}}.$$

Если заменим q_k на $q_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}$, то формула (1.4.3) примет вид:

$$\alpha = \delta_{k+1} == \frac{\left(q_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)P_{k-1} + P_{k-2}}{\left(q_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{q_k p_{k-1}\alpha_{k+1} + p_{k-1} + p_{k-2}\alpha_{k+1}}{q_k Q_{k-1}\alpha_{k+1} + Q_{k-1} + Q_{k-2}\alpha_{k+1}}$$

$$= \frac{\alpha_{k+1}(q_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{\alpha_{k+1}(q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}} = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1}} \tag{1.4.6}$$

Причем:

$$P_{k+1} = \alpha_{k+1} P_k + P_{k-1} \tag{1.4.7}$$

$$Q_{k+1} = \alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1} \tag{1.4.8}$$

где $\alpha = (q_1, q_2, .., q_k, \alpha_{k+1})$, хотя α_{k+1} не является здесь целым положительным числом.

Говоря о подходящих дробях δ_{k+1} (в свернутом виде), мы будем иметь в виду их форму: $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$.

Соотношения (1.4.6) являются рекуррентными формулами для вычисления подходящих дробей, а также их числителей и знаменателей. Из формул для числителя и знаменателя сразу видно, что при увеличении $k+1$ они возрастают. Последовательное вычисление числителей P_{k+1} и знаменателей Q_{k+1} подходящих дробей по формулам (1.4.7) и (1.4.8) удобно располагать по таблице:

Таблица 1.2. Последовательное вычисление подходящих дробей.

k	1	2	3	…	$k+1$
q_k	q_1	q_2	q_3	…	α_{k+1}
P_k	$P_1 = q_1$	$P_2 = q_1 \cdot q_2 + 1$	$P_3 = p_2 \cdot q_3 + p_1$	…	$P_{k+1} = \alpha_{k+1} P_k + P_{k-1}$
Q_k	$Q_1 = 1$	$Q_2 = q_2$	$Q_3 = Q_2 \cdot q_3 + Q_1$	…	$Q_{k+1} = \alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1}$

где данная таблица строится на основании выделении остаточного члена в цепной дроби: $\alpha = (q_1, q_2, .., q_k, \alpha_{k+1})$

$\alpha_1 = q_1 = \frac{p_1}{Q_1}$ - подходящая дробь первого порядка, откуда $p_1 = q_1$, $Q_1 = 1$,

$\alpha_2 = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{p_2}{Q_2} \Rightarrow p_2 = q_1 \cdot q_2 + 1$, или $p_2 = p_1 \cdot q_2 + 1$, $Q_2 = q_2$.

Остальные значения получаются из формулы (1.4.6), (1.4.7) и (1.4.8).

При помощи формулы (1.4.6) можно вывести следующую теорему и расположении подходящих дробей разложения $\alpha \in R$.

<u>Теорема:</u> Действительное число α всегда находится между двумя соседними подходящими дробями своего разложения, причем оно ближе к последующей, чем к предыдущей подходящей дроби.

Доказательство: Из формулы (1.4.6) следует:

$$\alpha \cdot \alpha_{k+1} Q_k + \alpha Q_{k-1} = \alpha_{k+1} P_k + P_{k-1}, \quad \alpha \cdot \alpha_{k+1} Q_k - \alpha_{k+1} p_k + \alpha Q_{k-1} - p_{k-1} = 0$$

$$\alpha_{k+1}(Q_k \alpha - p_k) + \alpha Q_{k-1} - p_{k-1} = 0, \quad \alpha_{k+1}\left(\alpha - \frac{p_k}{Q_k}\right) + Q_{k-1}\left(\alpha - \frac{p_{k-1}}{Q_{k-1}}\right) = 0,$$

$$Q_k \alpha_{k+1}(\alpha - \delta_k) + Q_{k-1}(\alpha - \delta_{k-1}) = 0$$

Так как $\alpha_{k+1} > 1$, $Q_k > Q_{k-1} > 0$, так что:

$$\alpha_{k+1} Q_k > Q_{k-1} > 0 \Rightarrow$$

($\alpha - \delta_k$) и ($\delta_{k-1} - \alpha$) имеют одинаковый знак, а это значит, что α находится между δ_{k-1} и δ_k;

$(\alpha - \delta_k) < -(\alpha - \delta_{k-1})$, $|(\alpha - \delta_k)| < |(\alpha - \delta_{k-1})|$, то есть α ближе к δ_k, чем к δ_{k-1}.

Рассмотрим уравнение $45x - 13y = 2$, являющая уравнение в целых числах с двумя неизвестными (Диофантово уравнение), при решение данного уравнения используем оценку Виноградова.

Раскладываем $\frac{45}{13}$ в цепную дробь, получим:

$$\frac{45}{13} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}}$$

Запишем разложение дроби $\frac{45}{13}$, в виде: $\frac{45}{13} = (3, 2, 6)$, данные значения запишем в расчетную таблицу подходящих дробей:

Таблица 1.3. Подходящие дроби.

k	1	2	3
q_k	3	2	6
p_k	3	7	45
Q_k	1	2	13

Находим значения p_k и Q_k из приведенных выше формул: Так как $p_1 = q_1$, то

$$p_1 = q_1 = 3,$$

$$p_2 = q_1 \cdot q_2 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7,$$

$$p_3 = q_3 \cdot p_2 + p_1 = 6 \cdot 7 + 3 = 45,$$

$$Q_1 = 1,$$

$$Q_2 = q_2 = 2,$$

$$Q_3 = q_3 \cdot Q_2 + Q_1 = 6 \cdot 2 + 1 = 13,$$

следовательно получаем подходящие дроби $\frac{P_k}{Q_k}$: $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{7}{2}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{45}{13}$

Откуда видно, что дробь $\frac{7}{2}$ расположена ближе к дроби $\frac{45}{13}$, чем дробь $\frac{3}{1}$.

Далее вычисляем от первоначальной дроби, дробь расположенную ближе к данной дроби:

$$\frac{45}{13} - \frac{7}{2} = \frac{45 \cdot 2 - 7 \cdot 13}{13 \cdot 2} = \frac{(-1)^3}{13 \cdot 2}.$$

Пользуясь: $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$, где $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{45}{13}$ - первоначальная дробь, $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{7}{2}$ - дробь расположенная ближе к данной дроби, а $k = 3$.

Проделываем преобразования: отбрасываем знаменатель полученного значения, возводим (-1) в третью степень, получим: $45 \cdot 2 - 13 \cdot 7 = -1$, но так ка заданное уравнение равно 2, а не -1, то помножим каждое значение равенства: $45 \cdot 2 - 13 \cdot 7 = -1$ на (-2), получим: $45 \cdot 2 \cdot (-2) - 13 \cdot 7 \cdot (-2) = 1 \cdot 2$, $45 \cdot (-4) - 13 \cdot (-14) = 2$, сравнивая данное уравнение и полученное уравнения: $45x - 13y = 2$ и $45 \cdot (-4) - 13 \cdot (-14) = 2$, откуда видно, что корни уравнения x_0, y_0 равны: $x_0 = -4,\ y_0 = -14$, где корни являются начальными значениями уравнения $45x - 13y = 2$, и согласно теореме 5 все его решения будут содержаться в прогрессии:

$$\begin{cases} x = -4 - 13\,t \\ y = -14 - 45\,t \end{cases}$$

, где $t \in z$.

Рассмотрим уравнение $29x + 37y = 2$, так как $(29,37,2) = 1$ и $(29,37) = 1$ - являются диофантовым уравнением, и разрешимы в целых числах, воспользуемся разложением в цепную дробь, и найдем приближение к полученной дроби.

$$\frac{37}{29} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Запишем разложение дроби $\frac{37}{29}$, в виде: $\frac{37}{29} = (1,3,1,1,1,2)$, данные значения запишем в расчетную таблицу подходящих дробей:

Таблица 1.4. Подходящие дроби.

k	1	2	3	4	5	6
q_k	1	3	1	1	1	2
p_k	1	4	5	9	14	37
Q_k	1	3	4	7	11	29

Находим значения p_k и Q_k из приведенных выше формул: Так как $p_1 = q_1$, то

$$p_1 = q_1 = 1,$$

$$p_2 = q_1 \cdot q_2 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4,$$

$$p_3 = q_3 \cdot p_2 + p_1 = 1 \cdot 4 + 1 = 5,$$

$$p_4 = q_4 \cdot p_3 + p_2 = 1 \cdot 5 + 4 = 9,$$

$$p_5 = q_5 \cdot p_4 + p_3 = 1 \cdot 9 + 5 = 14,$$

$$p_6 = q_6 \cdot p_5 + p_4 = 2 \cdot 14 + 9 = 37,$$

$$Q_1 = 1,$$

$$Q_2 = q_2 = 3$$

$$Q_3 = q_3 \cdot Q_2 + Q_1 = 1 \cdot 3 + 1 = 4,$$

$$Q_4 = q_4 \cdot Q_3 + Q_2 = 1 \cdot 4 + 3 = 7,$$

$$Q_5 = q_5 \cdot Q_4 + Q_3 = 1 \cdot 7 + 4 = 11,$$

$$Q_6 = q_6 \cdot Q_5 + Q_4 = 2 \cdot 11 + 7 = 29,$$

следовательно получаем подходящие дроби $\frac{P_k}{Q_k}$: $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{1}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2}=\frac{4}{3}$, $\frac{P_3}{Q_3}=\frac{5}{4}$, $\frac{P_4}{Q_4}=\frac{9}{7}$, $\frac{P_5}{Q_5}=\frac{14}{11}$, $\frac{P_6}{Q_6}=\frac{37}{29}$. Откуда видно, что дробь $\frac{14}{11}$ расположена ближе к дроби $\frac{37}{29}$, чем остальные дроби.

Далее вычисляем от первоначальной дроби, дробь расположенную ближе к данной дроби:

$$\frac{37}{29}-\frac{14}{11}=\frac{37\cdot 11-14\cdot 29}{29\cdot 11}=\frac{(-1)^6}{29\cdot 11}.$$

Пользуясь: $\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$, где $\frac{P_k}{Q_k}=\frac{37}{29}$ - первоначальная дробь, $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{14}{11}$ - дробь расположенная ближе к данной дроби, а $k=6$.

Проделываем преобразования: отбрасываем знаменатель полученного значения, возводим (-1) в шестую степень, получим: $37\cdot 11-14\cdot 29=1$, но так как заданное уравнение равно 2, а не 1, то помножим каждое значение равенства $37\cdot 11-14\cdot 29=1$ на (2), получим: $37\cdot 2\cdot 11-14\cdot 2\cdot 29=1\cdot 2$, $37\cdot 22-29\cdot 28=2$, сравнивая данное уравнение и полученное уравнения: $29x+37y=2$ и $37\cdot 22-29\cdot 28=2$, откуда видно, что уравнения отличаются знаками, и коэффициентами стоящими перед неизвестными, для этого поменяем местами коэффициенты с знаками стоящими перед неизвестными в полученном уравнении: $29\cdot(-28)+37\cdot 22=2$,откудакорни уравнения x_0, y_0 равны: $x_0=-28,\ y_0=-22$, где корни являются начальными значениями уравнения $29x+37y=2$, и согласно теореме 5 все его решения будут содержаться в прогрессии:

$$\begin{cases} x = -28 + 37\,t \\ y = 22 - 29\,t \end{cases}$$, где $t \in z$.

Рассмотрим уравнение: $2121\,x - 1500\,y = 21$, так как $(2121;1500;21) = 3$ кратно трем, то разделим данное уравнение на 3 получим: $707\,x - 500\,y = 7$, так как $(707;500;7) = 1$ и $(707;500) = 1$ - являются диофантовым уравнением, и разрешимы в целых числах, воспользуемся разложением в цепную дробь, и найдем приближение к полученной дроби.

$$\frac{707}{500} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}}}}$$

Запишем разложение дроби $\frac{707}{500}$, в виде: $\frac{707}{500} = (1, 2, 2{,}2{,}2{,}5{,}3)$, данные значения запишем в расчетную таблицу подходящих дробей:

Таблица 1.5. Подходящие дроби.

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k	1	2	2	2	2	5	3
p_k	1	3	7	17	41	222	707
Q_k	1	2	5	12	29	157	500

Находим значения p_k и Q_k из приведенных выше формул: Так как $p_1 = q_1$, то

$$p_1 = q_1 = 1,$$

$$p_2 = q_1 \cdot q_2 + 1 = 1 \cdot 2 + 1 = 3,$$

$$p_3 = q_3 \cdot p_2 + p_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$

$$p_4 = q_4 \cdot p_3 + p_2 = 2 \cdot 7 + 3 = 17,$$

$$p_5 = q_5 \cdot p_4 + p_3 = 2 \cdot 17 + 7 = 41,$$

$$p_6 = q_6 \cdot p_5 + p_4 = 5 \cdot 41 + 17 = 222,$$

$$p_7 = q_7 \cdot p_6 + p_5 = 3 \cdot 222 + 41 = 707,$$

$$Q_1 = 1,$$

$$Q_2 = q_2 = 2$$

$$Q_3 = q_3 \cdot Q_2 + Q_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5,$$

$$Q_4 = q_4 \cdot Q_3 + Q_2 = 2 \cdot 5 + 2 = 12,$$

$$Q_5 = q_5 \cdot Q_4 + Q_3 = 2 \cdot 12 + 5 = 29,$$

$$Q_6 = q_6 \cdot Q_5 + Q_4 = 5 \cdot 29 + 12 = 157,$$

$$Q_7 = q_7 \cdot Q_6 + Q_5 = 3 \cdot 157 + 29 = 500,$$

следовательно получаем подходящие дроби $\frac{P_k}{Q_k}$: $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{2}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{7}{5}$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{17}{12}$, $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{41}{29}$, $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{222}{157}$, $\frac{P_7}{Q_7} = \frac{707}{500}$

Откуда видно, что дробь $\frac{222}{157}$ расположена ближе к дроби $\frac{707}{500}$, чем остальные дроби.

Далее вычисляем от первоначальной дроби, дробь расположенную ближе к данной дроби:

$$\frac{707}{500} - \frac{222}{157} = \frac{707 \cdot 157 - 222 \cdot 500}{500 \cdot 157} = \frac{(-1)^7}{500 \cdot 157}.$$

Пользуясь: $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$, где $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{707}{500}$ - первоначальная дробь, $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{222}{157}$ - дробь расположенная ближе к данной дроби, а $k = 7$.

Проделываем преобразования: отбрасываем знаменатель полученного значения, возводим (-1) в седьмую степень, получим: $707 \cdot 157 - 500 \cdot 222 = -1$, но так как заданное уравнение равно 7, а не 1, то помножим каждое значение равенства $707 \cdot 157 - 500 \cdot 222 = -1$ на (-7), получим: $707 \cdot (-7) \cdot 157 - 500 \cdot (-7) \cdot 222 = -1 \cdot (-7)$, $707 \cdot (-1099) - 500 \cdot (-1554) = 7$

сравнивая данное уравнение и полученное уравнения: $707x - 500y = 7$ и $707 \cdot (-1099) - 500 \cdot (-1554) = 7$, откуда видно, что корни уравнения x_0, y_0 равны: $x_0 = -1099,\ y_0 = -1554$, где корни являются начальными значениями уравнения $707x - 500y = 7$, и согласно теореме 5 все его решения будут содержаться в прогрессии:

$$\begin{cases} x = -1099 - 707t \\ y = -1554 - 500t \end{cases}$$

, где $t \in z$.

Рассмотрим уравнение $258x - 175y = 113$, так как $(258,175,113) = 1$ и $(258,175) = 1$ - являются диофантовым уравнением, и разрешимы в целых числах, воспользуемся разложением в цепную дробь, и найдем приближение к полученной дроби.

$$\frac{258}{175} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Запишем разложение дроби $\frac{258}{175}$, в виде: $\frac{258}{175} = (1, 2, 9, 4, 2)$, данные значения запишем в расчетную таблицу подходящих дробей:

Таблица 1.6. Подходящие дроби.

k	1	2	3	4	5
q_k	1	2	9	4	2
p_k	1	3	28	115	258
Q_k	1	2	19	78	175

Находим значения p_k и Q_k из приведенных выше формул: Так как $p_1 = q_1$, то

$$p_1 = q_1 = 1,$$

$$p_2 = q_1 \cdot q_2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3,$$

$$p_3 = q_3 \cdot p_2 + p_1 = 9 \cdot 3 + 1 = 28,$$

$$p_4 = q_4 \cdot p_3 + p_2 = 4 \cdot 28 + 3 = 115,$$

$$p_5 = q_5 \cdot p_4 + p_3 = 2 \cdot 115 + 28 = 258,$$

$$Q_1 = 1,$$

$$Q_2 = q_2 = 2,$$

$$Q_3 = q_3 \cdot Q_2 + Q_1 = 9 \cdot 2 + 1 = 19,$$

$$Q_4 = q_4 \cdot Q_3 + Q_2 = 4 \cdot 19 + 2 = 78,$$

$$Q_5 = q_5 \cdot Q_4 + Q_3 = 2 \cdot 78 + 19 = 175,$$

следовательно получаем подходящие дроби $\frac{P_k}{Q_k}$: $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{2}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{28}{19}$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{115}{78}$, $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{258}{175}$.

Откуда видно, что дробь $\frac{115}{78}$ расположена ближе к дроби $\frac{258}{175}$, чем остальные дроби.

Далее вычисляем от первоначальной дроби, дробь расположенную ближе к данной дроби:

$$\frac{258}{175}-\frac{115}{78}=\frac{258\cdot 78-115\cdot 175}{175\cdot 78}=\frac{(-1)^5}{175\cdot 78}.$$

Пользуясь: $\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$, где $\frac{P_k}{Q_k}=\frac{258}{175}$ - первоначальная дробь, $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{115}{78}$ - дробь расположенная ближе к данной дроби, а $k=5$.

Проделываем преобразования: отбрасываем знаменатель полученного значения, возводим (-1) в пятую степень, получим:

$$258\cdot 78-175\cdot 115=-1,$$

но так как заданное уравнение равно 113, а не -1, то помножим каждое значение равенства $258\cdot 78-175\cdot 175=-1$ на (-113), получим:

$$258\cdot 78\cdot(-113)-115\cdot 175\cdot(-113)=-1\cdot(-113)\ \ 258\cdot(8814)-175\cdot(-12995)=113,$$

сравнивая данное уравнение и полученное уравнения: $258x-175y=113$ и $258\cdot(-8814)-175\cdot(-12995)=113$, откуда видно, что корни уравнения x_0, y_0 равны: $x_0=--8814,\ y_0=-12995$, где корни являются начальными значениями уравнения $258x-175y=113$, и согласно теореме 5 все его решения будут содержаться в прогрессии:

$$\begin{cases} x = -8814 - 175\,t \\ y = -12995 - 258\,t \end{cases}$$

, где $t \in z$.

Рассмотрим уравнение

$$38x + 117\,y = 209$$

,

так как $(38,117,209) = 1$ и $(38,117) = 1$ - являются диофантовым уравнением, и разрешимы в целых числах, воспользуемся разложением в цепную дробь, и найдем приближение к полученной дроби.

$$\frac{1}{\frac{38}{117}} = \frac{117}{38} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Запишем разложение дроби $\frac{117}{38}$, в виде: $\frac{117}{38} = (3,12,1,2)$, данные значения запишем в расчетную таблицу подходящих дробей:

Таблица 1.8. Подходящие дроби.

k	1	2	3	4
q_k	3	12	1	2
p_k	3	37	40	117
Q_k	1	12	13	38

Находим значения p_k и Q_k из приведенных выше формул: Так как $p_1 = q_1$, то

$$p_1 = q_1 = 3$$

,

$$p_2 = q_1 \cdot q_2 + 1 = 12 \cdot 3 + 1 = 37$$

,

$$p_3 = q_3 \cdot p_2 + p_1 = 1 \cdot 37 + 3 = 40$$

,

$$p_4 = q_4 \cdot p_3 + p_2 = 2 \cdot 40 + 37 = 117$$
,

$$Q_1 = 1$$
,

$$Q_2 = q_2 = 12$$

$$Q_3 = q_3 \cdot Q_2 + Q_1 = 1 \cdot 12 + 1 = 13$$
,

$$Q_4 = q_4 \cdot Q_3 + Q_2 = 2 \cdot 13 + 12 = 38$$
,

следовательно получаем подходящие дроби $\frac{P_k}{Q_k}$: $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{37}{12}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{40}{13}$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{117}{38}$.

Откуда видно, что дробь $\frac{40}{13}$ расположена ближе к дроби $\frac{117}{38}$, чем остальные дроби.

Далее вычисляем от первоначальной дроби, дробь расположенную ближе к данной дроби:

$$\frac{117}{38} - \frac{40}{13} = \frac{117 \cdot 13 - 38 \cdot 40}{38 \cdot 13} = \frac{(-1)^4}{38 \cdot 13}.$$

Пользуясь: $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$, где $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{117}{38}$ - первоначальная дробь, $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{40}{13}$ - дробь расположенная ближе к данной дроби, а $k = 4$.

Проделываем преобразования: отбрасываем знаменатель полученного значения, возводим (-1) в четвертую степень, получим:

$117 \cdot 13 - 38 \cdot 40 = 1$, но так как заданное уравнение равно 209, а не 1, то помножим каждое значение равенства $117 \cdot 13 - 38 \cdot 40 = 1$ на (209), получим:

$$117 \cdot 13 \cdot 209 - 38 \cdot 40 \cdot 209 = 1 \cdot 209, \quad 117 \cdot 520 - 38 \cdot 8360 = 209$$

сравнивая данное уравнение и полученное уравнения: $38x+117y=209$ и $117\cdot 520-38\cdot 8360=209,$ откуда видно, что уравнения отличаются знаками, и коэффициентами стоящими перед неизвестными, для этого поменяем местами коэффициенты с знаками стоящими перед неизвестными в полученном уравнении: $38\cdot(-8360)+117\cdot 520=209$, откуда видно, что корни уравнения x_0, y_0 равны: $x_0=--8360,\ y_0=520$, где корни являются начальными значениями уравнения $38x+117y=209$, и согласно теореме 5 все его решения будут содержаться в прогрессии:

$$\begin{cases} x=-8360+117t \\ y=520-38t \end{cases}$$

, где $t\in z$.

Рассмотрим уравнение

$$571x+359y=7$$

так как $(571;359;7)=1$ и $(571;359)=1$ - являются диофантовым уравнением, и разрешимы в целых числах, воспользуемся разложением в цепную дробь, и найдем приближение к полученной дроби.

$$\frac{571}{359}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}$$

Запишем разложение дроби $\frac{571}{359}$, в виде: $\frac{571}{359}=(1;1;1;2;3;1;4;1;2)$, данные значения запишем в расчетную таблицу подходящих дробей:

Таблица 1.9. Подходящие дроби.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_k	1	1	1	2	3	1	4	1	2
p_k	1	2	3	8	27	35	167	202	571
Q_k	1	1	2	5	17	22	105	127	359

Находим значения p_k и Q_k из приведенных выше формул: так как $p_1 = q_1$, то

$$p_1 = q_1 = 1,$$

$$p_2 = q_1 \cdot q_2 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 = 2,$$

$$p_3 = q_3 \cdot p_2 + p_1 = 1 \cdot 2 + 1 = 3,$$

$$p_4 = q_4 \cdot p_3 + p_2 = 2 \cdot 3 + 2 = 8,$$

$$p_5 = q_5 \cdot p_4 + p_3 = 3 \cdot 8 + 3 = 27,$$

$$p_6 = q_6 \cdot p_5 + p_4 = 1 \cdot 27 + 8 = 35,$$

$$p_7 = q_7 \cdot p_6 + p_5 = 4 \cdot 35 + 27 = 167,$$

$$p_8 = q_8 \cdot p_7 + p_6 = 1 \cdot 167 + 35 = 202,$$

$$p_9 = q_9 \cdot p_8 + p_7 = 2 \cdot 202 + 167 = 571,$$

$$Q_1 = 1,$$

$$Q_2 = q_2 = 2$$

$$Q_3 = q_3 \cdot Q_2 + Q_1 = 1 \cdot 1 + 1 = 2,$$

$$Q_4 = q_4 \cdot Q_3 + Q_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5,$$

$$Q_5 = q_5 \cdot Q_4 + Q_3 = 3 \cdot 5 + = 17,$$

$$Q_6 = q_6 \cdot Q_5 + Q_4 = 1 \cdot 17 + 5 = 22,$$

$$Q_7 = q_7 \cdot Q_6 + Q_5 = 4 \cdot 22 + 17 = 105,$$

$$Q_8 = q_8 \cdot Q_7 + Q_6 = 1 \cdot 105 + 22 = 127,$$

$$Q_9 = q_9 \cdot Q_8 + Q_7 = 2 \cdot 127 + 105 = 359,$$

следовательно получаем подходящие дроби $\frac{P_k}{Q_k}$: $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{3}{2}$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{8}{5}$, $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{27}{17}$, $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{35}{22}$, $\frac{P_7}{Q_7} = \frac{167}{105}$, $\frac{P_8}{Q_8} = \frac{202}{127}$, $\frac{P_9}{Q_9} = \frac{571}{359}$,

Откуда видно, что дробь $\frac{202}{127}$ расположена ближе к дроби $\frac{571}{359}$, чем остальные дроби.

Далее вычисляем от первоначальной дроби, дробь расположенную ближе к данной дроби:

$$\frac{571}{359} - \frac{202}{127} = \frac{571 \cdot 127 - 202 \cdot 359}{359 \cdot 127} = \frac{(-1)^9}{359 \cdot 127}.$$

Пользуясь: $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$, где $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{571}{359}$ - первоначальная дробь, $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{202}{127}$ - дробь расположенная ближе к данной дроби, а $k = 9$.

Проделываем преобразования: отбрасываем знаменатель полученного значения, возводим (-1) в девятую степень, получим:

$$571 \cdot 127 - 202 \cdot 359 = -1$$

но так как заданное уравнение равно 7, а не 1, то помножим каждое значение равенства $571 \cdot 127 - 359 \cdot 202 = -1$ на (-7), получим:

$$571 \cdot (-7) \cdot 127 - 359 \cdot (-7) \cdot 202 = -1 \cdot (-7) \quad 571 \cdot (-889) + 359 \cdot 1414 = 7,$$

сравнивая данное уравнение и полученное уравнения: $571x + 359y = 7$ и $571 \cdot (-889) + 359 \cdot 1414 = 7$, откуда видно, что корни уравнения x_0, y_0 равны: $x_0 = -889,\ y_0 = 1414$, где корни являются начальными значениями уравнения $571x + 359y = 7$, и согласно теореме 5 все его решения будут содержаться в прогрессии:

$$\begin{cases} x = -889 + 359t \\ y = 1414 - 571t \end{cases}$$

, где $t \in z$.

Исходя из результатов, которые мы получили при решении рассмотренных уравнений, где видно, что для каждого действительного числа α существует преставления виде разложения в правильную дробь, где по приближению вещественных чисел с помощью рациональных дробей данная дробь всегда расположена ближе к данному действительному числу α.

2 Уравнение второй степени с двумя неизвестными

Решение самых общих уравнений второй степени с двумя неизвестными в целых числах, уравнение вида:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.1.1}$$

где числа $A, B, C, D, E, F -$ целые, сводится с помощью замен переменных к решению уравнения вида:

$$x^2 - Ay^2 = C \tag{2.1.2}$$

где $A > 0$ - целое, C - целое число.

Рассмотрим уравнения второй степени с двумя неизвестными.

Найти все целочисленные решения уравнения:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$$

Разложим левую часть уравнения $x^2-3xy+2y^2=3$ на множители:

$$x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)$$

получим $(x-y)(x-2y)=3$, поскольку число 3 можно приставить в виде произведения целых чисел с учетом порядка четырьмя способами: $3=1\cdot 3=3\cdot 1=(-1)\cdot(-3)=(-3)\cdot(-1)$, то уравнение приводится к совокупности четырех систем для нахождения значения переменных:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=1\\x-2y=3\end{cases}\\\begin{cases}x-y=3\\x-2y=1\end{cases}\\\begin{cases}x-y=-1\\x-2y=-3\end{cases}\\\begin{cases}x-y=-3\\x-2y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Решая данные системы, выражаем в первой системе, первое неравенства через x, и подставляем в во второе неравенства, и такие преобразования делаем, в во второй в третьей и четвертой системе, откуда получим целочисленные решения, которыми являются соответствующие пары данных систем: $(-1;-2);(5;2);(1;2);(-5;-2)$.

Рассмотрим уравнения второй степени с двумя неизвестными.
Найти все целочисленные решения уравнения:

$$x^2-4x-y^2+2y+6=0$$

Выделим в левой части уравнения $x^2-4x-y^2+2y+6=0$ квадраты относительно x и относительно y:

$$x^2-4x-y^2+2y+6=(x^2-4x+4)-4-(y^2-2y+1)+1+6=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-(y-1)^2=-3 \Leftrightarrow (x-y-1)(x-2+y-1)=-3 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y-3)=-3$$

поскольку число (-3) можно приставить в виде произведения целых чисел с учетом порядка четырьмя способами: $-3=(-3)\cdot 1=(-1)\cdot 3=3\cdot(-1)=1\cdot(-3)$, то уравнение $x^2-4x-y^2+2y+6=0$, приводится к совокупности четырех систем для нахождения значения переменных:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y-1=3 \\ x+y-3=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y-1=-3 \\ x+y-3=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y-1=-1 \\ x+y-3=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y-1=1 \\ x+y-3=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая данные системы, выражаем в первой системе первое неравенства через x, и подставляем в во второе неравенства, и такие преобразования делаем, в во второй в третьей, и четвертой системе, откуда получим целочисленные решения, которыми являются соответствующие пары данных систем: $(3;-1);(1;3);(3;3);(1;-1)$.

Рассмотрим уравнения второй степени с двумя неизвестными.

Найти все целочисленные решения уравнения:

$$x^2+xy-y-2=0,$$

выразим из данного уравнения y через x:

$$y(x-1)=2-x^2,$$

$$y=\frac{2-x^2}{x-1}=-\frac{x^2-2}{x-1}=-\frac{\left(x^2-1\right)-1}{x-1}=-\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}+\frac{1}{x-1}=-(x+1)+\frac{1}{x-1}$$

где $(x\neq 1)$, так как x, y - целые числа, то дробь $\frac{1}{x-1}$ должна быть целым числом, то есть, если $x-1=\pm 1$, то получаем две системы уравнения:

$$1)\ \begin{cases} x-1=-1 \\ y=-x-1-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases},$$

$$2)\ \begin{cases} x-1=1 \\ y=-x-1+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases},$$

откуда получим целочисленные решения, которыми являются соответствующие пары данных систем: $(0;-2);(2;-2)$.

Рассмотрим уравнения второй степени с двумя неизвестными.
Найти все целочисленные решения уравнения:

$$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$$

рассмотрим уравнение как квадратное относительно x:

$$5x^2+(8y-2)x+5y^2+2y+2=0$$

данное уравнение решается по формуле дискриминанта, то есть

$$D=(8y-2)^2-4\cdot 5(5y^2+2y+2)=64y^2-32y+4=-100y^2-40y-40=$$
$$=-36(y^2+2y+1)=-36(y+1)^2$$

Для того, чтобы уравнение имело решение, необходимо, чтобы дискриминант был равен: $D=0$, тогда: $-36(y+1)^2=0$, решая данное уравнение, получим целочисленные решения, которыми являются соответствующие значения: $(-1;1)$.

Рассмотрим уравнения второй степени с двумя неизвестными.

Найти все целочисленные решения уравнения: $x^2+1=3y$

Заметим, что правая часть уравнения делится на три при любом целом y.

Исследуем левую часть уравнения, какие остатки может иметь при делении на три.

По теореме о делении с остатком целое число либо делится на три, либо при делении на три в остатке дает один или два:

Если $x=3k$, то, $x^2+1=3(k^2)+1=3m+1$ левая часть не делиться на три, потому что дает в остатке один.

Если $x=3k+1$, то, $x^2+1=(3k^2+1)^2+1=3m+2$ следовательно, левая часть опять не делиться на три, так как дает в остатке два.

Если $x=3k+2$, то, $x^2+1=(3k^2+2)^2+1=3m+5$ следователь, левая часть не делится на три, так как деление на три дает опять в остатке два.

Таким образом, мы получим, что ни при каких целых, левая часть уравнения на три не делится, притом, что правая часть уравнения делится на три при любых значениях переменой y. Исходя из исследования, данное уравнение в целых числах решения не имеет.

Рассмотрим уравнения второй степени с двумя неизвестными.

Найти все целочисленные решения уравнения: $x^2-y^2=7$, уравнение имеет вид:

$$x^2-Ay^2=C,$$

где $A=1,\ C=7$, $A>0,\ 1>0$.

Разложим левую часть по формуле сокращённого умножения: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, получим: $(x-y)(x+y) = 7 \cdot 1$, так как $(x-y) > (x+y)$, то получим систему:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 1 + y + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases},$$

откуда получим целочисленные решения, которыми являются соответствующие пары данной системы: $(4;3)$.

Рассмотрим уравнения второй степени с двумя неизвестными.

Найти все целочисленные решения уравнения:

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 29$$

преобразуем левую часть данного уравнения, выделим полные квадраты:

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = (x^2 - 6xy + 9y^2) + 4y^2 =$$
$$= (x - 3y)^2 + (2y)^2 = (x - 3y)^2 =$$
$$= 29 - (2y)^2 \Leftrightarrow 29 \geq (2y)^2$$

положим, что y может быть равен: $y = 0; \pm1; \pm2$, тогда:

$y = 0$, $(x-0)^2 = 29$, $x^2 = 29$ - не имеет решение в целых числах.

$y = -1$, $(x+3)^2 + 4 = 29$, $(x+3)^2 = 25$, получим уравнение в целых числах: $x + 3 = 5$ или $x + 3 = -5$, откуда $x = 2,\ x = -8$.

$y = 1$, $(x-3)^2 + 4 = 29$, $(x-3)^2 = 25$, получим уравнение в целых числах: $x - 3 = 5$ или $x - 3 = -5$, откуда $x = 8,\ x = -2$.

$y = -2$, $(x+6)^2 + 16 = 29$, $(x+6)^2 = 13$ - не имеет решение в целых числах.

$y = 2$, $(x-6)^2 + 16 = 29$, $(x-6)^2 = 13$ - не имеет решение в целых числах, откуда получим целочисленные решения, которыми являются соответствующие пары данного уравнения: $(2;-1), (-8;-1), (8;1), (-2;1)$

Рассмотрим уравнения второй степени с двумя неизвестными.

Найти все целочисленные решения уравнения: $x^2 - xy + y^2 = x + y$, перенесем правую часть уравнения в левую часть: $x^2 - xy + y^2 - x - y$, преобразуем полученное уравнение:

$$x^2 - x(y+1) + y^2 - y = 0$$

мы получили квадратное уравнение относительно x, находим дискриминант:

$$D = (y+1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1 \geq 0$$

Рассмотрим полученное неравенство, при каких значениях y выполняется неравенство.

Преобразуем неравенство:

$$-3y^2 + 6y + 1 \geq 0, \quad -3(y-1)^2 + 4 \geq 0,$$

разделим на (-1), $3(y-1)^2 - 4 \leq 0$, $3(y-1)^2 \leq 4$, следовательно $(y-1)^2 \leq 2$, откуда видно, что y принемает значения: $y = 0; 1; 2$. Подставляя все значения y в данное уравнение $x^2 - xy + y^2 = x + y$, получим:

$$y = 0, \quad x^2 = x, \; x^2 - x = 0, \; x(x-1) = 0, \; x = 0 \text{ или } x = 1$$

$$y = 1, \quad x^2 - x + 1 - x - 1 = 0, \; x^2 - 2x = 0, \; x(x-2) = 0, \; x = 0, \text{ или } x = 2$$

$y=2$ $x^2-2x+4-x-2=0,\ x^2-3x+2=0,$,

квадратное уравнение, находим корни данного уравнения по формуле дескременанта, откуда получаем: $x=2$ или $x=1$.

Целочисленными решения данного уравнения, являются соответствующие пары: $(0;0),(0;1),(1;0),(1;2),(2;1),(2;2)$.

Рассмотрим системы уравнений приводящих к уравнениям второй степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=21 \\ y^2-2xy=-15 \end{cases}$$

Решение: Помножим уравнения системы, первое на 5 и второе на 7:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=21 \\ y^2-2xy=-15 \end{cases}\begin{vmatrix} 5 \\ 7 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5y^2-5xy=105 \\ \quad +7y^2-14xy=-105 \end{cases},$$

сложим два уравнения:

$$+\begin{cases} 5x^2+5y^2-5xy=105 \\ \quad +7y^2-14xy=-105 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 5x^2+12y^2+19xy=0 \quad},$$

получим уравнение второй степени с двумя неизвестными:

$$5x^2+12y^2+19xy=0,$$

так как $y\neq 0$, то разделим обе части уравнения на y^2:

$$5\left(\frac{x}{y}\right)^2-19\left(\frac{x}{y}\right)+12=0,$$

принимая $\frac{x}{y} = t$,

получим:

$$5t^2 - 19t + 12 = 0$$

квадратное уравнение, корни которого находятся по формуле дискриминанта:

$$D = (19)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12 = 361 - 240 = 121 > 0,$$

откуда имеет два корня:

$$t_1 = 3,\ t_2 = \frac{4}{5},$$

тогда: $x = 3y$; $x = \frac{4}{5}y$,

подставляя значение $x = 3y$ в во второе уравнение данной системы:

$$y^2 - 6y^2 = -15,$$

получим два иррациональных корня

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{3},$$

подставляя второе значение $x = \frac{4}{5}y$ в этаже уравнение, получим два целых корня

$$y_{1,2} = \pm 5,$$

подставляя корни в полученные значения, найдем значения переменой x, где первое равно иррациональным корням $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}$, а второе целым $x_{1,2} = \pm 4$ целочисленными решения данного уравнения, являются соответствующие пары: $(4;5), (-4;-5)$.

Найти все целочисленные решения уравнения:

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$

перепишим исходное уравнение виде:

$$x^2 = 1 - 2y^2,$$

из данного преобразования видно, что x - нечетное число, приведем исходное уравнение к виду:

$$(x-1)(x+1) = 2y^2,$$

так как x - нечетное число, то числа $(x-1)$ и $(x+1)$ будут четными, а из равенства

$$(x-1)(x+1) = 2y^2$$

следует, что y тоже четное число, значит, $y = 2$ является единственным четным числом, тогда значения x:

$$(x-1)(x+1) = 8,$$

разложим

$$8 = 2 \cdot 4,$$

так как

$$(x-1) > (x+1), \text{ то:}$$

$$\begin{cases} x-1=2 \\ x+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Целочисленными решения данного уравнения, являются соответствующие пары: $(3;2)$.

Рассмотренное уравнение не является диофантовым уравнением, а является уравнениям Пелля, вида:

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где d - целое положительное число, не являющее квадратом, имеет бесконечно много решений.

Подводя итог всему вышеизложенному, уравнение второй степени с двумя неизвестными, может не иметь решение в целых числах, может иметь бесконечное множества таких решений.

2.1 Уравнение Пелля и его решение

Одним из ярких представлений, класса диофантовых уравнений второй степени является уравнение Пелля (его еще называют неопределенным уравнения ферма), то есть уравнение

$$x^2 - Ay^2 = 1$$

где A - целое положительное число, не являющее полным квадратом.

Уравнение Пелля имеет решение $(\pm 1;0)$, которое называется тривиальным. Все остальные решения называются нетривиальным. Наименьшим нетривиальным решением уравнения Пелля называется такое решение, при котором двучлен $x+\sqrt{A}y$ принимает наименьшее значение из всех возможных. Решение уравнение Пелля легко может быть получено в терминах непрерывной дроби, для $\sqrt{A}$,при любом целом положительном A и иррациональном $\sqrt{A}$ уравнение Пелля:

$$x^2 - Ay^2 = 1 \tag{2.1.1}$$

всегда имеет нетривиальное решение, другими словами существует пара целых чисел x_0 и y_0; $x_0, y_0 \neq 0$, которая ему удовлетворяет, поскольку $(x_0; y_0)$ - положительное решение уравнения Пелля, левая часть этого неравенства, положительная и дробь $\frac{x_0}{y_0}$ несократима, она является подходящей дробью числа $\sqrt{A}$ итак, положительным решением уравнения Пелля следует искать только среди пар составленных из числителя и знаменателя какой ни будь подходящей дроби числа $\sqrt{A}$, и индекс, при котором модуль правой части уравнения Пелля равен 1. Прежде всего, укажем прием, позволяющий разложить в цепную дробь произвольное положительное число. Пусть α - любое положительное число. Тогда всегда существует целое число, которое будет меньше или равно α и больше $\alpha - 1$. Такое целое число носит название целой части α и обозначается $[\alpha]$. Разность между α и его целой частью называется дробной частью числа α и обозначается $\{\alpha\}$. Из определений целой части и дробной части числа α непосредственно следует соотношение между ними, именно:

$$\alpha - [\alpha] = \{\alpha\}$$

или

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\} \tag{2.1.2}$$

Так как дробная часть числа есть разность между положительным числом и наибольшим целым числом, его не превосходящим, то дробная часть числа всегда меньше единицы и неотрицательна. Например, целая часть $\frac{27}{5}$ есть 5, а дробная его часть есть $\frac{2}{5}$, целая часть $\sqrt{2}$ есть 1, а дробная часть равна $\sqrt{2} - 1$; целая часть $\sqrt[3]{52}$ равна 3, а дробная часть равна $\sqrt[3]{52} - 3$, и т. д.

Введенное нами определение целой части и дробной части положительного числа α может быть использовано для разложения этого числа в цепную дробь. Положим:

$$[\alpha] = q_1 \quad \{\alpha\} = \frac{1}{\alpha_1}, \tag{2.1.3}$$

тогда

$$\alpha = q_1 + \frac{1}{\alpha_1} \tag{2.1.4}$$

Так как $\{\alpha\}$ всегда меньше единицы, то α_1 всегда больше единицы. Если бы α было само целым числом, то его дробная часть равнялась бы нулю, α_1 было бы равно бесконечности, и мы имели бы равенство $\alpha = q_1$. Отвлекаясь от этого частного случая, который исключается тем, что мы разлагаем в непрерывную дробь иррациональное число, мы можем утверждать, что α_1 - положительное число, большее единицы. С этим числом α_1 мы поступаем так же, как и с α, и пишем равенство

$$\alpha_1 = q_2 + \frac{1}{\alpha_2},\ q_2 = [\alpha_1],\ \ \frac{1}{\alpha_2} = \{\alpha_1\}$$

Продолжая этот процесс, мы получаем ряд равенств:

$$
\begin{cases}
\alpha = q_1 + \dfrac{1}{\alpha_1},\ q_1 = [\alpha], \\
\alpha_1 = q_2 + \dfrac{1}{\alpha_2},\ q_2 = [\alpha_1], \\
\alpha_2 = q_3 + \dfrac{1}{\alpha_3},\ q_3 = [\alpha_2], \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{n-1} = q_n + \dfrac{1}{\alpha_n},\ q_n = [\alpha_{n-1}], \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
\tag{2.1.5}
$$

этот процесс последовательного образования целых чисел $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots$, в случае, когда α, - рациональное число, - другими словами, когда $\alpha = \frac{a}{b}$, где a и b - целые положительные числа, нетрудно заметить, ничем не отличается по своим результатам от получения неполных частных с помощью алгоритма Евклида. Поэтому он должен оборваться при α рациональном, при α иррациональном, этот процесс должен быть бесконечным. Действительно, если бы при каком-нибудь $n\alpha_n$ было целым числом, то- отсюда следовало бы, что α_{n-1} было бы рациональным, что в свою очередь влекло бы за собой рациональность α_{n-2} и т. д. и, наконец, рациональность α_1. Из формул (2.1.5), делая последовательные замены, исключая $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, мы получим цепную дробь

$$
\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}}
$$

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

(2.1.6)

Которую можно записывать, и в форме бесконечной цепной дроби, так как n можно взять сколь угодно большим, если цепная дробь является периодической, то

$$\sqrt{A} = [a_0; a_1; a_2 ....],$$

а длина периода этой непрерывной дроби s, где s может быть четной или нечетной, если s - четное, то подходящая дробь находится по формуле:

$$\frac{p_{s-1}}{Q_{s-1}} = [a_0; a_1; a_2 \dots a_{s-1}] \qquad (2.1.7)$$

В этом случае наименьшее натуральное решение уравнения Пелля имеет вид:

$$x = p_s, \; y = Q_s \qquad (2.1.8)$$

А если s - нечетное, то:

$$x = p_{2s}, \; y = Q_{2s} \qquad (2.1.9)$$

Остальные корни уравнения находятся по формуле:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \sqrt{d}\,y_0\right)^n + \left(x_0 - \sqrt{d}\,y_0\right)^n\right]$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(x_0 + \sqrt{d}\,y_0\right)^n - \left(x_0 - \sqrt{d}\,y_0\right)^n\right]$$
(2.1.10)

Для разложения иррационального числа $\sqrt{A}$ применяются квадратичные иррациональности, т.е числа, которые получаются в результате решений квадратных уравнений с целыми коэффициентами.

Непрерывные дроби для квадратичных иррациональностей обладают замечательными свойствами. В качестве первого очень простого примера рассмотрим $\sqrt{2}$. Так как целая часть $\sqrt{2}$ равна 1, то первый элемент q_0 непрерывной дроби также равен 1, и на первом шагу разложения мы получим: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$ Здесь: $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, помножим на сопряженное $\sqrt{2}+1$, получим

$$\alpha_1 = \frac{1\cdot\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1.$$

Целая часть α_1 равна 2, поэтому следующий шаг дает: $\alpha_1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2}$ Здесь

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 2} = \frac{1\cdot(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1.$$

Так как α_2 совпадает с α_1, то дальнейшие вычисления излишни, все последующие шаги будут совпадать с последующим описанным шагом. Следующие элементы непрерывной дроби будут равны 2, и получаем непрерывную дробь:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}}$$

Мы можем записать это корочи:

$\sqrt{2} = 1,\overline{2}$, где черта выделяет период, повторяющий бесконечное число раз.

В каждом из этих случаев существует полное частное α_n, равное некоторому предшествующему полному частному α_m, начиная с того полного частного, непрерывная дробь становится периодической. Элементы от q_m до q_{n-1} все время повторяются.

Рассмотрим уравнение Пелля:

$$x^2 - 8y^2 = 1.$$

Решение: Найдем наименьшее $(x_0; y_0)$, так как

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

иррациональное число, применим квадратичные иррациональности, разложим $2\sqrt{2}$ в непрерывную дробь: $2\sqrt{2} = 2 + \dfrac{1}{\alpha_1}$, так как целая часть равна 2, то

$$\alpha_1 = \frac{1 \cdot 2\sqrt{2} + 2}{(2\sqrt{2} - 2) \cdot \left(2\sqrt{2} + 2\right)} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{8 - 4} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{4} = \frac{2(\sqrt{2} + 2)}{4} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2},$$

откуда целая часть равна 1,

$$\alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-1}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{2}-2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1}=2(\sqrt{2}+1)$$

где целая часть равна 4,

$$\alpha_3=\frac{1}{\alpha_2-4}=\frac{1}{2\sqrt{2}+2-4}=\frac{1\cdot 2\sqrt{2}+2}{(2\sqrt{2}-2)\cdot(2\sqrt{2}+2)}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{4}=\frac{\sqrt{2}+1}{2},$$

целая часть равна 1, так как α_3 совпадает с α_1, то дальнейшие вычисления излишни, все последующие шаги будут совпадать с последующим описанным шагом, откуда получим непрерывную цепную дробь:

$$2\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Так как цепная дробь является периодической, то $2\sqrt{2}=2,\overline{1,4}$, найдем для нее подходящую дробь:

Таблица 1.10. Подходящие дроби.

k	1	2	3	4
q_k	2	1	4	1
p_k	2	3	14	17
Q_k	1	1	5	6

Так как $p_1=q_1$, то

$$p_1=q_1=2,$$

$$p_2 = q_1 \cdot q_2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3,$$

$$p_3 = q_3 \cdot p_2 + p_1 = 4 \cdot 3 + 2 = 14,$$

$$p_4 = q_4 \cdot p_3 + p_2 = 1 \cdot 14 + 3 = 17,$$

$$Q_1 = 1,$$

$$Q_2 = q_2 = 1$$

$$Q_3 = q_3 \cdot Q_2 + Q_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5,$$

$$Q_4 = q_4 \cdot Q_3 + Q_2 = 1 \cdot 5 + 1 = 6,$$

следовательно, получаем подходящие дроби

$$\frac{P_k}{Q_k}: \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{2}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{1}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{14}{5}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{17}{6},$$

так как подкоренное число является четным, то решением данного уравнения будут

$$x = p_s, \; y = Q_s,$$

где $s = 2,4...$ - четное, тогда подходящими дробями для непрерывной дроби являются:

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{1}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{17}{6},$$

отсюда получаем наименьшие корни уравнения:

$$x_0 = p_2, \; y_0 = Q_2, \quad x_0 = 3, y_0 = 1; \quad x_0 = p_4, y_0 = Q_4, \quad x_0 = 17, \; y_0 = 6,$$

и согласно формуле (18) все его решения для наименьших корней $(3;1)$ будут содержаться в прогрессии:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(3+\sqrt{8}\cdot 1\right)^n + \left(3-\sqrt{8}\cdot 1\right)^n\right]$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{8}}\left[\left(3+\sqrt{8}\cdot 1\right)^n - \left(3-\sqrt{8}\cdot 1\right)^n\right]$$
,

где $n \in z$, а для наименьших корней $(17;6)$ будут содержаться в прогрессии:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(17+\sqrt{8}\cdot 6\right)^n + \left(17-\sqrt{8}\cdot 6\right)^n\right]$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{8}}\left[\left(17+\sqrt{8}\cdot 6\right)^n - \left(17-\sqrt{8}\cdot 6\right)^n\right]$$
,

где $n \in z$. Рассмотрим уравнение Пелля:

$$x^2 - 11y^2 = 1$$
.

Решение: Найдем наименьшее $(x_0; y_0)$, так как $\sqrt{11}$ иррациональное число, применим квадратичные иррациональности, разложим $\sqrt{11}$ в непрерывную дробь:

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{\alpha_1}$$
,

так как целая часть равна 3, то

$$\alpha_1 = \frac{1\cdot\sqrt{11}+3}{(\sqrt{11}-3)\cdot\left(\sqrt{11}+3\right)} = \frac{\sqrt{11}+3}{11-9} = \frac{\sqrt{11}+3}{2}$$
,

откуда целая часть равна 3,

$$\alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-3}=\frac{1}{\frac{\sqrt{11}+3}{2}-3}=\frac{1}{\frac{\sqrt{11}-3}{2}}=\frac{2(\sqrt{11}+3)}{\left(\sqrt{11}-3\right)\cdot\left(\sqrt{11}+3\right)}=\frac{2(\sqrt{11}+3)}{2}=\sqrt{11}+3$$
,

где целая часть равна 6,

$$\alpha_3=\frac{1}{\alpha_2-6}=\frac{1}{\sqrt{11}+3-6}=\frac{1\cdot\sqrt{11}+3}{(\sqrt{11}-3)\cdot(\sqrt{11}+3)}=\frac{\sqrt{11}+3}{2}$$
,

целая часть равна 3, так как α_3 совпадает с α_1, то дальнейшие вычисления излишни, все последующие шаги будут совпадать с последующим описанным шагом, откуда получим непрерывную цепную дробь:

$$\sqrt{11}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Так как цепная дробь является периодической, то $\sqrt{11}=3,\overline{3,6}$, найдем для нее подходящую дробь:

Таблица 1.11. Подходящие дроби.

k	1	2	3	4
q_k	3	3	6	3
p_k	3	10	63	199
Q_k	1	3	190	37813

Так как $p_1=q_1$, то

$$p_1=q_1=3$$

$$p_2 = q_1 \cdot q_2 + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

$$p_3 = q_3 \cdot p_2 + p_1 = 6 \cdot 10 + 3 = 63$$

$$p_4 = q_4 \cdot p_3 + p_2 = 3 \cdot 63 + 10 = 199$$

$$Q_1 = 1$$

$$Q_2 = q_2 = 3 \; Q_3 = q_3 \cdot Q_2 + Q_1 = 63 \cdot 3 + 1 = 190$$

$$Q_4 = q_4 \cdot Q_3 + Q_2 = 199 \cdot 190 + 3 = 37813$$

следовательно, получаем подходящие дроби

$$\frac{P_k}{Q_k}: \; \frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{1}, \; \frac{P_2}{Q_2} = \frac{10}{3}, \; \frac{P_3}{Q_3} = \frac{63}{190}, \; \frac{P_4}{Q_4} = \frac{199}{37813}$$

так как подкоренное число является нечетным, то решением данного уравнения будут

$$x = p_{2s}, \; y = Q_{2s},$$

где $s = 1,3...$ - нечетное, тогда подходящими дробями для непрерывной дроби являются: $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{10}{3}$, отсюда получаем наименьшие корни уравнения:

$$x_0 = p_2, \; y_0 = Q_2, \; x_0 = 10, y_0 = 3,$$

$(10;3)$ и согласно формуле (2.1.8) все его решения для наименьших корней будут содержаться в прогрессии:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(10 + \sqrt{11} \cdot 3\right)^n + \left(10 - \sqrt{11} \cdot 3\right)^n\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{8}}\left[\left(10 + \sqrt{11} \cdot 3\right)^n - \left(10 - \sqrt{11} \cdot 3\right)^n\right],$$

где $n \in z$. При целом положительном $A > 3$ и иррациональном $\sqrt{A}$ рассмотрим уравнение Пелля вида:

$$x^2 - Ay^2 = -1 \tag{2.1.11}$$

Данное уравнение имеет решение тогда, когда подкоренное число $\sqrt{A}$ не делится ни на 4, ни на простое вида

$$4k + 3$$

где $k = 1,2,3..$, это условие является необходимым условием разрешимости уравнения

$$x^2 - Ay^2 = -1,$$

но это условие не достаточное; например, для числа $A = 34$ указное условие выполняется, однако уравнение

$$x^2 - Ay^2 = -1$$

неразрешимо. Если s - нечетное, то в этом случае наименьшее натуральное решение уравнения Пелля имеет вид:

$$x = p_s, \ y = Q_s \tag{2.1.12}$$

А если s - четное, то:

$$x = p_{s-1}, \ y = Q_{s-1} \tag{2.1.13}$$

Рассмотрим уравнение Пелля:

$$x^2 - 37y^2 = -1.$$

Решение: Найдем наименьшее $(x_0; y_0)$, так как $\sqrt{37}$ иррациональное число, и подкоренное число не делится ни на 4, ни на простое вида $4k+3$, где $k = 1,2,3..$

применим квадратичные иррациональности, разложим $\sqrt{37}$ в непрерывную дробь: $\sqrt{37} = 6 + \frac{1}{\alpha_1}$, так как целая часть равна 6, то

$$\alpha_1 = \frac{1 \cdot \sqrt{37} + 6}{(\sqrt{37} - 6) \cdot \left(\sqrt{37} + 6\right)} = \frac{\sqrt{37} + 6}{37 - 36} = \frac{\sqrt{37} + 6}{1},$$

откуда целая часть равна 12,

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 6} = \frac{1}{\frac{\sqrt{37} + 6}{1} - 12} = \frac{1}{\frac{\sqrt{37} - 6}{1}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{37} + 6)}{\left(\sqrt{37} - 6\right) \cdot \left(\sqrt{37} + 6\right)} = \frac{\sqrt{37} + 6}{1} = \sqrt{37} + 6$$

где целая часть равна 12, так как α_2 совпадает с α_1, то дальнейшие вычисления излишни, все последующие шаги будут совпадать с последующим описанным шагом, откуда получим непрерывную цепную дробь:

$$\sqrt{37} = 6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Так как цепная дробь является периодической, то $\sqrt{37} = 6,\overline{12}$, найдем для нее подходящую дробь:

Таблица 1.12. Подходящие дроби.

k	1	2

q_k	6	12
p_k	6	73
Q_k	1	12

Так как $p_1 = q_1$, то

$$p_1 = q_1 = 6,$$

$$p_2 = q_1 \cdot q_2 + 1 = 6 \cdot 12 + 1 = 73,$$

$$Q_1 = 1, \ Q_2 = q_2 = 12,$$

следовательно, получаем подходящие дроби

$$\frac{P_k}{Q_k}: \ \frac{P_1}{Q_1} = \frac{6}{1}, \ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{73}{12},$$

так как подкоренное число является нечетным, то решением данного уравнения будут

$$x = p_s, \ y = Q_s,$$

где $s = 1,3\ldots$ - нечетное, тогда подходящими дробями для непрерывной дроби являются: $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{6}{1}$, отсюда получаем наименьшими корня уравнения:

$$x_0 = p_1, \ y_0 = Q_1, \ x_0 = 6, y_0 = 1,$$

если $x_0 = 6, y_0 = 1$ - наименьшее решение уравнения

$$x^2 - 37y^2 = -1,$$

заданное подходящей дробью $\frac{p_s}{Q_s}$, для нечетных, и подходящей дробью $\frac{p_{s-1}}{Q_{s-1}}$, для четных, то для нахождения наименьшего решения уравнения

$$x^2 - 37y^2 = 1,$$

применяется формула:

$$x + y\sqrt{A} = (x_0 + y_0\sqrt{A})^r \qquad (2.1.14)$$

где $r = 1,2,3..$ Подставляя в формулу (2.1.14), найдем наименьшее решения уравнения

$$x^2 - 37y^2 = 1$$

$$(6 + 1\sqrt{37})^2 = (6 + 1\sqrt{37})(6 + 1\sqrt{37}) = 36 + 12\sqrt{37} + 37 = 73 + 12\sqrt{37}$$

$$x + y\sqrt{A} = 73 + 12\sqrt{37}$$

отсюда следует что, $x = 73; y = 12$ являются наименьшим решениям уравнения $x^2 - 37y^2 = 1$, и согласно формуле (2.1.8) все его решения для наименьших корней $(73;12)$ будут содержаться в прогрессии:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(73 + \sqrt{37}\cdot 12\right)^n + \left(73 - \sqrt{37}\cdot 12\right)^n\right]$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{8}}\left[\left(73 + \sqrt{37}\cdot 12\right)^n - \left(73 - \sqrt{37}\cdot 12\right)^n\right],$$

где $n \in z$. Использованные в этом пункте методы позволяют установить некоторые факты, относящие к уравнению Пелля.

Во первых, уравнение Пелля имеет бесконечно много решений, и все его решения получаются из подходящих дробей, соответствующих элементам q_n в конце каждого периода. Если n - нечетное т.е у непрерывной дроби, есть средний элемент (как в примере с $\sqrt{11}$), все эти решения суть решения с +1. Если n - четное и нечетное, т.е если среднего элемента нет (как в примере с $\sqrt{37}$), то выбранные подходящие дроби попеременно дают решения уравнения с +1,-1.

Во вторых уравнения Пелля всегда приводит к наименьшему решению. Наименьшее решение уравнения

$$x^2 - Ay^2 = \pm 1$$

вплоть до $A = 50$ приведены в таблице 1.3 в приложении А.

3 Решение задач повышенной сложности

Задачи повышенной сложности - это такие задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения. Условия задач повышенной сложности таковы, что позволяют ученикам довольно легко выделить тот математический аппарат, который нужен для решения задачи по математике. Научить ребят решению задач повышенной сложности можно, если вызвать интерес, другими словами, предложить задачи, интересные и содержательные для современного ученика. Или же заменять формулировку вопроса, используя проблемные жизненные ситуации. Например, вместо задания «решить Диафантовое уравнение», предложить решить следующую задачу. Может ли ученик расплатиться за покупку стоимостью 19 р., если у него только трехрублевые купюры, а у продавца – десятирублевые?

Также действенен метод подбора вспомогательных задач. Это средство обучения решению задач говорит об определенном уровне достижения в решении задач. Обычно в таких случаях думающий ученик пытается самостоятельно, без помощи учителя находить вспомогательные задачи или упрощать и видоизменять условия данных задач.

Умение решать задачи повышенной сложности приобретается практикой. Не зря говорят, что математике нельзя научиться, глядя, как это делает сосед. Самостоятельная работа и помощь учителя – вот залог плодотворной учебы. Рассмотрим решение задач повышенной сложности, методом функциональной подстановки. Метод функциональной постановки является, пожалуй, самым распространенный методом решения сложных задач школьной математике. Суть метода состоит во введении новой переменной $y = f(x)$, применение которой приводит к более простому выражению. Основная трудность решения задач методом функциональной подстановки заключается в том, что зачастую трудно угадать вид сомой подстановки и вид уравнений (или неравенств), где эту подстановку можно использовать. [10, с. 4].

1. Решить уравнение методом функциональной подстановки:

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$$

Решение: Введем новую переменную $x^2 - x + 2 = y$, подставив ее, в первоначальное уравнение получим:

$$\sqrt{y} + \sqrt{y+5} = \sqrt{2y+17},$$

где $y \geq 0$. Поскольку обе части данного уравнения неотрицательные, то возведя обе части уравнение в квадрат получим:

$$y + 2\sqrt{y^2+5y} + y + 5 = 2y + 17,$$

отсюда следует, что

$$\sqrt{y^2+5y} = 6 \Rightarrow y^2+5y-36 = 0$$

и тогда находим: $y_1 = -9$, $y_2 = 4$. Так как $y \geq 0$, то для нахождения корней нашего уравнения, необходимо рассмотреть равенство:

$$x^2 - x + 2 = 4,$$

корнями которого являются целочисленные значения: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.[10, с. 5].

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$$

Решение: Обозначим $\sqrt{2x-5}=y$ (очевидно, что $y\geq 0$). Тогда $y^2=2x-5$ или $x=\dfrac{y^2+5}{2}$. В таком случае:

$$x-2+\sqrt{2x-5}=\frac{y^2+5}{2}-2+y=\frac{(y+1)^2}{2},$$

$$x+2+3\sqrt{2x-5}=\frac{y^2+5}{2}+2+3y=\frac{(y+3)^2}{2}$$

и из заданного уравнения получаем:

$$\frac{|y+1|}{\sqrt{2}}+\frac{|y+3|}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$$

или

$$|y+1|+|y+3|=14.$$

Поскольку $y\geq 0$, то $|y+1|=y+1,\ |y+3|=y+3.$ В этой связи уравнения примет вид $y+1+y+3=14$. Отсюда получаем решение уравнения в целых числах $y=5$, $\sqrt{2x-5}=5$ и $x_1=15.$ [10, с. 5].

Второй способ. Обе части уравнения умножим на $\sqrt{2}$, и после несложных преобразований будем иметь равенство

$$\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}+3\right)^2}=14\Rightarrow$$

$$\sqrt{2x-5}+1+\sqrt{2x-5}+3=14\Rightarrow$$

$$2\sqrt{2x-5}=10 \Rightarrow\ 2x-5=25 \Rightarrow\ x=15.$$

3. Решить уравнение:

$$\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-x^2+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=0$$

Решение: Обозначим $x^2=y.$ Так как $12-\frac{12}{x^2}\geq 0$ и $x^2-\frac{12}{x^2}\geq 0,$ то $x^4\geq 12$ или $y\geq 2\sqrt{3}.$

В таком случае заданное уравнение примет вид:

$$\sqrt{12-\frac{12}{y}}=y-\sqrt{y-\frac{12}{y}}.$$

Так как $y\geq 2\sqrt{3}.$, то обе части уравнения могут принимать только неотрицательные значения. Поэтому после возведения в квадрат обеих частей уравнения получаем равносильное уравнение:

$$12-\frac{12}{y}=y^2-2y\sqrt{y-\frac{12}{y}}+y-\frac{12}{y},$$

$$y^2+y-12=2y\sqrt{y-\frac{12}{y}}.$$

Если обе части уравнения разделить на y, а затем обозначая

$$\sqrt{y-\frac{12}{y}}=z,$$

получаем

$$y+1-\frac{12}{y}=2\sqrt{y-\frac{12}{y}}$$

или

$$z^2+1=2z.$$

Отсюда следует, что

$$z=1,\ \sqrt{y-\frac{12}{y}}=1$$

или

$$y_1=4.$$

Поскольку $x^2=y$, то находим: $x^2=4$, т.е. $x_1=-2$ и $x_2=2$. [10, с. 7].

4. Решить уравнение:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

Решение: Введем новую переменную $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}.$ Поскольку левая часть уравнения положительная, то $y\geq 0.$ Так как

$$y^2=\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2=\frac{x^2}{9}-\frac{8}{3}+\frac{16}{x^2}$$

или

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3y^2+8,$$

то заданное уравнение, можно переписать как $3y^2+8=10y$ или $3y^2-10y+8=0$. Квадратное уравнение имеет два положительных корня, но мы при решении уравнения выбираем один из корней, имеющий целочисленное значение: $y_1 = 4/3$. Так как $y = x/3 - 4/x$ то для нахождения корней данного уравнения необходимо рассмотреть уравнение относительно переменной x:

$$x/3 - 4/x = 4/3 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0.$$

следовательно, получаем два корня с целочисленными значениями: $x_1 = -2$, $x_2 = 6$.[10, с. 8].

5. Решить уравнение:

$$\left(x^2+4x+8\right)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0.$$

Решение: Перепишем уравнение в виде:

$$\left(x^2+4x+8\right)^2 + 3x \cdot \left(x^2+4x+8\right) + 2x^2 = 0.$$

Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то разделив обе части уравнения на x^2, получим равносильное ему уравнения:

$$\left(\frac{x^2+4x+8}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{x^2+4x+8}{x}\right) + 2 = 0.$$

Введем новую переменную $y = \dfrac{x^2+4x+8}{x}$ и подставив в уравнение получим:

$$y^2 + 3y + 2 = 0,$$

корнями которого являются целочисленные значение: $y_1 = -1$ и $y_2 = -2$, теперь рассмотрим два уравнения:

$$\frac{x^2+4x+8}{x}=-1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2+4x+8}{x}=-2.$$

Первое уравнение действительных корней не имеет, а второе имеет два целочисленных корня: $x_1=-2$, $x_2=-4$.[10, с. 9].

При решении сложных задач по математике используются самые разнообразные нестандартные методы, большинство из которых трудно подается классификации. Как правило, такие методы ориентированные на решение относительно узкого курага задач, однако их значение и умение ими пользоваться весьма необходимо для успешного решения математических задач повышенной сложности. Приведем задачи, решение которых базируется на применении оригинальных (эффективных, но сравнительно редко встречающихся) комбинированных методов. [10, с. 9].

Решите уравнение комбинированным методом:

$$x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0$$

Решение: Рассмотрим уравнение с параметром a в виде

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0,$$

которое совпадает с данным уравнением, при условии, что $a=\sqrt{2}$. Представим левую часть нашего уравнения в виде квадратного многочлена относительно неизвестной переменной a, т.е $a^2-ax^2+x^3-x^2=0$, находим дискриминант этого квадратного уравнения:

$$D=(-x)^2-4\cdot 1\cdot(x^3-x^2)=x^4-4x^3+4x^2,$$

тогда

$$a_{1,2}=\frac{x^2\pm\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}}{2\cdot 1}=\frac{x^2\pm x(x-2)}{2},$$

или

$$a_1 = x^2 - x, \quad a_2 = x,$$

так как $a = \sqrt{2}$, получим два уравнения относительно переменной x:

$$x^2 - x - \sqrt{2}$$

или $x = \sqrt{2}$, решая данные уравнения получим три корня уравнения: $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$. [10, с. 10].

2. Решите уравнение:

$$x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$$

Решение: перепишем уравнение виде с параметром a, при $a = \sqrt{3}$ т.е имеем:

$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0,$$

представим уравнение виде квадратного уравнения относительно неизвестной переменной a:

$$a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 + x = 0,$$

находим дискриминант:

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^4 + x) = 4x^2 - 4x + 1,$$

тогда

$$a_1 = \frac{2x^2 + 2x}{2} = x^2 + x;$$

$$a_2 = \frac{2x^2 - 2x + 2}{2} = x^2 - x + 1.$$

Так как $a = \sqrt{3}$, решая полученные уравнения будем иметь четыре корня исходного уравнения: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$.[10, с. 12].

3. Решите уравнение

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{5\pi^2}{32}.$$

Решение: Обозначим: $\arccos x = y$ тогда для $0 \le y \le \pi$ выполняется равенство, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Отсюда $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - y$, и следовательно, получим уравнение относительно y:

$$\left(\frac{\pi}{2} - y\right)^2 + y^2 = \frac{5\pi^2}{32}.$$

Преобразовывая данное уравнение получим следующее:

$$64y^2 - 32\pi y + 3\pi^2 = 0.$$

Вычисляя дискриминант, находим два решения этого уравнения:

$$D = (32\pi)^2 - 4 \cdot 64 \cdot 3\pi^2 = 1024\pi^2 - 768\pi^2 = 256\pi^2,$$

$$y_1 = \frac{32\pi - 16\pi}{2 \cdot 64} = \frac{3\pi}{8},$$

$$y_2 = \frac{2\pi + 16\pi}{2 \cdot 64} = \frac{\pi}{8},$$

таким образом:

$$y_1 = \arccos x_1 = \frac{3\pi}{8},$$

$$y_2 = \arccos x_2 = \frac{\pi}{8}.$$

Очевидно, что найденные значения удовлетворяют условию $0 \le y \le \pi$. Следовательно, решениями исходного уравнения будут: $x_1 = \cos\frac{3\pi}{8}$, $x_2 = \cos\frac{\pi}{8}$ [10, с. 14].

4. Решите уравнение:

$$\lg(arctgx) + \lg(arcctgx) = 0$$

Решение: Используя свойства логарифма, перепишем уравнение виде:

$$arctgx \cdot arcctgx = 1.$$

Обозначим

$$arctgx = y,$$

так как $-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$, то из нашего равенства следует, что если $arctgx > 0$, то $0 < y < \frac{\pi}{2}$, так как $arctgx = y$, то $arcctgx = \frac{1}{y}$, поскольку

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2},$$

то $y+\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2}$, из неравенства между средними следует, что, если $y>0$, то $y+\frac{1}{y}\geq 2$, в связи с тем, что $\frac{\pi}{2}<2$, следует что, уравнение $y+\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2}$ не имеет корней. [10, с. 17].

5. Решите уравнение:

$$\sqrt{3x^2-5x+7}+\sqrt{3x^2-7x+2}=0$$

Решение: Преобразуем данное уравнение, используя известное равенство:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},$$

где

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq 0,$$

тогда:

$$\frac{3x^2-5x+7-3x^2+7x-2}{\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+2}}=3.$$

Преобразовав данное равенство получим:

$$\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+2}=\frac{2x+5}{3}.$$

Сложив исходное уравнение с преобразованным, получим:

$$\sqrt{3x^2-5x+7}=\frac{x+7}{3}.$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательная, то $x\geq -7$. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{3x^2-5x+7})^2=(\frac{x+7}{3})^2$$
,

в итоге получим следующее квадратное уравнение:

$$26x^2-59x+14=0$$
.

Находим решение этого квадратного уравнения традиционным способом:

$$D=(59)^2-4\cdot 26\cdot 14=3481-1456=2056$$
.

Отсюда находим:

$$x_1=\frac{59-45}{2\cdot 26}=\frac{14}{52}=\frac{7}{26}$$
,

$$x_2=\frac{59+45}{52}=\frac{104}{52}=2$$

Подставляя найденные корни в наше уравнение, убеждаемся, что данные корни являются решением уравнения.

Примечание: Проверка в примере требуется в обязательном порядке, ибо при возведении иррациональности возможны появления посторонних корней. Поэтому рекомендуется проверить найденные решения на предмет удовлетворения исходного иррационального уравнения. [10, с. 20].

Рассмотрим задачу относительно нелинейной системе двух уравнений с пятью неизвестными, три из которых образуют арифметическую прогрессию.

Найти решение квадратной системы уравнения в целых числах:

$$\begin{cases} a+b+c=x+y \\ a^2+b^2+c^2=x^2+y^2 \end{cases}$$

(3.1.1)

где a,b,c – образуют арифметическую прогрессию.

Даная задача относиться к типу алгебраических систем, носящая арифметический характер. [17, с. 36].

Решение:

Пусть: $a = 3m$, $c = 2b - 3m$, тогда значение $x + y = a + b + c = 3b$. Учитывая подстановки, упростим второе уравнение системы:

$$9m^2 + b^2 + (2b - 3m)^2 = (x + y)^2 - 2xy,$$

или

$$9m^2 + b^2 + 4b^2 - 12bm + 9m^2 = 9b^2 - 2xy$$

откуда $xy = 2b^2 + 6bm - 9m^2$. Но $x + y = 3b$, тогда

$$(x + y)^2 = 9b^2$$

получаем

$$(x - y)^2 + 2xy = (x + y)^2 - 2xy = 9b^2 - 4xy = b^2 - 24bm + 36m^2,$$

или

$$(x - y)^2 = (b - 12m)^2 - 108\,m^2 \qquad (3.1.1).$$

Равенства (3.1.1) удовлетворяется, если:

$$x - y = p^2 - 27g^2,\ b - 12m = p^2 + 27g^2,\ m = pg;$$

тогда когда

$$a = 3m = 3pg;\ b = p^2 + 12pg + 27g^2;\ c = 2b - 3m = 2p^2 + 21pg + 54g^2.$$

Значение x и y найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=3b \\ x-y=p^2-27g^2 \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} x=2p^2+18pg+27g^2 \\ y=p^2+18pg+54g^2 \end{cases}$$

Итак, мы находим решение системы, где p и g выступают в виде параметров и чисел a,b,c образующих арифметическую прогрессию.

$$\begin{cases} a=3pg \\ b=p^2+12pg+27g^2 \\ c=2p^2+21pg+54g^2 \end{cases} \qquad (3.1.2)$$

$$\begin{cases} x=2p^2+18pg+27g^2 \\ y=p^2+18pg+54g^2 \end{cases} \qquad (3.1.3)$$

Приведем несколько конкретных примеров на применение решений квадратной системы.

Пример 1: $p=6$, $g=1$

По системе (3.1.2), найдем значения: a,b,c.

$$a = 3\cdot 6\cdot 1=18$$

$$b = 6^2+12\cdot 6\cdot 1+27\cdot 1^2=36+72+27=135$$

$$c = 2\cdot 6^2+21\cdot 6\cdot 1+54\cdot 1^2=72+126+54=252$$

По системе (3.1.3), найдем значения: $x;y$

$$x = 2\cdot 6^2 + 18\cdot 6\cdot 1 + 27\cdot 1^2 = 72 + 108 + 27 = 207$$

$$y = 6^2 + 18\cdot 6\cdot 1 + 54\cdot 1 = 36 + 108 + 54 = 198$$

Пример 2: $p = 4$, $g = 2$

По системе (3.1.2), найдем значения: a,b,c.

$$a = 3\cdot 4\cdot 2 = 24$$

$$b = 4^2 + 12\cdot 4\cdot 2 + 27\cdot 2^2 = 16 + 96 + 108 = 220$$

$$c = 2\cdot 4^2 + 21\cdot 4\cdot 2 + 54\cdot 2^2 = 32 + 168 + 216 = 416$$

По системе (3.1.3), найдем значения: $x;y$

$$x = 2\cdot 4^2 + 18\cdot 4\cdot 2 + 54\cdot 2^2 = 32 + 144 + 108 = 284$$

$$y = 4^2 + 18\cdot 4\cdot 2 + 54\cdot 2^2 = 16 + 144 + 216 = 376$$

[17, с. 36].

Рассмотрим задачу относительно нелинейной системе двух уравнений с пятью неизвестными, три из которых образуют арифметическую прогрессию.

Найти решение кубической системы уравнения в целых числах:

$$\begin{cases} a + b + c = x + y \\ a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + y^3 \end{cases} \qquad (3.1.4)$$

где a,b,c – образуют арифметическую прогрессию.

Даная задача относиться к типу алгебраических систем, носящая арифметический характер. [22, с. 23].

Решение:

Пусть: $a = 3d$, $c = 2b - 3d$, тогда значение $x + y = a + b + c = 3d + b + 2b - 3d = 3b.$

Учитывая подстановки, упростим второе уравнение системы:

$$3d^3 + b^3 + (2b - 3d)^3 = (x + y)\cdot(x^2 - xy + y^2) = (x + y)\cdot((x + y)^2 - 3xy),$$

или

$$27d^3 + b^3 + 8b^3 - 36b^2 d + 54bd^2 - 27d^3 = 3b \cdot (9b^2 - 3xy),$$

$$9b^3 - 36b^2 d + 54bd^2 = 27b^3 - 9bxy, \quad 9b^3 - 36b^2 d + 54bd^2 - 27b^3 = -9bxy,$$

$$-18b^3 - 36b^2 d + 54bd^2 = -9bxy / -9b, \quad 2b^2 + 4bd - 6d^2 = xy,$$

откуда

$$xy = 2b^2 + 4bd - 6d^2.$$

Но $x + y = 3b$, тогда

$$(x+y)^2 = 9b^2$$

получим

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = ((x+y)^2 - 4xy) = 9b^2 - 4xy = 9b^2 - 4(2b^2 + 4bd - 6d^2) =$$
$$= 9b^2 - 8b^2 - 16bd + 24d^2$$

$$(x-y)^2 = b^2 - 16bd + 24d^2 \quad \text{или} \quad (x-y)^2 = (b-8d)^2 - 40d \qquad (3.1.4).$$

Равенства (3.1.4) удовлетворяется, если:

$$x - y = p^2 - 10g^2, \quad b - 8d = p^2 + 10q^2, \quad d = pg;$$

тогда

$$a = 3d = 3pg; \quad b = p^2 + 8pg + 10g^2; \quad c = 2b - 3d = 2p^2 + 13pg + 20g^2.$$

Значение x и y найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3b \\ x - y = p^2 - 10g^2 \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} x = 2p^2 + 12pg + 10g^2 \\ y = p^2 + 12pg + 20g^2 \end{cases}$$

Итак, мы находим решение системы, где p и g выступают в виде параметров и числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию.

$$\begin{cases} a = 3pg \\ b = p^2 + 8pg + 10g^2 \\ c = 2p^2 + 13pg + 20g^2 \end{cases} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{cases} x = 2p^2 + 12pg + 10g^2 \\ y = p^2 + 12pg + 20g^2 \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Приведем несколько конкретных примеров на применение решений кубической системы.

Пример 1: $p = 6$, $g = 1$

По системе (3.1.5), найдем значения: a, b, c.

$$a = 3 \cdot 6 \cdot 1 = 18$$

$$b = 6^2 + 8 \cdot 6 \cdot 1 + 10 \cdot 1^2 = 36 + 48 + 10 = 94$$

$$c = 2 \cdot 6^2 + 13 \cdot 6 \cdot 1 + 20 \cdot 1^2 = 72 + 78 + 20 = 170$$

По системе (3.1.6), найдем значения: $x; y$

$$x = 2 \cdot 6^2 + 12 \cdot 6 \cdot 1 + 10 \cdot 1^2 = 72 + 72 + 10 = 154$$

$$y = 6^2 + 12 \cdot 6 \cdot 1 + 20 \cdot 1 = 36 + 72 + 20 = 128$$

Пример 2: $p = 4$, $g = 2$

По системе (3.1.5), найдем значения: a, b, c.

$$a = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

$$b = 4^2 + 8 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 2^2 = 16 + 64 + 40 = 120$$

$$c = 2 \cdot 4^2 + 13 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 2^2 = 32 + 104 + 80 = 216$$

По системе (3.1.6), найдем значения: $x; y$

$$x = 2 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 2^2 = 32 + 96 + 40 = 168$$

$$y = 4^2 + 12 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 2^2 = 16 + 96 + 160 = 272$$

Таким образом из двух примеров следует, что решение исходных примеров системы зависит от двух параметров, p и g все неизвестные выражаются через эти параметры, при этом по системе (3.1.2) видно что, числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, через параметры p и g, а два других параметра x и y из системы (3.1.3), являются квадратичными формами от переменных p и g.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение различного вида уравнений является одной из содержательных линий школьного курса математики, но при этом методы решения уравнений с несколькими неизвестными практически не рассматриваются. Вместе с тем, решение уравнений от нескольких неизвестных в целых числах является одной из древнейших математических задач. Большинство методов решения таких уравнений основаны на теории цепных дробей, интерес к которым в настоящее время определяется бурным развитием информационных технологий. В связи с этим, учащимся старших классов будет небезынтересно познакомиться с методами решения некоторых уравнений в целых числах, тем более что на олимпиадах разного уровня очень часто предлагаются задания, предполагающие решение какого-либо уравнения в целых числах, а в этом году такие уравнения включены еще и в материалы ЕНТ.

В диссертационной работе были решены следующие поставленные задачи: решение диофантовых уравнений, сложных задач, примеров более простыми методами (теорией цепных дробей, методом алгоритма Евклида функциональными и комбинированными подстановками) для учащихся общеобразовательной школы.

Таким образом, в диссертационном исследовании выведены, сформулированы и доказаны теоремы и леммы, применяемые при решении уравнений в целых числах.

Уравнения первой степени с одной неизвестной и с двумя неизвестными, решаются довольно просто. Мы выделили виды таких уравнений и алгоритмы их решений. Также было найдено общее решение таких уравнений.

С уравнениями второй степени т.е уравнение Пелля сложнее, поэтому мы рассмотрели лишь частные случаи: Разложения в цепную непрерывную дробь, разложения иррационального числа $\sqrt{A}$ применением квадратичных иррациональностей, нахождение подходящих дробей, корнями данного уравнения являются числитель и знаменатель подходящей дроби.

В решении сложных задач мы рассмотрели два метода: функциональный и комбинаторный, решение которых базируется на применении оригинальных (эффективных, но сравнительно редко встречающих) методов. И задачу относительно нелинейных систем двух уравнений с пятью неизвестными, три из которых образуют арифметическую прогрессию.

В дальнейшем мы планируем углубить свое исследование в изучении уравнений с несколькими переменными, которые применяются в решении сложных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. – М.: Наука, 1895. – 326с.

2 Буштаб А.А. Элементарная теория чисел. – М.: Учпедгиз, 1960. – 318с.

3 Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. – М.: Наука, 1983. – 216с.

4 Ляпин Е.С. и Евсеев А.Е.. Алгебра и теория чисел. – М.: Просвещение, 1978. – 832с.

5 Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978. – 144с.

6 Виноградов И.М. Основы теоретических чисел. – М.: Ижевск, 2003. – 176с.

7 Курош А.Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней. – М.: Наука, 1975. – 30с.

8 Базылев Д.Ф. Справочное пособие к решению задач: диафантовы уравнения. – Минск: НТЦ «АПИ», 1999. – 160с.

9 Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М.: ИЛЕКСА, 2007. – 252с.

10 Супрун В.П. Математика для старшеклассников. Нестандартные методы решения задач. – М.: Либроком, 2009. – 272с.

11 Серпинский В. О решение уравнений в целых числах. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 88с.

12 Дэконпорт Г. Вышая арифметика. Введение в теорию чисел. – М.: Наука, 1965. – 79с.

13 Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Государственное издательство физико – математической литературы – 112с.

14 Сушкевич А.К. Теория чисел. Элементарный курс. – Харков: Издательство Харьковского государственного университета имени А.М Горького, 1954. – 27с.

15 Просветов Г.И. Теория чисел: задачи и решения. Учебно – практическое пособие. – М.: «Альфо-Пресс», 2010. – 72с.

16 Нестеренко Ю.В. Теория чисел. Учебник для студентов выших учебных завидений обучающих по спецальности «математика». – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 272с.

17 Исмоилов Д.И. Евменов В.В. Решение уравнений в целых числах // Вестник ИнЕУ – 2014. – №1(53). – С. 36-42

18 Бугаенко В.О. Уравнение Пелля. – М.:Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2001. – 32с.

19 Тригг Ч. Задачи с изюминкой – М.: Мира, 1975. – 302с.

20 Гринько Е.П, Головач А.Г. Учебно-методическое пособие. Методы решения диофантовых уравнений при подготовке школьников к олимпиадам. – Брест: БрГУ имени А.С Пушкина, 2013. – 180с.

21 Хинч А.Я. Цепные дроби. – 2 изд. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1968. – 116с.

22 Балаян Э.Н 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике – 2 изд. – Р.на/Д, 2008. – 364с.

23 Бошмаков И.Г Диофант и диофантовы уравнения. – М: Наука, 1972. – 68с.

24 Гринько, Е.П. Система работы с индивидуально одаренными детьми: Монография. – Брест: Изд во БрГУ, 2009. – 229 с

25 Гринько Е.П. методы решения алгебраических олимпиадных задач учебно-методические пособие. – Брест: БрГУ, 2012. – 108с.

26 Прасалов В.В задачи по алгебре, арифметике и анализу: учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2007. – 608с.: ил

Приложение А.

Таблица 1.3. Непрерывные дроби.

№	Непрерывные дроби для $\sqrt{A}$	x	y	$x^2 - Ay^2$
2	1,2	1	1	-1
3	1,1,2	2	1	+1
5	2,4	2	1	-1
6	2,2,4	5	2	+1
7	2,1,1,1,4	8	3	+1
8	2,1,4	3	1	+1
10	3,6	3	1	-1
11	3,3,6	10	3	+1
12	3,2,6	7	2	+1
13	3,1,1,1,1,6	18	5	-1
14	3,1,2,1,6	15	4	+1
15	3,1,6	4	1	+1
17	4,8	4	1	-1
18	4,4,8	17	4	+1
19	4,2,1,3,1,1	170	39	+1
20	4,2,8	9	2	+1
21	4,1,1,2,1,1,8	55	12	+1
22	4,1,2,4,2,1,8	197	42	+1
23	4,1,3,1,8	24	5	+1
24	4,1,8	5	1	+1
26	5,10	5	1	-1
27	5,5,10	26	5	+1
28	5,3,2,3,10	127	24	+1
29	5,2,1,1,2,10	70	13	-1
30	5,2,10	11	2	+1
31	5,1,1,3,5,3,1,1,10	1520	273	+1
32	5,1,1,1,10	17	3	+1
33	5,1,2,1,10	23	4	+1
34	5,1,4,1,10	35	6	+1
35	5,1,10	6	1	+1
37	6,12	6	1	-1
38	6,6,12	37	6	+1
39	6,4,12	25	4	+1
40	6,3,12	19	3	+1
41	6,2,2,12	32	5	-1
42	6,2,12	13	2	+1
43	6,1,1,3,1,5,1,3,1,1,12	3482	531	+1
44	6,1,1,1,2,1,1,1,12	199	30	+1
45	6,1,2,2,2,1,12	161	24	+1

46	6,1,3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,12	24335	3588	+1
47	6,1,5,1,12	48	7	+1
48	6,1,12	7	1	+1
50	7,14	7	1	-1

Приложение В.

Примеры для самостоятельной работы.

Решите уравнения в целых числах первой степени с двумя неизвестными (диофантовы уравнения).

1) $27x-40y=1$ 2) $54x+37y=7$ 3) $107x+84y=1$

4) $13x-15y=72$ 5) $81x+52y=5$ 6) $24x-56y=72$

7) $127x-52+1=0$ 8) $7x-19y=23$ 9) $43x+37y=21$

10) $122x+129y=2$

11) Задача: Кусок проволоки длиной 102 см нужно разрезать на части длиной 15 см и 12 см, так чтобы была использована вся проволока.

Решите уравнение второй степени с двумя неизвестными в целых числах

1) $x^2-y^2=91$ 2) $2xy=x^2+2y$ 3) $3x^2+4xy-7y^2=13$

4) $2x^2+5xy-12y^2=28$ 5) $x^2-4xy-5y^2=1996$ 6) $x^2=y^2+2y+13$

7) $6x^2+5y^2=74$ 8) $2x^2+5xy-12y^2=28$ 9) $x^2-3xy+2y^2=3$

10) $x^2-2x+y^2-4y+5=0$

Решите уравнения первой степени с двумя неизвестными (приближение вещественных чисел помощью рациональных дробей)

1) $45x-37y=25$ 2) $39x-22y=10$ 3) $17x-25y=117$

4) $53x-47y=11$ 5) $81x-48y=33$ 6) $26x+34y=13$

7) $258x-175y=113$ 8) $38x+117y=209$ 9) $41x+114y=5$

10) $258x+172y=56$

Решите уравнения второй степени с двумя неизвестными (уравнение Пелля)

1) $x^2-2y^2=-1$ 2) $x^2-3y^2=1$ 3) $x^2-5y^2=-1$

4) $x^2-13y^2=-1$ 5) $x^2-15y^2=1$ 6) $x^2-20y^2=1$

7) $x^2-22y^2=1$ 8) $x^2-26y^2=-1$ 9) $x^2-28y^2=1$

10) $x^2-47y^2=1$ 11) $x^2-50y^2=-1$ 12) $x^2-40y^2=1$

13) $x^2-39y^2=1$

1) Решите сложные задачи (функциональным и комбинированным методом)

2) Решите уравнение функциональным методом

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=11\sqrt{2}.$$

3) Решите уравнения

$$\sqrt{4-\frac{4}{x^2}}-x^2+\sqrt{x^2-\frac{4}{x^2}}=0$$

4) Решите уравнение функциональным методом

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=15\sqrt{2}.$$

5) Решите уравнение комбинированным методом

$$x^3-(\sqrt{7}+1)x^2+x+7-\sqrt{7}=0.$$

6) Решите уравнение

$$x^3-(\sqrt{9}+1)x^2+x+9-\sqrt{9}=0$$

Найдите значения a,b,c; x,y нелинейных систем двух уравнений с пятью неизвестными, три из которых образуют арифметическую прогрессию.

1) $p=3$, $g=2$ 3) $p=7$, $g=1$ 5) $p=2$, $g=3$

2) $p=4$, $g=1$ 4) $p=1$, $g=8$ 6) $p=9$, $g=1$

7) $p=3$, $g=4$ 8) $p=1$, $g=7$ 9) $p=1$, $g=9$

10) $p=2$, $g=5$