

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Инновационный Евразийский университет

Кафедра «Математика и информационные технологии»

«Допущен к защите»:

_____ заведующий
кафедрой _____ Ж.К. Даниярова

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**На тему: «Методы решения интегро-дифференциальных уравнений типа
Вольтерра»**

по специальности 6М060100 «Математика»

**Выполнил магистрант
группы МТУ(м)-202м**

К.Т. Абдрахманов

**Научный руководитель
К.п.н., доцент.**

Ж.К. Даниярова

Павлодар 2015

PE3IOME

Цель работы – сделать обзор существующих методов решения и показать их на конкретных примерах.

Задачи:

- Изучить учебных материалов
- Описать способы и методы решения задач
- Рассмотреть приложения описанных методов в конкретных примерах интегро-дифференциальных уравнений.

Объектом исследования данной работы является методы решения интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Предмет исследования - уравнения Вольтерра I и II рода.

На защиту выносятся практические применения рассмотренных методов:

- метод свертки
- метод приближений
- метод резольвенты
- решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению
- уравнения Вольтерра с вырожденным ядром
- уравнения Вольтерра с разностным ядром
- интегро-дифференциальные уравнения с разностным ядром

ТҮЙІНДЕМЕ

Жұмыстың мақсаты – Кең көлемде әдіс-тәсілдердің көрсетіп, оларды нақты мысалдарда қолдану.

Міндет:

- Әдеби материалдарды оқу
- Есептердің әдіс-тәсілдерін көрсету
- Аталған әдістер мен келтірілген мысалдарды интегро-дифференциалды теңдеуді шешуде қолдану

Зерттеу нысаны: Интегро-дифференциалды теңдеулердің әдістерін Вольтерра түрінде шешу

Зерттеу пәні: Вольтерра теңдеуінің I және II түрі.

Қорғауға, қарсатырылған тәсілдерді тәжірибеде көрсету

- Аудару әдісі
- Жақындату әдісі
- Резольвент әдісі
- Интегралды теңдеуді дифференциалды теңдеуге келтіру
- Ажаратылған өзекті Вольтерра теңдеуі
- Айырымды өзек Вольтерра теңдеуі
- Айырымды өзек интегро-дифференциалды теңдеуі

ABSTRACT

Purpose - to review existing methods for solving and show them concrete examples.

Objectives:

- Study of teaching materials
- Describe the ways and methods of solving problems
- Consider the application of the methods described in the specific examples of integral-differential equations.

The object of this work is to study methods for the solution of integral-differential equations of Volterra type.

Subject of research - Volterra equations I and type II.

On defense are practical applications of the methods considered:

- method of convolution
- method of approximation
- method of resolvent
- solution of the integral equation by reducing it to a differential alignment
- Volterra equation with degenerate kernel
- Volterra equation with a difference kernel
- integral-differential equations with a difference kernel

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	8
1.	Интегральные уравнения Вольтерра	11
1.1.	Основные понятия и определения	11
1.1.1.	Уравнение Вольтера первого рода	11
1.1.2.	Уравнение Вольтерра второго рода	13
1.1.3.	Решение уравнения Вольтерра. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра.	15
1.1.4.	Частные случаи дифференциального уравнения Вольтерра (голоморфные решения)	17
1.2.	Связь между интегральными и дифференциальными уравнениями	28
2.	Методы решения уравнения Вольтерра	30
2.1.	Метод свертки	30
2.1.1.	Интегральные уравнения Вольтерра типа свертки	30
2.1.2.	Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свертки	34
2.1.3.	Интегро-дифференциальные уравнения	42
2.1.4.	Интегральные уравнения Вольтерра с пределами $x, +\infty$	43
2.1.5.	Обобщенная теорема умножения и некоторые ее применения.	45
2.2.	Метод последовательных приближений	47
2.3.	Метод резольвенты	50
2.4.	Решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению	54
2.5.	Уравнения Вольтерра с вырожденным ядром	55
2.6.	Уравнения Вольтерра с разностным ядром	57
2.7.	Интегро-дифференциальные уравнения с разностным ядром	60
	Заключение	64
	Список использованных источников	65
	Приложения	67

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени интегральные уравнения стали широко применяться для решения многих задач моделирования динамических объектов и систем.

Рассмотрение произвольной непрерывной динамической системы как взаимосвязанной совокупности элементов, выходы и входы которых связаны причинными отношениями, приводит к описанию их в случае системой интегральных уравнений Вольтерра. Таким образом, назначение аппарата одномерных интегральных уравнений применительно к исследованию систем во многом совпадает с назначением обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом задаче Коши соответствуют интегральные уравнения типа Вольтерра. Промежуточное положение занимают интегро-дифференциальные уравнения, для которых могут формироваться как начальная, так и краевая задачи.

Актуальность. Прямым отражением значительного расширения приложений интегральных уравнений Вольтерра является наблюдаемый в последние пять десятилетий быстрый рост интереса к их теории и методам решения со стороны специалистов в области чистой и прикладной математики, а также в многочисленных прикладных научных исследованиях и проектных разработках.

Благодаря достоинствам уравнений Вольтерра при описании многих задач им отдается предпочтение перед дифференциальными уравнениями. К этим достоинствам прежде всего стоит отнести удобство и компактность описания динамических систем. При этом зависимость между выходными величинами и входными воздействиями представлена интегральными операторами, ядра которых полностью определяют внутренние свойства данных математических моделей и одновременно трактуются как реакции системы на типовые входные сигналы, т.е. имеют естественное практическое содержание. Числовая реализация интегральных зависимостей принципиально обладает высокой устойчивостью, что также заставляет во многих случаях отдать им предпочтение.

Точное аналитическое решение уравнений Вольтерра II рода возможно, как и для других классов задач, лишь в некоторых частных случаях, прежде всего при решении линейных уравнений. Классическим методом аналитического решения является нахождение резольвенты.

В качестве методов приближенного аналитического решения может быть использован метод последовательных приближений Пикара или какой-либо другой итерационный метод с улучшенной сходимостью. Кроме того, для этой же цели применяются методы, основанные на представлении искомого решения в виде степенного ряда.

Имеется значительное количество числительных методов решения уравнений Вольтерра II рода. В основе большинства этих методов лежит замена

интеграла квадратурными формулами, прямое применение которых соответствует методу квадратур и некоторым его модификациям.

По аналогии с решением дифференциальных уравнений к интегральным уравнениям с переменными пределами применяется метод Рунге-Кутты, реализация идей которого приводит к различным расчетным выражениям.

Эффективными при частной реализации оказываются итерационные методы, область сходимости которых в случае линейных уравнений довольно широка. Для решения нелинейных уравнений могут быть применены специальные модификации метода последовательных приближений.

Специализированные методы применяются для различных частных видов уравнений Вольтерра II рода, в том числе для уравнений с разностными и вырожденными ядрами и уравнений с особенностями. К таким методам можно отнести распространенный на практике операционный метод, основанный на использовании преобразование Лапласа с последующим обращением. При этом в ряде случаев возможно получение точного или приближенного аналитического решения, а также применение численных реализаций обратного преобразования.

Вопросам теории уравнений Вольтерра II рода (существование решения, единственность, качественные исследования и т.д.) посвящено большое число публикаций, многие из которых освещены в научной литературе.

Цель работы – сделать обзор существующих методов решения и показать их на конкретных примерах.

Авторский подход состоял в том, чтобы показать эти методы решений многих типов линейных и нелинейных уравнений с переменными и постоянными пределами интегрирования.

В связи с целью были поставлены следующие **задачи**:

- Изучить учебных материалов
- Описать способы и методы решения задач
- Рассмотреть приложения описанных методов в конкретных примерах интегро-дифференциальных уравнений.

Объектом исследования данной работы является методы решения интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Предмет исследования - уравнения Вольтерра I и II рода.

На защиту выносятся практические применения рассмотренных методов:

- метод свертки
- метод приближений
- метод резольвенты, решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению
- уравнения Вольтерра с вырожденным ядром
- уравнения Вольтерра с разностным ядром
- интегро-дифференциальные уравнения с разностным ядром

Практическая значимость. В данной диссертации излагаются традиционные методы решения уравнения Вольтерра, такие как: метод свертки,

метод последовательных приближений, метод резольвенты, решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению, уравнения Вольтерра с вырожденным ядром, уравнения Вольтерра с разностным ядром

Диссертация состоит из введения, двух глав основной части и заключения, списка использованных источников и двух приложений. В первой главе два раздела – «Основные понятия и определения», «Связь между интегральными и дифференциальными уравнениями», который первый раздел состоит из четыре подраздела такие как: уравнение Вольтера первого рода, уравнение Вольтерра второго рода, решение уравнение Вольтерра, частные случаи дифференциального уравнения Вольтерра (голоморфные решения), второй раздел представляется тремя подразделами называемыми как: интегро-дифференциальные уравнения, связь между дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра, решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению

Вторая глава: методы решения уравнения Вольтерра, который включает в себя семь разделы: метод свертки, метод приближений, метод резольвенты, решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению, уравнения Вольтерра с вырожденным ядром, уравнения Вольтерра с разностным ядром, интегро-дифференциальные уравнения с разностным ядром.

Неуклонное решение области приложения интегральных уравнений стимулировало интенсивную разработку их теории и особенно приближенных методов решения. Появилось много работ по исследованию свойств различных типов интегральных уравнений, а также возможностей методов решения, При этом методы аналитического решения, основанные на понятии резольвенты, преобразованиях Лапласа, Фурье, Меллина, Бесселя и др.

Для специалистов, не имеющих специального математического образования, но применяющих в работе математические методы, существенное значение имеет возможность ознакомления с методикой описания задач посредством интегральных уравнений, т.е. с соответствующими интегральными методами исследования, анализа, расчета конкретных задач физики, техники, биологии, механики и т.д.

1. Интегральные уравнения Вольтерра

1.1. Основные понятия и определения.

Уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1.1.1)$$

где $f(x)$, $K(x, t)$ – известные функции, $\varphi(t)$ – искомая функция, λ – числовой параметр, называется линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода. Функция $K(x, t)$ называется ядром уравнения Вольтерра. Если $f(x) = 0$, то уравнение (1.1.1) принимает вид

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (1.1.2)$$

И называется однородным уравнением Вольтерра 2-го рода.

Уравнение

$$\int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (1.1.3)$$

где $\varphi(x)$ – искомая функция, называют интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода. Не нарушая общности, можем считать нижний предел в равным нулю, что мы будем предполагать в дальнейшем.

1.1.1. Уравнение Вольтерра 1-го рода.

Пусть имеем интегральное уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), f(0) \quad (1.1.1.4)$$

где $\varphi(t)$ – искомая функция.

Предположим, что $K(x, t)$, $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны при $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$. Дифференцируя обе части (1.4) по x , получим

$$K(x, x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \varphi(t) dt = f'(x) \quad (1.1.1.5)$$

Всякое непрерывное при $0 \leq x \leq a$ решение $\varphi(x)$ уравнения (1.1.1.4) удовлетворяет, очевидно, и уравнению (1.1.1.5). И наоборот, всякое непрерывное при $0 \leq x \leq a$ решения уравнения (1.1.1.5) удовлетворяет также уравнению (1.1.1.4).

Если $K(x, x)$ не обращается в нуль ни в одной точке основного интервала $[0, a]$, то уравнение (1.1.1.5) можно переписать так:

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} - \int_0^x \frac{K'_x(x, t)}{K(x, x)} \varphi(t) dt \quad (1.1.1.6)$$

то есть оно сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода, рассмотренному выше.

Если $K(x, x) \equiv 0$, то иногда бывает полезно еще раз продифференцировать уравнение (1.1.1.5) по x и так далее. [13]

Пример 1. Решить интегральное уравнение первого рода, предварительно сведя их к интегральным уравнениям второго порядка 2-го рода.

$$\int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = \sin x \quad (1.1.1.7)$$

Решение. Дифференцируя обе части уравнения (1.1.7) по x , получим

$$\varphi(x)e^0 + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = \cos x,$$

или

$$\varphi(x) = \cos x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt.$$

(1.1.1.8)

Применяя преобразование Лапласа, так уравнение (1.1.1.8) есть интегральное уравнение 2-го рода, найдем его решение

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p-1} \Phi(p)$$

$$\Phi(p) \left(1 + \frac{1}{p-1} \right) = \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2 + 1} : \frac{p}{p-1}$$

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{p-1}{p}$$

$$\Phi(p) = \frac{p-1}{p^2 + 1}$$

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 + 1} = \cos x - \sin x$$

Функция $\varphi(x) = \cos x - \sin x$ будет решением уравнения вида

$$\varphi(x) = \cos x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

1.1.2. Уравнение Вольтерра второго рода.

Уравнение вида

$$y = \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds + f(x)$$

где $x, s \in [a, b]$, или в операторной форме

$$y = \lambda B y + f$$

называется уравнением Вольтерра 2-го рода.

Пусть ядро $K(x, s)$ непрерывно по совокупности переменных на своей треугольной области определения $\Delta = \{x, s : a \leq s \leq x \leq b\}$ и не равно нулю тождественно, $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Теорема. Уравнение Вольтерра 2-го рода при любом значении λ имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений $y_{n+1} = \lambda B y_n + f$, где $\forall y_0 \in C[a, b]$, $f(x) \in [a, b]$ [15].

Следствие 1. При любом λ однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. Оператор Вольтерра, действующий $C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, не имеет характеристических чисел. Таким образом, оператор Вольтерра является примером вполне непрерывного оператора, не имеющего ни одного характеристического числа.

Метод последовательных приближений для уравнений для уравнения Вольтерра 2-го рода называется методом Пикара и выглядит так: для любого $y_0 \in C[a, b]$ начального приближения определим

$$y_{n+1} = \lambda \int_a^x K(x, s) y_n(s) ds + f(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

или же соответственно

$$y_n = \lambda \int_a^x K(x, s) y_{n-1}(s) ds + f(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

или

$$y_{n+1} = \lambda B y_n + f$$

,

$$y_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(x)$$

причем

$$y_0 = 0$$

$$y = f + \lambda B f + \lambda^2 B^2 f + \dots + \lambda^n B^n f + \dots$$

Пологая , получаем ряд Неймана

Если записать Уравнение Вольтерра 2-го рода операторной форме $y = \lambda A y + f$ $(1 - \lambda A)y = f$

или

, то так как решение существует и единственно при

$$f(x) \quad \lambda$$

любой непрерывной функции и любым , его решение можно представить в виде

$$y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda R_\lambda) f = f + \lambda R_\lambda f$$

,

где R_λ — интегральный оператор с непрерывным по x, s и ядром $R(x, s, \lambda)$, то есть

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, s, \lambda) f(s) ds$$

.

Ядро $R(x, s, \lambda)$ оператора R_λ называется резольвентой.

Функции

$$K_1(x, s) \equiv K(x, s)$$

,

$$K_n(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt, \quad n = 2, 3, \dots$$

называются повторными (итерированными) ядрами. Ряд

$$\underbrace{K_1(x, s)}_{=K(x, s)} + \lambda K_2(x, s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x, s) + \dots$$

сходится равномерно по $x, s \in [a, b]$ при любых λ , в отличие от аналогичного ряда для уравнения Фредгольма, сходимость которого гарантировалась лишь

при $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$, и резольвента $R(x, s, \lambda)$ может быть получена по формуле

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s)$$

Уравнения Вольтерра с ядрами специального вида могут также решаться путем сведения к дифференциальному уравнению, либо с использованием преобразования Лапласа.

1.1.3. Решение уравнения Вольтерра. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра.

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (1.1.3.1)$$

где $K(x, t)$ есть непрерывная функция при $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$, а $f(x)$ непрерывна при $0 \leq x \leq a$.

Будем искать решение интегрального уравнения (1.1.3.1) в виде бесконечного степенного ряда по степеням λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots \quad (1.1.3.2)$$

Подставляя формально этот ряд в (1.1.3.1), получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots = \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) [\varphi_0(t) + \lambda \varphi_1(t) + \lambda^2 \varphi_2(t) + \dots + \lambda^n \varphi_n(t) + \dots] dt. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , найдем

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_0^x K(x,t)f(t)dt \quad , \quad (1.1.3.3)$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_0^x K(x,t) \int_0^x K(t,t_1)f(t_1)dt_1dt$$

.....

Соотношения (1.1.3.3) дают способ последовательного определения функций $\varphi_n(x)$ $f(x)$. Можно показать, что при сделанных предположениях относительно $K(x,t)$ λ и λ полученный таким образом ряд (1.1.3.2) сходится равномерно по x и λ при любом λ $x \in [0, a]$ и его сумма есть единственное решение уравнения (1.1.3.1.).

Далее, из (1.3.3) следует:

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt \quad ,$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \int_0^x K(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_0^x K(x,t) \left[\int_0^x K(t,t_1)f(t_1)dt_1 \right] dt = \\ &= \int_0^x f(t_1)dt_1 \int_{t_1}^x K(x,t_1)K(t,t_1)dt = \int_0^x K_2(x,t_1)f(t_1)dt_1, \end{aligned}$$

где

$$K_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x K(x,t_1)K(t,t_1)dt \quad .$$

Аналогично устанавливается, что вообще

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x,t)f(t)dt \quad (n=1,2,\dots) \quad . \quad (1.1.3.4)$$

$$K_n(x, t)$$

Функции называются повторными или итерированными ядрами. Они, как нетрудно показать, определяются при помощи рекуррентных формул

$$K_1(x, t) = K(x, t)$$

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_n(z, t) dz \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.1.3.5)$$

Используя (1.3.4) и (1.3.5), равенство (1.3.2) можно записать так:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_v \lambda^v \int_0^x K_v(x, t) f(t) dt$$

Функция

$$R(x, t; \lambda) = \sum_v \lambda^v K_{v+1}(x, t) \quad (1.1.3.6)$$

Называется резольвентой (или разрешающим ядром) интегрального уравнения (1.1.3.1). Ряд (1.1.3.6) в случае непрерывного ядра $K(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторные ядра, а также резольвента не зависят от нижнего предела в интегральном уравнении.

$$R(x, t; \lambda)$$

Резольвента удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$R(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_t^x K(x, s) R(s, t; \lambda) ds$$

С помощью резольвенты решение интегрального уравнения (1.1.3.1) запишется в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t) dt \quad (1.1.3.7)$$

1.1.4. Частные случаи дифференциального уравнения Вольтерра (голоморфные решения)

Рассматривается уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y, \varphi(y), \varphi'(y)) dy. \quad (1.1.4.1)$$

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (1.1.4.1) допускает решение $\varphi_0(x)$, которая имеет производную $\varphi'_0(x)$. Предположим, что функция $f(y, \varphi, \varphi')$ аналитическая относительно аргументов φ, φ' в окрестности значений $\varphi_0 = \varphi_0(y)$, то есть имеет место разложение

$$f(y, \varphi_0 + h_0, \varphi'_0 + h_1) = f(y, \varphi_0, \varphi'_0) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_0} h_0 + \frac{\partial}{\partial \varphi'_0} h_1 \right) f^* + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial f^*}{\partial \varphi_0} h_0 + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi'_0} \right)^2 + \dots$$

где $f^* = f(y, \varphi_0, \varphi'_0)$. Далее обозначим $f(y, \varphi_0, \varphi'_0) = A_{00}(y)$, $\frac{\partial f^*}{\partial \varphi_0} = A_{10}(y)$, $\frac{\partial f^*}{\partial \varphi'_0} = A_{11}(y)$, $\frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi_0^2} = A_{20}(y)$, $\frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi_0 \partial \varphi'_0} = A_{21}(y)$. Тогда из формулы при достаточно малых $h_0, h_1, y \in [0, 1]$:

$$f(y, \varphi_0 + h_0, \varphi'_0 + h_1) = A_{00}(y) + A_{10}(y)h_0 + A_{11}(y)h_1 + A_{20}(y)h_0^2 + A_{21}(y)h_0h_1 + \dots \quad (1.1.4.2)$$

В уравнении (1.1.4.1) сделаем замену

$$\varphi'(x) = \varphi_0(x) + v(x)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu \quad (\mu = \lambda_0 - \lambda) \quad (1.1.4.3)$$

где $v(x)$ — новая неизвестная функция.

Для $v(x)$ получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
v(x) = & \mu \int_0^1 K(x, y) \left[A_{00}(y) + A_{10}(y)v(y) + A_{01}(y)v'(y) + \frac{1}{2}(A_{20}(y)v^2 + A_{11}(y)vv' + A_{02}(y)v'^2 + \dots) \right] dy + \\
& + \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) [A_{10}(y)v + A_{01}(y)v' + A_{20}(y)v^2 + A_{11}(y)vv' + A_{02}(y)v'^2 + \dots] dy
\end{aligned}
\tag{1.1.4.4}$$

Ищем решение уравнения (1.1.4.4) в виде ряда

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n v_n(x) \tag{1.1.4.5}$$

Подставляя теперь (1.1.4.5) в (1.1.4.4) и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем следующие линейные интегро-дифференциальные уравнения для коэффициентов ряда (1.1.4.5):

$$v_1(x) = \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) [A_{10}(y)v_1 + A_{01}(y)v_1'(y)] dy + f_1(x) \tag{1.1.4.6_1}$$

$$\begin{aligned}
v_2(x) = & \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) [A_{10}(y)v_2 + A_{01}(y)v_2'(y)] dy + \\
& + \int_0^1 K(x, y) [A_{10}(y)v_1 + A_{01}(y)v_1' + \lambda_0 A_{20}(y)v_1^2 + A_{11}(y)v_1v_1' + A_{02}(y)v_1'^2] dy
\end{aligned}
\tag{1.1.1.4.6_2}$$

$$v_n(x) = \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) [A_{10}(y)v_n + A_{01}(y)v_n'(y)] dy + f_n(x) \tag{1.4.6_n}$$

$$f_1(x) = \int_0^1 K(x, y) A_{00}(y) dy + f_n(x)$$

где

$$f_2 = \int_0^1 K(x, y) [A_{10}(y)v_1 + A_{01}(y)v_1' + \lambda_0 A_{20}(y)v_1^2 + A_{11}(y)v_1v_1' + A_{02}(y)v_1'^2] dy$$

$$f_n(x) \qquad V_1(x), V_2(x), \dots, V_{n-1}(x)$$

выражается через известные коэффициенты
Обратимся теперь к системе уравнений (1.1.4.6_n).

Если $\lambda = \lambda_0$ не является характеристическим числом ядра $K(x, y) A_{10}(y)$, то решения (6_n) определяется формулой (1.1.4.7):

$$V_n = f_n(x) + \frac{\lambda_0}{D(\lambda_0)} \int_0^1 D(x, y, \lambda_0) [A_{10}(y) f_n(y) + A_{01}(y) f'_n(y)] dy, \quad (1.1.4.7)$$

где $D(x, y, \lambda_0)$ – минор и определитель Фредгольма. Применяя формулу (1.1.4.7) последовательно к уравнениям системы (1.1.4.6) можно определить все функции $V_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ и формально построить ряд (1.1.4.5), определяющий функцию $V(x)$.

Далее исследуем сходимость ряда получаемого из (1.1.4.5) путем почленного дифференцирования по x , то есть покажем, что существуют ряды $v(x)$ и $v'(x)$ для достаточно малых μ на сегменте $[0; 1]$.

Пусть на сегменте $[0; 1]$ имеет место неравенство

$$|f_n(x)| < A_0, \quad |f'_n(x)| < A_1,$$

$$\max \left\{ \frac{|A_{10}(y)| \cdot |D_1(x, y, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|}, \frac{|A_{01}(y)| \cdot |D_1(x, y, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|} \right\} < C_0,$$

$$\max \left\{ \frac{|A_{10}(y)| \cdot |D'_1(x, y, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|}, \frac{|A_{01}(y)| \cdot |D'_1(x, y, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|} \right\} < C, \quad (1.1.4.8)$$

$$C_0, C_1 = \text{const} \quad y \in [0, 1]$$

Тогда из (1.1.4.7) находим

$$\begin{aligned} |V_n(x)| &\leq |f_n(x)| + |\lambda_0| \int_0^1 \left| \frac{D(x, y, \lambda_0)}{D(\lambda_0)} \right| |A_{10}(y)| |f_n(y)| + \int_0^1 \frac{|A_{01}(y)| |D(x, y, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|} |f'_n(y)| dy < \\ &< A_0(1 + 2|\lambda_0|C_0) + |\lambda_0|C_0A_1, \end{aligned} \quad (1.1.4.9)$$

$$|V'_n(x)| \leq |f'_n(x)| + |\lambda_0| \int_0^1 \left[\left| \frac{D'_1(x, y, \lambda_0)}{D(\lambda_0)} \right| |A_{10}(y)| \cdot |f_n(y)| + |\lambda_0| \frac{|A_{01}(y)| \cdot |D'_1(x, y, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|} dy \right] dy < \\ < A_1 + |\lambda_0| C_1 A_0 + |\lambda_0| C_1 A_1 = |\lambda_0| C_1 A_0 + A_1 (1 + |\lambda_0| C_1),$$

$$|V'_n(x)| < |\lambda_0| C_1 A_0 + A_1 (1 + |\lambda_0| C_1) \quad , \quad (1.1.4.10)$$

В силу сходимости ряда (1.1.4.2) существуют числа β_0, β_1 такие, что

$$\left| \frac{1}{(j_0 + j_1)!} \int_0^1 K_{\lambda x}^{(l)}(x, y) \frac{\partial^{j_0} f}{\partial u_0^{j_0}} \cdot \frac{\partial^{j_1} f}{\partial v_0^{j_1}} dy \right| < B_l$$

$$(l = 0, 1; \quad 0 \leq y \leq 1)$$

Далее, пусть мы выбрали числа a_1, b_1 такие, что $|v_1(x)| < a_1, |v'_1(x)| < b_1$.
Рассмотрим систему двух алгебраических уравнений (1.1.4.7):

$$F_1(\mu, v, w) = -v + \mu a_1 + (1 + 2|\lambda_0| C_0) B [\mu(v + w + v^2 + vw + \dots) + |\lambda_0|(v^2 + vw + w^2 + \dots)] = 0 \quad ,$$

$$F_2(\mu, v, w) = -w + \mu b_1 + (1 + 2|\lambda_0| C_1) B_1 [\mu(v + w + v^2 + vw + \dots) + |\lambda_0|(v^2 + vw + w^2 + \dots)] = 0 \quad .$$

Ищем решение системы (1.1.4.7) в виде:

$$v = \mu a_1 + \mu^2 a_2 + \dots + \mu^n a_n + \dots \quad (1.1.4.11)$$

$$w = \mu b_1 + \mu^2 b_2 + \dots + \mu^n b_n + \dots \quad . \quad (1.1.4.12)$$

Подставляя (1.1.4.11) и (1.1.4.12) в (1.1.4.7) можно последовательно определить a_n, b_n все n , что

$$|v_n(x)| < a_n \quad |w_n(x)| < b_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad , \quad , \quad .$$

Следовательно, ряды (1.1.4.11) и (1.1.4.12) являются усиливающими рядами для рядов $\sum_{n=0}^{\infty} v(x)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} v'(x)^n$ и область сходимости рядов (1.4.11) и (1.4.12) будет также областью сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} v(x)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} v'(x)^n$. Но $F_1(0,0,0) = F_2(0,0,0) = 0$.

$$\text{Якобиан} \quad \frac{D(F_1, F_2)}{D(v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{при} \quad \mu = v = w = 0 \quad (1.1.4.12)$$

И потому по теории неявных функций ряды имеют конечный круг сходимости. Следовательно, функций $\sum_{n=0}^{\infty} v(x)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} v'(x)^n$ существуют для достаточно малых μ . Тем самым получили теорему.

Теорема: Если уравнение (1.1.4.1) имеет решение при $\lambda = \lambda_0$ и $f(y, u, u')$ аналитическая функция относительно аргументов y, u, u' , $K(x, y)$ – непрерывное ядро с непрерывными производными, то уравнение (1.1.4.1) имеет единственное голоморфное решение относительно параметра в окрестности $\lambda = \lambda_0$, которое определяется по формуле (1.1.4.7).

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y, u(y), u'(y), \dots, u^{(n)}(y)) dy, \quad (1.1.4.13)$$

где $K(x, y)$ – непрерывное ядро, $(0 \leq x, y \leq 1)$, $f(y, v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ – функция (n+1) аргументов.

Функция $K(x, y)$ имеет непрерывные производные по x до n-го порядка включительно, и

$$|K(x, y)| \leq B, |K_x^1(x, y)| \leq B, \dots, |K_{x \dots x}^{(n)}(x, y)| < B, B = \text{Const.}$$

Пусть функция $f(y, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$ – аналитическая функция относительно аргументов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ в окрестности $\alpha_1 = u_0(y), \alpha_2 = u_0'(y), \dots, \alpha_{n+1} = u_0^{(n)}(y)$, кроме

того пусть уравнение (1.1.4.13) при $\lambda = \lambda_0$ допускает решение $u_0(x)$, которое имеет производные по x до n -го порядка включительно.

В этих предположениях изучим характер поведения решения уравнения (1.1.4.13) для конечного значения $\lambda = \lambda_0$. Из аналитичности вытекает, что функция f при достаточно малых значениях $h_i (i = 1, 2, \dots, n)$ и для любого $y \in [0, 1]$ допускает разложение

$$f(y, u_0 + h_0, u_0 + h_1, \dots, u_0 + h_n) = f(y, u_0, u_0', \dots, u_0^{(n)}) + \left(h_0 \frac{\partial}{\partial u_0} + h_1 \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) f^* + \frac{1}{2!} \left(h_0 \frac{\partial}{\partial u_0} + h_1 \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right)^2 f^* + \dots \quad (1.1.4.14)$$

$$f^* = f(y, u_0, u_0', \dots, u_0^{(n)}).$$

где

Рассмотрим следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) [A_{10\dots 0}(y)\phi(y) + A_{01\dots 0}(y)\phi'(y) + \dots A_{0\dots 1}(y)\phi^{(n)}(y)] dy. \quad (1.1.4.15)$$

Справедлива следующая теорема:

$$\lambda = \lambda_0$$

Теорема. Если число λ_0 не является характеристическим числом уравнения (1.1.4.15), то уравнение (1.1.4.13) в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ имеет единственное голоморфное решение относительно параметра λ .

Доказательство. Положив в уравнение (1.4.13) $u(x) = u_0(x) + v(x)$ и $\lambda = \lambda_0 + \mu$ (здесь $u_0(x)$ – решение уравнения (1.1.4.13), соответствующее значению параметра λ_0) и принимая во внимание разложение (1.1.4.14), приходим к следующему уравнению для определения функции $v(x)$:

$$\begin{aligned}
v(x) = & \mu \int_0^1 K(x, y) \left[f(y_1, u_0, \dots, u_0^{(n)}) + \left(v \frac{\partial}{\partial u_0} + v' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) f^\bullet + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2!} \left(v \frac{\partial}{\partial u_0} + v' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v^{(a)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right)^2 f^\bullet + \dots \right] dy.
\end{aligned}
\tag{1.1.4.16}$$

Ищем решение уравнения (1.4.16) в виде ряда

$$v(x) = \sum_{n=1}^k \mu^n v_n(x)$$

.

$$\tag{1.1.4.17}$$

Подставляя ряд (1.1.4.17) в уравнение (1.1.4.16) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях приходим к системе линейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
V_i(x) = & \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) \left(v_1(x) \frac{\partial}{\partial u_0} + v_1' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v_1^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) f^\bullet dy + f_i(x) \\
& n = 1, 2, \dots
\end{aligned}
\tag{1.1.4.18}$$

$$f_1(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy.$$

где

И вообще

$$\begin{aligned}
f_n(x) = & \int_0^1 K(x, y) \left[\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(v_k \frac{\partial}{\partial u_0} + v_k' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v_k^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) \right)^m f^\bullet \right] dy + \\
& + \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) \left[\sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(v_k \frac{\partial}{\partial u_0} + \dots + v_k^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) \right)^m f^\bullet \right] dy.
\end{aligned}
\tag{1.1.4.19}$$

Обозначим

$$A_n = \int_0^1 K(x, y) \left[\sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(v_k \frac{\partial}{\partial u_0} + v_k' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v_k^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) \right)^m f^\bullet \right] dy$$

$$B_n = \int_0^1 K(x, y) \left[\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(v_k \frac{\partial}{\partial u_0} + \dots + v_k^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) \right)^m f^* \right] dy$$

Из вышеизложенного мы видим, что A_n должен являться коэффициентом μ^n при правой части выражения:

$$v(x) = \int_0^1 K(x, y) \left[\left(v \frac{\partial}{\partial u_0} + v' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) f^* + \frac{1}{2!} \left(v \frac{\partial}{\partial u_0} + v' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots \right)^2 f^* \right] dy,$$

где $v(x)$ представляется в виде (1.1.4.17) без главного члена n -го уравнения системы (1.1.4.18).

Заметим, что для того, чтобы получить коэффициент при μ^n , необходимо:
а) правую часть (1.1.4.20) взять в виде:

$$\int_0^1 K(x, y) \left[\left(v \frac{\partial}{\partial u_0} + v' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) f^* + \frac{1}{n!} \left(v \frac{\partial}{\partial u_0} + v' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots \right)^n f^* \right] dy$$

ибо если взять

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(v \frac{\partial}{\partial u_0} + v' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right)^{n+1} f^*,$$

то уже

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(v_1 \frac{\partial}{\partial u_0} + v_1' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v_1^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right)^{n+1} f^*$$

$$\mu^{n+1}.$$

является коэффициентом при

$$v(x) = \mu v_1(x) + \dots + \mu^{n-1} v_{n-1}(x),$$

б) Ряд (1.1.4.17) взять в виде т.к. функции $\mu^n v_n(x) = \mu^n v_n'(x), \dots, \mu^n v_n^{(n)}(x)$

дают коэффициент при только в первом члене выражения (1.4.20), т.е. дают

$$\int_0^1 K(x, y) \left[\left(v_n \frac{\partial}{\partial u_0} + v_n' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v_n^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) f^* \right] dy,$$

а это является главным членом n -го уравнения системы (6) и в A_n не входит.
Рассмотрим выражение

$$\int_0^1 K(x, y) \left[\left(v_1 \frac{\partial}{\partial u_0} + v_1' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots + v_1^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right) + \dots + \left(v_{n-1} \frac{\partial}{\partial u_0} + v_{n-1}' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots \right)^n \right] f^* dy =$$

$$\int_0^1 K(x, y) \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{n-1}} \frac{p!}{m_1! m_2! \dots m_{n-1}!} \left[\left(v_1 \frac{\partial}{\partial u_0} + \dots + v_1^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_0^{(n)}} \right)^{m_1} + \dots + \left(v_{n-1} \frac{\partial}{\partial u_0} + v_{n-1}' \frac{\partial}{\partial u_0'} + \dots \right)^{m_{n-1}} \right] f^* dy$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} = p.$$

Причем

Очевидно, что это выражение является коэффициентом при $\mu^{m_1 + 2m_2 + \dots + (n-1)m_{n-1}}$,
но в A_n должны входить коэффициенты при μ_n , следовательно, в A_n войдут только те члены выражения (1.4.20), которые удовлетворяют условию

$$m_1 + 2m_2 + \dots + (n-1)m_{n-1} = n, \quad \sum (m, k) = n, \\ \text{т.е.}$$

что и требовалось доказать. Аналогично можно показать справедливость B_n для любого n .

Введем обозначения:

$$A_{1,0,\dots,0}(y) = \frac{\partial f^*}{\partial u_0}; \quad \dots \quad A_{0,1,0,\dots,0}(y) = \frac{\partial f^*}{\partial u_0'}; \quad \dots \quad A_{0,0,\dots,0,1}(y) = \frac{\partial f^*}{\partial u_0^{(n)}}.$$

Тогда система (1.1.4.18) примет вид:

$$v_1(x) = \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) [A_{10...0}(y)v_1(y) + A_{01...0}(y)v_1(y) + \dots + A_{0...1}(y)v_1^{(n)}(y)] dy + f_1(x) \quad (1.1.4.21)$$

$$\lambda = \lambda_0$$

Если λ_0 не является характеристическим числом, то решение уравнения (1.1.4.21) определяется функцией

$$v_1(x) = f_1(x) + \frac{\lambda_0}{D(\lambda_0)} \int_0^1 D(x, s, \lambda_0) [A_{10...0}(s)f_1(s) + A_{01...0}(s)f_1'(s) + \dots + A_{0...1}(s)f_1^{(n)}(s)] ds \quad (1.1.4.22)$$

$$(i = \overline{1, 0, 0}).$$

Применяя формулу (1.1.4.21) последовательно к уравнениям системы $v_i(x) (i = \overline{1, \infty})$ (1.1.4.22), можно определить все функции $v_i(x)$ и формально построить ряд (1.1.4.17), определяющий функцию

Далее исследуем сходимость ряда (1.4.17) и рядов, получаемых из (1.1.4.17) путем почленного дифференцирования по x , т.е. покажем, что $v(x), v'(x), v^{(n)}(x)$ существуют ряды для достаточно малых μ на сегменте $[0, 1]$

Пусть на сегменте $[0, 1]$ имеют место неравенства:

$$|f(x)| < A_0, \quad |f'(x)| < A_1, \quad \dots, \quad |f^{(n)}(x)| < A_n,$$

$$\max \left\{ \frac{|A_{1,0...0}(s)| |D_1(x, s, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|}, \frac{|A_{0,1...0}(s)| |D_1(x, s, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|}, \frac{|A_{1,0...0}(s)| \cdot |D_{1x}'(x, s, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|}, \frac{|A_{0,1...0}(s)| \cdot |D_{1x}^{(k)}(x, s, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|} \right\} = C_k,$$

$$C_k = const, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\max \left\{ \frac{|A_{1,0...0}(s)| \cdot |D_1(x, s, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|}, \frac{|A_{0,1...0}(s)| \cdot |D_1(x, s, \lambda_0)|}{|D(\lambda_0)|} \right\} = C_0 = const.$$

Тогда из (1.1.4.22) находим

$$\begin{aligned}
|V_1 x| &\leq |f_i(x)| + |\lambda_0| \int_0^1 \left| \frac{D_1(x, s, \lambda_0)}{D(\lambda_0)} \right| \cdot |A_{10...0}(s)| \cdot |f_i(x)| + |\lambda_0| \frac{|A_{010...0}(y)| \cdot \|D'_{1x}(x, s, \lambda_0)\|}{|D(\lambda_0)|} |f'_i| \Bigg] ds + \\
&+ \dots + |\lambda_0| \int_0^1 \left| \frac{D_{1k}^{(n)}(x, s, \lambda_0)}{D(\lambda_0)} \right| \cdot |A_{0...01}(s)| \cdot |f_i^{(n)}(x)| \Bigg] ds \leq
\end{aligned} \tag{1.1.4.23}$$

$$\leq |\lambda_0| C_k (A_0 + A_1 + \dots + A_{k-1}) + A_k (1 + |\lambda_0| C_{1k}), \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Аналогично получаем

$$|v_1^{(k)}(x)| \leq |\lambda_0| C_k (A_0 + A_1 + \dots + A_{k-1}) + A_k (1 + |\lambda_0| C_k), \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

В силу сходимости ряда (1.1.4.13) существует числа $B_0, B_1, \dots, B_n$ такие, что

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{(j_0 + j_1 + \dots + j_n)!} \int_0^1 K_{kx...x}^{(k)}(x, y) \frac{\partial^{j_0} f}{\partial u_0^{j_0}} \cdot \frac{\partial^{j_1} f_1}{\partial u_0^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_k} f_k}{\partial u_0^{j_k}} dy \right| < B_k \\
&(k = 1, 2, \dots, n),
\end{aligned} \tag{1.1.4.24}$$

Далее, пусть мы выбрали числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ такие, что

$$|v_1(x)| < a_0, \quad |v_1'(x)| < a_1, \quad \dots, \quad |v_1^{(n)}(x)| < a_n.$$

Рассмотри систему $(n+1)$ алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} F(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv -u_0 + \mu a_0 + \left[|\lambda_0| C_1 B_0 + (1 + |\lambda_0| C_1) B_1 + \right. \\ \left. + |\lambda_0| \sum_{i=2}^n B_i \right] \left\{ \mu \sum_{k=1}^{\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n)^{(k)} + |\lambda_0| \sum_{k=2}^{\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n)^{(k)} \right\}, \\ \dots\dots\dots \\ F_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \equiv -u_n + \mu a_n + \left[|\lambda_0| C_n \sum_{i=0}^{n-1} B_i + (1 + |\lambda_0| C_n) B_n \right] \left\{ \mu \sum_{k=1}^{\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n)^{(k)} + \right. \\ \left. + |\lambda_0| \sum_{k=2}^{\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n)^{(k)} \right\} \end{array} \right. \quad (1.1.4.25)$$

Функции $F_0, F_1, \dots, F_n$ непрерывны и имеют непрерывные производные по всем переменным, и якобиан этой системы отличен от нуля в нулевой точке.

$$(\mu = u_0 = u_1 = \dots = u_n = 0)$$

$$J = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)} \neq 0.$$

Следовательно, по теореме существования неявной функции эта система однозначно разрешима относительно неизвестных функций.

Будем искать решение системы (1.1.4.25) в виде рядов

$$U_k = \mu U_{k_1} + \mu^2 U_{k_2} + \dots + \mu^n U_{k_n} + \dots \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.1.4.26)$$

Подставляя ряды (1.1.4.26) в (1.1.4.25) и сравнивая коэффициенты из одинаковых степеней μ , определим все функции

$$U_{0k}, U_{(k)}, \dots, U_{nk}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots).$$

Легко видеть, что

$$u_{01} = a_0, \quad u_{1k} = a_1, \quad \dots, \quad u_{n1} = a_n$$

И вообще

$$u_{0n} = \left[(1 + |\lambda_0|C_0)B_0 + |\lambda_0|C_0 \sum_{i=1}^n B_i \right] \left\{ \left[\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + u_{nk}) \right)^m \right]' + \right. \\ \left. + |\lambda_0| \left[\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + \dots + u_{nk}) \right)^m \right]' \right\},$$

$$u_{1n} = \left[|\lambda_0|C_1B_0 + (1 + |\lambda_0|C_1)B_1 + |\lambda|C_1 \sum_{i=2}^n B_i \right] \left\{ \left[\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + u_{nk}) \right)^m \right]' + \right. \\ \left. + |\lambda_0| \left[\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + \dots + u_{nk}) \right)^m \right]' \right\},$$

..... (1.1.4.27)

$$u_{nn} = \left[(1 + |\lambda_0|C_n)B_n + |\lambda|C_n \sum_{i=1}^{n-1} B_i \right] \left\{ \left[\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + u_{nk}) \right)^m \right]' + \right. \\ \left. + |\lambda_0| \left[\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + \dots + u_{nk}) \right)^m \right]' \right\}.$$

Из вышеизложенного ясно, что

$$|v_1(x)| < u_{01}, \quad |v'_1(x)| < u_{11}, \quad \dots, \quad |v_1^{(n)}(x)| < u_{n1}$$

$0 \leq x \leq 1$
для .

Методом математической индукции покажем, что для любого целого положительного числа n справедливы неравенства:

$$|v_1(x)| < u_{0k}, \quad |v'_k(x)| < u_{1k}, \quad \dots, \quad |v_k^{(n)}(x)| < u_{nk}. \quad (1.1.4.28)$$

В самом деле, принимая во внимание (1.1.4.24), мы имеем

$$|f_n^{(i)}(x)| \leq \left\{ \left[\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + u_{nk}) \right)^m \right] + |\lambda_0| \left[\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + \dots + u_{nk}) \right)^m \right] \right\}, \quad (1.1.4.29)$$

Принимая во внимание (1.1.4.29) и сравнивая (1.1.4.23) с (1.1.4.26) и (1.1.4.27), получим искомое неравенство (1.1.4.28). Следовательно, ряды

(1.1.4.25) являются усиливающими рядами для $v(x), v'(x), \dots, v^{(n)}(x)$, и область сходимости рядов (1.1.4.25) будет также областью сходимости рядов $v(x), v'(x), \dots, v^{(n)}(x)$

. Поэтому уравнение (1.1.4.16) или, что то же самое, уравнение (1.1.4.15), имеют одинаковое голоморфное семейство решения, к которому

$u_0(x)$.
принадлежит и решение Теорема полностью доказана.

1.2. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями.

Решение линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x) \quad (1.2.1)$$

С непрерывными коэффициентами $a_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, n$ () при начальных условиях

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{n-1}(0) = C_{n-1}, \quad (1.2.2)$$

может быть сведено к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Покажем это на примере дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = F(x) \quad (1.2.1')$$

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1 \quad (1.2.2')$$

Полагаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x) \quad (1.2.3)$$

Отсюда, принимая во внимание начальные условия (2'), последовательно находим

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + C_1, \quad y = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + C_1 x + C_0 \quad (1.2.4)$$

При этом мы использовали формулу

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \dots \int_0^x dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(x) dz$$

Учитывая (3) и (4), дифференциальное уравнение (1') запишем так:

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \int_0^x a_1 \varphi(t) dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t) \varphi(t) dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = \\ = F(x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \int_0^x a_1 \varphi(t) dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \varphi(t) dt = \\ = F(x) - C_1 x a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Полагая

$$K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \quad (1.2.6)$$

$$f(x) = F(x) - C_1 x a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \quad (1.2.7)$$

приведем (1.1.1) к виду

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + f(x) \quad (1.2.8)$$

то есть приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Существование единственного решения уравнения (1.2.8) следует из существования и единственности решения задачи Коши (1.2.1') – (1.2.2') для линейного дифференциального уравнения с непрерывными коэффициентами в окрестности точки $x=0$.

И на оборот, решая интегральное уравнение (1.2.8) с K и f , определенными по формулам (1.2.6) и (1.2.7), и подставляя выражение, полученное для $\varphi(x)$, в последнее из уравнений (1.2.4), мы получим естественное решение уравнения (1.2.1'), удовлетворяющее начальным условиям (1.2.2').

2. Методы решения уравнения Вольтерра

Прежде, чем рассмотреть некоторые методы решения интегральных уравнений, следует заметить, что для них, как и для дифференциальных уравнений не всегда удастся получить точное аналитическое решение. Выбор метода решения зависит от вида уравнения. Здесь будут рассмотрены несколько методов для решения линейных интегральных уравнений.

2.1. Метод свертки.

2.1.1. Интегральные уравнения Вольтерра типа свертки.

Метод преобразования Лапласа может быть применён к интегральному уравнению, если входящий в него интеграл имеет вид свёртки двух функций. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt \quad (2.1.1.1)$$

ядро которого зависит лишь от разности $(x-t)$.

То есть, когда ядро является функцией разности двух переменных:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-s)\varphi(s)ds$$

Будем называть уравнение (2.1.1.1) интегральным уравнением типа свертки.

Пусть $f(x)$ и $K(x)$ – достаточно гладкие функции, растущие при $x \rightarrow \infty$ не быстрее показательной функции, так что

$$|f(x)| \leq M_1 e^{s_1 x} \quad |K(x)| \leq M_2 e^{s_2 x} \quad (2.1.1.2)$$

Можно показать, что в этом случае и функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять оценке типа (2.1.1.2):

$$|\varphi(x)| \leq M_3 e^{s_3 x}$$

Следовательно, может быть найдено изображение по Лапласу функций $f(x)$, $K(x)$ и $\varphi(x)$ (оно будет определено в полуплоскости $\text{Re } p = s > \max\{s_1, s_2, s_3\}$).

Пусть

$$f(x) = F(p), \quad \varphi(x) = \Phi(p), \quad K(x) = \tilde{K}(p).$$

Применяя к обеим частям уравнения (2.1.1.1) преобразование Лапласа и используя теорему умножения, найдем

$$\Phi(p) = F(p) + \tilde{K}(p)\Phi(p).$$

Отсюда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(p)} \quad (\tilde{K}(p) \neq 1)$$

Оригинал $\varphi(x)$ для $\Phi(p)$ будет решением интегрального уравнения

Теорема о свертке может быть использована также для решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \varphi(x-t)\varphi(t)dt, \quad (2.1.1.3)$$

Пусть

$$\varphi(x) = \Phi(p), \quad f(x) = F(p).$$

Тогда в силу уравнения (2.1.1.3)

$$\Phi(p) = F(p) + \lambda \Phi^2(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda F(p)}}{2\lambda}.$$

Пример2. Решить интегральное уравнение.

$$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt = \sin x \quad (2.1.1.4)$$

Решение. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (2.1.1.4), получим

$$\frac{p}{p^2+1}\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1},$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{\frac{1}{p^2+1}}{\frac{p}{p^2+1}} = \frac{1}{p} = 1.$$

Тогда функция $\varphi(x) = 1$ есть решение уравнения (2.1.1.4).

Пример 3.

$$\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)dt = \sin x$$

Решение.

$$\int_0^x e^{2x-2t}\varphi(t)dt = \sin x$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-2}\Phi(p) &= \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow \Phi(p) = \frac{\frac{1}{p^2+1}}{\frac{1}{p-2}} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p-2}{1} = \frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2+1} = \\ &= \cos x - 2\sin x \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \cos x - 2 \sin x$$

Ответ:

Пример 4.

$$\int_0^x (x^2 - t^2) \varphi(t) dt = \frac{x^3}{3}$$

Решение. Чтобы решить данное уравнение надо преобразовать подынтегральное выражение тогда будем иметь

$$x^2 - t^2 = x^2 - 2xt + t^2 + 2xt - 2t^2 = (x-t)^2 + 2t(x-t)$$

Поэтому

$$\frac{x^3}{3} = \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt + \int_0^x 2t(x-t) \varphi(t) dt$$

Переходя к изображениям и применяя теорему умножения и теорему дифференцирования изображения, в силу которой $t\varphi(t) = -\Phi'(p)$, получим

$$\frac{2}{p^2} = \frac{2}{p^3} \Phi(p) - \frac{2}{p^2} \Phi'(p)$$

или

$$\Phi'(p) = \frac{1}{p} \Phi(p) - \frac{1}{p^2}$$

Решая это дифференциальное уравнение, находим

$$\Phi(p) = C \cdot p + \frac{1}{p}$$

В силу того, что $\Phi(p)$ есть функция-изображение, $\Phi(p)$ должна стремиться к 0 при $p \rightarrow \infty$, так что $C = 0$ и значит,

$$\Phi(p) = \frac{1}{2p},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}$$

откуда

Пример 5.

$$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt = \sin x.$$

Решение.

$$\frac{p}{p^2+1}\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} = 1$$

$$\varphi(x) = 1.$$

Пример 6.

$$\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)dt = \sin x.$$

Решение.

$$\frac{1}{p-2}\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p-2}{1} = \frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2+1} = \cos x - 2 \sin x.$$

$$\varphi(x) = \cos x - 2 \sin x.$$

2.1.2. Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свертки.

Преобразование Лапласа может быть использовано при решении систем интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^s \int_0^x K_{ij}(x-t) \varphi_j(t) dt \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, s \\ (\quad \quad \quad) \end{matrix}, \quad (2.1.2.1)$$

где $K_{ij}(x)$, $f_i(x)$ – известные непрерывные функции, имеющие изображение по Лапласу.

Применяя к обеим частям (2.1.1.2.1) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{j=1}^s \tilde{K}_{ij}(p) \Phi_j(p) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, s \\ (\quad \quad \quad) \end{matrix}. \quad (2.1.2.2)$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно $\Phi_i(p)$. Решая ее, найдем $\Phi_j(p)$, оригиналы для которых и будут решениями исходной системы интегральных уравнений (2.1.2.1).

Пример 7. Решить следующие системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sin x + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \int_0^x \varphi_1(t) dt. \end{cases} \quad (2.1.2.3)$$

Решение: Переходя к изображениям и используя теорему об изображении свертки, получим

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{2}{p^2+1} + \frac{1}{p}\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p}\Phi_1(p). \end{cases}$$

Подставляя выражение $\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p}\Phi_2(p)$ в место $\Phi_1(p)$ находим $\Phi_2(p)$, тогда получим

$$\Phi_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p}\Phi_2(p) \right),$$

$$\Phi_2(p) \left[1 + \frac{1}{p^2} \right] = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p(p^2+1)},$$

$$\Phi_2(p) \cdot \frac{p^2+1}{p^2} = \frac{p^2+1-p^2-1}{p(p^2+1)} = 0$$

$\Phi_2(p) = 0$ от суда оригинал функции $\varphi_2(x) = 0$. Далее найденное значение $\Phi_2(p)$ $\Phi_1(p)$ подставив в место находим

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow \varphi_1(x) = \sin x$$

Функции $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$ дают решение исходной системы интегральных уравнений (2.1.2.3).

Ответ: $\varphi_1(x) = \sin x$ $\varphi_2(x) = 0$,

Пример 8.

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{2x} + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi_1(t) dt. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p} \Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-2} \Phi_1(p). \end{cases}$$

Подставим выражение $\frac{1}{p-2} + \frac{1}{p} \Phi_2(p)$ в $\Phi_1(p)$ и находим $\Phi_2(p)$

$$\Phi_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-2} \left(\frac{1}{p-2} + \frac{1}{p} \Phi_2(p) \right),$$

$$\Phi_2(p) \left[1 + \frac{1}{p(p-2)} \right] = \frac{1}{p} - \frac{1}{(p-2)^2},$$

$$\Phi_2(p) \cdot \frac{p(p-2)+1}{p(p-2)} = \frac{(p-2)^2 - p}{p(p-2)^2},$$

$$\Phi_2(p) = \frac{p^2 - 4p + 4 - p}{p(p-2)^2} \cdot \frac{p(p-2)}{p^2 - 2p + 1} = \frac{p^2 - 5p + 4}{(p-2)(p-1)^2} =$$

$$= \frac{(p-1)(p-4)}{(p-2)(p-1)^2} = \frac{p-4}{(p-1)(p-2)} = \frac{3p-6-2p+2}{(p-1)(p-2)} = \frac{3(p-2)-2(p-1)}{(p-1)(p-2)} =$$

$$\frac{3(p-2)}{(p-1)(p-2)} - \frac{2(p-1)}{(p-1)(p-2)} = \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p-2}.$$

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{p-4}{p(p-1)(p-2)} = \frac{p^2 - p + p - 4}{p(p-1)(p-2)} = \frac{(p-2)(p+2)}{p(p-1)(p-2)} =$$

$$\frac{p+2}{p(p-1)} = \frac{3p-2p+2}{p(p-1)} = \frac{3p}{p(p-1)} - \frac{2(p-1)}{p(p-1)} = \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p}$$

Оригиналы для $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$ равны соответственно

$$\varphi_1(x) = 3e^x - 2,$$

$$\varphi_2(x) = 3e^x - 2e^{2x}.$$

Пример 9.

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int_0^x \varphi_1(t) dt - \int_0^x e^{x-t} \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p} \Phi_1(p) - \frac{1}{p-1} \Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \Phi_1(p) + \frac{1}{p} \Phi_2(p). \end{cases}$$

$$\Phi_2(p) = \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p} \Phi_1(p) - \Phi_1(p) \right) (p-1)$$

$$\left(\frac{p-1}{p-1} + \frac{p-1}{p} \Phi_1(p) - (p-1) \Phi_1(p) \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) = -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \Phi_1(p)$$

$$1 + \frac{p-1}{p} \Phi_1(p) - (p-1) \Phi_1(p) - \frac{1}{p} - \frac{p-1}{p^2} \Phi_1(p) + \frac{p-1}{p} \Phi_1(p) = -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \Phi_1(p)$$

$$\Phi_1(p) \left[\frac{2p-2}{p} - p + 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} \right] = -\frac{1}{p^2} - 1 + \frac{1}{p}$$

$$\Phi_1(p) \left[3 - \frac{3}{p} - p + \frac{2}{p^2} \right] = \frac{-1 - p^2 + p}{p^2}$$

$$\Phi_1(p) = \frac{-p^2 + p - 1}{p^2} \cdot \frac{p^2}{-p^3 + 3p^2 - 3p + 2} = \frac{p^2 - p + 1}{p^3 - 3p^2 + 3p - 2} = \frac{p^2 - p + 1}{p^3 - 3p^2 + 3p - 1 - 1} =$$

$$\frac{p^2 - p + 1}{(p-1)^3 - 1^3} = \frac{p^2 - p + 1}{(p-1-1)((p-1)^2 + (p-1) + 1)} = \frac{p^2 - p + 1}{(p-2)(p^2 - 2p + 1 + p - 1 + 1)} = \frac{1}{p-2}$$

$$\Phi_2(p) = 1 + \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{p-2} - (p-2) \cdot \frac{1}{p-2} = \frac{p^2 - 2p + p - 1 - p^2 + p}{p(p-2)} =$$

$$\frac{-1}{p(p-2)} = \frac{p-2-p}{2p(p-2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-2} \right)$$

При полученных значениях можно сказать что оригиналами функции $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$ является соответственно

$$\varphi_1(x) = e^{2x} \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{2x})$$

Пример 10.

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int_0^x \varphi_1(t) dt + 4 \int_0^x e^{x-t} \varphi_2(t) dt \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{t-x} \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \Phi_1(p) + \frac{4}{p-1} \Phi_2(p) \\ \Phi_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \Phi_1(p) + \frac{1}{p} \Phi_2(p) \end{cases},$$

$$\Phi_2(p) = \left[\Phi_1(p) - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p} \Phi_1(p) \right] \cdot \frac{p-1}{4},$$

$$\Phi_2(p) = \frac{p-1}{4} \Phi_1(p) - \frac{1}{4} + \frac{p-1}{4p} \Phi_1(p),$$

$$\Phi_2(p) = \frac{p^2 - p + p - 1}{4p} \Phi_1(p) - \frac{1}{4}.$$

Далее полученное выражение подставляем ниже стоящему уравнению в место $\Phi_2(p)$.

. Тогда будем записывать

$$\frac{p^2-1}{4p} \Phi_1(p) - \frac{1}{4} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \Phi_1(p) + \frac{1}{p} \left[\frac{p^2-1}{4p} \Phi_1(p) - \frac{1}{4} \right],$$

$$\frac{p^2-1}{4p} \Phi_1(p) + \frac{1}{p+1} \Phi_1(p) - \frac{p^2-1}{4p^2} \Phi_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{4p} + \frac{1}{4},$$

$$\Phi_1(p) \frac{p^4 + p^3 - p^2 - p + 4p^2 - p^3 - p^2 + p + 1}{4p^2(p+1)} = \frac{p+3}{4p},$$

$$\Phi_1(p) = \frac{p+3}{4p} \cdot \frac{4p^2(p+1)}{p^4 + 2p^2 + 1} = \frac{(p^2 + 3p + p + 3)p}{p^4 + 2p^2 + 1} = \frac{p^3 + 4p^2 + 3p}{(p^2 + 1)^2} =$$

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{2(p^2-1)}{(p^2+1)^2} + \frac{p}{p^2+1}$$

Тем самым записываем оригинал функции полученного выражения в виде

$$\varphi_1(x) = x \sin x + 2 \sin x + 2x \cos x + \cos x = (x+2) \sin x + (2x+1) \cos x$$

Далее подставляя полученную функцию изображения $\Phi_1(p)$ в $\Phi_2(p)$, находим

$$\begin{aligned} \Phi_2(p) &= \frac{p^2-1}{4p} \cdot \frac{p(p^2+4p+3)}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{4} = \frac{(p^2-1)(p^2+4p+3)}{4(p^2+1)^2} - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{p^4+4p^3+3p^2-4p-3-p^4-2p^2-1}{4(p^2+1)^2} = \frac{4p^3-4p-4}{4(p^2+1)^2} = \frac{p^3-p-1}{(p^2+1)^2} \end{aligned}$$

За тем полученное выражение разложим на слагаемые так, чтобы из каждых слагаемых не трудно было найти оригиналы функций. Тогда

$$\frac{p^3-p-1}{(p^2+1)^2} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{2p}{(p^2+1)^2}$$

И так получаем оригиналы функции в виде

$$\varphi_2(x) = \cos x + \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{2} \sin x - x \sin x = \frac{2+x}{2} \cos x - \frac{1+2x}{2} \sin x$$

Пример 11.

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_2(t) dt \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \varphi_1(t) dt \\ \varphi_3(x) = \sin x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt \end{cases},$$

Решение.

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \Phi_2(p) \\ \Phi_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \Phi_1(p) \\ \Phi_3(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} \Phi_1(p) \end{cases},$$

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \Phi_1(p) \right),$$

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \Phi_1(p),$$

$$\Phi_1(p) \left[1 + \frac{1}{p^2} \right] = \frac{2}{p^2},$$

$$\Phi_1(p) = \frac{2}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2+1} = \frac{2}{p^2+1}.$$

$$\Phi_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{p^2+1} = \frac{p^2-1}{p(p^2+1)} = \frac{2p^2-p^2-1}{p(p^2+1)} = \frac{2p}{p^2+1} - \frac{1}{p}.$$

$$\Phi_3(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2p^2} \cdot \frac{2}{p^2+1} = \frac{p^2+1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2}.$$

Полученные изображения функции в оригиналы функции

$$\varphi_1(x) = 2 \sin x$$

$$\varphi_2(x) = 2 \cos x - 1$$

$$\varphi_3(x) = x$$

Пример 12.

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - \int_0^x \varphi_2(t) dt \\ \varphi_2(x) = \cos x - 1 + \int_0^x \varphi_3(t) dt \\ \varphi_3(x) = \cos x + \int_0^x \varphi_1(t) dt \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \Phi_2(p) \\ \Phi_2(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \Phi_3(p) \\ \Phi_3(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p} \Phi_1(p) \end{cases}$$

$$\Phi_2(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p} \Phi_1(p) \right)$$

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} \Phi_1(p) \right)$$

$$\Phi_1(p) + \frac{1}{p^3} \Phi_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(p^2+1)}$$

$$\Phi_1(p) \left[1 + \frac{1}{p^3} \right] = \frac{p^3 + p - p^2 + p^2 + 1 - p}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{p^3 + 1}{p^2(p^2 + 1)}$$

$$\Phi_1(p) = \frac{p^3 + 1}{p^2(p^2 + 1)} \cdot \frac{p^3}{p^3 + 1} = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\frac{1}{p} \Phi_2(p) = \frac{1}{p} - \Phi_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p^2 + 1 - p^2}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$$

$$\Phi_2(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} \cdot p = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\Phi_3(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}$$

Решение системы интегрального уравнения имеет вид

$$\varphi_1(x) = \cos x$$

$$\varphi_2(x) = \sin x$$

$$\varphi_3(x) = \cos x + \sin x$$

2.1.3 Интегро-дифференциальные уравнения.

Пусть имеем линейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1 \varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n \varphi(x) + \sum_{m=0}^s K_m(x-t) \varphi^{(m)}(t) dt = f(x) \quad (2.1.3.1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – постоянные, $f(x)$, $K_m(x)$ ($m=1, 2, \dots, s$) – известные функции, $\varphi(x)$ – искомая функция.

Для искомой функции $\varphi(x)$ ставятся начальные условия вида

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)} \quad (2.1.3.2)$$

Пусть функции $f(x)$ и $K_m(x)$ являются функциями оригиналами и

$$f(x) = F(p), K_m(x) = \tilde{K}_m(p) \quad (m = 0, 2, \dots, s)$$

Тогда функция $\varphi(x)$ будет иметь изображение по Лапласу $\varphi(x) = \Phi(p)$.
Применяя к обеим частям (2.1.3.1) преобразование Лапласа и используя теорему об изображении производной и теорему умножения, придем к уравнению

$$\Phi(p) \left[p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{m=0}^s \tilde{K}_m(p) p^m \right] = A(p), \quad (2.1.3.3)$$

где $A(p)$ – некоторая известная функция от p . Из (2.1.3.3) находим $\Phi(p)$ – операторное решение задачи (2.1.3.1)-(2.1.3.2). Функция $\varphi(x) = \Phi(p)$ будет решением интегро-дифференциального уравнения (2.1.3.1), удовлетворяющим начальным условиям (2.1.3.3).

Пример 13. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi'(t) dt = e^{2x}, \quad (2.1.3.4)$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \quad (2.1.3.5)$$

Решение. Пусть $\varphi(x) = \Phi(p)$. В силу (2.1.3.5)

$$\varphi'(x) = p\Phi(p), \quad \varphi''(x) = p^2\Phi(p).$$

Поэтому после применения преобразования Лапласа уравнение (2.1.3.4) примет вид

$$p^2\Phi(p) + \frac{p}{p-2}\Phi(p) = \frac{1}{p-2},$$

$$\Phi(p) \frac{p(p-1)^2}{p-2} = \frac{1}{p-2}.$$

(2.1.3.6)

Из (2.1.3.6) находим

$$\Phi(p) = \frac{1}{p(p-1)^2} = xe^x - e^x + 1.$$

Следовательно, решение $\varphi(x)$ интегро-дифференциального уравнения (2.1.3.4), удовлетворяющие начальным условиям (2.1.2.5), определяется равенством

$$\varphi(x) = xe^x - e^x + 1$$

2.1.4. Интегральные уравнения Вольтерра с пределами $x, +\infty$

Интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} K(x-t)\varphi(t)dt, \quad (2.1.4.1)$$

возникающие в ряде задач физики, можно также решать с помощью преобразования Лапласа.

Справедлива следующая формула:

$$\int_x^{+\infty} K(x-t)\varphi(t)dt = \tilde{K}(-p)\Phi(p), \quad (2.1.4.2)$$

$$\varphi(x) = \Phi(p), \quad \tilde{K}(-p)\Phi(p),$$

или

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(-p)} \quad \tilde{K}(-p) \neq 1$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} \frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(-p)} e^{px} dp \quad (2.1.4.3)$$

Является частным решением интегрального уравнения (2.1.4.1). Подчеркнем, что для того, чтоб решение (2.1.4.3) имело смысл, необходимо, чтобы области

$\tilde{K}(-p)$ и $F(p)$ аналитичности перекрывались.

Пример 14. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_x^\infty e^{2(x-t)} \varphi(t) dt. \quad (2.1.4.4)$$

Решение. В данном случае $f(x) = x, K(x) = e^{2x}$. Поэтому

$$F(p) = \frac{1}{p^2}, \quad \tilde{K}(-p) = \int_0^\infty e^{-2x} e^{px} dx = \frac{1}{2-p}, \quad \operatorname{Re} p < 2.$$

Таким образом, получаем следующее операторное уравнение:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2-p} \Phi(p),$$

$$\Phi(p) = \frac{p-1}{p^2(p-1)}.$$

Отсюда

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \frac{p-2}{p^2(p-2)} e^{px} dp \quad (0 < r < 2). \quad (2.1.4.5)$$

Интеграл (2.1.4.5) можно вычислить по интегральной формуле Коши.

Подынтегральная функция имеет двукратный полюс $p=0$ и простой полюс $p=1$, $r>1$,

который появляется при $r>1$, что связано с включением или не включением в решение уравнения (2.1.4.4) решения соответствующего однородного уравнения

$$\varphi(x) = \int_x^{\infty} e^{2(x-t)} \varphi(t) dt.$$

Найдем вычеты подынтегральной функции в ее полюсах:

$$\operatorname{res}_{p=0} \left(\frac{p-2}{p^2(p-1)} e^{px} \right) = 2x+1, \quad \operatorname{res}_{p=1} \left(\frac{p-2}{p^2(p-1)} e^{px} \right) = -e^x.$$

Следовательно, решение интегрального уравнения (2.1.4.4) есть $\varphi(x) = 2x+1 + Ce^x$ (C – произвольная постоянная).

2.1.5. Обобщенная теорема умножения и некоторые ее применения.

Пусть

$$\varphi(x) = \Phi(p), \quad u(x, r) = U(p) e^{-rq(p)},$$

где $U(p)$ и $q(p)$ - аналитические функции. Тогда

$$\Phi(q(p)) = \int_0^{\infty} \varphi(r) u(x, r) dr$$

Это и есть обобщенная теорема умножения (теорема Эфроса). Если $u(x, r) = u(x-r)$, $q(p) \equiv p$, то и мы получаем обычную теорему умножения:

$$\Phi(p) \cdot U(p) = \int_0^{\infty} \varphi(r) u(x-r) dr$$

$$U(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, q(p) = \sqrt{p},$$

Если

то

$$u(x, r) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-r^2/(4x)}$$

Поэтому, если известно, что $\Phi(p) = \varphi(x)$, то по теореме Эфроса находим

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$$

оригинал для

:

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^{\infty} \varphi(r) e^{-r^2/(4x)} dr.$$

(2.1.5.1)

Пример 15. Решить интегральное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/(4x)} \varphi(t) dt = 1.$$

(2.1.5.2)

$$\varphi(x) = \Phi(p).$$

Решение. Пусть Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (2.1.5.2), получим, согласно формуле (2.1.5.1),

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p}$$

,

Откуда

$$\frac{\Phi(p)}{p} = \frac{1}{p^2},$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} = 1$$

или

Следовательно, $\varphi(x) \equiv 1$ есть решение (2.1.5.2).

Пример 16. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = xe^{-x} + \lambda \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{xt}) \varphi(t) dt \quad (|\lambda| \neq 1). \quad (2.1.5.3)$$

Решение. Пусть $\varphi(x) = \Phi(p)$. Применяя к обеим частям (2.1.5.3) преобразование Лапласа и учитывая теорему Эфроса, найдем

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \lambda \frac{1}{p} \Phi\left(\frac{1}{p}\right) \quad (2.1.5.4)$$

Заменяя p на $\frac{1}{p}$, получим

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p^2}{(p+1)^2} + \lambda \frac{1}{p} \Phi(p). \quad (2.1.5.5)$$

Из (2.1.5.4) и (2.1.5.5) находим

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\lambda}{p} \left[\frac{p^2}{(p+1)^2} + \lambda p \Phi(p) \right],$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{1-\lambda^2} + \left[\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\lambda p}{(p+1)^2} \right].$$

Отсюда

$$\varphi(x) = e^{-x} \left(\frac{x}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \right)$$

2.2. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений применяется для уравнений Фредгольма 2-го рода, если выполняется условие:

$$|\lambda| \|b - a\| \max_{a \leq x, s \leq b} |K(x, s)| < 1$$

Это условие необходимо для сходимости [ряда Лиувилля — Неймана](#):

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x)$$

который и является решением уравнения. $(K^k f)(x)$ — k -ая степень интегрального оператора $(Kf)(x)$:

$$(Kf)(x) = \int_a^b K(x, s) f(s) ds$$

Впрочем, такое решение является хорошим приближением лишь при $|\lambda|$ достаточно малых.

Этот метод применим также и при решении уравнений Вольтерры 2-го рода. В таком случае, ряд Лиувилля - Неймана сходится при любых значениях $|\lambda|$

, а не только при малых. [6]

В отличие от уравнений Фредгольма, уравнения Вольтерра всегда имеют единственное решение. Поэтому оно может быть найдено методом последовательных приближений. Последовательность функций $y_n(x)$, строящаяся по правилу

$$y_1(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) y_0(t) dt + f(x),$$

$$y_2(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) y_1(t) dt + f(x),$$

...

$$y_n(x) = \lambda \int_a^z K(x, t) y_{n-1}(t) dt + f(x),$$

...

всегда сходится к единственному решению интегрального уравнения при $n \rightarrow \infty$.

Пример 17. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt$$

методом последовательных приближений.

Решение. В качестве нулевого приближения выберем $y_0(x) = 1$. Тогда

$$y_1(x) = 1 - \int_0^x (x-t) \cdot 1 \cdot dt = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x (x-t) \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

На n -ом получим

$$y_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!},$$

откуда

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = \cos x.$$

Пример 18. Решить уравнения Вольтерра методом последовательных приближений.

$$\int_0^x y(t)dt + \frac{x^2}{2}.$$

$$y_0(x) = 1.$$

$$y_1(x) = \int_0^x dt + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

$$y_2(x) = \int_0^x \frac{t^2}{2} dt + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}.$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} \right) dt = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6}.$$

$$y_4(x) = \int_0^x \left(\frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{6} \right) dt = \frac{t^5}{120} + \frac{t^4}{18}.$$

$$y_n(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{t^5}{120} + \frac{t^4}{18} = 1 - 1 + x - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{t^5}{120}.$$

$$y(x) = e^x - x - 1.$$

Пример 19.

$$y(x) = \int_0^x y(t) dt + x^2.$$

Решение.

$$y_0(x) = 1.$$

$$y_1(x) = \int_0^x 1 \cdot dt + x^2 = x^2.$$

$$y_3(x) = \int_0^x \frac{t^3}{3} dt = \frac{x^4}{12} + x^2.$$

$$y_4(x) = \int_0^x \frac{t^4}{12} = \frac{x^5}{60} + x^2.$$

$$y_n(x) = x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \dots + \frac{x^5}{60}.$$

$$2x - 2x - 2 + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots = 2(e^x - x - 1).$$

2.3. Метод резольвент

Метод резольвент является не самым быстрым решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода, однако иногда нельзя указать других путей решения задачи.

Если ввести следующие обозначения:

$$K_0(x, t) = K(x, t)$$

,

$$K_1(t, s) = K(t, s)$$

,

то повторными ядрами ядра $K(x, s)$ будут ядра $K_p(x, s)$:

$$K_p(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{p-1}(t, s) dt$$

.

Ряд, составленный из повторных ядер,

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_{k+1}(x, s)$$

,

называется резольвентой ядра $K(x, s)$ и является регулярно сходящимся при $a \leq x \leq b$, $s \leq b$ и выше упомянутому условию сходимости ряда Лиувилля — Неймана. Решение интегрального уравнения представляется по формуле:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds$$

Например, для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 xs\varphi(s) ds$$

повторными будут следующие ядра:

$$K_0(x, s) = xs$$

$$K_1(x, t) = xt$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 xsst ds = \frac{xt}{3},$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 xs \frac{st}{3} ds = \frac{xt}{9}$$

...

$$K_{n+1} = \frac{xt}{3^n}$$

а резольвентой — функция

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{xt}{3^n} = xt \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{3}} = \frac{3xt}{3 - \lambda}$$

Тогда решение уравнения находится по формуле:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3 - \lambda} f(t) dt$$

Пример 20. Найти резольвенту для интегральных уравнений Вольтерра со следующим ядром.

$$K(x, t) = e^{x-t}.$$

Решение. Имеем $K_1(x, t) = K(x, t) = e^{x-t}$. Далее согласно формуле

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_n(z, t) dz$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

Тогда

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_1(z, t) dz = \int_t^x e^{x-t} dz = e^{x-t} (x - t)$$

$$K_3(x, t) = \int_t^x e^{x-t} (e^{x-t} (z - t)) dz = \frac{e^{2x-2t} (x - t)^2}{2}$$

$$K_4(x, t) = \int_t^x e^{x-t} \cdot \frac{e^{2x-2t} (x - t)^2}{2} dz = e^{3(x-t)} \cdot \frac{(x - t)^3}{3!}$$

...

$$K_n(x, t) = \int_t^x e^{x-t} \cdot K_{n-1}(z, t) dz = \int_0^x e^{x-t} \cdot \frac{(z - t)^{n-2}}{(n-2)!} dz = e^{(n-1)(x-t)} \cdot \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Таким образом

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = e^{(1+\lambda)(x-t)}$$

Следует отметить, что $e^{(1+\lambda)(x-t)}$ получено из разложения ряда Тейлора

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} e + \frac{(x-1)^3}{3!} e + \dots$$

Пример 21. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t) dt \quad (2.3.1)$$

Решение. Резольвента ядра

$$K(x, t) = e^{x^2-t^2}$$

при $\lambda = 1$ $R(x, t; 1) = e^{x-t} e^{x^2-t^2}$ есть . Согласно формуле (2.3.1) решением данного интегрального уравнения является функция

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x-t} e^{x^2-t^2} e^{t^2} dt = e^{x+x^2}$$

Пример 22. Найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt \quad (2.3.2)$$

$$K(x, t) = x - t, \lambda = 1,$$

Решение. В данном случае следовательно, согласно (2.3.2),

$$a_1(x) = 1, \quad a_k(x) = 0.$$

все остальное

Уравнение (9) в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 g(x, t; 1)}{dx^2} - g(x, t; 1) = 0,$$

$$g(x, t; 1) = g(x, t) = C_1(t)e^x + C_2(t)e^{-x}.$$

$$g|_{x=t} = \frac{dg}{dx}\bigg|_{x=t} = \dots = \frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\bigg|_{x=t}, \quad \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\bigg|_{x=t} = 1$$

Условия

дают

$$\begin{cases} C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t} = 0, \\ C_1(t)e^t - C_2(t)e^{-t} = 1. \end{cases}$$

(2.3.3)

Решая систему (2.3.3), находим

$$C_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t}, \quad C_2(t) = -\frac{1}{2}e^t,$$

и, следовательно,

$$g(x, t) = \frac{1}{2}(e^{x-t} - e^{-(x-t)}) = sh(x-t).$$

Согласно формуле

$$R(x, t; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x, t; \lambda)}{dx^n}$$

Запишем решение в виде

$$R(x, t; 1) = [sh(x - t)]_x^n = sh(x - t).$$

2.4. Решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению

Если в интегральном уравнении (1.1.4) ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x, t)$ имеют непрерывные производные по переменной x то это уравнение может быть продифференцировано один или несколько раз. Это позволяет в ряде случаев свести решение интегрального уравнения к задаче Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения. Производная от интеграла при этом вычисляется по формуле

$$\frac{d}{dx} \int_a^x K(x, t) y(t) dt = K(x, x) y(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} y(t) dt. \quad (2.4.1)$$

Пример 23. Решить интегральное уравнение.

$$y(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x - t) y(t) dt \quad (2.4.2)$$

Решение. Заданное уравнение (2.4.2) дважды продифференцируем. Учитывая (2.4.1), тогда будем иметь следующую уравнение вида

$$y'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x - t) y(t) dt, \quad (2.4.3)$$

$$y''(x) = -\sin x + y(x) - \int_0^x \sin(x - t) y(t) dt. \quad (2.4.4)$$

Исключая из уравнений (2.4.2) и (2.4.4) интеграл $\int_0^x \sin(x - t) y(t) dt$, получим $y'' = 0$ обыкновенное дифференциальное уравнение. Из уравнений (2.4.3) и

(2.4.4) вытекают следующие начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Решением полученной задачи Коши будет функция $y(x) = x$.

Пример 24. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = 2shx + 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt \quad (2.4.5)$$

Решение. Дважды дифференцируя уравнение (2.4.5), получим

$$y'(x) = 2chx - \int_0^x y(t)dt, \quad (2.4.6)$$

$$y''(x) = 2shx - y(x). \quad (2.4.7)$$

Перепишем уравнение в стандартной форме

$$y'' + y = 2shx \quad (2.4.8)$$

Начальные условия найдем из уравнений (2.4.5) и (2.4.6):

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad (2.4.9)$$

Решением уравнения (2.4.8) с учетом начальных условий (2.4.9) будет

$$y(x) = \cos x + \sin x + shx$$

2.5. Уравнения Вольтерра с вырожденным ядром

Если ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ является вырожденным, то уравнение может быть представлено в виде:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n p_k(x) \int_a^x q_k(t) y(t) dt + f(x) \quad (2.5.1)$$

Вводя функции

$$u_k(x) = \int_a^x q_k(t)y(t)dt, \quad (2.5.2)$$

и подставляя их в уравнение (2.5.1), получим, что решение интегрального уравнения с вырожденным ядром имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n p_k(x)u_k(x) + f(x). \quad (2.5.3)$$

Таким образом, чтобы найти $y(x)$, необходимо определить функции $u_k(x)$.
Продифференцировав соотношения (2.5.2), и подставив вместо $y(x)$ выражение (2.5.3), получим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка для $u_k(x)$:
неизвестных функций

$$u'_k(x) = \sum_{i=1}^n q_k(x)p_i(x)u_i(x) + f(x)q_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Положив $x = a$ в соотношениях (2.5.2), найдем, что начальные условия являются $u_1(x) = u_2(x) = \dots = u_n(x) = 0$.
однородными Подстановка решения системы дифференциальных уравнений в (2.5.3) даст решение исходного интегрального уравнения.

Пример 25. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \int_0^x \frac{cht}{chx} y(t)dt + 1 \quad (2.5.4)$$

Решение. Обозначим

$$u(x) = \int_0^x chty(t)dt. \quad (2.5.5)$$

Тогда уравнение (2.5.4) переписется в виде

$$y(x) = \frac{u(x)}{chx} + 1 \quad (2.5.6)$$

Продифференцируем (2.5.5) и подставим вместо $y(x)$ выражение (2.5.6), получим

$$u'(x) = chxy(x) = chx \left(\frac{u(x)}{chx} + 1 \right) = u(x) + chx,$$

или в стандартной форме

$$u'(x) - u = chx.$$

Решением этого уравнения с учетом начального условия $u(0) = 0$ будет функция

$$u(x) = \frac{1}{2}(xe^x + shx).$$

Подставляя ее в (2.5.6), получим решение интегрального уравнения:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2} \frac{xe^x + shx}{chx}.$$

2.6. Уравнения Вольтерра с разностным ядром

Если ядро интегрального уравнения зависит только от разности своих аргументов: $K(x, t) = K(x - t)$, то такое уравнение может быть решено операторным методом. Согласно этому методу, каждой функции $f(x)$ (которая называется *оригиналом*) взаимно однозначно ставится в соответствие функция $F(p)$ (которая называется *изображением*) по следующему правилу:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px} dx.$$

Это правило называется преобразованием Лапласа. Ключевым свойством преобразования Лапласа, которое используется для решения интегральных

уравнений, является теорема о свертке, согласно которой, если $F(p)$ и $G(p)$ - изображения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

Пусть $Y(p)$, $F(p)$ и $K(p)$ - изображения функций $y(x)$, $f(x)$ и $K(x)$ соответственно. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой о свертке, преобразуем исходное интегральное уравнение

$$y(x) = \int_0^x K(x-t)y(t)dt + f(x) \quad (2.6.1)$$

(которое также называют уравнением типа свертке) в алгебраическое уравнение относительно изображений:

$$Y(p) = K(p)Y(p) + F(p),$$

откуда находим

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}.$$

По полученному изображению $Y(p)$ восстанавливаем искомую функцию $y(x)$.

Пример 26. С помощью преобразования Лапласа решить интегральные уравнения типа свертки

$$y(x) = \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 y(t)dt + x$$

Решение. В этом уравнении $f(x) = x$, $K(x) = \frac{1}{6}x^3$. Изображениями этих функции

является соответственно $F(p) = \frac{1}{p^2}$ и $K(p) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3!}{p^4} = \frac{1}{p^4}$.

$$Y(p) = \frac{1}{p^4} Y(p) + \frac{1}{p^2},$$

$$Y(p) \left[1 - \frac{1}{p^4} \right] = \frac{1}{p^2},$$

Откуда находим

$$Y(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{p^4}{p^4 - 1} = \frac{p^2}{p^4 - 1} = \frac{p^2}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 - 1} \right),$$

Тогда полученное выражение приводя к функция-оригиналу получим решения уравнения вида

$$y(x) = \frac{1}{2} (\sin x + shx)$$

Пример 27.

$$y(x) = \int_0^x e^{x-t} y(t) dt + e^{2x} - 2.$$

Решение.

$$Y(p) = \frac{1}{p-1} Y(p) + \frac{1}{p-2} - \frac{2}{p},$$

$$Y(p) \left[1 - \frac{1}{p-1} \right] = \frac{p-2p+4}{p(p-2)},$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-p+4}{p(p-2)} \cdot \frac{p-1}{p-2} = \frac{-p^2+4p+p-4}{p(p-2)^2} = \frac{-p^2+5p-4}{p(p-2)^2} = \\ &= \frac{1}{(p-2)^2} - \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Решением уравнения будет иметь вид

$$y(x) = xe^{2x} - 1.$$

Пример 28.

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt + x^2.$$

Решение.

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+1}Y(p) + \frac{2!}{p^3},$$

$$Y(p) \left[1 - \frac{1}{p^2+1} \right] = \frac{2!}{p^3},$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{2}{p^3} \cdot \frac{p^2+1}{p^2+1-1} = \frac{2 \cdot (p^2+1)}{p^5} = \frac{24(p^2+1)}{12p^5} = \frac{24p^2+24}{12p^5} = \\ &= \frac{2}{p^3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{24}{p^5}, \end{aligned}$$

Следовательно, решением интегрального уравнения является

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{12} \cdot x^4 = x^2 + \frac{x^4}{12}$$

Пример 29.

$$y(x) = 2 \int_0^x \cos 3(x-t) y(t) dt + \cos 3x$$

Решение.

$$Y(p) = \frac{2p}{p^2 + 9} Y(p) + \frac{p}{p^2 + 9},$$

$$Y(p) \left[1 - \frac{2p}{p^2 + 9} \right] = \frac{p}{p^2 + 9},$$

$$Y(p) = \frac{p}{p^2 + 9} \cdot \frac{p^2 + 9}{p^2 - 2p + 9} = \frac{9}{p^2 - 2p + 9} =$$

$$= \frac{p-1}{(p-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(p-1)^2 + (2\sqrt{2})^2}$$

$$y(x) = e^x \cos 2\sqrt{2}x + e^x \sin 2\sqrt{2}x = e^x (\cos 2\sqrt{2}x + \sin 2\sqrt{2}x)$$

2.7. Интегро-дифференциальные уравнения с разностным ядром

Интегро-дифференциальным называется уравнение, которое содержит неизвестную функцию как под знаком дифференциала, так и под знаком

производной, при этом производные могут входить в подынтегральное выражение. Интегро-дифференциальные уравнения с разностным ядром типа Вольтерра можно решать операторным методом. Схема применения преобразований Лапласа остается такой же, как и для интегральных уравнений.

При этом, если функция $y(x)$ имеет изображение $Y(p)$, то изображения для ее производных вычисляются по правилу

$$y'(x) = pY(p) - y(0)$$

$$y''(x) = p^2Y(p) - py'(0) - y''(0)$$

.....

$$y^{(n)}(x) = p^nY(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \dots - py^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

Таким образом, для получения однозначного решения интегро-дифференциальные уравнения, в отличие от интегральных, должны быть дополнены начальными условиями.

Пример 30. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$y'(x) = \int_0^x \cos(x-t)y(t)dt + x, \quad y(0) = 1 \tag{2.7.1}$$

Решение. В пространстве изображений уравнение (2.1.7.1) имеет вид

$$pY(p) - 1 = \frac{p}{p^2 + 1}Y(p) + \frac{1}{p^2}.$$

Находим отсюда $Y(p)$

$$pY(p) - \frac{p}{p^2 + 1}Y(p) = \frac{1}{p^2} + 1.$$

$$Y(p) \left[p - \frac{p}{p^2 + 1} \right] = \frac{1 + p^2}{p^2}.$$

$$Y(p) \cdot \frac{p(p^2 + 1) - p}{p^2 + 1} = \frac{1 + p^2}{p^2}.$$

$$Y(p) \cdot \frac{p^3}{p^2 + 1} = \frac{1 + p^2}{p^2}.$$

$$Y(p) = \frac{1 + p^2}{p^2} \cdot \frac{p^2 + 1}{p^3} = \frac{p^4 + 2p^2 + 1}{p^5} = \frac{1}{p^5} + \frac{2p^2}{p^5} + \frac{p^4}{p^5} = \frac{1}{p^5} + \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} =$$

$$= \frac{24}{24 \cdot p^5} + \frac{2!}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{2!}{p^3} + \frac{4!}{24 p^5},$$

после полученного выражения восстанавливаем решение уравнения с помощью преобразования Лапласа тогда

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{24}.$$

Пример 31. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

Решение. Известно, что

$$x = \frac{1}{p^2} e^{x-t} = \frac{1}{p-1}$$

$$\varphi(x) = \Phi(x).$$

Пусть Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения и учитывая при этом теорему умножения (изображение свертки), получим

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} \Phi(p)$$

Отсюда

$$\Phi(p) \left[1 + \frac{1}{p-1} \right] = \frac{1}{p}$$

$$\Phi(p) \frac{p}{p-1} = \frac{1}{p}$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = 1 - x$$

Следовательно. Решение данного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\frac{p}{p^2+1} \Phi(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

,

откуда

$$\Phi(p) = \frac{\frac{1}{p^2+1}}{\frac{p}{p^2+1}} = \frac{1}{p} = 1$$

.

$$\varphi(x) = 1$$

Тогда функция $\varphi(x) = 1$ есть решение уравнения (2.7.1).

Пример 32.

$$\int_0^x e^{2(x-t)} \varphi(t) dt = \sin x$$

Решение.

$$\frac{1}{p-2} \Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow \Phi(p) = \frac{\frac{1}{p^2+1}}{\frac{1}{p-2}} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p-2}{1} = \frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2+1} =$$

$$= \cos x - 2 \sin x$$

$$\varphi(x) = \cos x - 2 \sin x$$

Ответ:

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последние полтора-два десятилетия наблюдается значительное расширение области приложения интегральных уравнений типа Вольтерра. В круг многочисленных естественнонаучных приложений этого класса уравнений входят задачи восстановления сигналов, поступающих на входы измерительных приборов и систем наблюдения, которые ввиду реальности своих характеристик вносят искажения в наблюдаемые и регистрируемые данные.

К уравнениям Вольтерра относят интегральные уравнения, содержащие оператор Вольтерра, включая в этот класс и различные виды нелинейных уравнений. К наиболее распространенным уравнениям этого типа,

рассматриваемым в той или иной мере, относятся : линейное одномерное (скалярное) уравнение Вольтерра II рода, нелинейное уравнение Вольтерра II рода с оператором, система уравнений Вольтерра II рода, задача анализа переходных процессов в электрических цепях, процессы деформирования упруговязких материалов, задачи математической экологии, линейное одномерное интегральное уравнение Вольтерра I рода, уравнения Вольтерра-Гаммерштейна I рода, уравнение Вольтерра-Гаммерштейна I рода типа свертки.

Характерные примеры прикладных задач:

1. Задача о распределении масс в галактиках при известном законе вращения.
2. Задача о распределении пространственной светимости в звездных системах по наблюдаемой светимости.
3. Определение локальной излучательной способности плазмы по ее интегральной интенсивности излучения.
4. Определение функции распределения электронов по энергиям в плазме исходя из интенсивностей спектральных линий.
5. Задач восстановления сигнала, принятого динамической системой.

В работе изложены методы приближенного и численного решения широкого класса интегральных уравнений, описаны алгоритмы и программы. Представлены в доступной для практического применения форме методы приближенного и численного решения основных классов интегральных уравнений: традиционные (методы квадратур, итераций, резольвенты, выраженных ядер, моментов, коллокации, преобразование Фурье, собственных функций и др.), эффективные, главным образом, при решении уравнений второго рода, а также новейшие регулярные, или робастные (методы Тихонова, Лаврентьева, Иванова, Фридмана, Бакуштинского, Калмана, Винера и др.), обеспечивающие устойчивость решения уравнения первого рода.

Для специалистов, не имеющих специального математического образования, но применяющих в работе математические методы, существенное значение имеет возможность ознакомления с методикой описания задач посредством интегральных уравнений, т.е. с соответствующими интегральными методами исследования, анализа, расчета конкретных задач физики, техники, биологии, механики и т.д.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.

1. А.В. Манжиров, А.Д. Полянин. Методы решения интегральных уравнений. Справочник. М.: Факториал. 1999, 41-43
2. Адонц М.Т. Об одном классе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. – ДАН АзССР, 1954, 10, №3, 167-174с.
3. Адонц М.Т. Применение метода вырожденных ядер клинейным интегро-дифференциальным уравнениям. – ДАН АзССР, 1955, 11, 883-838с.
4. Апарцин А. С. О численном решении систем интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратур. – В кн.: Методы оптимизации и исследовании операций: (Прикл. математика). Иркутск, 1976, вып 4, 107-116

5. Апарцин А. С. Численное решение интегральных уравнений I рода типа Вольтерра. – Иркутск, 1981. – 26 с. – (Препринт/ СЭИ: № 1).
6. Бельтюков Б. А. К решению нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра методом последовательных приближений Пикара. – Тр. Иркут. ун-та, 1968, 26, 335-349.
7. Бельтюков Б. А. Один способ приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра. – Сиб. мат. журн., 1961, 11, № 5, 789-791.
8. Бельтюков Б. А. Приближенные решения некоторых видов нелинейных интегральных уравнений. – Учен. зап. Благовещ. Пед. Ин-та, 1956, 7, 5-11
9. Васильева А.Б., Тихонов Н.А.. Интегральные уравнения. М.: изд. МГУ, 1989, 38-50.
10. Ведь Ю.А., Искандаров С. О характерных особенностях интегродифференциальных систем типа Вольтерра. – Изв. АН Кирг. ССР, 1980, № 3, 30-34.
11. Виарда Г. Интегральные уравнения. – М.-Л.: ОНТИ, 1933, 10-17.
12. Винокуров В.Р. о положительных и монотонных решениях интегральных уравнений Вольтерра. – Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1967, № 4, 40-46.
13. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. 111-133
14. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука. 19-29
15. Гохберг И.Ц. Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967, 1-9.
16. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 3, часть II. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. – Л.: Гостехиздат, 1934, 15-21
17. Дядченко Ю.А. О зависимости решения операторного уравнения Вольтерра от параметра. – В кн. Приближен. Методы исслед. дифференц. уравнений и их прилож. – Куйбышев: 1978, № 4, 40-47.
18. Ефимова А.В.. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. Под ред. М.: Наука, 1984, 61-73
19. И.Г. Петровский. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: изд. МГУ, 1984, 224.
20. Иманалиев М. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра. – Math. Balkan., 1973, 3, 145-149
21. Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа. С добавлением Ф. Пеллегрино об аналитических функционалах. Перев. со 2-го франц. Изд. В.С. Бермана под ред. Г.Е. Шилова. – М.: Наука, 1967.
22. М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – 3-е изд., - М.: Высшая школа, 1978, 135-144
23. Магницкий Н.А. Линеиные интегральные Уравнения Вольтерра I и III рода. – Ж. вычисл. Матем и матем. Физ., 1979, 19, 970-988.

24. Назаренко Т.И. К вопросу об устойчивости разностного метода решения задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. – Тр. Иркутск. ун-та, серия матем., 1970, 74, 62-69.
25. Полищук Е.М. Интегральные представления аналитических функционалов. – Укр. Матем. ж., 1964, 26, 487-495.
26. Привалов И.И. Интегральные уравнения. – М.: ОНТИ, 1935.

Приложение А

Примеры для самостоятельной работы.

Решить методом последовательных приближений

- | | |
|--|------------------------------------|
| $y(x) = \int_0^x (x-t)y(t)dt + x.$ | $y(x) = 1 - \int_0^x tgy(t)dt.$ |
| 1. | 2. |
| $y(x) = 1 + \int_0^x \frac{y(t)}{x+t} dt.$ | $y(x) = 2 \int_0^x ty(t)dt + x^2.$ |
| 3. | 4. |

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{xy(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

5.

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{ty(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

6.

Решить уравнения Вольтерра, сведя их к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

$$y(x) = \int_0^x \frac{t}{t+1} y(t) dt + e^x.$$

7.

$$y(x) = \int_0^x (x-t)y(t) dt + 2shx.$$

8.

$$y(x) = 4 \int_0^x (y-x)y(t) dt + 3 \cos x.$$

9.

$$y(x) = \int_1^x \frac{4t-5x}{t^2} y(t) dt + \ln x.$$

10.

$$y(x) = \int_0^x [3(x-t) - (x-t^2)] y(t) dt + e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1.$$

11.

$$y(x) = \int_1^x \frac{4x-3t}{t^2} y(t) dt + 4x \ln x - 1.$$

12.

$$y(x) = \int_1^x \frac{x}{t^2} y(t) dt + x^2.$$

13.

$$y(x) = \int_0^x \cos(x-t)y(t) dt + x.$$

14.

$$y(x) = 6 \int_0^x \cos 5(x-t)y(t) dt - 4e^{5x}.$$

15.

$$y(x) = 2 \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt + e^x.$$

16.

$$y(x) = 3 \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt = 2shx.$$

17.

$$y(x) = 3 \int_0^x ch 2(x-t)y(t) dt + 5e^{-2x}.$$

18.

$$y(x) = 5 \int_0^x sh(x-t)y(t) dt + 3 \cos x = 0.$$

19.

$$y(x) = \int_0^x (2e^{x-t} + e^{3(x-t)}) y(t) dt + 20x - 4.$$

20.

$$y(x) = \int_0^x (2e^{2(x-t)} - e^{3(x-t)}) y(t) dt + 5.$$

21.

$$y(x) = \int_0^x \frac{t+2}{(x+2)^2} y(t) dt + 2x.$$

22.

$$y(x) = \int_0^x \frac{(t-1)^2}{t^2+1} e^{x-t} y(t) dt = 1.$$

23.

$$y(x) = \int_1^x \frac{x(2t+1)}{t^2} y(t) dt + x^3.$$

24.

$$y(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e^x+1} y(t) dt + e^{-x}.$$

25.

$$y(x) = \int_0^x \frac{t}{(x+1)(t+1)} y(t) dt + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}.$$

26.

$$y(x) = \int_0^x (tgt - 1)e^{x-t} y(t) dt + \cos x.$$

27.

Решить уравнения Вольтерра с вырожденным ядром.

$$y(x) = \int_1^x \frac{2t}{x^2} y(t) dt + x^2.$$

28.

$$y(x) = 2 \int_0^x \frac{y(t)}{2t+1} dt + 4x.$$

29.

$$y(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{\cos t} y(t) dt + 1.$$

30.

$$y(x) = \int_1^x \frac{x \cos x}{t \cos t} y(t) dt + \cos x e^x.$$

31.

$$y(x) = \int_0^x \frac{x^2}{t^3} y(t) dt + x^3 \cos x.$$

32.

$$y(x) = \int_e^x \frac{2}{t \ln x} y(t) dt + 1.$$

33.

$$y(x) = \int_0^x \cos x e^{x-t} y(t) dt = e^{x-\sin x}.$$

34.

$$y(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{\sin x} y(t) dt - \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}.$$

35.

$$y(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{y(t)}{\cos x \sin t} dt + 1.$$

36.

$$y(x) = \int_0^x \frac{1-t^2}{1-x^4} y(t) dt + \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1-x^2}.$$

37.

$$y(x) = 2 \int_0^x \frac{1+t^2}{1-x^4} y(t) dt + \frac{(1-3x)(1+x)}{1+x^2}.$$

38.

$$y(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \sqrt{\frac{1+x}{1-t^2}} y(t) dt + \sqrt{1-x^2}.$$

39.

Решить интегральные уравнения типа свертки

$$y(x) = \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 y(t) dt + x.$$

40.

$$y(x) = \int_0^x e^{x-t} y(t) dt + e^{2x} - 2.$$

41.

$$\int_0^x \cos(x-t) y(t) dt = \sin x - 2x.$$

42.

$$\int_0^x \operatorname{ch}(x-t) y(t) dt = 3x^2.$$

43.

$$\int_0^x y(t) dt = x^3 e^x.$$

43.

$$\int_0^x y(t) dt = e^{2x} \sin x.$$

45.

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt + x^2.$$

46.

$$y(x) = 2 \int_0^x \cos(x-t)y(t)dt + e^x.$$

47.

$$y(x) = 3 \int_0^x \sin 4(x-t)y(t)dt + \sin x.$$

48.

$$y(x) = 8 \int_0^x sh(x-t)y(t)dt + ch x$$

49.

$$y(x) = 5 \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt + 4$$

50.

$$y(x) = 8 \int_0^x e^{x-t}y(t)dt + sh x$$

51.

$$y(x) = ch x - 5 \int_0^x sh(x-t)y(t)dt + 4$$

52.

$$y(x) = 2 \int_0^x \cos 3(x-t)y(t)dt + \cos 3x$$

53.

$$y(x) = 2 \int_0^x y(t)dt - \int_0^x e^{x-t}y(t)dt + x$$

54.

$$y(x) = \int_0^x sh(x-t)y(t)dt + 2 \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt + ch x$$

55.

Решить следующие системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sin x + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \int_0^x \varphi_1(t) dt. \end{cases}$$

56.

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{2x} + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi_1(t) dt. \end{cases}$$

57.

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int_0^x \varphi_1(t) dt - \int_0^x e^{x-t} \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

58.

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int_0^x \varphi_1(t) dt + 4 \int_0^x e^{x-t} \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{t-x} \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

59.

$$60. \begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \varphi_1(t) dt, \\ \varphi_3(x) = \sin x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt. \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = \cos x - 1 + \int_0^x \varphi_3(t) dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x + \int_0^x \varphi_1(t) dt. \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} \varphi_1(x) = x + 1 + \int_0^x \varphi_3(t) dt, \\ \varphi_2(x) = -x + \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \int_0^x \varphi_1(t) dt. \end{cases}$$

Решить следующие системы интегральных уравнений:

$$63. \varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi'(t) dt = e^{2x}; \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

$$64. \varphi'(x) - \varphi(x) + \int_0^x (x-t) \varphi'(t) dt - \int_0^x \varphi(t) dt = x; \quad \varphi(0) = -1.$$

$$65. \varphi''(x) - 2\varphi'(x) + \varphi(x) + 2 \int_0^x \cos(x-t) \varphi''(t) dt + 2 \int_0^x \sin(x-t) \varphi'(t) dt = \cos x;$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

$$66. \varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 2 \int_0^x \sin(x-t) \varphi'(t) dt = \cos x; \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

$$67. \varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x sh(x-t) \varphi(t) dt + \int_0^x ch(x-t) \varphi'(t) dt = ch x;$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

$$\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x sh(x-t)\varphi(t)dt + \int_0^x ch(x-t)\varphi'(t)dt = chx; \varphi(0) = -1, \varphi'(0) = 1.$$

68.

Решить следующие интегральные уравнения 1-го рода, предварительно сведя их к интегральным уравнениям 2-го рода:

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt = \sin x.$$

69.

$$\int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)dt = x.$$

70.

$$\int_0^x \alpha^{x-t}\varphi(t)dt = f(x), \quad f(0) = 0.$$

71.

$$\int_0^x (1-x^2+t^2)\varphi(t)dt = \frac{x^2}{2}.$$

72.

$$\int_0^x (2+x^2-t^2)\varphi(t)dt = x^2.$$

73.

$$\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt = e^{x^{2/2}} - 1.$$

74.

Ответы.

1. $y(x) = shx.$

2. $y(x) = \cos x.$ 3. $y(x) = \frac{1}{1 - \ln 2}.$ 4. $y(x) = e^{x^2} - 1.$

5. $y(x) = \frac{4}{4 - \pi}.$ 6. $y(x) = \frac{1}{1 - \ln \sqrt{2}}.$ 7. $y(x) = e^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right)$

8. $y(x) = xchx + shx.$ 9. $y(x) = 4 \cos 2x - \cos x.$

10. $y(x) = \cos 2 \ln x + \sin 2 \ln x - 1.$ 11. $y(x) = 4sh2x.$ 12. $y(x) = x^3 - x - \frac{1}{x}.$ 13.

$y(x) = x^2 (\ln x + 1).$ $y(x) = 2e^x (x - 1) + x + 2.$

14. $y(x) = 10e^{5x} - e^{3x} (14 \cos 4x + 13 \sin 4x).$ 15. $y(x) = chx + xe^x.$

16. $y(x) = 2shx.$ 17. $y(x) = 3e^{-x} + 2e^{4x}.$ 18. $y(x) = 2 \cos x - 5 \cos 2x.$

19. $y(x) = e^{2x} + 6x - 5.$ 20. $y(x) = e^{3x} (2 \cos x - \sin x) + 3.$ 21. $y(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x + 2}.$ 22.

$z = (x + 2)^2 y.$

Указание. Перед дифференцированием выполнить замену функции

23. $y(x) = (x^2 + 1)(1 - \operatorname{arctg} x).$ 24. $y(x) = x^2 (2e^{2x-2} - 1).$

Указание. Перед

$y = zx.$

дифференцированием выполнить замену функции

25. $y(x) = e^{-x} + \ln \frac{2}{1 + e^{-x}}.$

Указание. Умножить уравнение на $x + 1$ и

продифференцировать. 26. $y(x) = 1 - e^{\frac{x}{x+1}}.$

Указание. Умножить уравнение на

$e^x + 1$ и продифференцировать. 27. $y(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{x}{\cos x}.$ 28.

$y(x) = 2x^2 - 1.$ 29. $y(x) = (4x + 2) \ln(2x + 1) + 4x.$ 30. $y(x) = \sin^2 x + 1.$

31. $y(x) = (x \ln x + 1) \cos xe^x.$ 32. $y(x) = x^3 (\sin x + \cos x).$ 33. $y(x) = 2 \ln x - 1.$

34. $y(x) = (1 - x \cos x) e^{x - \sin x}.$
35. $y(x) = \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} - \frac{2}{\pi}.$
36. $y(x) = \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\cos^2 x} + 1.$
37. $y(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 - x^4} e^{\operatorname{arctg} x}.$
38. $y(x) = \frac{1 - 3x^2}{1 + x^2}.$
39. $y(x) = \sqrt{1 + x}.$
40. $y(x) = \frac{1}{2} (\sin x + shx).$
41. $y(x) = x e^{2x} + 1.$
42. $y(x) = 1 - x^2.$
43. $y(x) = 6x - x^3.$
44. $y(x) = (2 + x) x^2 e^x.$
45. $y(x) = e^{2x} (\cos x + 2 \sin x).$
46. $y(x) = x^2 + \frac{x^4}{12}.$
47. $y(x) = \frac{e^x}{2} (x^2 + 4x + 2).$
48. $y(x) = 5 \sin x - 2 \sin x.$
49. $y(x) = ch 3x.$
50. $y(x) = 5ch 2x - 1.$
51. $y(x) = \frac{1}{3} (e^x - e^{-2x}).$
52. $y(x) = \cos 2x.$
53. $y(x) = e^x \left(\cos 2\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin 2\sqrt{2}x \right)$
54. $y(x) = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}.$
55. $y(x) = \frac{1}{3} (4ch\sqrt{3}x - 1).$
56. $\varphi_1(x) = \sin x; \varphi_2(x) = 0.$
57. $\varphi_1(x) = 3e^x - 2; \varphi_2(x) = 3e^x - 2e^{2x}.$
58. $\varphi_1(x) = e^{2x}; \varphi_2(x) = \frac{1}{2} (1 - e^{2x}).$
59. $\begin{cases} \varphi_1(x) = (x + 2) \sin x + (2x + 1) \cos x; \\ \varphi_2(x) = \frac{2 + x}{2} \cos x - \frac{1 + 2x}{2} \sin x. \end{cases}$
60. $\varphi_1(x) = 2 \sin x; \varphi_2(x) = 2 \cos x - 1; \varphi_3(x) = x.$
61. $\varphi_1(x) = \cos x; \varphi_2(x) = \sin x; \varphi_3(x) = \sin x + \cos x.$
62. $\begin{cases} \varphi_1(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cos x + \frac{1}{2} \sin x; \\ \varphi_2(x) = 1 - x + \frac{1}{2} \sin x - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cos x; \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sin x. \end{cases}$
63. $\varphi(x) = e^x - 1.$
64. $\varphi(x) = -e^x.$
65. $\varphi(x) = \frac{1}{2} x \sin x.$
66. $\varphi(x) = 1 - e^{-x} - x e^{-x}.$
67. $\varphi(x) = 1 - \cos x.$

$$68. \quad \varphi(x) = 1 - x + 2(\sin x - \cos x). \quad \varphi(x) = \cos x - \sin x.$$

$$70. \quad \varphi(x) = 1 - x \ln 3. \quad \varphi(x) = f'(x) - f(x) \ln a.$$

$$72. \quad \varphi(x) = x e^{x^2}. \quad 73. \quad \varphi(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad 74. \quad \varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}} (x^2 + 2) - 1.$$

Абдрахманов К.Т.

**«Методы решения интегро-дифференциальных уравнений типа
Вольтерра»**

6M060100 – «Математика»

Автореферат

диссертации на соискание академической степени магистра

Павлодар 2015

Работа выполнена в Инновационном Евразийском Университете

Научный руководитель:

Кандидат пед. наук,
доцент Ж.К. Даниярова

Ведущая организация:

Инновационный
Евразийский
Университет

Секретарь ГАК

Асылбекова С.К

Актуальность. Прямым отражением значительного расширения приложений интегральных уравнений Вольтерра является наблюдаемый в последние пять десятилетий быстрый рост интереса к их теории и методам решения со стороны специалистов в области чистой и прикладной математики, а также в многочисленных прикладных научных исследованиях и проектных разработках.

Цель работы – сделать обзор существующих методов решения и показать их на конкретных примерах.

Авторский подход состоял в том, чтобы показать эти методы решений многих типов линейных и нелинейных уравнений с переменными и постоянными пределами интегрирования.

В связи с целью были поставлены следующие **задачи**:

- Изучить учебных материалов
- Описать способы и методы решения задач
- Рассмотреть приложения описанных методов в конкретных примерах интегро-дифференциальных уравнений.

Объектом исследования данной работы является методы решения интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Предмет исследования – уравнения Вольтерра I и II рода.

Практическая значимость. В данной диссертации излагаются традиционные методы решения уравнения Вольтерра, такие как: метод свертки, метод последовательных приближений, метод резольвенты, решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению, уравнения Вольтерра с вырожденным ядром, уравнения Вольтерра с разностным ядром

Публикации результатов исследования. По теме диссертации опубликована одна статья в научный журнал «Вестник ИнЕУ» и одна публикации в областную газету «Ўстаздар газети».

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников, приложений. Изложена на 72 страницах с решенными 32 задач разными методами и 26 источников литературы.

Характерные примеры прикладных задач:

1. Задача о распределении масс в галактиках при известном законе вращения.
2. Задача о распределении пространственной светимости в звездных системах по наблюдаемой светимости.
3. Определение локальной излучательной способности плазмы по ее интегральной интенсивности излучения.
4. Определение функции распределения электронов по энергиям в плазме исходя из интенсивностей спектральных линий.
5. Задач восстановления сигнала, принятого динамической системой.

Для специалистов, не имеющих специального математического образования, но применяющих в работе математические методы, существенное значение имеет возможность ознакомления с методикой

описания задач посредством интегральных уравнений, т.е. с соответствующими интегральными методами исследования, анализа, расчета конкретных задач физики, техники, биологии, механики и т.д.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Научный журнал «Вестник ИнЕУ» № 5 (54) Павлодар 2015 г.
2. Областная газета «Ұстаздар газеті» № 1 (264) Павлодар 18 декабря 2014 г.

Абдрахманов К.Т.

**«Интегро-дифференциалды тендеулердің әдістерін Вольтерра түрінде
шешу»**

6М060100 – «Математика»

Магистр академиялық дәрежесіне ізденушілік диссертациясының

Авторефераты

Павлодар 2015

Жұмыс Инновациялық Еуразия Университетінде орындалды

Ғылыми жетекшісі:

педагогика ғылымдарының
кандидаты, доцент
Ж.К. Даниярова

Жетекші ұйым

Инновациялық
Еуразия
Университеті

:

Өзектілігі. Вольтеррдің интегральды теңсіздігі бағдарламасының елеулі кеңейтулерінің тікелей бейнесі ретінде соңғы бес онжылдықта бақыланатын оның теориялары мен шешу әдістеріне мамандар жағынан таза және қолданбалы математика аймағында және де көптеген қолданбалы ғылыми зерттеулер мен жобаны дамытуда қызығушылықтың жылдам артуы болып табылады.

Жұмыстың мақсаты – шешудің қолданыстағы әдістер шолуын жасап және оларды нақты мысалдарда көрсету.

Авторлық көзқарас осы интегрирлеудің ауыспалы және тұрақты шектері бар сызықты (түзу) және сызықты емес теңсіздіктің көптеген түрлерінің шешу әдістерін көрсетуден тұрады.

Мақсатқа байланысты келесідей тапсырмалар қойылған:

- Оқу құралдарын меңгеру;
- Есептердің шешу әдістері мен құралдарын сипаттау;
- Интегро-дифференциальды теңсіздіктің нақты мысалдарында сипатталған әдістер бағдарламасын қарау.

Осы жұмыстың зерттеу нысаны Вольтерр типті интегро-дифференциальды теңсіздіктің шешу әдістері болып табылады.

Зерттеу пәні – Вольтеррдің I және II түрлерінің теңдеуі.

Тәжірибелік мәні. Берілген диссертацияда Вольтерр теңсіздігінің заманауи шешу әдістері, яғни: бұрмалы әдіс, дәйекті жақындату әдісі, резольвент әдісі, интегральды теңсіздікті дифференциальды теңдікке жақындату жолымен оны шешу, туылған ядролы Вольтерр теңсіздігі ұсынылған.

Зерттеу нәтижелерінің басылымдары. Диссертация тақырыбы бойынша «Вестник ИнЕУ» ғылыми журналында бір мақала және «Ұстаздар газеті» облыстық газетінде бір мақала жарияланды.

Жұмыс көлемі және құрылымы. Жұмыс үш тараулардың, қорытынды, пайдаланылған әдебиеттер тізімі, бағдарлама, кіріспесінен тұрады. Әртүрлі әдістермен шығарылған 32 есептері бар 72 парақ ішінде және 26 әдебиет көздерімен құрастырылған.

Қолданбалы есептердің арнайы мысалдары:

1. Ғарыштағы белгілі айналу заңына сәйкес заттардың орналасуы (жайылуы) туралы есеп.
2. Байқалатын жарықтану бойынша жұлдыз жүйелеріндегі кеңістіктік жарықтанудың орналасуы туралы есеп.
3. Плазманың (сұйықтық) интегральды қанық сәулеленуі бойынша оның жергілікті сәуле шығару қабілетін анықтау.
4. Спектральды түзулер қанықтылығынан бөліне отырып, плазмадағы энергия бойымен электрондардың жайылу қызметтерін анықтау.
5. Динамикалық жүйемен қабылданған сигналдарды қалпына келтіру есептері.

Арнайы математикалық білімі жоқ, бірақ жұмыста математикалық әдістерді қолданатын мамандар үшін интегральды теңсіздіктерді, яғни, зерттеу, талдаудың интегральды әдістеріне сай келетін және физика, техника, биология, механика нақты есептерін есептеп шығару, пайдалана отырып, есептерді сипаттайтын әдістемемен танысуға мүмкіншілігі маңызды орын алады.

ДИССЕРТАЦИЯ ТАҚЫРЫБЫ БОЙЫНША ЖАРИЯЛЛАНҒАН ТІЗІМІ

1. «ИнЕУ хабаршысы» ғылыми журналы № 5 (54) Павлодар 2015 ж.
2. «Ұстаздар газеті» педагогикалық газеті № 1 (264) Павлодар 18 желтоқсан 2014 ж.

Abdrakhmanov K.

«Methods for solving integral-differential equations of Volterra type»

6M060100 – «Mathematics»

Abstract

The dissertation submitted in partial fulfillment of the
requirements for the degree of master
at

Innovative University of Eurasia

Pavlodar 2015

Academic supervisor:

Ph.D., docent
Danyarjva G.

Leading organization:

Innovative
University of Eurasia

Secretary SEB

Asylbekova S.

Urgency. A direct reflection of a significant expansion of the application of Volterra integral equations is observed in the last five decades, the rapid growth of interest in the theory and methods of their solutions from experts in the field of pure and applied mathematics, as well as in numerous applied research and development work.

Purpose - to review existing methods for solving and show them concrete examples.

The author's approach has been to show these solutions to many types of linear and non-linear equations with variable and constant limits of integration.

In connection with the purpose were as **follows**:

- Study of teaching materials
- Describe the ways and methods of solving problems
- Consider the application of the methods described in the specific examples of integral-differential equations.

The object of this work is to study methods for the solution of integral-differential equations of Volterra type.

Subject of research - Volterra equations I and type II.

The practical significance. This thesis presents the traditional methods for solving Volterra equations, such as convolution method, the method of successive approximations of the resolvent method, the solution of the integral equation by reducing it to a differential alignment, Volterra equation with degenerate kernel, Volterra equation with a difference kernel.

Publication of research results. On the topic of the dissertation is one article in a scientific journal "Vestnik InEU" and one published in the regional newspaper "Ystazdar gazeti."

The structure and volume of work. The work consists of an introduction, three chapters, conclusion, list of references, applications. Presented on 72 pages 32 problems solved by different methods and 26 literature sources.

Specific examples of applications:

1. The problem of the distribution of mass in galaxies in the known law of rotation.
2. The problem of the spatial distribution of luminosity in solar systems for the observed luminosity.
3. Determination of the local plasma emissivity integrated intensity of its radiation.
4. Determination of the distribution function of the electron energy in the plasma on the basis of the intensities of the spectral lines.
5. The task of restoring the signal received by the dynamic system.

For professionals who do not have special mathematical education, but in applying mathematical methods is essential opportunity to become familiar with the methodology describing problems using integral equations, ie, with corresponding

integrated research methods, analysis, calculation of specific problems in physics, engineering, biology, mechanics, etc.

List of publications on dissertation theme

1. The scientific journal “Vestnik InEU” № 5 (54) 2015 Pavlodar
2. The regional newspaper “Ustazdar gazety” № 1(264) Pavlodar December 18, 2014