

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ  
КАЗАХСТАН**

**ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

Е.А. Ковина

**ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА КОШИ**

Магистерская диссертация на соискание  
академической степени магистра естественных наук  
по специальности 6М060100 - Математика

ПАВЛОДАР – 2014

**Министерство образования и науки Республики Казахстан**

**Инновационный Евразийский университет**

Допущен (а) к защите:  
зав. кафедрой «МиИТ»,  
кандидат педагогических наук,  
\_\_\_\_\_ Ж.К. Даниярова  
(подпись)  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2014 г.

Магистерская диссертация

**ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА КОШИ**

специальность: 6М060100 - Математика

Магистрант

\_\_\_\_\_

(подпись)

Е.А. Ковина

(инициалы, фамилия)

Научный руководитель,  
Кандидат педагогических наук

\_\_\_\_\_

(подпись)

Ж.К. Даниярова

(инициалы, фамилия)

ПАВЛОДАР – 2014

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 Теория интеграла Коши	6
1.1 Интегрирование функций комплексного переменного	6
1.2 Теорема Коши	11
1.2.1 Постановка теоремы Коши	11
1.2.2 Понятие неопределенного интеграла в комплексной области	13
1.2.3 Теорема Коши на случай сложных контуров	16
1.3 Интеграл Коши	22
1.3.1 Формула Коши	22
1.3.2 Распространение формулы Коши в сложных контурах	24
1.3.3 Теорема Морерра и Руше	26
1.4 Интеграл типа Коши	29
1.4.1 Формулы Стохецкого	32
1.4.2 Формула Келдыша-Седова	37
1.4.4 Построение теории аналитических функций	43
2 Интеграл Коши в прикладных задачах	45
2.1 Прикладные задачи техники	45
2.1.1 Плоское векторное поле	45
2.1.2 Обтекание цилиндрического тела	48
2.1.3 Течение жидкости в каналах	61
2.2 Теория уравнений с частными производными	66
2.2.1 Система Калермана	66
2.2.2 Линейные эллиптические системы	70
2.2.3 Задача Трикоми	76
2.2.4 Задача о двумерном стационарном температурном поле	81
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	88
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	90

## ВВЕДЕНИЕ

Современная теория функций комплексного переменного охватывает очень большую область математики. Так называют обширную и разветвленную совокупность математических дисциплин – теоретических и прикладных. Развитие теории функций комплексного переменного позволило создать новые методы решения важнейших практических задач из различных разделов математического естествознания.... Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли так же русские и советские ученые: Н. И. Мусхелишвили занимался ее применениями к теории упругости, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев - к аэро- и гидродинамике, Н. Н. Богомолов и В. С. Владимиров - к проблемам квантовой теории поля. Так же комплексными числами пользовался и отец русской авиации Н. Е. Жуковский (1847 – 1921) при разработке теории крыла, автором которой он является. В этой работе будут излагаться основные свойства интеграла Коши и основанные на них эффективные методы решения различных краевых задач теории функции комплексного переменного.

**Актуальность темы.** Интеграл Коши и интеграл типа Коши составляют широкий класс задач, которые, с одной стороны, являются обобщением сингулярных интегральных уравнений, а с другой – обыкновенных дифференциальных уравнений или, в многомерном случае, уравнений в частных производных. Они тесно связаны с краевыми задачами теории функций комплексной переменной. Как обобщение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, относятся к задачам математической физики. Таким образом, как теория, так и методы исследования интеграла Коши лежат на стыке теорий краевых задач и задач математической физики. Обе эти тесно взаимосвязанные теории к настоящему времени хорошо развиты в качественном плане, то есть вопросы существования и единственности решений и их принадлежность к определенным функциональным пространствам исследованы глубоко и полно. Однако многие вопросы нахождения самих этих решений как для конкретных уравнений, так и для классов уравнений, определяемых классами коэффициентов и правых частей, остаются открытыми до сих пор. Поэтому актуальной задачей является разработка и теоретическое обоснование методов решения конкретных классов интегралов Коши. Современные возможности компьютерных технологий позволяют создавать новые подходы в решении задач названного типа, в частности – предложены авторские программы.

**Цель диссертации:** рассмотреть теорию интеграла Коши и ее приложения к различным классам задач.

**Задачи:**

- 1) Систематизировать теорию интеграла Коши, изложенную в разных источниках;
- 2) Классифицировать задачи, которые решаются с помощью теории интеграла Коши;
- 3) Показать различные методы применения теории интеграла Коши;

4) Рассмотреть возможные компьютерные программы в приложении интеграла Коши.

**Методы исследования:** Проведенная работа опирается на результаты общей теории функции комплексной переменной, методов решения интеграла Коши и типа Коши, основы которой заложены в работах.....

При выводе и обосновании полученных результатов в диссертации существенным образом используются результаты теории функций, сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений, краевых задач теории функций комплексного переменного и некоторые оценки теории приближенных методов.

**Результаты** полученные при написании магистерской диссертации были опубликованы в следующих статьях:

1. «История развития комплексных чисел и их роль в науке и технике», Вестник ИнЕУ №2, 2013, стр. 94-97;

2. «Математическое исследование стационарного температурного поля», Международный академический форум (сборник статей и научных докладов), 2013, стр. 66-69.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, двух глав, каждая из которых разбита на параграфы, заключения, приложения и списка цитированной литературы из 15 наименований. Общий объем работы 90 страниц.

# 1 Теория интеграла Коши

## 1.1 Интегрирование функций комплексного переменного

Перейдем к определению понятия интеграла в комплексной области. Пусть  $\omega = f(z)$  есть произвольная непрерывная функция комплексного переменного  $z$ , определенная в некоторой области  $G$  плоскости переменная  $z$ , и  $C$  – произвольная гладкая линия, лежащая в этой области, с началом в точке  $z_0$  и концом в точке  $Z$  в соответствии с рисунком 1 [1].

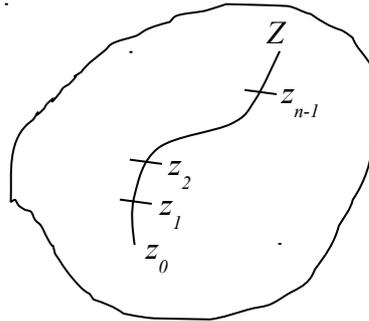


Рисунок 1. Гладкая линия  $C$

Разобьем дугу  $z_0Z$  линии  $C$  на произвольное число  $n$  частичных дуг с помощью точек  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = Z$ , расположенных последовательно в положительном направлении линии  $C$ . Каждой частичной дуге приведем в соответствие число  $f(z_k)\Delta z_k$ , полученное от умножения значения данной функции в левом конце этой дуги на соответствующее этой дуге приращение  $\Delta z_k$  переменного  $z$ :  $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ . Составим теперь сумму всех таких произведений, распространив ее на все частичные дуги:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k)\Delta z_k \quad (1)$$

Заставляя максимум длин всех частичных дуг стремиться к нулю, докажем, что выражение (1) стремится к определенному конечному пределу, не зависящему от того закона, по которому все частичные дуги стремятся к нулю. Для начала введем обозначения

$$z_k = x_k + y_k i,$$

$$f(z_k) = u(x_k, y_k) + v(x_k, y_k)i = u_k + v_k i,$$

$$\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k,$$

и представим выражение (1) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + v_k i) (\Delta x_k + i \Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k) \end{aligned} \quad (2)$$

Заставляя максимум длин всех частичных дуг стремиться к нулю, видим, что обе суммы правой части последнего равенства (2) стремятся соответственно к пределам

$$\int_C u dx - v dy \quad \text{и} \quad i \int_C v dx + u dy;$$

Следовательно, левая часть равенства (2) стремится к определенному конечному пределу, когда длины всех частичных дуг по произвольному закону стремятся к нулю. Этот предел назовем интегралом от  $f(z) dz$  вдоль линии  $C$  и обозначим через  $\int_C f(z) dz$ .

Итак, имеем:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \quad (3)$$

Эта формула дает выражение интеграла по комплексному переменному через два действительных криволинейных интеграла. Формулу (3) перепишем в виде

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + vi)(dx + idy), \quad (3')$$

так ее легче запомнить.

Предполагая уравнение линии  $C$  в виде  $z = z(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), найдем вычисление интеграла по комплексному переменному:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \{u[z(t)]x'(t) - v[z(t)]y'(t)\} dt + \\ &+ i \int_{\alpha}^{\beta} \{v[z(t)]x'(t) + u[z(t)]y'(t)\} dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

или

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} R(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} I(t) dt, \quad (4')$$

где  $R(t)$  и  $I(t)$  суть соответственно действительная часть и коэффициентов при мнимой части выражения  $f[z(t)] \cdot z'(t)$ . На основании формулы (4') вопрос вычисления интеграла по комплексному переменному приводится к вычислению обыкновенных определенных интегралов.

До этого предполагалось, что путь интегрирования  $G$  есть гладкая линия. Если имеем произвольную кусочно-гладкую линию  $\Gamma$ , состоящую из гладких линий  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , то по определению полагаем:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad (5)$$

Несомненно, формула (4'), которая выражает интеграл по комплексному переменному с помощью обыкновенных определенных интегралов, остается в силе для интеграла, взятого вдоль линии  $\Gamma$ , если данная функция  $f(z)$  непрерывна лишь вдоль этой линии.

Отметим теперь ряд простейших свойств интеграла по комплексному переменному, непосредственно вытекающих из его определения:

$$1) \int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma^+} f(z) dz,$$

где  $\Gamma^-$  и  $\Gamma^+$  обозначают один и тот же путь, проходимый соответственно в положительном и отрицательном направлениях.

$$2) \int_{\Gamma} a f(z) dz = a \int_{\Gamma} f(z) dz \quad (a - \text{постоянное}),$$

$$3) \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z) dz,$$

если путь интегрирования  $\Gamma$  описывается движущейся точкой, проходящей последовательно его части  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ .

$$4) \int_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)] dz = \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \int_{\Gamma} f_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z) dz.$$

все эти четыре свойства немедленно доказываются, исходя из определения интеграла как предела суммы, аналогично соответствующим свойствам обыкновенных интегралов.

5) Если вдоль линии  $\Gamma$  имеет место неравенство  $|f(z)| \leq M$ , где  $M$  есть постоянное число, то, обозначая через  $l$  длину линии  $\Gamma$ , имеем:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq Ml.$$

$$\text{Действительно: } \left| \sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} |f(z_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=0}^{k=n-1} |\Delta z_k| \leq Ml,$$

так как  $\sum_{k=0}^{k=n-1} |\Delta z_k|$  обозначает длину ломаной, вписанной в  $\Gamma$ .

Переходя к пределу, из последнего неравенства получим:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq MI.$$

б) Неравенство 5) может быть выведено также из более точного неравенства

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| = \int_{\Gamma} |f(z)| ds.$$

Последнее вытекает из неравенства

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)| |\Delta z_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)| \Delta s_k$$

переходом к пределу.

Рассмотрим интегрирование равномерно сходящегося ряда. Свойство 4) предыдущего пункта показывает, что интеграл от суммы конечного числа слагаемых равен сумме интегралов от слагаемых. Из интегрального исчисления известно, что, вообще говоря, нельзя интегрировать почленно бесконечный ряд функций, даже если он сходится к непрерывной функции. Однако интеграл суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций может быть определен через почленное интегрирование.

Сумма равномерно сходящегося на линии  $\Gamma$  ряда непрерывных функций

$$s(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots \quad (6)$$

есть функция, непрерывная на  $\Gamma$ . Из условия равномерной сходимости ряда (6) вдоль линии  $\Gamma$  следует, что при любом  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) существует число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что сумма  $n$  первых членов ряда (6)  $s_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z)$  отличается от суммы ряда  $s(z)$  по модулю меньше, нежели на  $\varepsilon$ , вдоль  $\Gamma$ , как только  $n \geq N = N(\varepsilon)$ .

Следовательно, если положим:

$$s(z) = s_n(z) + r_n(z) \quad (7)$$

то вдоль  $\Gamma$  имеем:

$$|r_n(z)| < \varepsilon \quad (8)$$

Обозначая через  $l$  длину линии  $\Gamma$ , получаем в силу (8), на основании свойства 5):

$$\left| \int_{\Gamma} [s(z) - s_n(z)] dz \right| = \left| \int_{\Gamma} r_n(z) dz \right| < \varepsilon l,$$

или

$$\left| \int_{\Gamma} s(z) dz - \int_{\Gamma} u_1(z) dz - \int_{\Gamma} u_2(z) dz - \dots - \int_{\Gamma} u_n(z) dz \right| < \varepsilon l,$$

т.е.

$$\int_{\Gamma} s(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma} u_1(z) dz + \int_{\Gamma} u_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} u_n(z) dz \right\} \quad (9)$$

Равенство (9) иначе может быть записано в таком виде:

$$\int_{\Gamma} s(z) dz = \int_{\Gamma} u_1(z) dz + \int_{\Gamma} u_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} u_n(z) dz + \dots \quad (10)$$

Доказанное предложение может быть еще формулировано таким образом: *если вдоль пути интегрирования последовательность непрерывных функций  $s_n(z)$  сходится равномерно к функции  $s(z)$ , то имеем:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} s_n(z) dz = \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) dz = \int_{\Gamma} s(z) dz. \quad (10')$$

**Примечание.** Это предложение может быть расширено следующим образом. Пусть равномерно для всех точек  $Z$ , принадлежащих пути интегрирования  $\Gamma$ , имеем  $\lim_{t \rightarrow \tau} f(z, t) = f(z)$ , где  $f(z, t)$  и  $f(z)$  суть функции, непрерывные вдоль  $\Gamma$ . Другими словами, для любого сколь угодно малого  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) существует число  $\delta = \delta(\varepsilon)$  такое, что  $|f(z, t) - f(z)| < \varepsilon$  при условии  $|t - \tau| < \delta$ , считая  $Z$  произвольной точкой на  $\Gamma$ .

Поступая аналогично предыдущему доказательству, получим:

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \int_{\Gamma} f(z, t) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

## 1.2 Теорема Коши

### 1.2.1 Постановка теоремы Коши

Из определения интеграла от непрерывной функции  $f(z)$  следует, что его значение зависит, вообще говоря: не только от подынтегральной функции, но и от пути интегрирования  $\Gamma$ . Иными словами, соединяя точки  $z_0$  и  $Z$  двумя различными линиями  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , принадлежащими односвязной области  $G$  и вычисляя  $\int f(z) dz$  вдоль каждой из этих линий, мы получим, вообще говоря, разные числа. Естественно возникает вопрос: каким условиям должна удовлетворять функция  $f(z)$  для того, чтобы значение ее интеграла не зависело от пути интегрирования, а определялось лишь

положениями начальной и конечной точек этого пути? Покажем, поступая так же, как в случае действительных криволинейных интегралов, что эта задача об условиях независимости интеграла от пути интегрирования равносильна задаче нахождения условий, при которых данный интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, равен нулю. Решение этой задачи мы можем поставить в зависимость от соответствующей задачи для действительных криволинейных интегралов вследствие того, что интеграл по комплексному переменному выражается через два действительных криволинейных интеграла [2]. Итак, предположим, что функция  $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ , аналитическая в односвязной области  $G$ , имеет в каждой точке этой области непрерывную производную. Отсюда следует, что функции  $u$  и  $v$  непрерывны в области  $G$  вместе с их частными производными, которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (*)$$

Обозначая через  $\Gamma$  произвольный замкнутый контур, лежащий в области  $G$ , и замечая, что в силу формулы (3)

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - \int_{\Gamma} v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy, \quad (11)$$

имеем

$$\int_{\Gamma} u dx - v dy = 0, \quad (12)$$

так как

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

и

$$\int_{\Gamma} v dx - u dy = 0, \quad (12')$$

так как

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вследствие равенств (12) и (12') формула (11) принимает вид

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (13)$$

Доказали, что если функция  $f(z)$ , однозначная в односвязной области  $G$ , имеет в каждой точке этой области непрерывную производную, то интеграл от этой функции, взятый вдоль любого замкнутого контура, принадлежащего области  $G$ , равен нулю. Это предложение является основным в теории

аналитических функций и называется теоремой Коши. В изложенном доказательстве теоремы Коши существенно предположение *непрерывности* производной функции  $f'(z)$ . Однако это ограничение не является необходимым для справедливости этой теоремы, и в следующей главе мы изложим другое доказательство теоремы Коши, предполагая лишь существование в области  $G$  конечной производной функции  $f'(z)$ . Таким образом, мы установим предложение Коши для любой функции  $f(z)$ , аналитической в области  $G$  [3].

Рассмотрим основную лемму. Пусть  $f(z)$  есть непрерывная функция, определенная в некоторой области  $G$  плоскости комплексного переменного  $z$ , и  $\Gamma$  — произвольная кусочно-гладкая линия, лежащая в этой области. При любом сколь угодно малом  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) существует ломаная линия  $P$ , вписанная в  $\Gamma$ , целиком лежащая в области  $G$ , такая, что

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon, \quad (14)$$

т. е. значение интеграла  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  можно аппроксимировать с любой степенью точности посредством значения того же интеграла, взятого вдоль ломаной линии  $P$ , вписанной в  $\Gamma$  и лежащей в области  $G$ .

### 1.2.2 Понятие неопределенного интеграла в комплексной области

Из доказанной теоремы Коши, как было указано выше, вытекает следующее предложение:

Если функция  $f(z)$  есть аналитическая в односвязной области  $G$ , то значение интеграла  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , взятого вдоль произвольной кусочно-гладкой линии  $\Gamma$ , принадлежащей области  $G$ , не зависит от линии  $\Gamma$ , а определяется лишь положениями начальной и конечной точек этой линии. То есть значение интеграла  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  не изменится, если будем произвольно деформировать линию  $\Gamma$ , не выходя за пределы области  $G$ , оставляя ее начало и конец неподвижными.

Рассмотрим выражение

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad (15)$$

где за путь интегрирования можно взять произвольную кусочно-гладкую линию  $\Gamma$ , соединяющую точки  $z_0$  и  $Z$ , лежащую в данной односвязной области  $G$ . Вследствие вышеупомянутого предложения значение функции  $F(z)$  не будет зависеть от пути интегрирования и, следовательно,  $F(z)$  есть однозначная функция, определенная в области  $G$ . Покажем, что в каждой точке  $Z$  области  $G$  функция  $F(z)$  имеет производную, равную  $f(z)$ . Обозначим через  $z+h$

любую точку области  $G$ , лежащую в произвольно малой окрестности точки  $z$ , рассмотрим разность

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta \quad (16)$$

причем за путь интегрирования в последнем интеграле можно взять прямолинейный отрезок, соединяющий точки  $z$  и  $z+h$  в соответствии с рисунком 2.

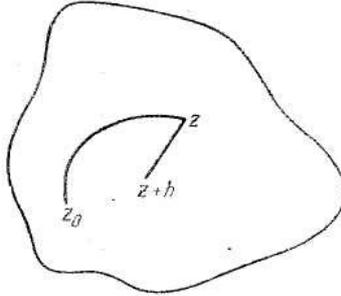


Рисунок 2. Прямолинейный отрезок на области

Разделив равенство (16) на  $h$ , получим:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta. \quad (16')$$

Заметив, что

$$f(z) = f(z) \frac{1}{h} \int_z^{z+h} d\zeta = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) d\zeta, \quad (17)$$

вычтем из равенства (16') равенство (17), получим следующее:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \quad (18)$$

Из-за непрерывности функции  $f(z)$  в точке  $z$ , при любом сколь угодно малом  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) существует число  $\delta = \delta(\varepsilon)$  такое, что имеем:  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ ,  $|\zeta - z| < \delta$ . Следовательно, если считать, что  $|h| < \delta$ , то модуль подынтегральной функции в интеграле (18) будем иметь  $\varepsilon$ . Таким образом, из равенства (18) находим:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon \cdot \frac{|h|}{|h|} = \varepsilon,$$

при  $|h| < \delta$ , то есть

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z),$$

или

$$F'(z) = f(z). \quad (19)$$

Следовательно, интеграл от функции  $f(z)$ , аналитической в односвязной области  $G$ , рассматриваемый как функция своего верхнего предела, есть функция, аналитическая в той области, производная которой равна подынтегральной функции.

Это доказательство основано лишь на двух свойствах функции  $f(z)$  [4]:

- 1)  $f(z)$  есть непрерывная функция в области  $G$ ,
- 2)  $\int f(z)dz$ , взятый вдоль любого замкнутого контура, лежащего в  $G$ , равен нулю.

При этих условиях  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$ , есть функция, аналитическая в области  $G$ , причем  $F'(z) = f(z)$ . Этим замечанием мы впоследствии воспользуемся.

Назовем неопределенным интегралом или примитивной функцией  $f(z)$  всякую функцию  $\Phi(z)$ , удовлетворяющую всюду в области  $G$  условию

$$\Phi'(z) = f(z). \quad (20)$$

Согласно изложенному  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$  является примитивной функцией для функции  $f(z)$ . Покажем, что любая примитивная функция  $\Phi(z)$  будет иметь вид

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta + C, \quad (21)$$

где  $C$  есть произвольное постоянное.

Действительно, из равенств (20) и (19) путем их вычитания следует:

$$(\Phi(z) - F(z))' = \psi'(z) = 0, \quad (22)$$

где через  $\psi(z)$  обозначена разность  $\Phi(z) - F(z)$ .

Полагая  $\psi(z) = u(x, y) + v(x, y)i$  и замечая, что  $\psi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}i$  получаем вследствие равенства (22):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

в области  $G$ . Следовательно, функции  $u$  и  $v$  суть постоянные в области  $G$ , а потому имеем:

$$\psi(z) = u + vi = C \text{ или } \Phi(z) - F(z) = C,$$

откуда

$$\Phi(z) = F(z) + C.$$

Следовательно, понимая под  $\Phi(z)$  одну из примитивных функций для функции  $f(z)$ , перепишем равенство (35) в виде

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C = \Phi(z). \quad (21')$$

Полагая здесь  $z = z_0$ , получим:  $C = \Phi(z_0)$ . Заменяя в равенстве (21') постоянное  $C$  найденным значением, получим:

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0). \quad (23)$$

Формула (23) выражает определенный интеграл через неопределенный. Итак, ограничиваясь функциями, аналитическими в односвязной области  $G$ , видно, что подобно обыкновенным интегралам интегрирование по комплексному переменному можно рассматривать с двух точек зрения: 1) как процесс суммирования, 2) как действие, обратное дифференцированию.

### 1.2.3 Теорема Коши на случай сложных контуров

Пусть  $\Gamma$  есть произвольная замкнутая кусочно-гладкая линия и  $f(z)$  — функция, аналитическая внутри  $\Gamma$ , а также в каждой точке линии  $\Gamma$ . В этом случае имеем [5]:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (24)$$

Действительно, около каждой точки, лежащей внутри  $\Gamma$  или на  $\Gamma$  можно описать, как около центра, круг, внутри которого данная функция  $f(z)$  есть аналитическая. В силу леммы Гейне — Боре существует конечное число таких кругов, содержащих внутри себя все точки замкнутой области с границей  $\Gamma$ . Совокупность точек, лежащих внутри этих кругов, представляет область  $G$ , содержащую линию  $\Gamma$  вместе с внутренними точкам. В области  $G$

функция  $f(z)$  есть аналитическая, причем внутри  $\Gamma$  нет граничных точек области  $G$ , а потому вследствие теоремы Коши имеем равенство (24).

Рассмотрим теперь  $n+1$  замкнутых кусочно-гладких линий  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  таких, что каждая из линий  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  лежит вне остальных и все они расположены внутри  $\Gamma_0$ . Множество точек плоскости, лежащих одновременно внутри  $\Gamma_0$  и вне линий  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  будет представлять  $n+1$ -связную область  $D$ , граница которой состоит из линий  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ . В этом случае можно сказать, что граница области  $D$  представляет собой сложный контур  $\Gamma = \Gamma_0^+ + \Gamma_1^- + \dots + \Gamma_n^-$  состоящий из линии  $\Gamma_0$ , проходимой в положительном направлении, и остальных линий  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  проходимых в отрицательном направлении. Другими словами, если точка движется по сложному контуру  $\Gamma$ , то точки области  $D$  остаются с левой стороны в соответствии с рисунком 3. Предполагая функцию  $f(z)$  аналитической в замкнутой области  $\bar{D}$ , покажем что

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (25)$$

где положено

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_0^+} + \int_{\Gamma_1^-} + \dots + \int_{\Gamma_n^-}.$$

В этом заключается обобщение теоремы Коши на случай сложного контура.

Для доказательства соединим линии  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  в циклическом порядке с помощью вспомогательных линий в соответствии с рисунком 3:  $ab, cd, ef$  и рассмотрим две замкнутые линии:  $\gamma = amfendcpba$  и  $\gamma' = abp'cdn'efm'a$ .

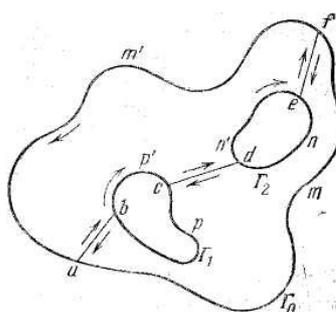


Рисунок 3. Сложный контур

Так как функция  $f(z)$  согласно условию будет аналитической как внутри, так и на каждой из линий  $\gamma$  и  $\gamma'$ , то по доказанному имеем:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad \int_{\gamma'} f(z) dz = 0.$$

Складывая между собой последние два равенства, окончательно получим:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

потому что интегральная по вспомогательным линиям ( $ab, cd, ef$ ) совершаются два раза в противоположных направлениях, а потому уничтожаются.

Доказанное равенство (39) можно также записать в виде

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z) dz, \quad (25')$$

где интегрирование совершается в положительном направлении линий  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ . В самом деле, заметим, что в силу равенства (25) имеем:

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz + \int_{\Gamma_1^-} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n^-} f(z) dz = 0, \quad (25'')$$

перенесем все члены равенства (25''), кроме первого члена, в правую часть и изменим в этих членах направление интегрирования; тогда получим формулу (25').

В частности, если замкнутая линия  $\Gamma_0$  содержит внутри себя замкнутую линию  $\Gamma_1$  и функция  $f(z)$  будет аналитической как между этими линиями  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , так и на самих линиях, то значение интеграла  $\int f(z) dz$  вдоль любой из этих линий будет одним и тем же числом.

Обратим внимание на логарифмическую функцию в плоскости комплексного переменного. Если нулевая точка лежит вне замкнутого контура, то  $\int \frac{dz}{z}$  взятый вдоль этого контура, равен нулю, потому что функция  $1/z$  есть аналитическая всюду в плоскости комплексного переменного  $z$ , кроме  $z = 0$ . Если же нулевая точка лежит внутри замкнутого контура, то на основании предыдущего  $\int \frac{dz}{z}$ , взятый вдоль этого контура, имеет определенное постоянное значение, не зависящее от формы контура. Чтобы вычислить это значение, достаточно принять за контур интегрирования окружность  $C$  с центром в нулевой точке произвольного радиуса  $R$ . В этом случае имеем:

$$z = Re^{i\varphi}, \quad dz = Rie^{i\varphi} d\varphi \quad \text{и} \quad \frac{dz}{z} = id\varphi.$$

Следовательно, получаем:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} id\varphi = 2\pi i. \quad (26)$$

Полученное число  $2\pi i$  представляет значение интеграла  $\int \frac{dz}{z}$  вдоль любого замкнутого контура, окружающего нулевую точку.

Рассмотрим теперь функцию

$$\omega = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (27)$$

где интегрирование может совершаться по любой линии, соединяющей точку 1 с точкой  $z$  в соответствии с рисунком 4. Если  $z$  есть действительное положительное число  $x$  и путем интегрирования служит отрезок  $[1, x]$  действительной оси, то  $\omega = \ln x$ . Естественно, считая  $z$  произвольным комплексным числом, положить  $\omega = \ln x$ . Таким образом, мы определяем здесь логарифмическую функцию в плоскости комплексного переменного  $z$  [6].

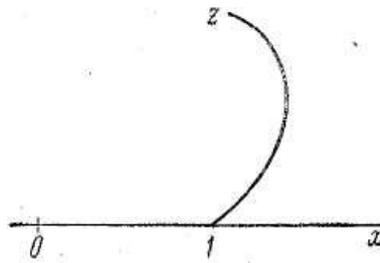


Рисунок 4. Линия интегрирования

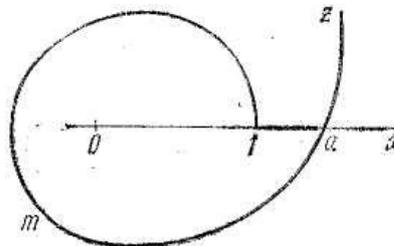


Рисунок 5. Логарифмическая функция в плоскости

Изучим ее свойства. Прежде всего заметим, что  $\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$  будет многозначной функцией, имеющей в каждой точке  $z$  бесконечное множество различных значений соответственно различным путям интегрирования, соединяющим точки 1 и  $z$ . Так, обозначая через  $(\ln z)_0$  значение интеграла  $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ , взятого вдоль пути, не окружающего нулевую точку в соответствии с рисунком 4, видно, что значение того же интеграла, взятого вдоль пути, окружающего один раз в положительном направлении нулевую точку, будет  $(\ln z)_0 + 2\pi i$ , потому что имеем в соответствии с рисунком 5:

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{1ma1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{1az} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i + (\ln z)_0.$$

Если путь интегрирования делает  $n$  оборотов в положительном или отрицательном направлении около нулевой точки, то, очевидно, к значению  $(\ln z)_0$  прибавляется (или отнимается) число  $2\pi i n$ . Таким образом, при всяком  $z \neq 0$  имеем:

$$\omega = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z = (\ln z)_0 + 2\pi i k, \quad (27')$$

где  $k$  обозначает любое целое число, т. е. все значения  $\ln z$  отличаются друг от друга на кратное  $2\pi i$ .

Если  $z$  — число, действительное положительное, то одно из этих значений будет действительным  $(\ln z)_0$ , все остальные — мнимыми. Это действительное значение  $\ln z$  и рассматривается в анализе. Если же  $z$  — число отрицательное или мнимое, то все значения  $\ln z$  будут мнимыми.

Таким образом, функция  $\omega = \ln z$ , определенная во всей плоскости комплексного переменного  $z$ , кроме  $z = 0$ , является бесконечнозначной. Чтобы иметь возможность рассматривать эту функцию как однозначную, очевидно, нужно выбрать такую область плоскости, в которой нельзя провести замкнутой линии, окружающей нулевую точку. Так, если разрезать плоскость вдоль отрицательной действительной оси, то любой замкнутый контур, лежащий в этой «разрезанной плоскости», будет оставлять вне себя нулевую точку. В этой «разрезанной плоскости»  $\omega = \ln z$  может быть рассматриваема как однозначная функция комплексного переменного  $z$ .

Докажем теперь, что функция  $\omega = \ln z$  является обратной относительно показательной функции [7]

$$e^\omega = z. \quad (28)$$

Так как показательная функция  $e^\omega$  во всей плоскости переменного  $\omega$  отлична от нуля, то значение  $z = 0$  мы оставляем вне рассмотрения. Пусть  $z$  есть данное число, отличное от нуля:  $z = \rho e^{i\varphi} (-\pi < \varphi \leq +\pi)$ . Из уравнения (28) получим, полагая  $\omega = u + vi$ ;  $e^u e^{vi} = \rho e^{i\varphi}$ , и, следовательно, должны иметь:

$$e^u = \rho, \quad v = \varphi + 2\pi k, \quad (29)$$

где  $k$  - любое целое число.

Когда  $u$ , возрастая, пробегает все действительные значения, то  $\rho = e^u$  возрастает, принимая всевозможные положительные значения. Таким образом, уравнение  $e^u = \rho$  имеет единственное действительное решение  $u = \ln \rho$ .

Итак, если  $z = \rho e^{i\varphi} (-\pi < \varphi \leq +\pi)$ , то общее решение уравнения (28) будет:  $\omega = \ln \rho + \varphi i + 2\pi i k$ , где  $k$  — любое целое число. Если  $z$  изменяется в «разрезанной плоскости» ( $k = 0$ ), то, очевидно, функция  $\omega$  будет однозначной. Итак, существует функция  $\omega = \ln \rho + \varphi i$ , однозначная в «разрезанной

плоскости», удовлетворяющая уравнению (28). Дифференцируя тождество  $e^\omega = z$  относительно  $z$ , получим  $e^\omega \frac{d\omega}{dz} = 1$ , откуда  $\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{z}$ .

Таким образом, в «разрезанной плоскости»  $\omega$  должна быть примитивной функцией для функции  $1/z$ , обращающейся в нуль при  $z = 1$ . Отсюда на можно написать:  $\omega = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$  где интегрирование совершается по любому пути, соединяющему точку 1 и  $z$ , лежащему в «разрезанной полуплоскости».

Если мы заставим переменное  $z$  изменяться во всей плоскости, то, очевидно, общее решение  $\omega$  уравнения (28) будет совпадать с функцией  $\ln z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$ , где интегрирование производится по любому пути между точками 1 и  $z$ . Доказав, что логарифмическая функция, определенная нами посредством интеграла, совпадает с обращением показательной функции, заметим, что вычисление интеграла  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$ , взятого вдоль замкнутого контура  $\Gamma$ , содержащего внутри себя точку  $z_0$ , приводится с помощью подстановки  $z = z_0 + \zeta$  к вычислению  $\int_{\Gamma'} \frac{d\zeta}{\zeta}$ , где замкнутый контур  $\Gamma'$  содержит внутри себя нулевую точку. Следовательно, значение  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$  равно  $2\pi i$ . Очевидно, этот интеграл равен нулю, если точка  $z_0$  лежит вне замкнутого контура интегрирования, потому что подынтегральная функция  $\frac{1}{z - z_0}$  является аналитической всюду в плоскости комплексного переменного  $z$ , кроме точки  $z = z_0$ .

### 1.3 Интеграл Коши

#### 1.3.1 Формула Коши.

Пусть  $G$  есть односвязная область, ограниченная произвольной кусочно-гладкой линией  $\Gamma$ , и  $f(z)$  — функция, аналитическая, в замкнутой области  $\bar{G}$ . Это значит, что функция  $f(z)$  имеет определенную конечную производную в каждой точке некоторой области  $G'$ , содержащей  $\bar{G}$ . Формула Коши, к выводу которой мы сейчас перейдем, выражает значение функции  $f(z)$  во всякой точке, внутренней к линии  $\Gamma$ , через значения этой функции на контуре  $\Gamma$ . Отсюда вытекает, что значения аналитической функции тесно связаны между собой, так как ее значения вдоль замкнутого контура  $\Gamma$  вполне определяют ее значения внутри  $\Gamma$ . Эта формула Коши имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (30)$$

где  $z$  — любая точка внутри  $\Gamma$ , и интегрирование совершается по контуру  $\Gamma$  в положительном направлении.

Для доказательства, обозначив через  $z$  произвольную точку области  $G$  рассмотрим функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}. \quad (31)$$

Эта функция  $\varphi(\zeta)$  есть аналитическая во всех точках замкнутой области  $\bar{G}$ , кроме точки  $\zeta = z$ . Описывая около точки  $z$ , как центра, окружность  $\mathcal{U}$  произвольно малого радиуса  $\rho$ , целиком лежащую в области  $G$ , видно, что  $\varphi(\zeta)$  будет аналитической функцией во всех точках, лежащих между контурами  $\Gamma$  и  $\mathcal{U}$ , включая и самые контуры в соответствии с рисунком 6.

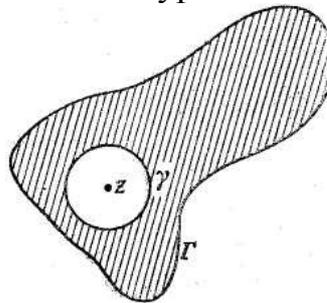


Рисунок 6. Односвязная область  
Следовательно, на основании теоремы Коши имеем:

$$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\mathcal{U}} \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (32)$$

Равенство (32) показывает, что значение  $\int_{\mathcal{U}} \varphi(\zeta) d\zeta$  не зависит от радиуса  $\rho$  вспомогательной окружности  $\mathcal{U}$ , будучи постоянным числом, равным значению  $\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta$ . Чтобы определить это постоянное значение  $\int_{\mathcal{U}} \varphi(\zeta) d\zeta$ , заметим, что функция  $\varphi(\zeta)$  стремится к определенному конечному пределу, когда точка  $\zeta$ , стремится к точке  $z$ . Действительно, из равенства (31) следует:

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \varphi(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z).$$

Следовательно, если принять  $f'(z)$  за значение функции  $\varphi(\zeta)$  в точке  $\zeta = z$ , то  $\varphi(\zeta)$  становится непрерывной функцией всюду в замкнутой области  $\bar{G}$ , предположим:  $|\varphi(\zeta)| < M$ , где  $M$  — постоянное, какова бы ни была точка  $\zeta$  области  $U$ . пользуясь  $G$  последним неравенством, получаем:

$$\left| \int_{\mathcal{U}} \varphi(\zeta) d\zeta \right| < M \cdot 2\pi\rho,$$

откуда следует, что  $\int_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = 0$ , так как  $\rho$  можно принять сколь угодно малым, а значение нашего интеграла есть постоянное число.

Обращаясь к равенству (32), перепишем его так:

$$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = 0. \quad (32')$$

Заменяя в последнем равенстве  $\varphi(\zeta)$  по формуле (31), получим:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \text{ или } \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad (33)$$

Так как имеем:  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\zeta - z} = 2\pi i$ , то формула (33) примет вид

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \cdot 2\pi i, \text{ или } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

что и нужно доказать.

### 1.3.2 Распространение формулы Коши в сложных контурах

До этого предполагалось, что область  $G$  односвязная. Покажем, что формула Коши представленная ранее может быть распространена и на случай многосвязной области  $G$ . Итак, рассмотрим многосвязную область  $G$ , границей которой является сложный контур  $\Gamma$ , состоящий из конечного числа кусочно-гладких замкнутых линий. Предполагая  $f(z)$  аналитической функцией в замкнутой области  $\bar{G}$ , установим формулу Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (34)$$

где  $z$  — любая точка области  $G$ , а интегрирование совершается вдоль сложного контура  $\Gamma$  в положительном направлении в соответствии с рисунком 7.

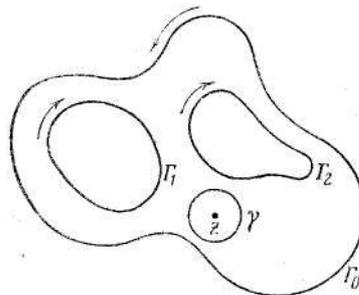


Рисунок 7. Сложный контур  $\Gamma$  в положительном направлении

Для доказательства окружим точку  $z$  замкнутым контуром  $\mathcal{U}$  (например, окружностью с центром в точке  $z$ ), настолько малым, чтобы все точки этого контура  $\mathcal{U}$  вместе с его внутренними точками принадлежали области  $G$  в соответствии с рисунком 7. Рассмотрим сложный контур  $\Gamma' = \Gamma + \bar{\gamma}$ , полученный от присоединения к первоначальному контуру  $\Gamma$  линии  $\mathcal{U}$ , проходимой в отрицательном направлении. Область, ограниченную контуром  $\Gamma'$ , обозначим через  $G'$ . Очевидно, функция  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  будет аналитической в замкнутой области  $\bar{G}'$ , а потому на основании теоремы Коши имеем:

$$\int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0, \text{ или } \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \int_{\bar{\gamma}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

откуда находим:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (35)$$

где интегрирование совершается по контурам  $\Gamma$  и  $\mathcal{U}$  в положительном направлении. Так как функция  $f(z)$  есть аналитическая во всех точках, внутренних к контуру  $\mathcal{U}$ , включая и точки самого контура, то на основании предыдущего пункта имеем:

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z).$$

Внося последнюю формулу в равенство (35), получим окончательно:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z),$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где  $f(z)$  есть функция, аналитическая в замкнутой области  $\bar{G}$ , границей которой служит контур  $\Gamma$ , называется *интегралом Коши*. По доказанному интеграл Коши изображает данную функцию  $f(z)$  во всякой точке  $z$ , внутренней к контуру  $\Gamma$ , т. е. лежащей в области  $G$ . Очевидно, во всякой точке  $z$ , лежащей вне замкнутой области  $\bar{G}$ , интеграл Коши равен нулю. В самом

деле, функция  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  есть аналитическая во всех точках замкнутой области  $\bar{G}$ , если точка  $z$  лежит вне этой области  $G$ . Следовательно, на основании теоремы Коши имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

### 1.3.3 Теоремы Морера и Руше

Теорема Мореры представляет собой обращение (неполное) интегральной теоремы Коши и является одной из основных теорем теории функций комплексного переменного. Она может быть сформулирована так:

*Если функция  $f(z)$ , непрерывная в односвязной области  $G$ , для всякого кусочно-гладкого замкнутого контура  $\Gamma$ , лежащего в этой области, удовлетворяет равенству  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ , то  $f(z)$  есть аналитическая функция в области  $G$ .*

Действительно, при условиях этой теоремы выражение  $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$  не зависит от пути, соединяющего точки  $z_0$  и  $z$  в области  $G$ , и определяет функцию  $F(z)$ , аналитическую в области  $G$ , причем имеем:  $F'(z) = f(z)$ . Если  $F'(z)$  как производной функции, аналитической в области  $G$ , есть функция, аналитическая в  $G$ , то  $f(z) = F'(z)$  есть функция, аналитическая в области  $G$ .

Доказательство основано на том, что функция, удовлетворяющая условиям теоремы, будет иметь первообразную в  $D$ , т.е. существует такая функция  $F(z)$ , что  $\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$ .

Но функция, комплексно дифференцируемая один раз, является аналитической, поэтому её производная  $f$  также будет аналитической.

Теорема Мореры является основным способом доказательства аналитичности некоторой сложно определённой функции. Одним из центральных утверждений при этом является то, что если последовательность  $f_n$  аналитических функций равномерно сходится к функции  $f_n$ , то

$$\oint \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint f_n(z) dz = 0 \quad (36)$$

поэтому, по теореме Мореры, предельная функция также будет голоморфной. Таким образом доказывается голоморфность многих функций, определённых рядами и интегралами, например, дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (37)$$

и гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (38)$$

Теорема Мореры также используется для доказательства аналитичности функции, построенной по принципу симметрии.

Эта теорема была получена итальянским математиком Джиачинто Морерой (*итал.*) в 1886 году.

По теореме Руше, если функции  $f(z)$  и  $g(z)$  голоморфны в односвязной области  $G$ , а на контуре  $\partial G$  выполняется неравенство  $|g(z)| < |f(z)|$ , то в области  $G$  функции  $f$  и  $f+g$  имеют одинаковое количество нулей, при условии, что каждый ноль подсчитан с учётом кратности.

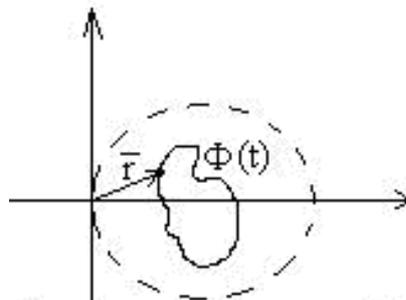
Или  $f(z)$  и  $g(z)$  голоморфны в односвязной области  $G$ ,  $h=f+g$ , а  $K$  — стандартный компакт, лежащий в  $G$ . Если  $|g(z)| < |f(z)| \forall z \in Fr(K)$ , то

$$\int_{\partial K} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (39)$$

**Теорема:** Пусть область  $D \subset C$  ограничена кусочно-гладкой границей  $\Gamma = \partial D$  и функции  $f(z)$  и  $g(z)$  аналитичны в области  $D' : |D \cup \Gamma| \subset D'$ . Если  $\forall t \in \Gamma$  выполняется неравенство  $|f(t) - g(t)| < |g(t)|$ , то функции  $f(z)$  и  $g(z)$  имеют в  $D$  одинаковое число нулей с учетом кратности, то есть  $\sum_{z \in D} ord_z f = \sum_{z \in D} ord_z g$ .

*Доказательство:* Из условия  $|f(t) - g(t)| < |g(t)|$  следует, что  $g(t) \neq 0$  на  $\Gamma$ , т. к. слева стоит неотрицательная величина и строгое неравенство. А также  $f(t) \neq 0$  на  $\Gamma$  в силу того, что неравенство строгое. Отсюда следует в силу аналитичности и ограниченности  $D$ , что эти функции имеют конечное число изолированных нулей внутри  $D$ . Рассмотрим функцию  $\Phi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ , которая будет аналитичной в некоторой окрестности  $\Gamma$ . Для этой функции нули  $f(z)$  являются нулями, а нули  $g(z)$  являются полюсами.

Таким образом для  $\Phi(z)$  имеет место принцип аргумента. В силу условия теоремы:  $\forall t \in \Gamma : \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| < 1$ , или  $|\Phi(t) - 1| < 1$ . Это неравенство означает, что  $\Phi(\Gamma) \subset \{w : |w-1| < 1\}$  в соответствии с рисунком 8. В силу этого, приращение аргумента  $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} Arg(\Phi(t)) = 0 = \sum_{z \in D} ord_z f - \sum_{z \in D} ord_z g$ . Отсюда сразу следует утверждение теоремы. Теорема доказана.



## Рисунок 8. Функция $\Phi(t)$

Докажем основную теорему алгебры о том, что многочлен  $P_n(z)$  степени  $n$  имеет ровно  $n$  корней с учетом кратности.

*Доказательство:* Многочлены  $P_n(z)$  аналитичны на всей  $C$ .

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P_n(z) = \infty \Rightarrow \exists R_0 : \forall z, (|z| > R_0) \Rightarrow P_n(z) \neq 0.$$

То есть все нули многочлена лежат в круге  $R_0$ . Пусть теперь

$$f(z) = P_n(z) = a_0 + \dots + a_n z^n; \quad g(z) = a_n z^n.$$

Тогда

$$\frac{|f(z) - g(z)|}{|g(z)|} = \frac{|a_0 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}|}{|a_n z^n|} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0,$$

следовательно  $\exists R_1 > R_0$ , такой, что  $\forall z : |z| \geq R_1$  эта дробь будет меньше единицы, а это означает, что будет выполняться условие теоремы Руше, где  $\Gamma = (t : |t| = R_1)$ . Функция  $g(z)$  имеет в круге  $B(0, R_1)$  один корень  $z_0 = 0$  кратности  $n$ , а все корни  $P_n(z)$  лежат в круге  $B(0, R_0) \subset B(0, R_1)$  (по построению). Теорема доказана.

### 1.4 Интеграл типа Коши

Пусть  $L$  есть произвольная кусочно-гладкая линия, замкнутая или незамкнутая, и  $\varphi(z)$  — определенная вдоль  $L$  непрерывная функция. Выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (40)$$

имеет определенное значение для каждой точки  $z$ , не лежащей на  $L$ , и, следовательно, определяет однозначную функцию  $F(z)$  во всех точках  $z$ , не принадлежащих  $L$ . Если  $L$  есть замкнутая линия и функция  $\varphi(z)$  — аналитическая повсюду, внутри  $L$  и на  $L$ , то, как известно, выражение (40) равно  $\varphi(z)$ , если точка  $z$  лежит внутри  $L$ , и равно нулю, если точка  $z$  лежит вне  $L$ . В этом случае выражение (40) назовем интегралом Коши. Естественно назвать выражение (40) при общих вышеуказанных предположениях относительно функции  $\varphi(z)$  интегралом типа Коши. При образовании интеграла типа Коши нужно, следовательно, а priori задать функцию  $\varphi(z)$  лишь на контуре интегрирования  $L$ . Непрерывность  $\varphi(\zeta)$  требуется лишь для того, чтобы интеграл (40), наверное имел смысл [3].

**Теорема 1.** *Функция  $F(z)$ , определенная интегралом типа Коши (40), есть аналитическая во всякой односвязной области  $G$ , не содержащей точек линии  $L$ , и для ее производной имеет место формула*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \quad (41)$$

**Доказательство.** Пусть  $z$  есть произвольная точка области  $G$ . Теорема будет доказана, если мы покажем, что функция  $F(z)$  имеет в этой точке производную, определяемую по формуле (41). Обозначим через  $z + h$  любую точку области  $G$  и рассмотрим отношение

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h}. \quad (42)$$

Заставляя  $h$  стремиться к нулю при  $z$  постоянном, покажем, что отношение (42) стремится к конечному пределу, определяемому по формуле (41). С этой целью преобразуем отношение (42) таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z - h} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}. \end{aligned} \quad (43)$$

Заставляя  $h$  стремиться к нулю и переходя к пределу под знаком последнего интеграла, получили бы из равенства (43):

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Остается доказать, что выполненный нами формально переход к пределу действительно возможен. Для доказательства составим разность между нашим выражением  $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}$  и его предполагаемым пределом  $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}$  и покажем, что эта разность стремится к нулю вместе с  $h$ . Действительно, эта разность имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \quad (44)$$

Оценим модуль разности (44). Очевидно, имеем:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \right| < \frac{|h|}{2\pi} \int_L \frac{M|d\zeta|}{|\zeta - z - h||\zeta - z|^2} \quad (45)$$

где предположено, что  $|\varphi(\zeta)| < M$ , так как  $\varphi(\zeta)$  по условию есть непрерывная вдоль  $L$  функция. Обозначая через  $2d (d > 0)$  расстояние от линии  $L$  до точки  $z$ , т. е. минимум всевозможных расстояний между точками, из которых одна принадлежит  $L$ , а другая есть точка  $z$ , имеем  $|\zeta - z| > d$ ,  $|\zeta - z - h| > d$ , если  $|h|$  достаточно мало, какова бы ни была точка  $\zeta$ , принадлежащая  $L$ . Заметив это, видно, что правая часть неравенства (45) меньше, чем

$$\frac{|h|MI}{2\pi d^3}, \quad (46)$$

где через  $l$  обозначена длина линии  $L$ . Выражение (46) стремится к нулю вместе с  $h$ , следовательно, и разность (44) стремится к нулю вместе с  $h$ .

Таким образом, разность между отношением (42) и интегралом (41) стремится к нулю вместе с  $h$ , что и доказывает нашу теорему.

Формула (41) показывает, что для получения производной функции  $F(z)$  нужно выполнить формальное дифференцирование по параметру  $\gamma$  в интеграле типа Коши (40), посредством которого определяется эта функция  $F(z)$ .

Аналогично доказывается, что это дифференцирование можно, повторить второй раз и вообще сколь угодно большое число раз.

**Т е о р е м а II.** *Функция  $F(z)$ , определяемая интегралом типа Коши (40), имеет в каждой точке  $z$ , лежащей вне  $L$ , производные всех порядков, для которых имеют место формулы*

$$F^n(z) = \frac{2^n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad (47)$$

и вообще

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (48)$$

Чтобы доказать формулу (47), воспользуемся формулой (41); тогда получим:

$$\begin{aligned} & \frac{F'(z+h) - F'(z)}{h} - \frac{2!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^3} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(\zeta) \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{2}{(\zeta - z - h)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) - \frac{2}{(\zeta - z)^3} \right] d\zeta \end{aligned} \quad (49)$$

Вопрос сводится к тому, чтобы доказать, что интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, стремится к нулю вместе с  $h$ . Квадратная скобка под этим интегралом, равная,

$$h \frac{3(\zeta - z) - 2h}{(\zeta - z)^3 (\zeta - z - h)^2},$$

имеет модуль., меньший, чем,  $|h|M_1$  где  $M_1$  не зависит от  $\zeta$ , так как

$$\left| \frac{3(\zeta - z) - 2h}{(\zeta - z)^3(\zeta - z - h)^2} \right| < M_1$$

при достаточно малых значениях  $h$ , какова бы ни была точка  $\zeta$  на  $L$ . Таким образом, модуль интеграла, стоящего во второй части равенства (49), меньше, чем  $\frac{|h|l}{2\pi}MM_1$  (где  $M$  и  $l$  имеют те же значения, что в теореме I), и, следовательно, стремится к нулю вместе с  $h$ . Применяя метод полной индукции, аналогично докажем справедливость формулы (48) для любого натурального числа  $n$ .

### 1.3.1 Формулы Стохоцкого

Теорема Ю.В. Сохоцкого. Пусть  $\zeta_0$  является правильной точкой контура  $C$  и отлична от его концов, функция  $f(\zeta)$  удовлетворяет в этой точке условию Гёлдера с показателем  $\mu \leq 1$  и  $z \rightarrow \zeta_0$  так, что отношение  $h/d$  остается ограниченным [8]. Тогда интеграл типа Коши обладает предельными значениями  $F^+(\zeta_0)$  и  $F^-(\zeta_0)$ , к которым он стремится при  $z \rightarrow \zeta_0$  слева и соответственно справа от  $C$ , и

$$\left. \begin{aligned} F^+(\zeta_0) &= F(\zeta_0) + \frac{1}{2}f(\zeta_0), \\ F^-(\zeta_0) &= F(\zeta_0) - \frac{1}{2}f(\zeta_0), \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где  $F(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2}f(\zeta_0)$ .

Пусть сначала  $C$  – замкнутая кривая, проходимая в положительном направлении. Имеем:

$$F(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f(\zeta_0)}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad (51)$$

причем по доказанной лемме первый интеграл в правой части при  $z \rightarrow \zeta_0$  стремится к пределу

$$\int_C \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta,$$

а второй интеграл равен  $2\pi i$ , или 0, смотря по тому, лежит ли точка  $z$  слева или справа от контура  $C$  (т. е. внутри или вне  $C$ ). Учитывая это, мы перейдем к формуле (51) к пределу при  $z \rightarrow \zeta_0$  (слева или справа от  $C$ ):

$$F^+(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + f(\zeta_0);$$

$$F^-(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

Получили искомые формулы Сохоцкого (50).

Если теперь  $C$  — незамкнутая кривая, то мы дополним ее произвольной линией  $C'$  до замкнутой кривой  $C_0 = C + C'$  и положим  $f(\zeta) = 0$  на линии  $C'$ . Тогда, очевидно,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

и если  $\zeta_0$  не совпадает с концом кривой  $C$ , то по только что доказанному будут справедливы формулы Сохоцкого (50), в которых интеграл  $F(\zeta_0)$  берется вдоль  $C_0$ . Но так как  $f(\zeta) = 0$  на кривой  $C'$ , то последний интеграл можно заменить интегралом вдоль  $C$ . Теорема доказана.

Если  $\zeta_0$  является угловой точкой  $C$  с углом между касательными, равным  $\alpha$ , получим формулу Сохоцкого в несколько более общем виде:

$$\left. \begin{aligned} F^+(\zeta_0) &= F(\zeta_0) + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) f(\zeta_0), \\ F^-(\zeta_0) &= F(\zeta_0) - \frac{\alpha}{2\pi} f(\zeta_0). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Из формул Сохоцкого (50), а для случая угловой точки — (52) заключаем, что при переходе черва линию интегрирования  $C$  в точке  $\zeta_0$  интеграл типа Коши испытывает скачок:

$$F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = f(\zeta_0). \quad (53)$$

Формула (53) содержит решение проблемы, поставленной в начале пункта, о нахождении условий, при которых интеграл типа Коши является интегралом Коши. Мы видим, что если кривая  $C$  замкнута и в каждой ее точке  $F^-(\zeta) = 0$ , то предельное значение  $F(z)$  изнутри  $C$ , т. е.  $F^+(\zeta)$ , равно  $f(\zeta)$ , а это и означает, что  $F(z)$  является интегралом Коши. С другой стороны, если  $F(z)$  является интегралом Коши, то  $F^+(\zeta) = f(\zeta)$  и, следовательно,  $F^-(\zeta) = 0$ . Таким образом, условие

$$F^-(\zeta) = 0, \quad (54)$$

выполняемое в каждой точке  $C$ , является необходимым и достаточным для того, чтобы интеграл был интегралом Коши. Это условие, очевидно, одновременно является и условием того, что заданные на  $C$  значения  $f(\zeta)$  являются граничными значениями функции, аналитической внутри  $C$ . Его можно высказать в более удобной форме.

**Т е о р е м а 3.** Если функция  $f(\zeta)$  в каждой точке замкнутого контура  $C$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\mu \leq 1$ , то для того, чтобы ее значения являлись граничными значениями функции, аналитической внутри  $C$ , необходимо и достаточно выполнение следующих равенств:

$$\int_C \zeta^n f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (55)$$

В самом деле, так как для больших  $|z|$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}},$$

то для интеграла типа Коши в окрестности бесконечно удаленной точки имеем разложение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z^{n+1}} \int_C \zeta^n f(\zeta) d\zeta. \quad (56)$$

Отсюда следует, что если выполнены все условия (55), то в окрестности бесконечно удаленной точки  $F(z) \equiv 0$ . Но так как интеграл типа Коши  $F(z)$  аналитичен всюду вне контура  $C$ , то по теореме единственности отсюда вытекает, что  $F(z) \equiv 0$  всюду вне  $C$ . Таким образом, внешние предельные значения  $F^-(\zeta) \equiv 0$ , т. е.  $F^+(\zeta) = f(\zeta)$  и значения  $f(\zeta)$  являются граничными значениями аналитической внутри  $C$  функции.

Обратно, если значения  $f(\zeta)$  являются граничными значениями функции, аналитической внутри  $C$ , то для любой точки  $z$ , лежащей вне  $C$ , дробь  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  как функция точки  $\zeta$  будет аналитической внутри контура  $C$  и непрерывной на нем. Тогда по теореме Коши для всех таких  $z$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0$$

и, следовательно, в разложении (56) все коэффициенты равны 0. Это и есть условия (55); теорема доказана.

Очевидна также следующая

**Т е о р е м а 4.** В условиях предыдущей теоремы необходимым и достаточным условием того, чтобы значения  $f(\zeta)$  были граничными значениями функции, аналитической внутри  $C$ , является равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0 \quad (57)$$

для всех точек  $z$ , лежащих вне  $C$ .

Рассмотрим теперь условия того, что заданные на  $C$  значения являются граничными значениями функции, аналитической вне  $C$ . Прежде всего заметим, что если функция  $f(z)$  аналитична вне  $C$ , включая бесконечно удаленную точку, и непрерывна на самом контуре, то имеет место следующая формула Коши для неограниченных областей:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} -f(z) + f(\infty) & \text{для } z \text{ вне } C, \\ f(\infty) & \text{для } z \text{ внутри } C \end{cases} \quad (58)$$

(контур  $C$  обходится против часовой стрелки).

В самом деле, если точка  $z$  лежит вне  $C$ , то мы окружаем  $C$  замкнутым контуром  $C'$ , содержащим внутри эту точку, и к двусвязной области, ограниченной  $C$  и  $C'$ , применяем интегральную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

(оба контура проходятся против часовой стрелки). Так как в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место разложение

$$f(\zeta) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \dots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \dots,$$

где  $c_0 = f(\infty)$ , то вычет функции  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  в бесконечно удаленной точке равен

$-c_0 = -f(\infty)$  и, следовательно  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(\infty)$ , что и требуется.

Если же  $z$  лежит внутри  $C$ , то функция  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  аналитична между  $C$  и  $C'$ , следовательно, по теореме Коши

$$\int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

и учитывая предыдущий результат, мы получаем вторую формулу (58).

На основании полученной формулы легко доказывается

Теорема 5. В условиях теоремы 3 необходимым и достаточным условием того, чтобы значения  $f(\zeta)$  были граничными значениями функции  $f(z)$ , аналитической вне  $C$ , является равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = a = const \quad (59)$$

для всех точек  $z$ , лежащих внутри  $C$ , причем постоянная в правой части равна  $f(\infty)$ .

Необходимость условия содержится в формуле (58). Чтобы доказать его достаточность, заметим, что функция

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + a$$

аналитична вне  $C$ , причем из условия (21) следует, что ее предельные значения изнутри  $F^+(\zeta) \equiv 0$ , а значит по формуле Сохоцкого  $F^-(\zeta) \equiv f(\zeta)$ . Теорема доказана.

В заключение приведем несколько иную формулировку теорем 4 и 5, относящуюся к случаю, когда кривая  $C$  представляет собой единичную окружность.

Теорема 6. Для того чтобы значения функции  $f(\zeta)$ , удовлетворяющей а каждой точке единичной окружности  $C$  условию Гёльдера с показателем  $\mu \leq 1$ , были граничными значениями функции, аналитической соответственно а) внутри круга  $|z| < 1$  или б) вне его, необходимо и достаточно выполнение условий:

а) для всех  $z$  внутри  $C$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{f(\zeta)} d\zeta}{\zeta - z} = \bar{a} = const, \quad (60)$$

где  $a$  равна значению упомянутой функции при  $z = 0$ , или

б) для всех  $z$  вне  $C$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{f(\zeta)} d\zeta}{\zeta - z} = 0. \quad (61)$$

Для того чтобы свести эту теорему к предыдущим, достаточно заметить, что функция

$$F_1(z) = \overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

аналитична вне круга  $|z| < 1$ , если  $F(z)$  аналитична внутри этого круга, и следовательно, на окружности  $|z| = 1$ , где  $\zeta = 1/\bar{\zeta}$ , предельные значения функции

$F_1(z)$  извне комплексно сопряжены предельным значениям функции  $F(z)$  изнутри (и наоборот).

### 1.4.2 Формула Келдыша — Седова.

Большой интерес для приложения представляет следующая смешанная краевая задача:

На границе  $C$  односвязной области  $D$  заданы точки  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ , расположенные в том порядке, в котором они выписаны. Требуется найти функцию  $f(z)$ , аналитическую в  $D$ , действительная часть которой принимает заданные значения на дугах  $a_k b_k$ , а мнимая часть — заданные значения на дугах  $b_k a_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n; a_{n+1} = a_1$ ).

М. В. Келдыш и Л. И. Седов в 1937 г. дали полное исследование этой задачи и доказали, что, вообще говоря, она не имеет решений, ограниченных вблизи всех концов дуг  $a_k$  и  $b_k$ . Если же отказаться от условия ограниченности  $f(z)$  и потребовать лишь ограниченности интеграла от  $f(z)$ , то задача будет решаться с точностью до  $(n+1)$ -го произвольного постоянного. Наконец, они доказали, что задача будет иметь единственное решение, если, кроме того, потребовать, чтобы  $f(z)$  была ограниченной вблизи каких-либо  $n$  из концов и задать ее значение в некоторой точке границы [8].

Подробно рассмотрим последний случай. Предположим еще, что область  $D$  представляет собой верхнюю полуплоскость, с помощью конформного отображения к этому сводится, очевидно, случай произвольной односвязной области.

Итак, пусть на оси  $x$  заданы точки  $-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n < \infty$  и две действительные функции  $u(x)$ ,  $v(x)$ , имеющие конечное число точек разрыва первого рода, причем  $u(x)$  определена на всех отрезках  $(a_k, b_k)$ , а  $v(x)$  — на всех отрезках  $(b_k, a_{k+1})$  ( $k = 1, 2, \dots, n; a_{n+1} = a_1$ ). Предполагается еще, что на отрезках  $(-\infty, a_1)$  и  $(b_n, \infty)$  функция  $v(x)$  удовлетворяет условию вида  $|v(x)| \leq \text{const}/|x|^\mu$  для некоторого  $\mu > 0$ . Требуется найти аналитическую в верхней полуплоскости функцию  $f(z)$  такую, что на отрезках  $(a_k, b_k)$

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x),$$

а на отрезках  $(b_k, a_{k+1})$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x).$$

**Теорема (М. В. Келдыш — Л. И. Седов).** *Смешанная задача для верхней полуплоскости имеет единственное решение  $f(z)$ , удовлетворяющее следующим условиям:*

- 1)  $f(z)$  ограничена вблизи всех точек  $a_k$ ;
- 2) вблизи всех точек  $b_k$  ограничен интеграл  $\int_{\bar{\gamma}} f(z) dz$ ;

3)  $f(z)$  имеет конечный предел  $f(\infty)$  при  $z \rightarrow \infty$ , который для простоты полагается действительным.

Для доказательства обозначим

$$g(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{z-b_k}{z-a_k}} \quad (62)$$

где рассматривается та ветвь корня, которая положительна на отрезке  $(b_n, \infty)$ . Пусть  $z$  — произвольная точка верхней полуплоскости; окружим ее замкнутым контуром  $C$ , состоящим из верхней полуокружности  $C_R: |\zeta| = R, \text{Im} \zeta > 0$ , и отрезка  $(-R, R)$  действительной оси. Предположим, что функция  $f(z)$  найдена, тогда по формуле Коши будем иметь:

$$f(z)g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (63)$$

Но так как, очевидно,  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} g(\zeta) = 1$ , то существует и

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta - z} \zeta = f(\infty).$$

Следовательно, функция  $\frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta - z}$  имеет в окрестности точки  $\zeta = \infty$  разложение вида

$$\frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\infty) + \varphi(\zeta)}{\zeta}, \quad (64)$$

где  $\varphi(\zeta) \rightarrow 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Интегрируя (64) по полуокружности  $C_R$  достаточно большого радиуса, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2} f(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta.$$

Так как  $\varphi(\zeta) \rightarrow 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ , то интеграл в правой части стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$  и, следовательно, соотношение (63) в пределе дает:

$$f(z)g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)g(t)}{t - z} dt + \frac{1}{2} f(\infty), \quad (65)$$

где интеграл берется вдоль действительной оси. Заменяя здесь  $z$  на  $\bar{z}$ , аналогично получим:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)g(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2} f(\infty).$$

Перейдем в последней формуле к комплексно сопряженным величинам и сложим ее с предыдущей:

$$f(z)g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)g(t) - \overline{f(t)g(t)}}{t-z} dt + f(\infty).$$

Заметим теперь, что на отрезках  $(a_k, b_k)$  произведение  $\prod_{k=1}^n \frac{t-b_k}{t-a_k}$  отрицательно, а на  $(b_k, a_{k+1})$  оно положительно, следовательно, функция  $g(t)$  принимает на  $(a_k, b_k)$  чисто мнимые, а на отрезках  $(b_k, a_{k+1})$  — действительные значения. Учитывая это, мы переписываем последнюю формулу в виде

$$f(z)g(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{t-z} g(t) dt + \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{f(t) - \overline{f(t)}}{t-z} g(t) dt \right\} + f(\infty). \quad (66)$$

Правая часть здесь известна, ибо на отрезках  $(a_k, b_k)$  известна  $\operatorname{Re} f(t) = u(t)$ , а на  $(b_k, a_{k+1})$  известна  $\operatorname{Im} f(t) = v(t)$ . Таким образом, мы пришли к искомой формуле Келдыша—Седова:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t)}{t-z} dt + i \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{v(t)g(t)}{t-z} dt \right\} + \frac{f(\infty)}{g(\infty)}. \quad (67)$$

(входящий во вторую сумму несобственный интеграл по отрезку  $(b_k, a_{k+1})$  сходится в силу наложенного на  $v(x)$  дополнительного условия).

Остается показать, что функция, определяемая по этой формуле, действительно решает смешанную задачу. Для этого рассмотрим одно из слагаемых суммы (6)

$$f_k(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t)}{t-z} dt. \quad (68)$$

Произведение  $f_k(z)g(z)$  представляет собой интеграл типа Коши, построенный по функции  $\varphi(t) = 2u(t)g(t)$ . Предельное его значение  $f_k^+(t_0)g(t_0)$  при  $z$  стремящемся сверху к точке  $t_0$  отрезка  $(a_k, b_k)$ , определяется по формуле Сохоцкого (50):

$$f_k^+(t_0)g(t_0) = \Phi(t_0) + u(t_0)g(t_0), \quad (69)$$

где согласно формуле (69) того же пункта

$$\begin{aligned} \Phi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t) - u(t_0)g(t_0)}{t - t_0} dt + u(t_0)g(t_0) + \\ + \frac{u(t_0)g(t_0)}{\pi i} \ln \frac{b_k - t_0}{a_k - t_0}. \end{aligned} \quad (70)$$

Учитывая, что при  $a_k < t_0 < b_k$  предельное значение логарифма при подходе к отрезку  $(a_k, b_k)$  сверху равно

$$\ln \frac{b_k - t_0}{a_k - t_0} = \ln \frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k} - i\pi$$

(рассматривается ветвь логарифма, которая действительна на оси  $t$  справа от этого отрезка), после преобразований и сокращения на  $g(t_0)$  получим в виде

$$f_k^+(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t) \frac{g(t)}{g(t_0)} - u(t_0)}{t - t_0} dt + u(t_0) + \frac{u(t_0)}{\pi i} \ln \frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k}. \quad (71)$$

Так как при  $t$  и  $t_0$ , лежащих на отрезке  $(a_k, b_k)$ , функция

$$g(t) = \prod_{v=1}^n \sqrt{\frac{t - b_v}{t - a_v}}$$

принимает чисто мнимые значения, то интеграл в последней формуле действителен, действителен также и член  $\ln \frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k}$ .

Следовательно,  $\operatorname{Re} f_k^+(t_0) = u(t_0)$ . Если теперь  $z$  стремится сверху к точке  $t_1$ , лежащей на каком-либо отрезке  $(a_k, b_k)$ ,  $k_1 \neq k$  то предельное значение  $f_k^+(t_1)$  находится непосредственной подстановкой  $t = t_1$  получим:

$$f_k^+(t_1) = \frac{1}{\pi i g(t_1)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t)}{t - t_1} dt.$$

Здесь значение  $g(t_1)$  — чисто мнимое, так же как и  $g(t)$ . Следовательно, значение  $f_k^+(t_1)$  мнимое и  $\operatorname{Re} f_k^+(t_1) = 0$ . Если, наконец,  $z$  стремится сверху к точке  $t_2$ , лежащей на каком-либо отрезке  $(b_v, a_{v+1})$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , то предельное значение равно

$$f_k^+(t_2) = \frac{1}{\pi i g(t_2)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t)}{t-t_2} dt.$$

Здесь  $g(t_2)$  — действительно,  $g(t)$  — чисто мнимо, следовательно, значение  $f_k^+(t_2)$  — действительно и  $\text{Im} f_k^+(t_2) = 0$ .

Из наших рассуждений следует, что действительная часть функции

$$f_*(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t)}{t-z} dt$$

на каждом отрезке  $(a_k, b_k)$  принимает заданные значения  $u(t)$ , а ее мнимая часть на каждом отрезке  $(b_k, a_{k+1})$  равна 0.

Аналогично докажем, что мнимая часть функции

$$f_{**}(z) = \frac{1}{\pi g(z)} \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{v(t)g(t)}{t-z} dt$$

на каждом отрезке  $(b_k, a_{k+1})$  принимает заданные значения  $v(t)$ , а ее действительная часть на каждом отрезке  $(a_k, b_k)$  равна 0.

Отсюда следует, что функция (6)

$$f(z) = f_*(z) + f_{**}(z) + \frac{f(\infty)}{g(z)}$$

в самом деле решает смешанную краевую задачу (наличие последнего члена ничего не меняет, ибо  $f(\infty)$  — действительное число, а  $g(z)$  на отрезках  $(a_k, b_k)$  принимает мнимые значения, а на отрезках  $(b_k, a_{k+1})$  — действительные). Из построения функций  $f_*(z)$  и  $f_{**}(z)$  следует, что при  $z \rightarrow \infty$  они стремятся к нулю; функция  $g(z)$  при этом стремится к 1, следовательно, условие па бесконечности также выполняется. Следует также, что она дает единственное решение смешанной задачи, удовлетворяющее условиям 1) — 3). Теорема доказана. Покажем теперь, что если отказаться от условия ограниченности  $f(z)$  в точках  $a_k$  и требовать в них лишь ограниченности интеграла  $\int f(z) dz$  (как и в точках  $b_k$ ), то при заданном значении  $f(\infty)$  решение задачи будет содержать  $n$  произвольных постоянных. В самом деле, при любых действительных постоянных  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  действительная часть функции

$$h(z) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1}}{\sqrt{\prod_{k=1}^n (z - a_k)(z - b_k)}} \quad (72)$$

равна нулю на всех отрезках  $(a_k, b_k)$ , а ее мнимая часть равна нулю на всех отрезках  $(b_k, a_{k+1})$ . При  $z \rightarrow \infty$  эта функция, очевидно, стремится к нулю. Таким образом, можно добавить эту функцию к функции  $f(z)$  и полученная сумма будет давать аналитическую в верхней полуплоскости функцию с ограниченным интегралом в окрестности точек  $a_k$  и  $b_k$ , принимающую в бесконечности заданное действительное значение  $f(\infty)$  и решающую смешанную краевую задачу.

Вводя обозначение

$$\varphi(t) = \begin{cases} u(t) & \text{на отрезках } (a_k, b_k), \\ iv(t) & \text{на отрезках } (b_k, a_{k+1}) \end{cases} \quad (73)$$

( $k = 1, 2, \dots, n$ ), мы можем записать формулу Келдыша — Седова в виде

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t) \varphi(t)}{t - z} dt + h(z) + \frac{f(\infty)}{g(z)}, \quad (74)$$

где  $g(z)$  и  $h(z)$  определяются формулами (30) и (72). Можно доказать, что формула (74) содержит все решения задачи, удовлетворяющие поставленным условиям.

### 1.4.3 Построение теории аналитических функций

При построении теории аналитических функций можно отправляться от различных эквивалентных между собой определений аналитической функции в области  $G$ . Так, во-первых, мы можем назвать функцией, аналитической в области  $G$ , однозначную функцию комплексного переменного, дифференцируемую в этой области. Исходя из этого определения, мы доказали основное во всей теории предложение Коши, в силу которого для аналитической функции в односвязной области  $G$  (в указанном смысле) интеграл по любому замкнутому контуру  $\Gamma$ , принадлежащему области  $G$ , равен нулю. Отсюда мы имели возможность убедиться в существовании для аналитической функции производных всех порядков. С другой стороны, мы видели, что условия, необходимые и достаточные для того, чтобы функция  $f(z) = u + vi$  была аналитической в области  $G$ , заключаются в существовании уравнений Коши—Римана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \right\} (*)$$

где частные производные функций  $u$  и  $v$  можно предполагать непрерывными функциями в каждой точке области  $G$ . Этот путь приводит к одновременному рассмотрению двух сопряженных гармонических функций  $u$  и  $v$  в области  $G$ , связанных уравнениями (\*), и определению аналитической функции в виде  $u + vi$ . Построением теории аналитических функций, где отправным пунктом является пара сопряженных гармонических функций, занимался Риман.

Наконец, возможно стремиться получить все основные свойства аналитических функций, назвав функцией, аналитической в односвязной области  $G$ , всякую непрерывную функцию  $f(z)$  комплексного переменного, для которой интеграл  $\int f(z) dz$ , взятый вдоль любого замкнутого контура этой области (достаточно, например, брать лишь периметры треугольников.), равен нулю на основании теоремы Морреры. Рассмотрением свойств аналитических функций с этой третьей точки зрения впервые занимался Осгуд. Предыдущее изложение нас убеждает в равноправности указанных точек зрения при построении теории аналитических функций, так как все три вышеупомянутых определения равносильны между собой.

## 2 Интеграл Коши в прикладных задачах

### 2.1 Прикладные задачи техники

#### 2.1.1 Исследование плоского векторного поля

Теория функций комплексного переменного находит широкое применение при решении разнообразных прикладных задач. Ниже ограничимся рассмотрением класса задач, связанного с изучением плоского векторного поля, описываемого при помощи комплексного потенциала. Изучение такого поля в области сложной формы часто удается существенно упростить путем конформного отображения этой области на более простую. Более того, нередко комплексный потенциал плоского векторного поля в сложной по конфигурации области удается построить именно при помощи ее конформного отображения. Рассматриваемый класс задач характерен тем, что векторная функция  $f(x, y)$  задающая в некоторой области  $D$  на плоскости векторное поле, не зависит от времени и связана с *потенциальной функцией*.  $\tilde{\Phi}(x, y)$  этого поля линейным соотношением [9]

$$f(x, y) = \beta \operatorname{grad} \tilde{\Phi}(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (75)$$

где коэффициент  $\beta \in R$  связан с физическим содержанием задачи. Например, для задач гидромеханики идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости функция  $f(x, y)$  описывает векторное поле скорости и  $\beta = 1$ . Для стационарных задач теплопроводности функция  $f(x, y)$  характеризует векторное поле  $q$  плотности теплового потока, а  $\tilde{\Phi}(x, y)$  представляет собой функцию распределения температуры  $T$  в области  $D$ . Согласно известному из курса физики закону Фурье (Ж.Б.Ж. Фурье (1768-1830) — французский математик и физик), коэффициент  $\beta$ , взятый с обратным знаком, совпадает с коэффициентом теплопроводности  $\lambda$  той среды, которая заполняет область  $D$ . Знак минус следует из второго закона термодинамики, устанавливающего, что теплота передается от участков среды с более высокой температурой к участкам с более низкой температурой, т.е. в направлении, противоположном градиенту температуры.

При диффузии в среде некоторой примеси функция  $\tilde{\Phi}(x, y)$  характеризует распределение в области  $D$  концентрации этой примеси, а  $f(x, y)$  — вектор плотности потока примеси. В этом случае равенство (75) выражает закон Фика (А.Э. Фик (1829-1901) — немецкий физик),  $\alpha - \beta = \mu$  — коэффициент диффузии. Через среду в области  $D$  может просачиваться газ или жидкость. Тогда функция  $\tilde{\Phi}(x, y)$  описывает распределение давления в  $D$ , функция  $f(x, y)$  задает вектор скорости частиц газа или жидкости в среде, равенство (75) выражает закон Дарси (А. Дарси (1803-1858) — французский инженер),  $\alpha - \beta = \chi$  — коэффициент фильтрации.

Для электростатического поля функция  $f(x, y)$  описывает вектор

напряженности, а функция  $\tilde{\Phi}(x, y)$  — распределение в  $D$  потенциала этого поля. В этом случае  $\beta = -1$ . Если среда в области  $D$  обладает электрической проводимостью с коэффициентом  $\sigma$ , то равенство (75) сводится к соотношению  $j(x, y) = \sigma \text{grad } U(x, y)$ , устанавливающему связь электрического потенциала  $U(z)$  с вектором  $j(x, y)$  плотности электрического тока, т.е. дает обобщение известного закона Ома (Г.С. Ом (1787-1854) — немецкий физик).

Поскольку равенство (75) содержит постоянный коэффициент  $\beta$ , функция  $\tilde{\Phi}(x, y)$  и функция  $\Phi(z)$ , определяемая согласно (5.47), связаны уравнением

$$\Phi(z) = \beta \tilde{\Phi}(z), \quad z \in D. \quad (76)$$

Помимо (75) для рассматриваемого класса задач справедливо равенство

$$\text{div } f(x, y) = 0, \quad z \in D, \quad (77)$$

отражающее закон сохранения той или иной физической субстанции в окрестности произвольной точки области  $D$  (для гидромеханики и диффузии — сохранение массы жидкости или примеси, для задач теплопроводности и электростатики — теплоты или заряда). Равенства (75) и (77) означают, что рассматриваемое плоское векторное поле является лапласовым и позволяют ввести для него комплексный потенциал.

Сформулируем некоторые задачи, которые часто встречаются в приложениях.

1. В плоской области  $D$  заданы две линии  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , не имеющие общих точек. Требуется построить в  $D$  потенциальное векторное поле так, чтобы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являлись либо линиями равного потенциала, либо линиями тока этого поля с заданной разностью значений потенциальной функции или функции тока соответственно.

2. В неограниченной плоской области  $D$  задана неограниченная кривая  $\Gamma$  и значение производной  $W'(\infty)$  комплексного потенциала в бесконечно удаленной точке. Требуется построить в  $D$  плоское векторное поле так, чтобы  $\Gamma$  являлась либо линией равного потенциала, либо линией тока этого поля.

3. Во внешности  $D$  плоского простого замкнутого контура  $L$  требуется построить векторное поле так, чтобы контур  $L$  совпадал или с линией равного потенциала, или с линией тока этого поля при заданном значении либо потока векторного поля через  $L$ , либо циркуляции вдоль  $L$  соответственно.

Эти формулировки не исчерпывают все прикладные задачи. Иногда нет необходимости в построении векторного поля, а достаточно получить лишь его некоторую интегральную характеристику (например, суммарное термическое или электрическое сопротивление, суммарный расход жидкости, подъемную силу при обтекании профиля и т.п.). Область  $D$ , в которой рассматривается векторное поле, может быть задана еще более сложным образом.

Решение перечисленных задач в общем случае может быть не единственным. Однако дополнительные ограничения, обусловленные

особенностями конкретной задачи, гарантируют единственность решения и позволяют построить комплексный потенциал, описывающий соответствующее плоское векторное поле, с точностью до постоянного слагаемого. Рассмотрим, например, первую из сформулированных задач.

Приведем основную идею доказательства того, что если в области  $D$  существует векторное поле, для которого кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являются линиями равного потенциала с заданной разностью потенциалов  $\Delta \neq 0$ , то такое поле единственно.

Условие  $\Delta \neq 0$  означает, что кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в области  $D$  не пересекаются. Рассмотрим в  $D$  два комплексных потенциала  $W(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$  и  $W_1(z) = \Phi_1(x, y) + i\Psi_1(x, y)$ , которые определяют два векторных поля с линиями равного потенциала  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  и одинаковой разностью потенциалов  $\Delta$  на них. Тогда аналитическая функция  $W_*(z) = W(z) - W_1(z)$  является комплексным потенциалом некоторого векторного поля в  $D$ , причем кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являются линиями равного потенциала этого поля с нулевой разностью потенциалов:

$$\Phi_*|_{\Gamma_1} = (\Phi - \Phi_1)|_{\Gamma_1} = (\Phi - \Phi_1)|_{\Gamma_2} = \Phi_*|_{\Gamma_2},$$

где  $\Phi(x, y) = \operatorname{Re} W_*(z)$ ,  $z = x + iy \in D$ .

Функция  $\Phi_*(x, y)$ , как действительная часть аналитической функции  $W_*(z)$ , удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 \Phi_* = 0$ . Оператор Лапласа в каждой точке линии равного потенциала может быть представлен в виде  $\nabla^2 = \partial^2/\partial s^2 + \partial^2/\partial n^2$ , где  $s$  и  $n$  — направления по касательной и по нормали к этой линии. Но на линии равного потенциала  $\partial^2 \Phi_*/\partial s^2 \equiv 0$ . Поэтому в каждой точке этой линии

$$\frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial n^2} = 0 \quad (78)$$

Соединим кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  какой-либо линией тока  $\mathcal{Y}$  векторного поля, описываемого комплексным потенциалом  $W_*(z)$ . В каждой своей точке эта линия пересекается под прямым углом с линией равного потенциала. Поэтому вдоль всей линии тока справедливо равенство (78). Вводя натуральный параметр  $s$  кривой  $\mathcal{Y}$ , можем рассматривать равенство (78) как дифференциальное уравнение  $\varphi''(s) = 0$  для функции  $\varphi(s) = \Psi_*(\gamma(s))$ , где  $\Psi_*(x, y) = \operatorname{Im} W_*(z)$ ,  $z \in D$ . Интегрируя это уравнение, получаем  $\varphi(s) = C_1 s + C_2$ . Но так как в конечных точках кривой  $\mathcal{Y}$ , лежащих на кривых равного потенциала  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , функция  $\Phi_*(x, y)$  имеет одинаковые значения, то функция  $\varphi(s)$  тоже имеет одинаковые значения для значений  $s$ , соответствующих этим точкам. Следовательно,  $C_1 = 0$ , функция  $\Phi_*(x, y)$  постоянна на  $\mathcal{Y}$ . Выбирая в качестве  $\mathcal{Y}$  всевозможные линии тока, соединяющие  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , заключаем, что  $\Phi_*(x, y) = \operatorname{const}$  в  $D$  и

$$W_*'(z) = \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_*}{\partial y} \equiv 0,$$

т.е.  $W_*(z) \equiv const$  в  $D$ . Это означает, что комплексный потенциал плоского векторного поля при задании разности значений потенциальной функции этого поля на двух не имеющих общих конечных точек линиях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  определен однозначно (с точностью до постоянного слагаемого).

Аналогично можно обосновать, что комплексный потенциал, описывающий плоское векторное поле с линиями тока  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  и с заданной разностью значений функции тока на этих линиях, определен однозначно.

### 2.1.2 Обтекание цилиндрического тела

Пусть область  $D$  комплексной плоскости ( $z$ ), являющаяся внешностью простого замкнутого контура  $L$ , занята идеальной (невязкой) несжимаемой жидкостью. Плоское векторное поле скорости жидкости имеет комплексный потенциал  $W(z)$ . Если контур  $L$  совпадает с какой-либо линией тока  $\text{Im}W(z) = \Psi(z) = const$  (или ее частью), т.е. скорость жидкости в точках  $z \in L$  направлена по касательной к  $L$ , то говорят, что жидкость обтекает неподвижное цилиндрическое тело [10]. Это тело ограничено цилиндрической поверхностью с направляющей  $L$  и образующей, перпендикулярной плоскости ( $z$ ). К такой схеме можно свести и случай прямолинейного движения цилиндрического тела в неподвижной жидкости, если вектор —  $\mathbf{v}$  его скорости лежит в плоскости ( $z$ ). Тогда это тело также можно считать неподвижным и обтекаемым жидкостью, имеющей в бесконечно удаленной точке скорость  $v_\infty \in C$ , соответствующую вектору  $\mathbf{v}$ , причем  $\overline{W'(\infty)} = v_\infty$ .

Комплексный потенциал  $W(z)$  является аналитической функцией, определенной в окрестности  $z = \infty$ , причем для  $W'(z)$  точка  $z = \infty$  является устранимой особой точкой. Поэтому лорановское разложение функции  $W'(z)$  имеет вид

$$W'(z) = \overline{v}_\infty + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad (79)$$

или

$$2\pi i c_{-1} = \oint_{L_1} W'(z) dz = \Gamma + iQ,$$

где  $\Gamma$  и  $Q$  — циркуляция и поток векторного поля вдоль любого простого замкнутого контура  $L_1$ , охватывающего контур  $L$ . Но так как контур  $L$  является линией тока (или ее частью), а в области  $D$  отсутствуют источники, то  $Q = 0$ . Тогда из (79) следует, что комплексный потенциал в окрестности бесконечно удаленной точки можно представить рядом

$$W(z) = \overline{v}_\infty z + c_0 + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{c_{-2}}{z} + \dots \quad (80)$$

Это представление имеет место в любой точке  $z$  области  $D$ , не содержащей точки  $z = 0$ .

Под решением задачи обтекания жидкостью цилиндрического тела, соответствующего в плоскости  $(z)$  контуру  $L$ , понимают нахождение во внешности контура  $L$  комплексного потенциала  $W(z)$  плоского векторного поля скорости жидкости, если заданы скорость  $v_\infty$  бесконечно удаленной точке и значение циркуляции  $\Gamma$  вдоль любого контура, охватывающего  $L$ , а на контуре  $L$  выполняется условие  $\text{Im}W(z) = \Psi(z) = \text{const}$ . Комплексный потенциал может быть найден с точностью до постоянного слагаемого, не влияющего на поле вектора скорости при обтекании цилиндрического тела.

Обтекание цилиндрического тела называют безциркуляционным, если  $\Gamma = 0$ , и циркуляционным, если  $\Gamma \neq 0$ .

Покажем, что задача обтекания цилиндрического тела имеет единственное решение, если заданы циркуляция  $\Gamma$  векторного поля скоростей жидкости вдоль контура, охватывающего тело, и скорость потока жидкости в бесконечно удаленной точке. Другими словами, поставленными условиями комплексный потенциал плоского векторного поля определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Предположим, что два комплексных потенциала  $W_1(z)$  и  $W_2(z)$  удовлетворяют поставленным условиям. Тогда, согласно (80), в области  $D$  как в окрестности бесконечно удаленной точки имеем

$$W_1(z) = \bar{v}_\infty z + C_0^{(1)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln } z - \frac{C_{-2}^{(1)}}{z} + \dots,$$

$$W_2(z) = \bar{v}_\infty z + C_0^{(2)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln } z - \frac{C_{-2}^{(2)}}{z} + \dots$$

Поэтому разность этих потенциалов

$$W(z) = W_1(z) - W_2(z) = C_0^{(1)} - C_0^{(2)} = \frac{C_{-2}^{(1)} - C_{-2}^{(2)}}{z} + \dots$$

будет аналитической функцией в  $D$  (как разность двух аналитических функций). Функция  $W(z)$  имеет в точке  $z = \infty$  устранимую особую точку, а потому ограничена в  $D$ . Мнимая часть  $\text{Im}W(z)$  этой функции также ограничена в  $D$  и является в  $D$  гармонической функцией. Она достигает своих наибольшего и наименьшего значений на контуре  $L$ . Но по условию теоремы  $\text{Im}W(z)$  постоянна на  $L$ . Значит, максимальное и минимальное значения  $\text{Im}W(z)$  в  $D$  совпадают и  $\text{Im}W(z) = \text{const}$ ,  $z \in D$ . Аналитическая функция  $W(z)$ , имеющая в  $D$  постоянную мнимую часть, сама является постоянной функцией. Но это и значит, что комплексные потенциалы  $W_1(z)$  и  $W_2(z)$  различаются лишь постоянным слагаемым и задают одно, и то же векторное поле.

В случае безциркуляционного обтекания цилиндрического тела  $\Gamma = 0$ , и

такое обтекание однозначно определяется скоростью  $v_\infty$  потока жидкости в бесконечно удаленной точке. Комплексный потенциал  $W(z)$  безциркуляционного обтекания есть аналитическая (и однозначная) функция в области  $D$ , являющейся внешностью контура  $L$ . Отметим, что, согласно представлению (80), точка  $z = \infty$  является простым полюсом функции  $W(z)$ . На границе области  $D$  — контуре  $L$  — функция  $W(z)$  имеет значения с постоянной мнимой частью, так как  $L$  по условию является линией тока векторного поля. Но точно такими же свойствами обладает функция, осуществляющая конформное отображение области  $D$  на внешность отрезка, лежащего на прямой, параллельной действительной оси. Значит, и  $W(z)$  в силу единственности комплексного потенциала для задачи обтекания цилиндрического тела осуществляет конформное отображение области  $D$  на внешность горизонтального отрезка, причем  $W(\infty) = \infty$ . В качестве второго условия можно взять  $\arg W'(\infty) = -\arg v_\infty$ , т.е. направление скорости потока в бесконечно удаленной точке. Величина  $|v_\infty|$  определяется длиной горизонтального отрезка, во внешность которого отображается область  $D$ . Полагая, что  $\text{Im}W(z) = 0$  на контуре  $L$  (для этого достаточно к  $W(z)$  прибавить некоторую константу), можем считать, что  $W(z)$  отображает область  $D$  на внешность отрезка действительной оси, причем, добавляя к комплексному потенциалу действительное слагаемое, можем переместить отрезок так, что он будет симметричным относительно начала координат [11].

*Пример 1.* Рассмотрим поперечное обтекание кругового цилиндра радиуса  $R$  потоком идеальной несжимаемой жидкости, имеющей вдали от цилиндра скорость  $V_\infty > 0$ . Такое обтекание описывается векторным полем, определенным во внешности окружности радиуса  $R$ , центр которой можно совместить с началом координат. Таким образом, контур  $L$  есть окружность  $|z| = R$ , а область  $D$  задается неравенством  $|z| > R$ . Комплексный потенциал рассматриваемого векторного поля отображает внешность окружности  $L$  на внешность отрезка  $[-r, r]$ .

Известно, что функция  $\omega = (\zeta + 1/\zeta)/2$  Жуковского отображает внешность окружности  $|\zeta| = 1$  на внешность отрезка  $[-1, 1]$  действительной оси. Линейным отображением  $\zeta = z/R$  переведем внешность окружности  $|z| = R$  во внешность окружности  $|\zeta| = 1$ . Тогда суперпозиция отображений

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) \quad (81)$$

конформно отобразит область  $D$  на внешность отрезка  $[-1, 1]$  действительной оси. Следовательно, искомым комплексным потенциалом должен иметь вид  $W_0(z) = r\omega(z)$ . Коэффициент  $r \in R$  определяется условием  $W_0'(\infty) = V_\infty$ . Вычислив

$$W_0'(z) = \frac{r}{2} \left( \frac{1}{R} - \frac{R}{z^2} \right),$$

найдем  $W_0'(\infty) = r/(2R) = V_\infty$ , откуда  $r = 2RV_\infty$ . Итак, комплексный

потенциал рассматриваемого векторного поля имеет вид

$$W_0(z) = V_\infty \left( z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (82)$$

Так как векторное поле  $v_0(z)$  и его комплексный потенциал  $W_0(z)$  связаны соотношением  $v_0(z) = \overline{W_0'(z)}$ , для скорости жидкости получаем

$$v_0(z) = V_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right). \quad (83)$$

Точки  $z = -R$  и  $z = R$ , в которых в данном случае скорость жидкости равна нулю, называют *точками разветвления* и *схода потока* соответственно, объединяя их общим названием *критические точки потока*. В первой из них линия тока разветвляется на две: одна обходит окружность  $|z| = R$  сверху, а другая — снизу. Во второй точке разветвленная линия тока соединяется. Из (83) следует, что в точках  $z = \pm iR$  скорость жидкости достигает наибольшего по модулю значения на контуре  $L$ , равного  $2V_\infty$ .

Полагая  $z = \rho e^{i\varphi}$ , из представления (82) с учетом *формулы Эйлера* находим

$$W_0(\rho e^{i\varphi}) = V_\infty \left( \rho e^{i\varphi} + \frac{R^2}{\rho} e^{-i\varphi} \right) = V_\infty \left( \rho + \frac{R^2}{\rho} \right) \cos \varphi + i V_\infty \left( \rho - \frac{R^2}{\rho} \right) \sin \varphi.$$

Следовательно, *потенциальная функция* (или *потенциал скоростей*) и *функция тока* в полярных координатах имеют следующий вид:

$$\Phi(\varphi, \rho) = V_\infty \left( \rho + \frac{R^2}{\rho} \right) \cos \varphi, \quad \Psi(\varphi, \rho) = V_\infty \left( \rho - \frac{R^2}{\rho} \right) \sin \varphi$$

Линии тока со стрелками, указывающими направление течения, и штриховые *линии равного потенциала* рассматриваемого плоского векторного поля изображены в соответствии с рисунком 9.

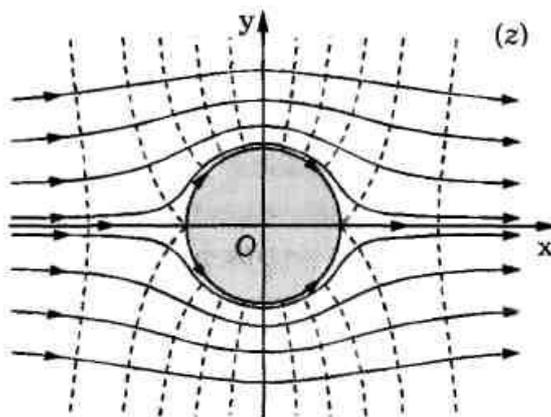


Рисунок 9. Линии тока по направлению течения

Отметим, что если в бесконечно удаленной точке  $z = \infty$  скорость жидкости направлена под углом  $\alpha$  к действительной оси, т.е.  $v_\infty = v_0(\infty) = V_\infty e^{i\alpha}$ , то картину течения жидкости (см. рис. 11.9) следует повернуть на этот угол против часовой стрелки. Тогда прямолинейная часть нулевой линии тока вне окружности  $|z| = R$  тоже будет составлять с действительной осью  $\text{Im } z = 0$  угол  $\alpha$ . Этот поворот осуществляется *линейным отображением*  $z = e^{i\alpha} z_1$ . Суперпозиция линейного отображения с функцией  $W_0(z)$  даст комплексный потенциал  $W_\alpha(z)$ , удовлетворяющий поставленному условию:

$$W_\alpha(z) = V_\infty e^{-i\alpha} z + V_\infty e^{i\alpha} z + V_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{z} = \bar{v}_\infty z + v_\infty \frac{R^2}{z}. \quad (84)$$

Для построения комплексного потенциала циркуляционного обтекания тела с циркуляцией  $\Gamma > 0$  поместим в точку  $z = 0$  *вихрь интенсивности*  $\Gamma$ . Линии тока создаваемого таким вихрем векторного поля будут окружностями, в том числе одна из линий тока совпадет с окружностью  $|z| = R$ . Если к комплексному потенциалу  $W_*(z)$  добавить комплексный потенциал этого вихря, опустив постоянные слагаемые, то в итоге получим

$$W_*(z) = V_\infty \left( z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (85)$$

Ясно, что для течения жидкости, описываемого комплексным потенциалом  $W_*(z)$ , окружность  $|z| = R$  является частью линии тока, как и для комплексного потенциала  $W_0(z)$ . Поэтому этот потенциал описывает циркуляционное обтекание цилиндрического тела со значением циркуляции  $\Gamma$ . Дополнительное слагаемое усложняет структуру потока. Скорость этого потока находим по известному комплексному потенциалу:

$$v_*(z) = \overline{W_*'(z)} = V_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i z}. \quad (86)$$

На поверхности цилиндра, полагая  $z = R e^{i\varphi}$ , с помощью формул Эйлера получаем

$$v_*(R) = V_\infty (1 - e^{2i\varphi}) + \frac{i\Gamma e^{i\varphi}}{2\pi R} = ie^{i\varphi} \left( \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2V_\infty \sin \varphi \right),$$

причем модуль скорости на поверхности цилиндра равен

$$|v_*(R)| = \left| \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2V_\infty \sin \varphi \right|. \quad (87)$$

Из представления (86) следует, что критические точки рассматриваемого потока (т.е. точки, в которых скорость потока нулевая) удовлетворяют квадратному уравнению

$$z^2 - \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} iz - R^2 = 0,$$

Следовательно, критическими точками являются

$$z_{1,2} = \frac{i\Gamma}{4\pi V_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{i\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2 + R^2} = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{(4\pi V_\infty R)^2 - \Gamma^2}}{4\pi V_\infty}.$$

Если  $|\Gamma| = 4\pi V_\infty R$ , то обе критические точки совпадают, причем  $z_{1,2} = iR$ . Линии тока для этого случая изображены на рисунке 10. В случае  $|\Gamma| > 4\pi V_\infty R$  обе критические точки также чисто мнимые, причем из условия  $z_1 z_2 = -R^2$  следует, что  $|z_1| < R < |z_2|$ , т.е. только точка  $z_2$  лежит вне окружности  $|z| = R$  в соответствии с рисунком 11.

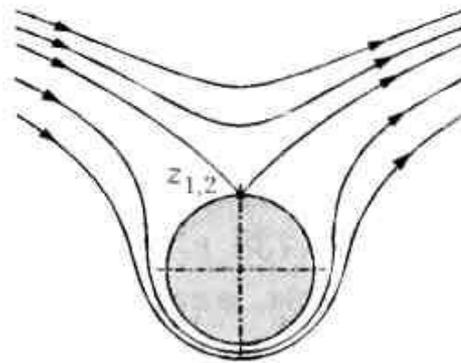


Рисунок 10. Критические точки совпадают

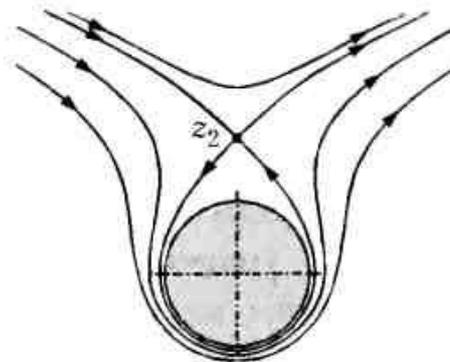


Рисунок 11. Критическая точка лежат вне окружности

Наконец, при  $|\Gamma| < 4\pi V_\infty R$  критические точки различны, причем  $|z_1| = |z_2| = R$ , т.е. эти точки лежат на окружности  $|z| = R$  в соответствии с рисунком 12.

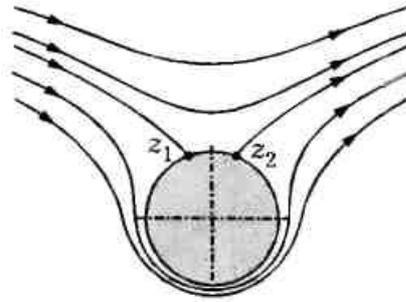


Рисунок 12. Критические точки различные

Аргументы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  критических точек можно найти, используя представление (87), которое приводит к уравнению

$$\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2V_\infty \sin \varphi = 0.$$

Отсюда имеем  $\sin \varphi = \Gamma/(4\pi V_\infty R)$ , или

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}, \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}. \quad (88)$$

Ясно, что при  $\Gamma = 0$  критические точки занимают положение на действительной оси ( $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$ ) в соответствии с рисунком 9.

Найдем силу действия потока жидкости на обтекаемый цилиндр. Известно, что давление  $p$  жидкости вдоль линии тока в установившемся безвихревом потоке связано с модулем  $V$  вектора ее скорости уравнением Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho g h = A = const,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $h$  — высота, отсчитываемая от некоторого условного уровня. Это уравнение опубликовано в 1738 г. в Петербурге швейцарским математиком и механиком, академиком Петербургской академии наук Даниилом Бернулли (1700-1782) и отражает закон сохранения энергии при течении идеальной (невязкой) жидкости. Пренебрегая изменением давления, вызванным изменением высоты частиц жидкости, запишем

$$p = A - \frac{\rho}{2} V^2. \quad (89)$$

Поскольку сила давления жидкости, действующая на элемент  $dz$  контура  $L$  цилиндра, направлена внутрь его по нормали к контуру, то с учетом (89),

двигаясь по  $L$  против часовой стрелки, для равнодействующей сил со стороны потока жидкости получаем

$$P = \oint_L ipdz = i \oint_L \left( A - \frac{\rho}{2} V^2 \right) dz = -\frac{i\rho}{2} \oint_L V^2 dz, \quad (90)$$

так как интеграл по замкнутому контуру от постоянной  $iA$  равен нулю. Для окружности, заданной уравнением  $z = Re^{i\varphi}$ , имеем  $dz = iRe^{i\varphi} d\varphi = R(i \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi$  и  $V = |v_*(z)| = |v_*(Re^{i\varphi})|$ , так что, используя (87) и (90), находим

$$\begin{aligned} P &= -\frac{i\rho}{2} \oint_L |v_*(z)|^2 dz = -\frac{i\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2V_\infty \sin \varphi \right|^2 R(i \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{i\rho}{2} 2V_\infty \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = -i\rho V_\infty \Gamma, \end{aligned} \quad (91)$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi$$

И

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

Таким образом, сила, действующая со стороны потока на цилиндр единичной длины, по отношению к направлению скорости  $V_\infty$  жидкости в бесконечно удаленной точке повернута на угол  $\pi/2$  в сторону, противоположную направлению движения жидкости в вихре, т.е. при  $\Gamma > 0$  — по часовой стрелке, а при  $\Gamma < 0$  — против часовой стрелки. При  $\Gamma = 0$  имеем  $P = 0$ . Отметим, что во всех случаях проекция силы  $P$  на направление скорости  $V_\infty$  равна нулю, т.е. при обтекании потоком идеальной (невязкой) жидкости гидравлическое сопротивление цилиндру равно нулю, что составляет существо парадокса, обнаруженного французским математиком и механиком Ж. Даламбером (1717-1783).

При вычислении интеграла в правой части (90) можно учесть, что вектор скорости потока в точках контура  $L$  направлен по касательной к этому контуру, что с учетом связи векторного поля с дифференциалом дает

$$v(z) = Ve^{i\varphi} = \overline{W'(z)},$$

где  $\varphi = \arg dz$ . Отсюда  $V = \overline{W'(z)} e^{-i\varphi}$ , так что вместо (90) получаем

$$P = -\frac{i\rho}{2} \oint_L (\overline{W'(z)})^2 e^{-2i\varphi} dz = -\frac{i\rho}{2} \oint_L (\overline{W'(z)})^2 \overline{dz} \quad (11.29)$$

поскольку  $e^{-2i\varphi} dz = e^{-2i\varphi} |dz| e^{i\varphi} = \overline{dz}$ . Переходя в (92) к комплексно сопряженным величинам, запишем

$$\overline{P} = \frac{i\rho}{2} \oint_L (W'(z))^2 dz. \quad (93)$$

Эта формула установлена в 1910 г. русским механиком и математиком С.А. Чаплыгиным (1869-1942) и носит его имя.

Из представления (80) вытекает лорановское разложение производной  $W'(z)$  комплексного потенциала:

$$W'(z) = \overline{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \frac{c-2}{z^2} + \dots \quad (94)$$

С помощью этого разложения легко определить *вычет* функции  $(W'(z))^2$  в бесконечно удаленной точке, равный  $i\Gamma \overline{v}_\infty / \pi$ . Зная этот вычет, из (93) находим

$$\overline{P} = \pi\rho \operatorname{Res}_{z=\infty} (W'(z))^2 = i\rho \overline{v}_\infty \Gamma.$$

После перехода в этом равенстве к комплексно сопряженным величинам получим формулу Жуковского

$$P = -i\rho v_\infty \Gamma, \quad (95)$$

установленную Н.Е. Жуковским в 1904 г. В частном случае при  $v_\infty = V_\infty > 0$  из (95) следует (91).

Комплексный потенциал для внешности  $D$  контура  $L$  можно ввести, построив функцию  $f(z)$ , отображающую область  $D$  на внешность окружности  $|\zeta|=1$  так, что  $f(\infty)=\infty$ . Тогда конформное отображение области  $D$  на внешность отрезка, реализуемое комплексным потенциалом, можно представить в виде композиции функции  $f(z)$ , функции Жуковского и, возможно, линейного отображения. Если функция  $f(z)$  удовлетворяет условию  $f'(\infty)=1$ , то комбинация функции Жуковского и линейного отображения представляет собой комплексный потенциал (85) обтекания кругового цилиндра. В этом случае комплексный потенциал для области  $D$  можно записать следующим образом:

$$W(z) = V_\infty \left( f(z) + \frac{R^2}{f(z)} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln f(z), \quad (96)$$

где  $V_\infty > 0$  — скорость потока в бесконечно удаленной точке, а  $\Gamma$  — циркуляция

векторного поля по контуру, охватывающему контур  $L$ . Если в бесконечно удаленной точке скорость жидкости направлена под углом  $\alpha$  к действительной оси, то, принимая во внимание (84), комплексный потенциал можно записать в виде

$$W(z) = V_\infty e^{-i\alpha} f(z) + V_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{f(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln f(z). \quad (97)$$

*Пример 2.* Пусть функция Жуковского  $\tilde{z} = (\chi + 1/\chi)/2$  отображает окружность  $\tilde{L}_*$ , охватывающую точку  $\chi = -1$  и проходящую через точку  $\chi = 1$  на контур  $\tilde{L}$ , относящийся к семейству профилей Жуковского в соответствии с рисунком 13. Этот контур имеет точку  $\tilde{z} = 1$  возврата (заострения) и затупление в окрестности точки  $\tilde{z} = -1$ .

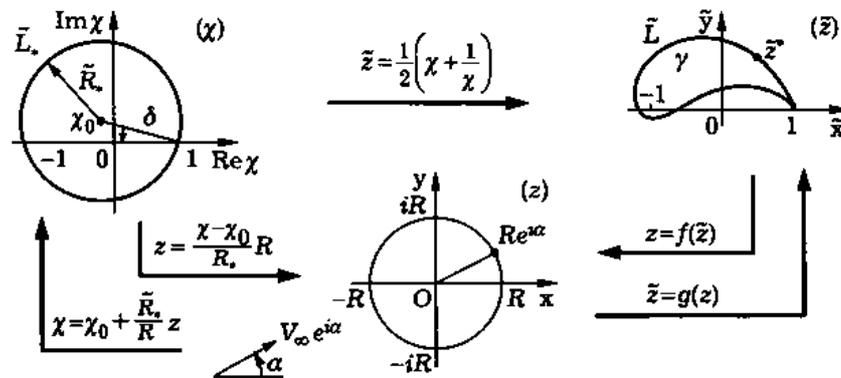


Рисунок 13. Семейство профилей Жуковского

Чтобы для изучения обтекания профиля Жуковского использовать комплексный потенциал (97), необходимо предварительно построить функцию  $f(z)$ , конформно отображающую внешность контура  $\tilde{L}$  на внешность окружности  $|z| = R$  при условиях  $f(\infty) = \infty$  и  $f'(\infty) = 1$ . Если радиус окружности  $\tilde{L}_*$  равен  $\tilde{R}_*$  и ее центр находится в точке  $\chi_0$ , то линейное отображение  $z = (\chi - \chi_0)R/\tilde{R}_*$  преобразует внешность  $\tilde{L}_*$  во внешность окружности  $|z| = R$  (см. рис. 753). Функция  $z = \chi_0 + z\tilde{R}_*/R$  осуществляет обратное отображение, а функция

$$g(z) = \frac{1}{2R} \left( \tilde{R}_* z + R\chi_0 + \frac{R^2}{\tilde{R}_* z + R\chi_0} \right) \quad (98)$$

отображает внешность окружности  $|z| = R$  на внешность контура  $\tilde{L}$ .

Функция  $f(z) = (z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1})R/\tilde{R}_*$ , обратная к функции  $g(z)$ , многозначна, но допускает выделение ветвей во внешности отрезка  $[-1, 1]$  действительной оси. Следует выбрать такую ветвь этой функции, которая бы в бесконечно удаленной точке обращалась в бесконечность. Кроме того, функция  $f(z)$  должна удовлетворять условию  $f'(\infty) = 1$ , т.е.

$$f'(z)|_{z=\infty} = \frac{R}{\tilde{R}_*} \left( 1 + \frac{2z}{2\sqrt{z^2-1}} \right) \Big|_{z=\infty} = 2 \frac{R}{\tilde{R}_*} = 1$$

Отсюда находим  $R = \tilde{R}_*/2$ , и в итоге

$$f(z) = \frac{z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1}}{2}. \quad (99)$$

Подставляя найденную функцию  $f(z)$  в представление (97), получаем комплексный потенциал

$$W(z) = \frac{V_\infty}{2} \left( e^{-i\alpha} \left( z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1} + \frac{e^{i\alpha} \tilde{R}_*^2}{z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1}} \right) \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1}}{2}, \quad (100)$$

описывающий обтекание контура  $\tilde{L}$  потоком с заданной скоростью  $V_\infty e^{i\alpha}$  жидкости в бесконечно удаленной точке  $\tilde{z} = \infty$  некоторым значением  $\Gamma$  циркуляции вдоль  $\tilde{L}$ .

Дифференцированием найденного комплексного потенциала находим

$$W'(z) = \frac{1}{2} \left[ V_\infty e^{-i\alpha} - \frac{V_\infty e^{i\alpha} \tilde{R}_*^2 - \Gamma / (\pi i)}{(z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1})^2} \right] \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right). \quad (101)$$

Чтобы производная  $W'(z)$ , а значит, и скорость жидкости вблизи острой кромки крыла, т.е. в окрестности точки  $z=1$ , были ограничены по модулю, необходимо потребовать чтобы при  $z=1$  равнялось нулю выражение в квадратных скобках в представлении (101). Нарушение этого требования с механической точки зрения означает, что точка  $z^*$  схода потока, которой на окружности  $|z|=R$  соответствует точка  $z = Re^{i\alpha}$ , не совпадает с точкой  $z=1$ . Однако в действительности под влиянием вязкости жидкости и вихреобразования точка схода потока совпадает с точкой заострения профиля, т.е.  $z^* = 1$ , что равносильно ограниченности скорости вблизи острой кромки крыла.

Условие  $z^* = 1$  при обтекании профиля Жуковского было предложено С.А. Чаплыгиным. Оно позволяет из равенства нулю при  $z=1$  выражения в квадратных скобках в (101) найти значение циркуляции:

$$\Gamma = \pi i V_\infty \left( \frac{e^{i\alpha} \tilde{R}_*^2}{1 - \chi_0} - (1 - \chi_0) e^{i\alpha} \right). \quad (102)$$

На рисунке 13 видно, что  $1 - \chi_0 = \tilde{R}_*^2 e^{-i\delta}$ . Поэтому с помощью формул Эйлера равенство (102) можно записать следующим образом:

$$\Gamma = \pi i V_{\infty} \left( \frac{e^{i\alpha} \tilde{R}_*^2}{\tilde{R}_* e^{-i\delta}} - \tilde{R}_* e^{-i\delta} e^{i\alpha} \right) = \pi i V_{\infty} \tilde{R}_* (e^{i(\alpha+\delta)} - e^{-i(\delta+\alpha)}) = -2\pi V_{\infty} \tilde{R}_* \sin(\delta + \alpha). \quad (103)$$

Ясно, что  $\Gamma < 0$  при  $0 < \delta + \alpha < \pi$ .

В итоге комплексный потенциал (100) можно представить в виде

$$W(z) = \frac{V_{\infty} \tilde{R}_*}{2} \left( \frac{\tilde{R}_* e^{-i\delta} - 1 + z + \sqrt{z^2 - 1}}{\tilde{R}_* e^{i\alpha}} + \frac{\tilde{R}_* e^{i\alpha}}{\tilde{R}_* e^{-i\delta} - 1 + z + \sqrt{z^2 - 1}} \right) = 2i \sin(\delta + \alpha) \ln(\tilde{R}_* e^{-i\delta} - 1 + z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (104)$$

Для нахождения силы действия потока жидкости на крыло, соответствующее профилю Жуковского, подставим (104) в (95) и получим

$$P = -i\rho V_{\infty} e^{i\alpha} \Gamma = 2\pi\rho V_{\infty}^2 \tilde{R}_* e^{i(\pi/2+\alpha)} \sin(\delta + \alpha).$$

Таким образом, сила  $P$ , называемая *подъемной силой крыла*, перпендикулярна направлению скорости жидкости в бесконечно удаленной точке и при  $\Gamma < 0$  повернута относительно этого направления против часовой стрелки.

### 2.1.3 Течение жидкости в каналах

Под каналом в *комплексной плоскости* ( $z$ ) будем понимать область  $D$ , ограниченную кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  пересекающимися лишь в *бесконечно удаленной точке*  $z = \infty$  в соответствии с рисунком 14.

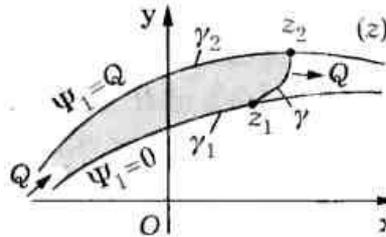


Рисунок 14. Канал (область) в комплексной плоскости

Плоское векторное поле скорости в таком канале описывает течение жидкости между двумя непроницаемыми цилиндрическими поверхностями, образующие которых перпендикулярны плоскости ( $z$ ), а направляющими являются кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Ясно, что эти кривые будут *линиями тока*, так что мнимая часть комплексного потенциала  $W(z)$  течения в таком канале должна быть постоянной на каждой из этих кривых, т.е.

$$\operatorname{Im} W(z) = \Psi(z) = \begin{cases} \Psi_1 = \text{const}, z \in \gamma_1; \\ \Psi_2 = \text{const}, z \in \gamma_2. \end{cases}$$

Предположим, что в области  $D$  отсутствуют *источники* и *вихри*. Тогда *поток*  $Q$  *векторного поля* через любую кривую  $\gamma$  с произвольными *начальной*  $z_1 = \gamma_1$  *конечной*  $z_2 = \gamma_2$  *точками* будет постоянным, причем  $Q = \Psi_2 - \Psi_1$ . При выборе  $\Psi_1 = 0$  получим  $\Psi_2 = Q$ . Отметим, что для жидкости, вытекающей из области, для которой кривая  $\gamma$  является участком границы, поток имеет положительное значение:  $Q > 0$  в соответствии с рисунком 14.

Условие постоянства  $\Psi(z)$  на кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а также известное значение потока жидкости  $Q$  не являются достаточными для однозначного определения комплексного потенциала течения в канале. В самом деле, рассмотрим в качестве канала полосу  $0 < \operatorname{Im} z < H$ , в которой течение имеет заданное значение потока  $Q > 0$  в соответствии с рисунком 15.

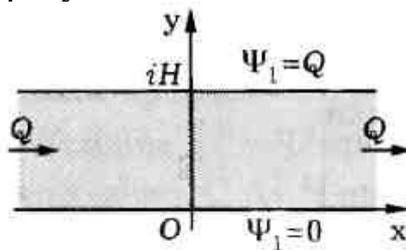


Рисунок 15. Течение в канале

Функция

$$W(z) = Q \frac{z}{H} + \lambda e^{n\pi z/H},$$

зависящая от параметров  $\lambda \in R$  и  $n \in Z$ , имеет мнимую часть

$$\operatorname{Im} W(z) = \frac{Qy}{H} + \lambda e^{n\pi x/H} \sin \frac{n\pi y}{H},$$

которая при любых значениях  $\lambda$  и  $n$  принимает на границах  $\operatorname{Im} z = 0$  и  $\operatorname{Im} z = H$  полосы постоянные значения  $\Psi_1 = 0$  и  $\Psi_1 = 0$ . Однако скорость жидкости

$$\overline{W'(z)} = \frac{Q}{H} + \frac{n\pi}{H} e^{n\pi \bar{z}/H}$$

зависит от выбора значений  $\lambda$  и  $n$  [12].

Покажем, что единственность комплексного потенциала для полосы можно обеспечить, дополнительно потребовав, чтобы скорость в бесконечно удаленной точке была ограниченной. Пусть аналитические функции  $W_1(z)$  и

$W_2(z)$  в полосе  $0 < \text{Im} z < H$ , представляющей канал, удовлетворяют всем условиям: их мнимые части постоянны на кривых  $\text{Im} z = 0$  и  $\text{Im} z = H$ , ограничивающих канал, а соответствующие векторные поля  $v_1(z)$  и  $v_2(z)$  ограничены в  $D$  и имеют одинаковое значение потока  $Q$ . Тогда аналитическая функция  $W(z) = W_1(z) - W_2(z)$  описывает векторное поле, которое ограничено в  $D$ , имеет нулевое значение потока, а мнимая часть  $\Psi(z) = \text{Im} W(z)$  этой функции обращается в нуль на прямых  $\text{Im} z = 0$  и  $\text{Im} z = H$ .

Дополнительное условие означает, что функция  $W'(z)$  ограничена в рассматриваемой полосе. Так как  $\text{Im} W(z) = \text{const}$  на прямых  $\text{Im} z = 0$  и  $\text{Im} z = H$ , то  $\text{Im} W'(z) = 0$  на этих прямых. Стало быть, гармоническая функция  $\text{Im} W'(z)$  ограничена в рассматриваемой полосе, а на ее границе обращается в нуль. Поэтому  $\text{Im} W'(z) \equiv 0$  всюду в полосе, а функция  $W'(z)$ , имеющая нулевую мнимую часть, постоянна в полосе:  $W'(z) = a \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \text{Im} z < H$ . По производной восстанавливаем комплексный потенциал, опуская несущественную в данном случае постоянную интегрирования:  $W(z) = az$ ,  $0 < \text{Im} z < H$ . Но тогда функция тока имеет вид  $\Psi(z) = \text{Im} W(z) = ay$ , где  $y = \text{Im} z$ . Если на прямой  $\text{Im} z = 0$  принять  $\Psi(z) = \Psi_2 = 0$ , то на прямой  $\text{Im} z = H$  получим  $\Psi(z) = \Psi_2 = Q = aH$ , т.е.  $a = Q/H$ . Таким образом, комплексный потенциал течения в данной полосе имеет вид  $W(z) = (Q/H)z$  и определен однозначно.

В общем случае области  $D$  в плоскости  $(\zeta)$ , ограниченной кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  комплексный потенциал можно построить следующим образом. Пусть  $z = g(\zeta)$  — конформное отображение области  $D$  на полосу  $0 < \text{Im} z < H$ . Тогда комплексный потенциал течения жидкости в канале  $D$  имеет вид

$$W(\zeta) = \frac{Q}{H} g(\zeta) \quad (105)$$

*Пример.* Область в комплексной плоскости  $(\zeta)$ , изображенную в соответствии с рисунком 16, можно рассматривать как водоем достаточно больших размеров с подведенным к нему каналом шириной  $2h$ . Глубину водоема и канала примем равными единице. Пусть по каналу в водоем поступает жидкость с объемным расходом  $2Q > 0$ , т.е. в единицу времени через канал проходит объем жидкости, равный  $2Q$ . Изучение плоского векторного поля скорости при истечении жидкости из канала в водоем (или при вытекании ее из водоема) представляет определенный интерес для различных приложений и может быть проведено при помощи комплексного потенциала вида (11.42).

Отметим, что в силу симметрии области  $D_1$  относительно действительной оси  $\text{Im} \zeta = 0$  течение в канале и водоеме достаточно рассматривать лишь в области  $D$ , расположенной в верхней полуплоскости  $\text{Im} \zeta > 0$  и представляющей собой внутренность неограниченного треугольника  $A'_1 A'_2 A'_3$  в соответствии с рисунком 16.

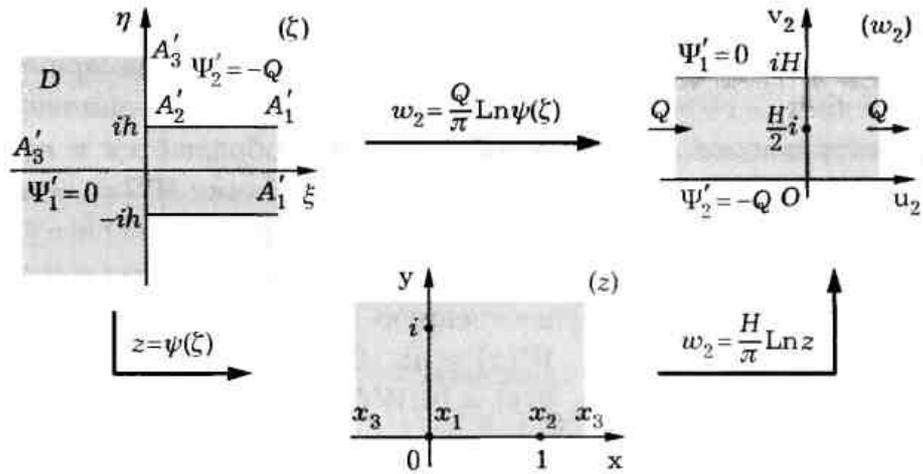


Рисунок 16. Макет водоема на плоскости

При этом через канал, образованный прямыми  $A'_1A'_2$  и  $A'_1A'_3$ , в водоем будет поступать жидкость с расходом  $Q > 0$ , а действительная ось  $\text{Im} z = 0$  как граница области  $D$  станет одной из линий тока. Если считать эту линию нулевой, т.е. принять на ней для функции тока значение  $\Psi'_1 = 0$ , то на линии тока, соответствующей границе  $A'_1A'_2A'_3$  области  $D$ , будем иметь  $\Psi'_1 = -Q$  при истечении жидкости из канала в водоем (при вытекании жидкости из водоема на этой линии тока  $\Psi_2 = Q > 0$  поскольку жидкость вытекает из области, для которой любая кривая с начальной точкой на действительной оси  $\text{Im} = \zeta = 0$  и конечной на прямой  $A'_1A'_2$  будет частью границы, обходимой в положительном направлении).

Чтобы построить функцию, которая конформно отображает область  $D$  на полосу  $0 < \text{Im} z < H$  шириной  $H$ , воспользуемся функцией

$$f(z) = \frac{2ih}{\pi} (\sqrt{z-1} - \text{arctg} \sqrt{z-1}) \quad (106)$$

Ветвь этой многозначной функции конформно отображает верхнюю полуплоскость  $\text{Im} z > 0$  на внутренность неограниченного треугольника  $A_1A_2A_3$  в плоскости  $(\omega)$ . Этот треугольник параллельным переносом на расстояние  $h$  вдоль положительного направления мнимой оси можно совместить с неограниченным треугольником  $A'_1A'_2A'_3$  в соответствии с рисунком 16. Следовательно, ветвь многозначной функции

$$f_1(z) = \frac{2ih}{\pi} (\sqrt{z-1} - \text{arctg} \sqrt{z-1}) + ih \quad (107)$$

конформно и взаимно однозначно отображает верхнюю полуплоскость  $\text{Im} z > 0$  на область  $D$  в верхней полуплоскости  $\text{Im} \zeta > 0$ . При этом прообразами точек  $A'_1$ ,  $A'_2$  и  $A'_3$  будут точки  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  и  $x_3 = \infty$  соответственно.

Требуемую ветвь многозначной функции (106) можно определить из условия, что функция принимает мнимые значения  $iy, y > 0$ , если аргумент  $z$

пробегают часть действительной оси правее точки  $z=1$ . Тому же условию должен быть подчинен и выбор ветви функции (107). Функция  $z=\psi(\zeta)$ , обратная к выбранной ветви функции (107), осуществляет конформное отображение области  $D$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im} z > 0$ . Эту функцию не удастся представить в явном виде. Ветвь многозначной функции  $\omega_1 = \ln z$  отображает верхнюю полуплоскость на полосу  $0 < \text{Im} \omega_1 < \pi$ , причем  $\omega_1 = \pi i/2$  при  $z = i$ . Значит, функция  $\omega_2 = (H/\pi)\omega_1 = (H/\pi)\text{Ln} z$  отображает верхнюю полуплоскость на полосу  $0 < \text{Im} \omega < H$  шириной  $H$ . При этом положительная и отрицательная полуоси действительной оси  $\text{Im} z = 0$  перейдут в действительную ось  $\text{Im} \omega_2 = 0$  и в прямую  $\text{Im} \omega_2 = H$  соответственно.

Суперпозиция отображений

$$\omega_2 = \frac{H}{\pi} \omega_1 = \frac{H}{\pi} \text{Ln} z = \frac{H}{\pi} \text{Ln} \psi(\zeta) = g(\zeta) \quad (108)$$

конформно отображает рассматриваемую область  $D$  в полуплоскости  $\text{Im} \zeta$  на полосу  $0 < \text{Im} \omega_2 < H$  в соответствии с рисунком 16. Нетрудно проследить, что действительной оси  $\text{Im} \zeta = 0$ , принятой в качестве нулевой линии тока со значением функции тока  $\psi'_1 = 0$ , при этом отображении соответствует прямая  $\text{Im} \omega_2 = H$ , а линии тока со значением  $\psi'_2 = -Q$  (при истечении жидкости из канала в водоем) — действительная ось  $\text{Im} \omega_2 = 0$ .

Сравнивая условия течения в полосе  $0 < \text{Im} \omega_2 < H$  и в полосе, изображенной в соответствии с рисунком 15, приходим к выводу, что эти условия идентичны, поскольку  $\Psi'_1 - \Psi'_2 = 0 - (-Q) = Q = \Psi_2 - \Psi_1$ . Поэтому, используя (105) и учитывая (108), для комплексного потенциала, описывающего течение в области  $D$ , получаем

$$W(\omega) = \frac{Q}{H} g(\zeta) = \frac{Q}{H} \frac{H}{\pi} \text{Ln} \psi(\zeta) = \frac{Q}{\pi} \text{Ln} \psi(\zeta).$$

В соответствии с рисунком 17 представлены линии тока  $\Psi(z) = \text{const}$  со стрелками, указывающими направление движения жидкости при ее поступлении в водоем.

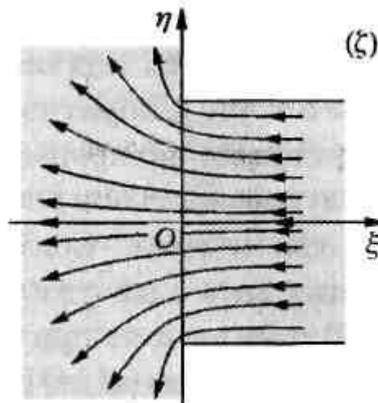


Рисунок 17. Линии тока в направлении движения жидкости

Из (107) следует, что  $f_1'(1) = \infty$ . Это означает, что для обратной функции  $z = \psi(\zeta)$  в точке  $\zeta = ih$  соответствующей точке  $z = 1$ , конформность отображения нарушена, поскольку  $\varphi'(ih) = 0$ . Как следствие, из точки  $\zeta = ih$  выходят несколько линии равного потенциала, а скорость жидкости в окрестности этой точки не ограничена по модулю. В действительности в силу вязкости реальной жидкости и образования вихрей при обтекании углов скорость будет ограничена, но достаточно велика, что приводит к размыванию устья канала (или входа в канал, если жидкость вытекает из водоема) и скруглению углов.

## 2.2 Теория уравнений с частными производными

### 2.2.1 Система Карлемана

В теории уравнений с частными производными за последние годы успешно используются методы, основанные на представлении решений в комплексной форме. Эти методы развиты главным образом в работах И. 11. Векуа, Л. Берса, С. Бергмана и др. В качестве примера мы приведем, следуя И. Н. Векуа, такое представление для системы уравнений с частными производными первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv, \quad (108)$$

где  $a, b, c$  и  $d$  — непрерывные функции переменных  $x$  и  $y$  в некоторой области  $D$ .

Система (108) представляет собой обобщение условий Коши — Римана (при  $a = b = c = d = 0$  мы получаем эти условия); к ней приводятся некоторые задачи теории упругих оболочек, газовой динамики и других разделов механики сплошных сред. Эта система была впервые рассмотрена Т. Карлеманом — шведский математик), который доказал для ее решений теорему единственности. Подробное исследование системы (108) и ее приложений провел И. Н. Векуа. Всюду в дальнейшем мы будем для простоты считать, что функции  $u$  и  $v$  обладают в области  $D$  непрерывными частными производными.

При выводе формул представления удобно пользоваться символами комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (109)$$

Например, первый из них в применении к комплексной функции  $\omega = u + iv$  дает:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(u + iv)}{\partial x} + i \frac{\partial(u + iv)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) i.$$

В частности, условия аналитичности Коши — Римана записываются с помощью этого символа в виде  $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = 0$ .

Приведем сначала формулу представления произвольной функции  $\omega = u + iv$ , обладающей в некоторой области  $D$  непрерывными частными производными. Для этого воспользуемся формулой Римана — Грина, которая с помощью символа (2) записывается в виде

$$\frac{1}{2i} \int_C \omega(\zeta) d\zeta = \iint_D \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} d\xi d\eta, \quad (110)$$

где  $\zeta = \xi + i\eta$  и  $C$  — граница  $D$ . Для аналитических функций  $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \equiv 0$  и формула (110) выражает, очевидно, теорему Коши.

Поступая далее в точности так же, как и при выводе из теоремы Коши интегральной формулы Коши, исключим из области  $D$  окрестность  $d$  фиксированной точки  $z$ , ограниченную окружностью с малого радиуса, и применим к области  $D - d$  и к функции  $\frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}$  формулу (110); мы получим:

$$\frac{1}{2i} \int_C \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i} \int_c \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \iint_{D-d} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

Устремляя радиус окрестности к нулю, увидим как и в п. 14, что предел интеграла  $\int_c \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ , равен  $2\pi i \omega(z)$  и, следовательно, получим искомую формулу представления:

$$\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\omega(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}. \quad (111)$$

Для аналитических функции двойной интеграл исчезает, и мы приходим к интегральной формуле Коши.

Применим эту формулу к решениям системы Карлемана (108). С помощью символа дифференцирования (109) эта система записывается в виде одного комплексного уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = A\omega + B\bar{\omega}, \quad (112)$$

где  $\omega = u + iv$ ,  $A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib)$  и  $B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib)$ .

Поэтому формула (111) дает следующее комплексное представление решений системы (108):

$$\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\omega(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta)\omega(\zeta) + B(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta - z} d\xi d\eta. \quad (113)$$

Приведем еще одну, более удобную формулу комплексного представления решений системы Карлемана (5). Пусть  $\omega = \omega(z)$  будет произвольное решение этой системы и  $N$  — совокупность точек  $D$ , в которых  $\omega = 0$ ; через  $M$  мы обозначим множество  $D - N$ . Положим

$$\chi(z) = \begin{cases} A(z) + B(z) \frac{\overline{\omega(z)}}{\omega(z)}, & \text{если } z \text{ принадлежит } M, \\ 0, & \text{если } z \text{ принадлежит } N; \end{cases}$$

функция  $\chi(z)$  непрерывна на  $M$  и на  $N$  в отдельности и, очевидно, ограничена, ибо для любой точки  $z$  из  $D$  мы имеем  $|\chi(z)| \leq |A(z)| + |B(z)|$ . Поэтому функция  $\chi(z)$  интегрируема по области  $D$ , т. е. имеет смысл интеграл

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\chi(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z}. \quad (114)$$

Можно проверить, что функция  $\omega(z)$  аналогична вне замкнутой области  $\overline{D}$  и что  $\omega(\infty) = 0$ . Докажем, что в любой точке  $z$  непрерывности функции  $\chi(z)$  существует комплексная производная

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = -\chi(z). \quad (115)$$

В самом деле, выделим окрестность  $d$  точки  $z$ , ограниченную контуром  $c$ , и представим  $\omega(z)$  в виде суммы двух непрерывных во всей плоскости функций  $\omega_1(z)$  и  $\omega_2(z)$ :

$$\omega_1(z) = \frac{1}{\pi} \iint_d \frac{\chi(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \omega_2(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{D-d} \frac{\chi(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z}.$$

Функция  $\omega_1(z)$  аналитична вне  $\overline{d}$ , а  $\omega_2(z)$  — в  $d$ , поэтому

$$\frac{1}{2i} \int_c \omega(z) dz = \frac{1}{2i} \int_c \omega_1(z) dz + \frac{1}{2i} \int_c \omega_2(z) dz = \frac{1}{2i} \int_L \omega_1(z) dz,$$

где  $L$  — окружность достаточно большого радиуса, содержащая  $D$  (мы воспользовались теоремой Коши, по которой первый интеграл в средней части равенства можно заменить интегралом вдоль  $L$ , а второй равен нулю). Заменяя  $\omega_1(z)$  ее выражением и меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\frac{1}{2i} \int_c \omega(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \iint_d \chi(\zeta) d\xi d\eta \int_L \frac{dz}{z - \zeta} = -\iint_d \chi(\zeta) d\xi d\eta.$$

Если разделить обе части этого равенства на площадь  $s$  области  $d$  и воспользоваться предельным соотношением

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = \lim_{d \rightarrow z} \frac{1}{2is} \int_c \omega(z) dz,$$

которое вытекает из формулы (110) на основании теоремы о среднем, то в пределе при  $d \rightarrow z$  мы получим искомую формулу (115).

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(z) = \omega(z)e^{\omega(z)}, \quad (116)$$

которая, очевидно, непрерывна в  $D$ . Если  $z$  принадлежит множеству  $M$ , то, применяя правила комплексного дифференцирования произведения и показательной функции (которые легко проверяются), мы получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = e^{\omega(z)} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} \right) = e^{\omega(z)} (A\omega + B\bar{\omega} - \omega\chi) \equiv 0;$$

таким образом, функция  $\varphi(z)$  аналитична на множестве  $M$ . Легко видеть, что она аналитична также и на множестве  $N$ . Действительно, функция  $\omega(z)$  аналитична в каждой точке, где она равна нулю, ибо в таких точках согласно уравнению

(112)  $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = 0$ ; поэтому для любой точки  $z_0$  из  $N$  отношение

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = \frac{\omega(z)}{z - z_0} e^{\omega(z)}$$

имеет предел при  $z \rightarrow z_0$ , равный  $\omega'(z_0)e^{\omega(z_0)}$  т.е.  $\varphi(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$ .

Таким образом, функция  $\varphi(z)$  аналитична всюду в области  $D$ . Заметим, наконец, что согласно формуле (116) нули  $\omega(z)$  совпадают с нулями  $\varphi(z)$ , и по теореме единственности множество  $N$  этих нулей не может иметь предельных точек внутри  $D$ . Это множество, следовательно, не влияет на величину интеграла в формуле (114), и эту формулу можно переписать в виде

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta)\omega(\zeta) + B(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)(\zeta - z)} d\xi d\eta.$$

Формула (116) дает теперь искомое комплексное представление решений системы Карлемана через аналитические функции  $\varphi(z)$ :

$$\omega(z) = \varphi(z) \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta)\omega(\zeta) + B(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)(\zeta - z)} d\xi d\eta \right\}. \quad (117)$$

Эта формула была получена И. Н. Векуа и независимо от него (в более ограниченных предположениях) Л. Берсом. Из нее вытекает, что в отношении нулей и полюсов решения системы Карлемана ведут себя так же, как аналитические функции: на эти решения распространяется теорема о нулях (что

мы уже отмечали выше), принцип аргумента и теорема Руше и другие теоремы. Заметим, однако, что геометрические свойства системы Карлемана существенно отличаются от свойств аналитических функций.

### 2.2.2 Линейные эллиптические системы

Рассмотрим так называемое плоско-меридианное электростатическое поле, т. е. пространственное поле, векторы которого расположены в плоскостях, проходящих через некоторую ось (мы примем ее за ось  $z$ ), и зависят лишь от расстояния  $z$  до этой оси и от координаты  $r$  вдоль нее. Это поле, очевидно, полностью описывается плоским полем, расположенным в плоскости декартовых координат  $(r, z)$ , но его уравнения отличаются от уравнений. В самом деле, пользуясь известными выражениями для дивергенции и ротора в цилиндрических координатах и обозначая через  $E_r$  и  $E_z$  соответствующие компоненты вектора напряженности  $E$ , мы запишем условия отсутствия зарядов и потенциальности поля в виде:

$$\frac{\partial(rE_z)}{\partial r} + \frac{\partial(rE_r)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0. \quad (118)$$

Из этих условий, заключаем, что существуют две функции  $u(r, z)$  и  $v(r, z)$ , для которых

$$rE_z = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad rE_r = -\frac{\partial v}{\partial z}; \quad E_r = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

и которые связаны, следовательно, соотношениями

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad -r \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (119)$$

Эти функции полностью описывают плоско-меридианное поле.

Уравнения (119) представляют собой частный случай системы линейных уравнений с частными производными первого порядка эллиптического типа

$$\left. \begin{aligned} v_y &= au_x + bu_y, \\ -v_x &= du_x + cu_y, \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

где  $a, b, c, d$  — известные функции переменных  $x$  и  $y$ , для которых всюду в рассматриваемой области  $D$  выполняется условие эллиптичности:

$$A = ac - \left( \frac{b+d}{2} \right)^2 > 0 \quad (121)$$

(для простоты письма через  $u_x$  обозначим  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ).

К таким системам приводят также некоторые задачи газовой динамики, теории пластичности, теории изгиба поверхности и другие. Они рассмотрены в работах И. Н. Векуа, Л. Берса, Г. Н. Положего, Б. Боярского и других авторов, которые установили ряд фактов, роднящих решения этих систем с аналитическими функциями. Теория решений линейных систем входит как простейшая составная часть в общую теорию квазиконформных отображений. В работах перечисленных авторов доказано, что для систем (120) справедлива теорема существования отображений, обобщающая теорему Римана, и что решения этих систем обладают целым рядом геометрических свойств, вполне аналогичных свойствам конформных отображений. Приведем лишь несколько простейших фактов.

Можно доказать, что система (120) геометрически выражает условие преобразования бесконечно малых эллипсов плоскости  $z = x + iy$  из семейства

$$\gamma(X-x)^2 - 2\beta(X-x)(Y-y) + \alpha(Y-y)^2 = ph^2 \quad (122)$$

с точностью до малых высших порядков в эллипсы плоскости  $\omega = u + iv$  из семейства

$$\gamma_1(U-u)^2 - 2\beta_1(U-u)(V-v) + \alpha_1(V-v)^2 = p_1 h_1^2 \quad (122')$$

причем коэффициенты уравнений эллипсов определяются через коэффициенты системы (120) по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{\sqrt{A}}, \quad \beta = \frac{b+d}{2\sqrt{A}}, \quad \gamma = \frac{c}{\sqrt{A}}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad \beta_1 = \frac{b-d}{2\sqrt{A}}, \quad \gamma_1 = \frac{B}{\sqrt{A}}, \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

(у нас  $p, p_1 \geq 1$  — отношения полуосей,  $h, h_1$  — малые полуоси эллипсов, следовательно, являются известными функциями точки  $z$ . Из решения  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  системы (120) мы составим функцию комплексного переменного  $f(z) = u + iv$  и отображение, ею осуществляемое, будем называть квазиконформным отображением, связанным с этой системой. В частности, когда эллипсы (122) и (122') представляют собой окружности, т. е.  $\alpha = \gamma = 1, \beta = 0$  и  $\alpha_1 = \gamma_1 = 1, \beta_1 = 0$ , то, как легко видеть, система (120) переходит (при дополнительном условии сохранения ориентации) в систему Коши-Римана, т. е. квазиконформные отображения переходят в конформные.

Для решения системы (120) можно найти формулы, обобщающие теорему Коши и интегральную формулу Коши. Для доказательства перепишем систему (120) в виде

$$\left. \begin{aligned} L[u, v] &= au_x + bu_y - v_y = 0 \\ M[u, v] &= du_x + cu_y + v_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (120')$$

и воспользуемся известной из анализа формулой Грина, которая для рассматриваемой системы запишется в виде:

$$\begin{aligned} \int_C \{u^*v - (bu^* + cv^*)u\} dx + \{(au^* + dv^*)u + v^*v\} dy = \\ = \iint_D \{u^*L[u, v] + v^*M[u, v] + u\tilde{L}[u^*, v^*] + v\tilde{M}[u^*, v^*]\} dx dy, \end{aligned} \quad (124)$$

где  $C$  обозначает границу области  $D$  и

$$\tilde{L}[u, v] = (au + dv)_x + (bu + cv)_y, \quad \tilde{M}[u, v] = v_x - v_y$$

(эта формула имеет место для любой четверки функций  $u, v, u^*, v^*$ , обладающих непрерывными частными производными и выводится интегрированием по частям так же, как обычная формула Римана — Грина).

В предположении о непрерывности вторых частных производных из системы (120) можно исключить функцию  $v$  так, что она сведется к одному уравнению второго порядка

$$\Lambda[u] = (au_x + bu_y)_x + (du_x + cu_y)_y = 0 \quad (125)$$

(воспользовались условием равенства смешанных производных  $v_{xy}$  и  $v_{yx}$ ). Рассмотрим также сопряженное к (125) уравнение

$$\Lambda^*[X] = (aX_x + bX_y)_x + (dX_x + cX_y)_y = 0 \quad (126)$$

Для каждого его решения  $X(x, y)$  существует, очевидно, функция  $Y(x, y)$ , связанная с  $X$  уравнениями

$$\left. \begin{aligned} L^*[X, Y] &= aX_x + dX_y - Y_y = 0, \\ M^*[X, Y] &= bX_x + cX_y + Y_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Так как эта система отличается от (120) лишь перестановкой  $b$  и  $d$ , то эллипсы, связанные с ней, в плоскости  $z$  совпадают с эллипсами, связанными с системой (120), а в плоскости  $\omega$  получаются из них отражением относительно оси и (перемена знака  $\beta_1$ ); при  $b = d$  эти эллипсы совпадают.

Воспользуемся теперь формулой Грина (124), приняв в ней в качестве  $u$  и  $v$  решение системы (120) и положив  $u^* = X_x, v^* = X_y$ , где  $X$  и  $Y$  — решение системы (127); мы получим:

$$\int_C v dX + u dY = 0 \quad (128)$$

Далее решаем систему (120) относительно  $u_y$  и  $u_x$ :

$$\left. \begin{aligned} L_1[u, v] &= -a_1 v_x - d_1 v_y - u_y = 0 \\ M_1[u, v] &= -b_1 v_x - c_1 v_y + u_x = 0 \end{aligned} \right\}$$

(здесь  $a_1 = \frac{a}{B}, \dots, d_1 = \frac{d}{B}$ ). Для этой системы имеет место формула (124), в которой всюду  $u$  заменено на  $v$ ,  $v$  на  $u$  и коэффициенты  $a, \dots, d$  на  $-a_1, \dots, -d_1$ . Для каждого решения уравнения

$$\Lambda_1^*[X^1] = -(a_1 X_x^1 + b_1 X_y^1)_x - (d_1 X_x^1 + c_1 X_y^1)_y = 0 \quad (126_1)$$

существует функция  $Y^1$ , связанная с ним уравнения

$$\left. \begin{aligned} L_1^*[X^1, Y^1] &= a_1 X_x^1 + b_1 X_y^1 - Y_y^1 = 0, \\ M_1^*[X^1, Y^1] &= d_1 X_x^1 + c_1 X_y^1 - Y_y^1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (127_1)$$

Эллипсы, связанные с этой системой, в плоскости  $z$  совпадают с эллипсами, связанными с системой (13), а в плоскости  $\omega$  получаются из них отражением относительно биссектрисы первого координатного угла; при  $B = 1$  эти эллипсы совпадают. Вместо формулы (20) мы будем иметь:

$$\int_C u dX^1 - v dY^1 = 0. \quad (128_1)$$

Введем, наконец, комплексные переменные  $Z = X + iY^1$ ,  $Z^* = X^1 + iY$ ; тогда формулы (21) и (21<sub>1</sub>) можно объединить в одной формуле

$$\int_C u dZ^* + i v dZ = 0, \quad (129)$$

которая и выражает обобщение теоремы Коши.

Если, в частности, эллипсы в плоскости  $\omega$  являются окружностями ( $b = d$ ,  $B = ac - b^2 = 1$ ), то системы (127) и (127<sub>1</sub>) совпадают. Следовательно, в этом случае можно принять  $Z^* = Z$  и формула (129) упростится:

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Если, кроме того, и эллипсы в плоскости  $z$  являются окружностями

(система Коши — Римана), то можно принять  $Z = z$ , и мы возвращаемся к классической теореме Коши.

Чтобы получить обобщение формулы Коши, введем связанное с системой (120) «расстояние»

$$\rho(z, z_0) = \sqrt{c_0(x-x_0)^2 - (b_0 + d_0)(x-x_0)(y-y_0) + a_0(y-y_0)^2},$$

где  $a_0, \dots, d_0$  — значения коэффициентов в точке  $z_0$ , и будем рассматривать вместо  $X$  решение уравнения (126), имеющее в фиксированной точке  $z_0$  области  $D$  особенность типа  $\ln \rho(z, z_0)$ :

$$\Gamma(z, z_0) = \gamma'(z, z_0) \ln \rho(z, z_0) + \gamma''(z, z_0)$$

( $\gamma'$  и  $\gamma''$  — непрерывные функции), а также «сопряженную» с ним функцию

$$H(z, z_0) = \int_{\bar{z}} - (b\Gamma_x + c\Gamma_y)dx + (a\Gamma_x + d\Gamma_y)dy.$$

В силу (126) этот интеграл не изменяется при непрерывной деформации пути интегрирования, если при этом не задевать точки  $z_0$ . При обходе же точки  $z_0$  (один раз против часовой стрелки)  $H$  получает приращение

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\rho(z, z_0)} - (b\Gamma_x + c\Gamma_y)dx + (a\Gamma_x + d\Gamma_y)dy &= \\ &= A(z_0) \gamma'(z_0, z_0) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a_0 \sin^2 t - (b_0 + d_0) \sin t \cos t + c_0 \cos^2 t} = \\ &= 2\pi \gamma'(z_0, z_0) \sqrt{A(z_0)}, \end{aligned} \quad (130)$$

которое будет равным  $2\pi$ , если принять  $\gamma'(z_0, z_0) = 1/\sqrt{A(z_0)}$ . Таким образом, многозначная функция  $H(z, z_0)$  имеет в точке  $z_0$  особенность того же типа, что и  $\text{Arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}$ .

Применяя формулу (124), в которой положено  $u^* = \Gamma_x$ ,  $v^* = \Gamma_y$ , а  $u$  и  $v$  — решение (120), к области  $D$  с выброшенным эллипсом  $\rho(z, z_0) \leq h$ , получаем:

$$u \int_C v d\Gamma + u dH = \int_{\rho(z, z_0)=h} v d\Gamma + u dH. \quad (131)$$

Так как  $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\rho=h} v d\Gamma = 0$  и в силу (23)  $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\rho=h} u dH = 2\pi u(z_0)$ , то из (24) в пределе при  $h \rightarrow 0$  получим:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C v(z) d_z \Gamma(z, z_0) + u(z) d_z H(z, z_0). \quad (132)$$

Переходя к системе (127<sub>1</sub>), аналогично построим решение уравнения (126<sub>1</sub>) с особенностью типа логарифма:

$$\Gamma^1(z, z_0) = \gamma'_1(z, z_0) \ln \rho(z, z_0) + \gamma''_1(z, z_0)$$

и многозначную функцию

$$H^1(z, z_0) = \int^z -(d_1 \Gamma'_x + c_1 \Gamma'_y) dx + (c_1 \Gamma'_x + b_1 \Gamma'_y) dy.$$

приращение которой при обходе  $z_0$  будет равным  $2\pi$ , если принять  $\gamma'_1(z_0, z_0) = B(z_0)/\sqrt{A(z_0)}$ . Тогда вместо (132) будем иметь:

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C v(z) d_z H^1(z, z_0) - u(z) d_z \Gamma^1(z, z_0). \quad (132_1)$$

Вводя комплексные функции

$$l(z, z_0) = \Gamma(z, z_0) + iH^1(z, z_0), \quad l^*(z, z_0) = \Gamma^1(z, z_0) + iH(z, z_0)$$

объединим (132) и (132<sub>1</sub>) в одной формуле

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(z) d_z l^*(z, z_0) + i v(z) d_z l(z, z_0), \quad (133)$$

которая и обобщает формулу Коши.

Если эллипсы в плоскости  $\Omega$  являются окружностями, то можно принять  $l^* = l$ , и формула (26) упростится:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) d_z l(z, z_0).$$

Наконец, для системы Коши — Римана можно положить  $l = \ln(z - z_0)$ , и получим классическую формулу Коши.

### 2.2.3 Задача Трикоми

Дифференциальными уравнениями смешанного типа называют уравнения с частными производными второго порядка, которые в одной части области своего определения имеют эллиптический тип, а в другой — гиперболический. Изучение таких уравнений представляет весьма большой интерес для аэродинамики

больших скоростей, ибо перемене типа уравнения физически соответствует переход скорости движения через скорость звука. Простейшим уравнением смешанного типа является уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (134)$$

где  $\theta(y) = 1$  при  $y > 0$  и  $\theta(y) = -1$  при  $y < 0$  (таким образом, уравнение (134) имеет эллиптический тип в верхней полуплоскости и гиперболический тип в нижней). Задача Трикоми (итальянский математик) для такого уравнения в области  $D$ , ограниченной кривой  $C$ , лежащей в верхней полуплоскости и опирающейся на отрезок  $(0,1)$ , и отрезками  $L$  и  $L_1$  характеристик уравнения, которые параллельны, биссектрисам координатных углов в соответствии с рисунком 17, ставится следующим образом.

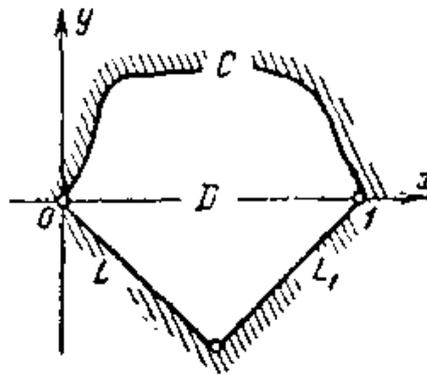


Рисунок 17. Область для задачи Трикоми

Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (134) при  $y \neq 0$  непрерывную в замкнутой области  $\bar{D}$ , имеющую частные производные, непрерывные в  $D$  всюду, кроме точек  $z = 0$ ,  $z = 1$ , в которых они могут обращаться в бесконечность порядка, меньшего 1, и принимающую на кривых  $C$  и  $L$  заданные значения:

$$u = \begin{cases} \varphi(\zeta) & \text{на } C, \\ \psi(x) & \text{на } L \end{cases} \quad (\varphi(0) = \psi(0)). \quad (135)$$

Приведем простое и изящное решение задачи, данное А. В. Бицадзе в 1950 г. С помощью конформного отображения эллиптической части  $D_1$  области  $D$  задача сводится к частному случаю, когда эта часть представляет собой верхний полукруг  $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ ,  $y > 0$ . Кроме того, можно предполагать, что  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ .

В гиперболической части  $D_2$  области  $D$ , где уравнение (134) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

решение  $u(x, y)$ , как известно, можно подставить в виде

$$u = \Phi(x + y) + \Psi(x - y),$$

где  $\Phi$  и  $\Psi$  — произвольные функции. На  $L$  мы имеем  $x + y = 0$ , поэтому подставив это выражение для  $u$  во второе из условий (135), найдем:

$$\Phi(0) + \Psi(2x) = \psi(x)$$

и, следовательно, наше выражение примет вид

$$u(x, y) = \Phi(x + y) - \Phi(0) + \psi\left(\frac{x - y}{2}\right). \quad (136)$$

Из условия непрерывности функции  $u(x, y)$  получаем, что на оси  $x$

$$u(x, y) = \Phi(x) - \Phi(0) + \psi\left(\frac{x}{2}\right)$$

В эллиптической части  $D_1$  функция  $u(x, y)$  гармоническая; пусть  $v(x, y)$  — гармоническая и  $D_1$  функция, сопряженная с  $u(x, y)$  и, равная нулю в гонке  $(0, 0)$ . Как следует из выражения (136), в  $D_2$  имеем:  $\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi'(x + y) - \frac{1}{2}\psi'\left(\frac{x - y}{2}\right)$ , откуда пользуясь непрерывностью  $\frac{\partial u}{\partial y}$  на оси  $x$ , находим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\Phi'(x) + \frac{1}{2}\psi'\left(\frac{x}{2}\right).$$

Интегрируя, находим, что на оси  $x$

$$v(x, 0) = -\Phi(x) + \Phi(0) + \psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

и складывая это выражение для  $u(x, 0)$ , получаем:

$$u(x, 0) + v(x, 0) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right). \quad (137)$$

Пусть теперь

$$u = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

где функции  $u_1$  и  $u_2$  решают соответственно краевые задачи

$$u_1 = \begin{cases} \varphi(\zeta) & \text{на } C, \\ 0 & \text{на } L; \end{cases} \quad u_2 = \begin{cases} 0 & \text{на } C, \\ \psi(x) & \text{на } L. \end{cases} \quad (138)$$

Для первой из этих функций, в силу соотношения (137) на отрезке  $(0,1)$  получаем:

$$u_1(x,0) + v_1(x,0) = 0,$$

но это означает, что аналитическая функция

$$f_1(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$$

преобразует отрезок  $(0,1)$  в отрезок прямой  $u_1 + v_1 = 0$  и, следовательно, по принципу симметрии продолжается через отрезок  $(0,1)$ . При этом в точках нижнего полукруга будем иметь:

$$f_1(z) = -v_1(x,-y) - iu_1(x,-y), \quad (139)$$

ибо симметрия относительно второй биссектрисы сводится к замене  $u_1$  на  $v_1$ ,  $v_1$  на  $u_1$  и перемене знаков обеих координат. Таким образом, функция  $f_1(z)$  (вместе со своим продолжением) аналитична в круге  $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ , причем в силу условий (138) на верхней полуокружности  $C$  известна ее действительная часть  $\operatorname{Re} f_1(\zeta) = \varphi(\zeta)$ , а на нижней полуокружности  $C_*$ , в силу соотношения (139) известна ее мнимая часть  $\operatorname{Im} f_1(\zeta) = -\varphi(\bar{\zeta})$ . Поэтому функция  $f_1(z)$  восстанавливается по формуле Келдыша — Седова (74), которая для рассматриваемого случая принимает вид

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - i \int_{C_*} \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}} \frac{\varphi(\bar{\zeta}) d\zeta}{\zeta - z} \right\}. \quad (140)$$

Заменим во втором интеграле переменную  $\zeta = \bar{\omega}$ , получим:

$$-i \int_{C_*} = i \int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\bar{\omega}(1-\bar{\omega})}} \frac{\varphi(\omega) d\bar{\omega}}{\bar{\omega} - z}.$$

Обозначим  $\arg \omega = t$ ; так как на  $C$  имеем  $\omega = e^{it} \cdot \cos t$ , то  $\bar{\omega} = e^{-2it} \omega$ . На  $e^{2it} = 2 \cos^2 t - 1 + 2i \sin t \cos t = 2\omega - 1$ , следовательно,  $\bar{\omega} = \omega / (2\omega - 1)$ . Подставляя это в предыдущий интеграл, находим:

$$-i \int_{C^*} = i \int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\omega(1-\omega)}} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega - z(2\omega - 1)}.$$

Обозначая переменную интегрирования снова через  $\zeta$ , и объединяя полученный интеграл с первым интегралом (140), находим окончательно:

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}} \left\{ \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta + z - 2\zeta z} \right\} \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (141)$$

Рассмотрим теперь аналитическую функцию

$$f_2(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y).$$

По принципу симметрии она продолжается через полуокружность  $C$  на всю верхнюю полуплоскость, так как в силу условия (138)  $u_2 = 0$  на  $C$ . Согласно этому принципу в точках  $x$  и  $x/(2x-1)$  действительной оси, симметричных относительно  $C$ , функция  $f_2$  принимает значения, симметричные относительно  $u_2 = 0$ , т. е. отличающиеся знаком  $u_2$ :

$$f_2(x) = -u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + iv_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right).$$

Теперь учтем, что в точках отрезка  $(0,1)$  известна

$$\operatorname{Re}(1-i)f_2(x) = u_2(x, 0) + v_2(x, 0) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

а в точках лучей  $(-\infty, 0)$  и  $(1, \infty)$  известна

$$\operatorname{Im}(1-i)f_2(x) = v_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) = 2\psi\left(\frac{x}{4x-2}\right).$$

Поэтому функция  $(1-i)f_2(z)$  восстанавливается по формуле Келдыша – Седова для полуплоскости. После преобразований найдем:

$$(1-i)f_2(z) = \frac{2}{\pi i} \int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz} \right) \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt. \quad (142)$$

Искомая функция в эллиптической части  $D_1$ , очевидно, равна

$$u(z) = \operatorname{Re}\{f_1(z) + f_2(z)\}, \quad (143)$$

где  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  определяются формулами (141) и (142). В гиперболической части  $D_2$ , как видно из (136), она равна

$$u(x, y) = u(x + y, 0) - \psi\left(\frac{x + y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x - y}{2}\right). \quad (144)$$

#### 2.2.4 Задача о двумерном стационарном температурном поле

Рассмотрим сплошную плоскую пластину, поверхности которой изолированы от теплообмена с окружающей средой. При отсутствии внутренних источников тепла тепловое состояние тела не меняется с течением времени.

Расположим пластину в первом квадрате координатной плоскости и положим, что при  $x = 0$ ,  $x = l$ ,  $y = \infty$  поддерживается постоянная температура  $t_1$ , а на границе  $y = 0$  задано постоянное распределение температуры  $f(x)$ .

Математическое исследование стационарных процессов теплопроводности приводит к решению уравнения Лапласа [13].

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (145)$$

и граничными условиями:

$$T(x, y)|_{x=0} = 0, \quad T(x, y)|_{x=l} = 0, \quad T(x, y)|_{y=\infty} = 0, \\ T(x, y)|_{y=0} = F(x) = f(x) - t_1 \quad (146)$$

Решение этого уравнения можно получить методом разделения переменных.

Исключительно сильный аппарат решения уравнения Лапласа дает теория функций комплексного переменного.

Исследуем тепловое состояние тела с использованием метода Фурье и теории аналитических функций.

Решение ищем методом Фурье:

$$T(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (147)$$

тогда

$$X''Y = -XY'',$$

разделим на  $XY$  и получим

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2,$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (148)$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0. \quad (149)$$

Решение уравнения (148)

$$k^2 + \lambda^2 = 0, \quad k = \pm \lambda i,$$

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad (150)$$

Решение уравнения (149)

$$k^2 - \lambda^2 = 0, \quad k_{1,2} = \pm \lambda,$$

$$Y(y) = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}, \quad (151)$$

при  $y = \infty \quad 0 = C_3,$

$$Y(y) = C_4 e^{-\lambda y},$$

при  $x = l,$

$$T(x, y) = C e^{-\lambda y} \cdot \sin \lambda x,$$

$$C_1 e^{-\lambda y} \sin \lambda l = 0,$$

$$C_1 \neq 0, \quad e^{-\lambda y} \neq 0,$$

$$\sin \lambda l = 0, \quad \lambda l = k\pi,$$

$$\lambda = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$\lambda = \frac{k\pi}{l}$  называется собственными числами значения  $T_k$  называются собственными функциями.

Общее решение в силу однородности (145) равно

$$T(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-\frac{k\pi}{l}y} \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x \quad (152)$$

и должно удовлетворять условию при  $y = 0, \quad T(x, y) = F(x),$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi}{l}x,$$

а это разложение функции  $F(x)$  в Ряд Фурье по синусам

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x dx.$$

Таким образом общее решение уравнения (145) с условиями (146) имеет вид

$$T = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k\pi}{l}y} \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi}{l}x dx \quad (153)$$

Если температура на границе  $y=0$  постоянна и равна  $t=t_2$ , тогда  $F(x) = t_2 - t_1 = \text{const}$

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l (t_2 - t_1) \sin \frac{k\pi}{l}x dx = -\frac{2}{l}(t_2 - t_1) \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{l}x \Big|_0^l =$$

$$= -\frac{2(t_2 - t_1)}{k\pi} (\cos k\pi - 1) = \frac{4}{k\pi} (t_2 - t_1); \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Подставим в (153):

$$T = \frac{4}{\pi} \left( e^{-\frac{\pi}{l}y} \sin \frac{\pi}{l}x + \frac{1}{3} e^{-\frac{3\pi}{l}y} \sin \frac{3\pi}{l}x + \frac{1}{5} e^{-\frac{5\pi}{l}y} \sin \frac{5\pi}{l}x + \dots \right) \quad (154)$$

Для исследования стационарного теплового тела удобно использовать теорию функций комплексного переменного.

Если функция  $U(x, y) + iV(x, y)$  является аналитической, то ее действительная и мнимая части удовлетворяют уравнению Лапласа (145). Кривые функции  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  взаимно ортогональны, поэтому при исследовании стационарного поля один из компонентов соответствует изотермическим линиям, а другой – адиабатам. Эти линии в лапласовом поле взаимно ортогональны.

Рассмотрим комплексную функцию  $W(Z') = \ln z'$ , где  $z' = (1+x) + iy$ . Выразим  $z'$  в полярных координатах:

$$z' = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho^2 = (1+x)^2 + y^2, \quad \varphi = \text{arctg} \frac{y}{1+x}.$$

Тогда

$$\ln Z' = \ln \rho \cdot e^{i\varphi} = \ln \rho + \ln e^{i\varphi} = \ln \rho + i\varphi = U + iV,$$

Приравнивая действительные и мнимые части, имеем сопряженные гармонические функции:

$$U = \ln \rho = \ln \sqrt{(1+x)^2 + y^2}; \quad V = \varphi = \text{arctg} \frac{y}{1+x}.$$

Установим аналитичность функции  $W(z')$ .

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} \cdot \frac{2(1+x)}{2\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} = \frac{1+x}{(1+x)^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{(1+x)^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-y}{1 + \frac{y^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-y(1+x)^2}{(1+x^2)^2(1+x)^2} = -\frac{y}{(1+x^2)^2};$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + y^2} = \frac{1+x}{(1+x)^2 + y^2}.$$

Сопряженные функции  $U$ ,  $V$  удовлетворяют условию Коши-Римана

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

и являются решением уравнения Лапласа (1).

Функции  $\ln(1+z)$  и  $\ln(1-z)$  можно разложить в степенной ряд:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \quad (z < 1)$$

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots, \quad (z < 1)$$

Известно, что логарифм комплексного переменного равен:

$$\ln z = \ln|z| \pm i \arg z$$

если  $z = x + iy$ , то  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ .

Значит получим

$$\ln z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \pm i \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \pm i \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Используем тригонометрическую форму комплексного числа  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , тогда

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= \ln(1+x+iy) = \ln(1+\rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} \ln|(1+\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2| + i \cdot \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1+\rho \cos \varphi} = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \ln|1+2\rho \cos \varphi + \rho^2| + i \cdot \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1+\rho \cos \varphi} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \quad (z < 1).$$

Аналогично,

$$\ln(1-z) = \ln(1+x-iy) = \frac{1}{2} \ln|1-2\rho \cos \varphi + \rho^2| - i \cdot \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1-\rho \cos \varphi}.$$

Вычитаем

$$\begin{aligned} \ln|1+z| - \ln|1-z| &= \frac{1}{2} \ln|1+2\rho \cos \varphi + \rho^2| - \frac{1}{2} \ln|1-2\rho \cos \varphi + \rho^2| + \\ &+ i \cdot \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1+\rho \cos \varphi} + i \cdot \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1-\rho \cos \varphi} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+2\rho \cos \varphi + \rho^2}{1-2\rho \cos \varphi + \rho^2} \right| + i \left( \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1+\rho \cos \varphi} + \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1-\rho \cos \varphi} \right) \end{aligned}$$

учитывая  $\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$ , имеем

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+2\rho \cos \varphi + \rho^2}{1-2\rho \cos \varphi + \rho^2} \right| + i \cdot \operatorname{arctg} \frac{2\rho \sin \varphi}{1-\rho^2} = 2 \left( z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right).$$

Преобразуем правую часть по формуле А. Муавра  $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ , тогда

$$z^3 = \rho^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi), \quad z^5 = \rho^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi), \quad \dots$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+2\rho \cos \varphi + \rho^2}{1-2\rho \cos \varphi + \rho^2} \right| + i \cdot \operatorname{arctg} \frac{2\rho \sin \varphi}{1-\rho^2} = \\ &= 2 \left( \rho \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi + \frac{\rho^3}{3} \cos 3\varphi + i \cdot \frac{\rho^3}{3} \sin 3\varphi + \frac{\rho^5}{5} \cos 5\varphi + i \cdot \frac{\rho^5}{5} \sin 5\varphi + \dots \right) + \\ &\quad + i \cdot \operatorname{arctg} \frac{2\rho \sin \varphi}{1-\rho^2}. \end{aligned}$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получим:

$$U = \frac{1}{4} \left| \frac{1+2\rho \cos \varphi + \rho^2}{1-2\rho \cos \varphi + \rho^2} \right| = \rho \cos \varphi + \frac{\rho^3}{3} \cos 3\varphi + \frac{\rho^5}{5} \cos 5\varphi + \dots \quad (155)$$

$$V = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\rho \sin \varphi}{1-\rho^2} = \rho \sin \varphi + \frac{\rho^3}{3} \sin 3\varphi + \frac{\rho^5}{5} \sin 5\varphi + \dots \quad (156)$$

Распределение температуры в стационарном потенциальном поле определяется по формуле (156), уравнение адиабатических линий – формула (155).

Таким образом, уравнение для изотерм в пластине имеет вид

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{l}} \right) = c$$

или в более удобной для вычисления форме

$$\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{l}} = \operatorname{tg} \frac{cx}{2}; \quad \operatorname{sh} \frac{\pi x}{l} = \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{\operatorname{tg} \frac{cx}{2}}$$

$$y = \frac{l}{\pi} \operatorname{arsh} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{\operatorname{tg} \frac{cx}{2}} \right).$$

Придавая  $x$  и  $y$  различные числовые значения, можно получить семейство изотерм в полуограниченной пластине.

Ортогональное семейство адиабатических линий можно получить, используя сопряженную гармоническую функцию  $U$  (155).

Таким образом, с помощью теории функций комплексного переменного показано, что изотермы и адиабаты в лапласовом поле должны быть ортогональны.

УДК 517.544.73

На правах рукописи

КОВИНА ЕКАТЕРИНА АЛЕКСАНДРОВНА

**Приложение теории интеграла Коши**

6М060100 – Математика

**Реферат**

диссертации на соискание академической степени  
магистра естественных наук

Республика Казахстан  
Павлодар, 2014

Работа выполнена в Инновационном Евразийском университете

Научный руководитель

кандидат педагогических наук,  
доцент Даниярова Ж.К.

Официальный оппонент:  
профессор Дроботун Б.Н.

доктор педагогических наук,

Ведущая организация:

Инновационный  
Евразийский университет

Секретарь ГАК  
магистр информатики

С.К. Асылбекова

**Актуальность темы исследования.** Интеграл Коши и интеграл типа Коши составляют широкий класс задач, которые, с одной стороны, являются обобщением сингулярных интегральных уравнений, а с другой – обыкновенных дифференциальных уравнений или, в многомерном случае, уравнений в частных производных. Они тесно связаны с краевыми задачами теории функций комплексной переменной. Как обобщение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, относятся к задачам математической физики. Таким образом, как теория, так и методы исследования интеграла Коши лежат на стыке теорий краевых задач и задач математической физики. Обе эти тесно взаимосвязанные теории к настоящему времени хорошо развиты в качественном плане, то есть вопросы существования и единственности решений и их принадлежность к определенным функциональным пространствам исследованы глубоко и полно. Однако многие вопросы нахождения самих этих решений, как для конкретных уравнений, так и для классов уравнений, определяемых классами коэффициентов и правых частей, остаются открытыми до сих пор. Поэтому актуальной задачей является разработка и теоретическое обоснование методов решения конкретных классов интегралов Коши. Современные возможности компьютерных технологий позволяют создавать новые подходы в решении задач названного типа, в частности – предложенны авторские программы.

**Цель и задачи исследования:** Целью диссертационной работы является исследование теории интеграла Коши и ее приложения к различным классам задач.

В соответствии с целью были поставлены и решены следующие задачи:

- 1) Систематизировать теорию интеграла Коши, изложенную в разных источниках;
- 2) Классифицировать задачи, которые решаются с помощью теории интеграла Коши;
- 3) Показать различные методы применения теории интеграла Коши;
- 4) Рассмотреть возможные компьютерные программы в приложении интеграла Коши.

**Объектом исследования** является применение интеграла Коши в прикладных задачах.

**Предметом исследования** являются интеграл Коши, плоское векторное поле, теория уравнений с частными производными.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту:**

1. Теория функций комплексного переменного и особенно интеграл Коши существенно расширяются возможности решений задач математической физики:

А) обогащается и обобщается класс сложных задач, связанных с линиями (контурами) потенциалов векторных полей, решение которых облегчается за счет использования в математическом моделировании этих процессов, свойств интеграла Коши и конформного отображения с помощью функций комплексного переменного.

Б) интеграл Коши в теории уравнений с частными производными позволяет быстро найти решение в форме комплексного представления, например, в системе Карлемана.

2. Решение задачи на исследование стационарного температурного поля с помощью теории функций комплексного переменного позволяет получить обобщенный ответ, который затем может быть интерпретирован для конкретной ситуации с изменением входящих параметров.

3. Приложение теории интеграла Коши в моделировании задач математической физики позволяет использовать возможности готовых компьютерных программ MathCad, MathLab и другие, так как поставленная задача несколько упрощается.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, двух глав, каждая из которых разбита на подпункты, заключения, приложения и списка цитированной литературы из 15 наименований. Общий объем работы 90 страниц.

**Ключевые слова:** теория функций комплексного переменного, интеграл Коши, векторное поле, уравнение Лапласа, прикладные задачи техники, стационарное температурное поле.

**Сведения о публикациях.** По теме диссертации опубликованы следующие статьи:

1. «История развития комплексных чисел и их роль в науке и технике», Вестник ИнеУ №2, 2013, стр. 94-97;

2. «Математическое исследование стационарного температурного поля», Международный академический форум (сборник статей и научных докладов), 2013, стр. 66-69.

Современная теория функций комплексного переменного охватывает очень большую область математики. Так называют обширную и разветвленную совокупность математических дисциплин – теоретических и прикладных. Развитие теории функций комплексного переменного позволило создать новые методы решения важнейших практических задач из различных разделов математического естествознания. Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли так же русские и советские ученые: Н. И. Мухелишвили занимался ее применениями к теории упругости, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев - к аэро- и гидродинамике, Н. Н. Богомолов и В. С. Владимиров - к проблемам квантовой теории поля. Так же комплексными числами пользовался и отец русской авиации Н. Е. Жуковский (1847 – 1921) при разработке теории крыла, автором которой он является. В этой работе будут излагаться основные свойства интеграла Коши и основанные на них эффективные методы решения различных краевых задач теории функции комплексного переменного.

В первой части диссертационного исследования была рассмотрена теория интеграла Коши, в которую входит интегрирование функций комплексного переменного, теорема Коши, интеграл Коши, распространение формулы Коши в сложных контурах. Так же приведены теоремы Моррера и

Руше. Теорема Морреры является основным способом доказательства аналитичности некоторой сложно определенной функции, а также используется для доказательства аналитичности функции, построенной по принципу симметрии. Также в первой части рассмотрен интеграл типа Коши, формулы Сохоцкого, формула Келдыш-Седова.

Во второй части работы рассматривается интеграл Коши в прикладных задачах, а именно задачи техники, где теория функций комплексного переменного находит широкое применение при решении разнообразных прикладных задач. В работе выделен класс задач связанный с обтеканием цилиндрического тела и течением жидкости в канале, которые связаны с изучением плоского векторного поля, описываемого при помощи комплексного потенциала. Также рассмотрели интеграл Коши в теории уравнений с частными производными, которое позволяет быстро найти решение в форме комплексного представления, например, в системе Карлемана. Приведено и исследовано решение о двумерном стационарном температурном поле.

## **РЕЗЮМЕ**

**Ковина Екатерина Александровна**

**Приложение теории интеграла Коши**

**6M060100 – Математика**

**Целью** диссертационной работы является исследование теории интеграла Коши и ее приложения к различным классам задач.

**Объектом исследования** являются теория интеграл Коши, плоское векторное поле, дифференциальные уравнения с частными производными.

**Предметом исследования** является приложение интеграла Коши в прикладных задачах.

**Методы исследования.** Проведенная работа опирается на результаты общей теории функции комплексной переменной, методов решения интеграла Коши и типа Коши.

## **ТУЙІН**

**Ковина Екатерина Александровна**

**6M060100 – Математика**

## SUMMARY

EKATERINA KOVINA

### Appendix of theory of the Cauchy integral

6M060100 – Mathematics

**The purpose** of dissertation work is research of theory of the Cauchy and her appendix integral to the different classes of tasks.

**Object of research** is been theory the Cauchy integral, flat vector field, differential equalizations with partials.

**The article of research** is an appendix of integral Коши in the applied tasks.

**Research methods.** The conducted work leans against the results of general theory of function of complex variable, methods of decision of integral and type of Коши Коши.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интеграл Коши находит широкое применение при решении разнообразных прикладных задач. В диссертации приведена теория интеграла Коши: интегрирование функций комплексного переменного, теория интеграла Коши и его основные свойства; теоремы Морерры, Стохоцкого, Руше и интеграл типа Коши.

Основное содержание диссертации посвящено рассмотрению классов задач, связанных с изучением *плоского векторного поля*, описываемого при помощи *комплексного потенциала*. Рассматриваемый класс задач характерен тем, что векторная функция  $f(x,y)$  задающая в некоторой области  $D$  на плоскости векторное поле, не зависит от времени и связана с *потенциальной функцией*.  $\tilde{\Phi}(x,y)$  этого поля линейным соотношением

$$f(x,y) = \beta \operatorname{grad} \tilde{\Phi}(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

где коэффициент  $\beta \in R$  связан с физическим содержанием задачи. Например, для задач гидромеханики идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости функция  $f(x,y)$  описывает векторное поле скорости и  $\beta = 1$ . Для стационарных задач теплопроводности функция  $f(x,y)$  характеризует векторное поле  $q$  плотности теплового потока, а  $\tilde{\Phi}(x,y)$  представляет собой функцию распределения температуры  $T$  в области  $D$ . При диффузии в среде некоторой примеси функция  $\tilde{\Phi}(x,y)$  характеризует распределение в области  $D$  концентрации этой примеси, а  $f(x,y)$  — вектор плотности потока примеси. В этом случае равенство (11.1) выражает закон Фика (А.Э. Фик (1829-1901) — немецкий физик),  $\alpha - \beta = \mu$  — коэффициент диффузии. Через среду в области  $D$  может просачиваться газ или жидкость. Тогда функция  $\tilde{\Phi}(x,y)$  описывает распределение давления в  $D$ , функция  $f(x,y)$  задает вектор скорости частиц газа или жидкости в среде, равенство (11.1) выражает закон Дарси (А. Дарси (1803-1858) — французский инженер),  $\alpha - \beta = \chi$  — коэффициент фильтрации. Для электростатического поля функция  $f(x,y)$  описывает вектор напряженности, а функция  $\tilde{\Phi}(x,y)$  — распределение в  $D$  потенциала этого поля. Комплексный потенциал  $W(z)$  является аналитической функцией и может быть найден с точностью до постоянного слагаемого с помощью методов решения интеграла Коши.

Теория функций комплексного переменного и особенно интеграл Коши существенно расширяют возможности решений задач математической физики:

а) обогащается и обобщается класс сложных задач, связанных с линиями (контурами) потенциалов векторных полей, решение которых облегчается за

счет использования в математическом моделировании этих процессов, свойств интеграла Коши и конформного отображения с помощью функций комплексного переменного.

б) интеграл Коши в теории уравнений с частными производными позволяет быстро найти решение в форме комплексного представления, например, в системе Карлемана.

Решение задачи на исследование стационарного температурного поля с помощью теории функций комплексного переменного позволяет получить обобщенный ответ, который затем может быть интерпретирован для конкретной ситуации с изменением входящих параметров.

Приложение теории интеграла Коши в моделировании задач математической физики позволяет использовать возможности готовых компьютерных программ MathCad, MathLab и другие, так как поставленная задача несколько упрощается.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1977.- 146-187 с.
- 2 Свешников А. Г. Тихонов А, Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука. 1967. 304 с. Алешков Ю. 3. Лекции по теории функций комплексного переменного. –СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та. 1999. – 75-90 с.
- 3 Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. – М., 1977,— 178-217 с.
- 4 Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1984.- 246-267 с.
- 5 Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Т. 1, 2.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962, 256-278.
- 6 Шабунин М., Сидоров Ю. Теория функций комплексного переменного. – М.: ЮНИМЕДИАСТАИЛ, 2002, 245-356.
- 7 Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ.— М.: Наука, 1969.— 267-396 с.
- 8 Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1965. – 288-357 с.
- 9 Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Учеб. Для вузов – 3-е изд., испр. – М: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 448-482с.
- 10 Алешков Ю. 3., Смышляев П. П. Теория функций комплексного переменного и ее приложения. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та.. 1986.— 198-206 с.
- 11 Соломенцев Е. Д. Функции комплексного переменного и их применения. — М.: Высш. шк., 1988, 167-298с.
- 12 Фукс Б. А., Левин В, И. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения.— М.; Л.: Наука, 1951, 190-289 с.
- 13 Карслау Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964, 236-345.
- 14 Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. – М.: Наука. 1980. 158-202 с.
- 15 Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2.— М.: Наука, 1974. — 345-389 с.