МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

А.Г. Кенжанов

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

Магистерская диссертация на соискание
академической степени магистра естественных наук
по специальности «6М060100» - Математика

ПАВЛОДАР – 2014

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Инновационный Евразийский университет

Допущен (а) к защите:
зав. кафедрой «Математика и информационные технологии»,
кандидат педагогических наук
__________________ Ж.К. Даниярова
(подпись)
«___»____________________20__ г

Магистерская диссертация

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

специальность: 6М060100 - математика

Магистрант ____________________ А.Г. Кенжанов
(подпись) *(инициалы, фамилия)*

Научный руководитель,
Кандидат ф.-м.н., доцент ____________________ М.М. Аяшинов
(подпись) *(инициалы, фамилия)*

ПАВЛОДАР – 2014

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Линейное интегральное уравнение - это интегральные уравнения, в которые неизвестная функция входит линейно:
$\varphi(x)=\lambda\int K(x,s)\varphi(s)ds+f(x)$ где $\varphi(x)$ — искомая функция, $f(x)$, $K(x,s)$ — известные функции, λ — параметр.

Ядром интегрального оператора - называется функция двух аргументов $K(x,s)$, определяющая некий интегральный оператор A равенством $\varphi(y)=A[\varphi(x)]=\int K(x,y)\varphi(x)d\mu(x),$ где $x\in X$ — пространство с мерой $d\mu(x)$, а $\varphi(x)$ принадлежит некоторому пространству функций, определённых на X .

Резольвента (от лат. *resolvere — здесь:* решать) используется в математике в различных значениях. Объединяет их все основное свойство резольвенты: решение резольвенты уравнения позволяет решить и само уравнение (или оператор).

Итерация — результат повторного применения какой-либо математической операции.

Рекуррентное соотношение - это соотношение (равенство, система равенств) позволяющее свести решение комбинационной задачи для некоторого числа предметов к аналогичной задаче с меньшей размерностью.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучая какие-либо физические явления, исследователь, прежде всего, создает его математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель, т.е. пренебрегая второстепенным характеристиками явления, он записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде интегральных уравнений. Такими оказываются модели различных явлений механики сплошной среды, химических реакциях, электрических и магнитных явлений, в электростатике, гидростатике и многих других разделов физики. Также интегральные уравнения встречаются в различных областях науки и многочисленных приложениях, таких как, теории упругости, гидростатике, экономике, медицине и т.д. В работе изложены характерные особенности интегральных уравнений и их классификация. Она является одним из разделов математического анализа.

Фредгольм (Fredholm) Эрик Ивар (7.4.1866, Стокгольм, ¬ 17.8.1927, Мёрбю), шведский математик. Окончил Стокгольмский университет (1893), с 1906 профессор там же. Основные труды по интегральным уравнениям. В 1900 изложил основные свойства и теоремы теории интегральных уравнений, разработал общие методы решения некоторых их видов (т.н. уравнения Фредгольма).

Решение линейных интегральных уравнений актуально в наше время. Интегральные уравнения помогают в решении множества задач, которые порой невозможно или очень не рационально решать другим способом. На сегодняшний день полноценный раздел, имеющий большое практическое значение в задачах радиоэлектронике, экологии и формировании многих физических процессов. Чтобы охарактеризовать ее место в современной математической науке, прежде всего, необходимо подчеркнуть основные понятия интегральных уравнений.

Актуальность работы. Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа, принадлежат к классу некорректно поставленных задач. Один из классов таких некорректных задач составляют интегральные уравнения Фредгольма второго рода.

Приводится большое число прикладных задач, в том числе, задач математической обработки (интерпретации) результатов измерений в физических экспериментах. В качестве приближенных решений таких задач, устойчивых к малым изменениям исходных данных, рассмотрены отдельные методы.

При исследовании природных явлений в виде интегральных уравнений нужно, как правило, знать только локальные связи и не нужна информация обо всем физическом явлении в целом.

Целью нашей работы является рассмотрение особенностей интегральных уравнений Фредгольма и изучение применения этого метода в механических и физических явлениях.

Для поставленной цели необходимо решить задачи:

1. Рассмотреть понятие интегрального уравнения;
2. Рассмотреть однородные и неоднородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода;
3. Изучить методы решения интегральных уравнений Фредгольма.
4. Показать приемы решения интегральных уравнений в различных физических явлениях и процессах.

В результате выполнения работы рассмотрены физические задачи, приводящие к интегральным уравнениям, основные типы интегральных уравнений и методы их решений. Выполнены решения интегральных уравнений с помощью метода последовательных приближений.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

1.1 Основные понятия интегральных уравнений Фредгольма.

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. Например,

$$y(x)=\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds+f(x)\,(a\le x\le b),(1.1)$$

Или

$$y(x)=\int_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds+f(x)(1.2)$$

Здесь $K(x,s)$ и $f(x)$ – заданные функции, а $y(x)$ – искомое решение. Функция $K(x,s)$ в приведенных соотношения называется ядром интегрального уравнения.

Уравнения (1.1) и (1.2) относятся к линейным интегральным уравнениям. Встречаются также и нелинейные интегральные уравнения, например,

$$y(x)=\int_a^b F(x,s,y(s))\,ds+f(x).$$

а) если искомая функция содержится только под знаком интеграла, то уравнение называется интегральным уравнением первого рода

x,s

$$\int_a^b K(¿\,y(s))\,ds=f(x).(1.3)$$

или

x,s

$$\int_a^x K(¿\,y(s))\,ds=f(x).(1.4)$$

Соотношения (1.1) и (1.2), в которых искомая функция содержится также и вне интегральное слагаемое, называются уравнениями второго рода; б) если пределы интегрирования фиксированы, то интегральное уравнение называется уравнением Фредгольма это случаи (1.1) и (1.3). Если же пределы интегрирования перемены как случаи (1.2) и (1.4), то интегральное уравнение называется уравнением Вольтерра. Уравнения Вольтерра можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, пологая, например, в (1.2) $K(x,s)\equiv 0$ при $s>x.$

в) уравнения (1.1) – (1.4) называют однородными, если $f(x)\equiv 0.$ в противном случае эти уравнения называются неоднородными. Интегрирование в интегральном уравнении может производиться как по отрезку прямой, так и по некоторой области большой размерности. Например, задана область Ω в трехмерном пространстве и функции K(M, P), $f(M),$ определенные при $M\in\Omega$ и $P\in\Omega$. Тогда соотношение $y(M)=\int\limits_{\Omega} K(M,P)\,y(P)\,d_{\sigma P}+f(M),$ где $d_{\sigma P}$ – элемент области Ω, содержащий точку P, представляет неоднородное уравнение Фредгольма второго рода. Линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода называется уравнение вида:

$$\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x)\quad(1.5)$$

Линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение вида:

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x)\quad(1.6)$$

где φ(x)- неизвестная функция, *k(x,t)* и *f(x)*- известные функции, *x* и *t* действительные переменные, изменяющиеся в интервале (a,b), λ- численный множитель.

Функция *k(x,t)* называется ядром интегрального уравнения (1.6); предполагается, что ядро *k(x,t)* определено в квадрате Ω*(a≤x≤b,a≤t≤b*) на плоскости *(x,t)* и непрерывно в Ω, либо его разрывы таковы, что двойной интеграл:

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b |k(x,t)|^3\,dxdt$$

имеет конечное значение.

Если *f(x)≠0*, то уравнение (1.6) называется неоднородным; если же f(x)≡0, то уравнение (1.5) принимает вид:

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt=0\quad(1.7)$$

и называется однородным.

Пределы интегрирования в уравнениях (1.6) и (1.7) могут быть как конечными, так и бесконечными.

Решением интегральных уравнений (1.6) и (1.7) называется любая функция φ(x), при подстановке которой в уравнения последние обращаются в тождества относительно x принадлежащий (*a,b*).

1.1.1 Интегральные уравнения с ядром, линейным относительно параметра

Пусть имеем уравнение

$$u(x)=\int_0^1 \left[K_0(x,s)+\lambda K_1(x,s)\right] f(s,u)\,ds \,(1.8)$$

И пусть оно допускает при $\lambda=\lambda_0$ единственное решение $u_0(x)$:

$$u_0(x)=\int_0^1 \left[K_0(x,s)+\lambda K_1(x,s)\right] f(s,u_0)\,ds,$$

И функция $f(y,z)$ аналитическая функция, т.е. имеет место разложение

$$f(y,u+v)=A_0(y)+A_1(y)v(y)+A_2(y)v^2(y)+A_3(y)v^3(y)+\ldots \qquad (1.9)$$

для всех $y\in[0,1]$ и $|v|<K=const$,

$$A_0(y)=f(y,u_0(y)),\; A_n(y)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(y,u)}{\partial u^n}\bigg|_{u=u_0}$$

Определение 1. Если уравнение

$$u(x)=\int_0^1 \left[H_0(x,s)+\lambda H_1(x,s)\right] u(s)\,ds+h(x)$$

Имеет единственное решение для всякой функции $h(x)$ при всяком λ с точкой сгущения, если она существует в бесконечности, то ядро $H_0(x,s)+\lambda H_1(x,s)$ называется неособенной.

Определение 2. Если неособенное ядро $H_0(x,s)+\lambda H_1(x,s)$ такое, что ядро $H_0(x,s)$ не имеет характеристического числа, равного единице, то ядро $H_0(x,s)+\lambda H_1(x,s)$ называется нормальным неособенным (или просто нормальным)

Теорема. Если $D(\lambda_0)\neq 0$ и $H_0(x,s)+\lambda H_1(x,s)$ H ¿ ¿ ¿

$H_1(x,s) \equiv K_1(x,s)\,A_1(s)¿$ есть нормальное ядро, то в окрестности точки $\lambda=\lambda_0$ уравнение (1.8) имеет единственное голоморфное решение $u(x,\lambda)$, разлагающиеся по степеням $(\lambda-\lambda_0)$ и такое, что $u(x,\lambda)\to u_0(x)$ при $\lambda\to\lambda_0$, где $D(\lambda)$ определитель Фредгольма ядра

$$K(x,s)=H_0(x,s)+\int_0^1 H_1(x,y)R_0(y,s)dy,$$

$R_0(y,s)$ резольвента ядра $H_0(x,s)$.

Доказательство. В уравнение (1.8) подставляю замену $u=u_0(x)+v(x),\quad \lambda=\lambda_0+\mu$ и учитывая то, что $u_0(x)$ есть решение уравнения (1.8) при $\lambda=\lambda_0$, получаю:

$$\left[K_0(x,s)+\lambda_0 K_1(x,s)\right]\left[A_1(s)v(s)+A_2\frac{(s)}{2!}v^2(s)+\ldots\right]ds+¿$$

$$v(x)=\int_0^1 ¿$$

$$+\mu\int_0^1 K_1(x,s)\left[A_0(s)+A_1(s)v(s)+\ldots\right]ds(1.10)$$

Решение уравнения (1.10) будем искать в виде степенного ряда

$$v(x)=\mu v_1(x)+\mu^2 v_2(x)+\ldots \qquad (1.11)$$

С неизвестными коэффициентами $v_i(x)$.

Подставляя (1.11) в (1.8) нахожу

$$v_1(x)=\int_0^1\left[K_0(x,s)+\lambda_0 K_1(x,s)\right]A_1(s)v_1(s)ds+\int_0^1 K_1(x,s)A_0(s)ds,$$

$$\left[K_0(x,s)+\lambda_0 K_1(x,s)\right]A_1(s)v_2(s)ds+¿$$

$$v_2(x)=\int_0^1 ¿$$

$$+\int_0^1\left[K_0(x,s)+\lambda_0 K_1(x,s)\right]A_2(s)v_1^2(s)ds+\int_0^1 K_1(x,s)A_1(s)v_1(s)ds,$$

…………………………………………………………………………………

$$v_n(x)=\int_0^1\left[K_0(x,s)+\lambda_0 K_1(x,s)\right]A_1(s)v_n(s)ds+f_n(x),(1.12)$$

где

$$f_1(x)=\int_0^1 K(x,s)A_0(s)ds,$$

$$\left[K_0(x,s)+\lambda_0 K_1(x,s)\right]A_2(s)v_1^2(s)\,ds+¿$$

$$f_2(x)=\int_0^1 ¿$$

$$+\int_0^1 K_1(x,s)A_1(s)v_1(s)\,ds,$$

и вообще

$$f_n(x)\equiv f_n(A_0,A_1,\dots,A_n,v_1,v_2,\dots,v_{n-1}),(n=3,4,\dots)$$

а именно

$$\left[K_0(x,s)+\lambda_0 K_1(x,s)\right]\left[\sum_{m=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}v_i(s)\right)^m A_m(s)\right]' ds+¿$$

$$f_n(x)=\int_0^1 ¿$$

$$+\int_0^1 K_1(x,s)\left[\sum_{m=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}v_i(s)\right)^m A_m(s)\right]' ds.(1.13)$$

В этой формуле и всюду в дальнейшем штрих в квадратной скобки означает, что в $f_n(x)$ входят только те члены двойной суммы всевозможных произведений индексов *im* равна верхнему числу внешнего знака Σ.

Например, из суммы

$$\left(\sum_{i=1}^{2}a_i\right)^m=\sum_{m=1}^{3}(a_1+a_2)^m=a_1+a_2+a_1^2+a_2^2+2a_1a_2+¿$$

$$\sum_{m=1}^{3}¿$$

$$+a_1^3+a_2^3+3a_1^2a_2+3a_1a_2^2$$

Который состоит из 9 слагаемых мы берем три, а именно,

$$\left[\sum_{m=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2}a_i\right)^m\right]'=a_1^3+2a_1a_2,$$

т.к. a_1^3 – для него $i=1, m=3$ и $1\cdot 3=3$ (берем),

берем $a_1a_2^2$, для него $1\cdot 1+2\cdot 2=5$,

не берем $a_1^2a_2$, для него $1\cdot 2+2\cdot 1=4$,

берем $a_1\cdot a_2$, для него $1\cdot 1+2\cdot 1=3$ и т.д.

Другой пример:

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right)^m = (a_1+a_2+a_3)+(a_1+a_2+a_3)^2+(a_1+a_2+a_3)^3+¿$$

$$\sum_{m=1}^{4} ¿$$

$+(a_1+a_2+a_3)^4$ раскрывая скобки, получаю некоторую сумму. От этой суммы берем те, слагаемые для которых сумма всевозможных индексов im равна верхнему числу внешнего знака $\Sigma (у\, нас\, 4)$ поэтому имею

$$\left[\sum_{m=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right)^m\right]' = a_1^4+a_2^2+2a_1a_3+3a_1^2a_2$$

Здесь для a_2^2 (*i=2, m=2; 2* $\cdot$ *2=4,* берем),

для a_1a_3 (*i=2, m=3; 1* $\cdot 1+3\cdot 1$ *=4,* берем),

для $a_1^2 \cdot a_2$ (сумма 1 $\cdot$ 2+2 $\cdot$ 1=4, берем) и т.д

для a_1^4 (*i=1, m=4; 1* $\cdot 4$ *=4,* берем).

Другие слагаемые пропускаю.

По нашему предположению единица не есть. Характеристическое число для ядра $H_0(x,s)$, и согласно определению $H_0(x,s)+\lambda H_1(x,s)$ есть неособенное нормальное ядро. Таким образом, мы предполагаем, что уравнение (s) имеет решение для любой функции $f_n(x)$.

Уравнение (s) эквивалентно уравнению

$$w_n(x)=\lambda_0\int_0^1 K(x,s)w_n(s)ds+f_n(x)(1.14)$$

В том смысле, что

$$w_n(x)=v_n(x)-\int_0^1 H_0(x,s)v_n(s)ds,(1.14')$$

где

$$K(x,s)=H_0(x,s)+\int_0^1 H_1(x,y)R_0(y,s)dy,$$

$R_0(x,s)$ резольвента ядра $H_0(x,s).$ По условию теоремы $D(\lambda_0)\neq 0$, где $D(\lambda_0)$ есть определитель Фредгольма для ядра $K(x,s)$. Таким образом, решение уравнения (1.14) находится с помощью резольвенты по следующей формуле:

$$w_n(x)=\lambda_0\int_0^1 R(x,s,\lambda_0)f_n(s)ds+f_n(x)(1.15)$$

С другой стороны из ($1/14'$) получаем

$$v_n(x)=w_n(x)+\int_0^1 R_0(x,s)\,w_n(s)\,ds.$$

Тем самым в окончательной форме решение уравнения (1.12) имеет вид

$$R_0(x,y)\int_0^1 R_0(y,s,\lambda_0)f_n(s)\,ds\,dy+¿$$

$$v_n(x)=\lambda_0\int_0^1 R(x,y,\lambda_0)f_n(y)\,dy+\lambda_0\int_0^1 ¿$$

$$+\int_0^1 R_0(x,y)f_n(y)\,dy+f_n(x)\,(1.16)$$

Следовательно, мы можем последовательно определить все функции $v_n(x)$ однозначно.

Докажем теперь, что построенный ряд (1.11) сходится при достаточно малых значениях параметра μ , т.е. ряд (1.11) определяемой некоторую функцию $v(x)$, которая является решением уравнения (1.10).

Пусть

$$\left|\int_0^1 K_i(x,s)A_p(s)\,ds\right|<A=const$$

$$\left|R(x,s,\lambda_0)\right|<B_1\,(i,p=0,1,\dots)$$

$\left|R_0(x,y)\right|<B_0$ Обозначим B=*max* $\{B_1,B_0\}$ построим усиливающую функцию для функции $v(x)$. Для этого рассмотрим уравнение

$$\varphi=A_1\left\{\mu+\mu\varphi+\left[\mu+\left(1+\left|\lambda_0\right|\right)\right]\left(\varphi^2+\varphi^3+\dots\right)\right\}(1.17)$$

$$A_1=A\left(1+B\left|\lambda_0\right|\right)(1+B)$$

Или

$$\varphi=A_1\left\{\left(\mu+\mu\varphi+\left(\mu+\left(1+\left|\lambda_0\right|\right)\right)\right)\frac{\varphi^2}{1-\varphi}\right\}$$

Для $|\varphi|<1.$

Решение последнего уравнения решение ищем в виде

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\mu^k\,(1.18)$$

Подставляя (1.18) в (1.17)

И приравнивая кояффициенты при одинаковых степенях μ имеем

$a_i = A_1$

$a_2 = A_1\left[a_1 + \left(1+\left|\lambda_0\right|\right)a_1^{\,2}\right]$

$a_3 = A_1\left[a_1 + a_1^{\,2} + 2a_1 a_2 + \left(1+\left|\lambda_0\right|\right) + a_1^{\,3}\left(1+\left|\lambda_0\right|\right)\right]$

…………………………………………………………………………………..

$$a_n = A_1\left\{\left[\sum_{m=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^m\right]' + \left(1+\left|\lambda_0\right|\right)\left[\sum_{m=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^m\right]'\right\}$$

Оценивая теперь последовательно $v_n(x)$, получаем $\left|v_n(x)\right| \le a_n$ при всех $x \in [0,1]$.

Следовательно, область, в которой сходится ряд (1.17), будет областью сходимости ряда (4).
Для определения области сходимости ряда (1.18) исследуем существования неявной функции в уравнении (1.17). Для этой цели рассмотрим функцию

$$F(\mu,\varphi) = A_1\mu + (\mu A_1 - 1)\varphi + A_1\left(\mu + \left(1+\left|\lambda_0\right|\right)\right)\left(\varphi^2 + \varphi^3 + \ldots\right) \qquad (1.19)$$

Очевидно

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} ¿_{\substack{\mu=0\\ \varphi=0}} = -1 \neq 0$$

Тогда на основании теоремы о существовании неявной функции можно утверждать, что ряд (1.18) имеет конечный круг сходимости, и, следовательно, ряд (1.11) имеет такой же круг сходимости. Таким образом, мы доказали, что $v(x)$ существует, и функция

$u(x,\lambda) = u_0(x) + (\lambda - \lambda_0)v_1(x) + \ldots (1.20)$

Является семейством непрерывных решений в окрестности точки λ_0, которое содержит решение $u_0(x)$. Теорема полностью доказана.

1.1.2 Примеры решения интегральных уравнений Фредгольма

Показать, что функция $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ является решением интегрального уравнения Фредгольма:

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt = \frac{x}{2},$$

где ядро имеет вид:

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, 0\le x\le t\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, t\le x\le 1\end{cases}.$$

Решение. Левую часть уравнения запишем в виде:

$$\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt+\int_x^1 K(x,t)\varphi(t)dt\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^1 \frac{t(2-x)}{2}\varphi(t)dt+\int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}\varphi(t)dt\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{3-x}{2}\int_0^1 t\varphi(t)dt+\frac{x}{2}\int_x^1 (2-t)\varphi(t)dt\right\}.$$

Подставляя в полученное выражение вместо φ(x) функцию $\sin\frac{\pi x}{2}$, будем иметь:

$$\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\int_0^1 t\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt+x\int_x^1(2-t)\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt\right\}=$$

$$=\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\left(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{xt}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}\right\}+$$

$$+x\left[-\frac{2-t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{xt}{2}\right]\Bigg|_{t=x}^{t=1}=\frac{x}{2}$$

Итак, получим $\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$, а это означает, согласно определению, что $\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ есть решение данного интегрального уравнения.

1.2 Однородные и неоднородные уравнения Фредгольма второго рода

1.2.1 Собственные функции и собственные значения однородного уравнения Фредгольма второго рода

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds,\; x\in[a,b]\quad(1.21)$$

Определение. Значение параметра $\lambda\neq 0$ и соответствующая функция $y(x)\neq 0,$ удовлетворяющая уравнению (1.21), называют собственным значением и собственной функцией этого интегрального уравнения (собственным значением и собственной функцией ядра $K(x,s)$).

Ядро $K(x,s)$ при $x,s\in[a,b]$ удовлетворяет следующим условиям:

1^0. $K(x,s)$ – вещественная функция.

2^0. $K(x,s)\not\equiv 0.$ (1.22)

3^0. $K(x,s)$ – непрерывная функция по совокупности аргументов.

4^0. $K(x,s)$ – симметричное ядро, т.е. $K(x,s)=K(x,s)$.

Свойства собственных значений и собственных функций:

1. Собственные значения ядра $K(x,s)$ вещественны;
2. Нахождение комплексных собственных функций сводится к нахождению вещественных функций;
3. Если $K(x,s)$ непрерывно и $K(x,s)\not\equiv 0$, то норма оператора Фредгольма отлична от нуля.
4. Существует конечная или без конечная последовательность линейно независимых собственных функций и соответствующих собственных значений ядра $K(x,s)$.
5. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Ранг любого собственного значения конечен. Всю систему собственных функций можно ортонормировать, так чтобы были выполнены соотношения
$$\int_a^b y_i(x)\,y_m(x)\,dx=0\,(i\neq 0),\int_a^b y_i^2(x)\,dx=1.$$
6. Каково бы ни было $L>0$, может существовать лишь конечное число собственных значений, удовлетворяющих неравенству $|\lambda|<L$. Если все число

собственных значений бесконечно и их расположить в порядке возрастания абсолютной величины $|\lambda_1|\leq|\lambda_2|\ldots|\lambda_n|\ldots,$ то $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$.

7. Если $y_1(x)$ – собственная функция ядра $K(x,s)$ и λ_1 – соответствующие собственное значение, то ядро

$$K^{(2)}(x,s)=K(x,s)-\frac{y_1(x)\,y_1(s)}{\lambda_1}$$

имеет те же собственные значения и собственные функции, что и ядро $K(x,s)$, кроме $y_1(x)$ и λ_1.

Следствие. Если $y_1,\ldots,y_n$ – собственные функции ядра $K(x,s)$, а $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – соответствующие собственные значении, то ядро $K^{(n+1)}(x,s)=K(x,s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i(x)\,y_i}{\lambda_i}$ имеет те же собственные функции и собственные значения, что и ядро $K(x,s)$, за исключением $y_1,\ldots,y_n$

1.2.2Определение собственных значений и собственных функций.

Собственные функции и собственные значения ядра могут быть найдены, например, путем последовательных приближений по методу Келлога.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x)=\lambda Ay=\lambda\int_a^b k(x,s)\,y(s)\,ds\,(1.23)$$

В случае, когда ядро $K(x,s)$ удовлетворяет условиям (1.22). Собственные функции и собственные значения ядра $K(x,s)$ могут быть найдены путем некоторого реккурентного процесса. Перейдем к описанию этого процесса.

Выберем произвольную непрерывную функцию $y_0(x)$ такую, что $Ay_0\neq 0$. Определим последовательность функции $y_n(x)$ для $n\geq 1$ из реккурентного соотношения

$$y_n=Ay_{n-1}(1.24)$$

Обозначим $\|y_n\|=N_n$. Имеет место соотношение

$$N_n^2=(y_p,y_q)(1.25)$$

где $p+q=2n$. Действительно, пусть $p=n+m$, а $q=n-m$. Тогда в силу симметрии оператора A имеем

$$(¿¿p, y_q)=\left(A^m y_n, y_q\right)=\underset{¿}{\overset{y}{(}}y_n, A^m y_q\right)=\left(y_n, y_n\right)=N_n^2$$

Для нормальных функций $\varphi_n=\frac{y_n}{\|y_n\|}=\frac{y_n}{N_n}$ из (2.4) получаем

$$\varphi_n=\mu_n A\varphi_{n-1} \text{, где } \mu_n=\frac{N_{n-1}}{N_n}(1.26)$$

Докажем сходимость последовательности μ_n. Из формулы $N_n^2=(y_{n-1}),(y_{n+1})$ в силу неравенства Коши-Буняковского получаем $N_n^2\le N_{n-1}N_{n+1}$. Отсюда $\frac{N_{n-1}}{N_n}\ge\frac{N_n}{N_{n+1}}$ или $\mu_n\ge\mu_{n+1}\ge 0$. Таким образом, последовательность μ_n – монотонно невозрастающая и ограничена снизу. Следовательно, существует предел $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu\ge 0$. Покажем, что $\mu_n\ne 0$. Для этого соотношения (1.24) умножим на y_n, проинтегрируем по x и воспользуемся неравенством Коши-Буняковского. Имеем

$$N_n^2=\left(y_n, y_n\right)=\left(y_n, Ay_{n-1}\right)=¿\int_a^b y_n(x)\,dx\int_a^b K(x,s)\,y_{n-1}(s)\,ds\le\le\sqrt{\iint_{aa}^{bb}K^2(x,s)\,dxds}\sqrt{\int_a^b y_n^2dx\int_a^b y_{n-1}^2ds}=C\,N_n$$

где

$$C^2=\iint_{aa}^{bb}K^2(x,s)\,dxds$$

Отсюда $N_n\le CN_{n-1}$ и $\mu_n=\frac{N_{n-1}}{N_n}\ge\frac{1}{C}>0$. Предельный переход при $n\to\infty$ дает $\mu=\lim_{n\to\infty}\mu_n\ge\frac{1}{C}>0$.

Убедимся в том, что $N_n\ne 0$, следовательно, $y_n(x)\not\equiv 0$. Действительно y_0 выбрано так, что $y_1=Ay_0\not\equiv 0$. При этом будет выполнено $N_0>0$ и $N_1>0$. Из неравенства $N_2N_0\ge N_1^2$ следует $N_2\ne 0$. Аналогично получаем $N_3\ne 0$ и т.д. таким образом, все $N_n\ne 0$ для $n>0$.

Докажем, что четные итерации φ_{2n} сходятся в среднем к некоторой функции $\acute{\varphi}(x)$, а нечетные итерации $\varphi_{2n+1}-K\acute{\varphi}(x)$. Функции $\varphi_n(x)$ непрерывны и нормированы на единицу. Оператор A переводит такие функции в последовательность равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных функции. Поскольку $A\varphi_{n-1}=\frac{\varphi_n}{\mu_n}$, то последовательность $\frac{\varphi_n}{\mu_n}$ состоит из равномерно ограниченных равностепенно-непрерывных функций. По доказанному $\frac{1}{\mu_n}\geq\frac{1}{\mu_0}$. Отсюда следует, что последовательность φ_n также состоит из равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных функций.

Таким же свойством обладают в отдельности последовательности четных φ_{2n} и нечетных φ_{2n+1} итераций.

По теореме Арцеля существует подпоследовательность φ_m последовательности φ_{2n}, равномерно сходящаяся к некоторой непрерывной функции $\overline{\varphi}(x).$ Из равномерной сходимости следует сходимость φ_m к $\overline{\varphi}$ в среднем.

Докажем, что вся последовательность φ_{2m}, а не только последовательность φ_m сходится к $\overline{\varphi}$ в среднем. Действительно, из сходимости φ_m следует, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что для любых функций φ_{m_1} и φ_{m_2} из последовательности φ_m с номерами $m_1,m_2>n_0(\varepsilon)$ будет выполнено: $J_{m_1,m_2}=\left\|\varphi_{m_1}-\varphi_{m_2}\right\|<\varepsilon.$ Пусть для определенности $m_2>m_1.$ Убедимся, что для всех четных m и k таких, что $m_1\leq m\leq k\leq m_2,$ выполнено неравенство $\left\|\varphi_m-\varphi_k\right\|<\varepsilon.$ Этим будет доказана сходимость в среднем всей последовательности $\varphi_{2n}.$ Действительно, рассмотрим выражение $J_{m,k}=\left\|\varphi_m-\varphi_k\right\|.$ Учитывая, что $\left\|\varphi_m\right\|=\left\|\varphi_k\right\|=1,$ имеем $J_{m,k}^2=2-2(\varphi_m,\varphi_k),$ или

$$2-J_{m,k}^2=2(\varphi_m,\varphi_k)=\frac{2(y_m,y_k)}{N_mN_k}=\frac{2N_{\frac{m+k}{2}}^2}{N_mN_k}. \tag{1.25}$$

Заменяя в (1.25) k на $k+2,$ получим

$$\frac{2-J_{m,k+2}^2}{2-J_{m,k}^2}=\frac{N_{\frac{m+k}{2}+1}^2}{N_{\frac{m+k}{2}}^2}\cdot\frac{N_m N_k}{N_{k+2}N_m}=\frac{N_{\frac{m+k}{2}+1}^2}{N_{\frac{m+k}{2}}^2}\cdot\frac{N_{k+1}N_k}{N_{k+2}N_{k+1}}=\frac{\mu_k\mu_{k+1}}{\mu_{m+k}^2}\le 1, \tag{1.26}$$

Так как $\mu_{\frac{m+k}{2}+1}\ge\mu_k\ge\mu_{k+1}$ при $m<k.$ Заменяя в (1.25) m на $m-2,$ имеем

$$\frac{2-J_{m-2,k}^2}{2-J_{m,k}^2}=\frac{N_{\frac{m+k}{2}-1}^2}{N_{\frac{m+k}{2}}^2}\cdot\frac{N_m N_{m-1}}{N_{m-1}N_{m-2}}=\frac{\mu_{\frac{m+k}{2}}^2}{\mu_{m-1}\mu_{m-2}}\le 1. \tag{1.27}$$

Из (1.26) и (1.27) получаем, что $J_{m,k+2}\ge J_{m,k}$ и $J_{m-2,k}\ge J_{m,k}.$ Увеличивая индекс k до m_2 и уменьшая индекс m до $m_1,$ будем иметь $\|\varphi_m-\varphi_k\|=J_{m,k}\le J_{m_1,m_2}<\varepsilon,$ что и требовалась доказать.

Аналогично устанавливается сходимость в среднем последовательности φ_{2n+1} к некоторой непрерывной функции $\overline{\overline{\varphi}}(x).$

Докажем, что из равностепенной непрерывности и сходимости в среднем последовательности φ_{2n} следует ее равномерная сходимость к $\overline{\varphi}(x).$

Рассмотрим разность $\omega_{mn}(x)=\varphi_m(x)-\varphi_n(x)$ при четных $m,n.$ В силу равностепенной непрерывности $\varphi_m(x)$ и $\varphi_n(x)$ для любого $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$|\omega_{mn}(x_1)-\omega_{mn}(x_2)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |x_1-x_2|<\delta(\varepsilon) \tag{1.28}$$

для всех $m,n.$ Кроме того,

$$\int_a^b\omega_{mn}^2dx=\int_a^b[\varphi_m(x)-\varphi_n(x)]^2dx<\varepsilon \tag{1.29}$$

при $m,n>\overline{n}(\varepsilon)$ в силу последовательности сходимости $\varphi_n(x)$ в среднем.

Докажем, что

$$|\omega_{mn}|<\varepsilon \quad \text{при} \quad m,n>N(\varepsilon) \tag{1.30}$$

для всех $x\in[a,b].$ отсюда следует справедливость утверждения настоящего пункта.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0.$ тогда для любого $x \in [a,b]$ найдется x_k такое, что при $|x - x_k| < \delta(\varepsilon/2)$ справедливо неравенство

$$|\omega_{mn}(x) - \omega_{mn}(x_k)| < \varepsilon/2 \tag{1.31}$$

для всех $x \in [a,b].$ Покроем $[a,b]$ конечным числом интервалов $I_k,$ длина которых равна $\delta(\varepsilon/2).$ Тогда можно утверждать, что для всех достаточно больших $m,n > N(\varepsilon)$ и любого I_k найдется точка $x_k \in I_k,$ в которой

$$|\omega_{mn}(x_k)| < \varepsilon/2. \tag{1.32}$$

Действительно, допустим противное. Тогда найдется интервал I_k и такие сколь угодно большие номера $m,n,$ что для всех $x \in I_k$ имеет место неравенство $|\omega_{m,n}(x)| \geq \varepsilon/2.$ Следовательно, для таких m,n имеет место неравенство $J_{mn} = \int_a^b \omega_{mn}^2 dx \geq \int_{I_k} \omega_{mn}^2 dx \geq \frac{\varepsilon^2}{4}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$ противоречащее (1.32)

Из (1.31) и (1.32) следует, что для любого $x \in I_k$ выполнено $|\omega_{mn}(x)| \leq |\omega_{mn}(x) - \omega_{mn}| + |\omega_{mn}(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ при $m,n > N(\varepsilon),$ т.е. доказано неравенство (3.13).

Итак, доказано, что $\varphi_{2n} \Rightarrow \overline{\varphi}.$ Аналогично доказывается, что $\varphi_{2n+1} \Rightarrow \overline{\overline{\varphi}}.$

Совершая предельных переход в (3.7) по последовательности с четными номерами, получим

$$\overline{\varphi} = \mu A \overline{\overline{\varphi}}, \overline{\overline{\varphi}} = \mu A \overline{\varphi}. \tag{1.33}$$

Отсюда $\overline{\varphi} = \mu^2 A^2 \overline{\varphi}$ или $(\mu A + 1)(\mu A - 1)\overline{\varphi} = 0.$ Последнее равенство возможно в двух случаях:

а $(\mu A - 1)\overline{\varphi} = 0,$ т.е. $\overline{\varphi} = \mu A \overline{\varphi}.$ В этом случае μ является собственным значением уравнения (1.23) а из (1.33) следует, что $\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi};$

б $(-\mu)$ Тогда $z = (\mu A - 1)\overline{\varphi} \not\equiv 0.$ или $(\mu A + 1)z = 0,$ Следовательно, $z = -\mu A z.$ является собственным значением уравнения (1.23) Из (1.33) следует тогда, что

$$z = \mu A \overline{\varphi} - \overline{\varphi} = \overline{\overline{\varphi}} - \overline{\varphi}.$$

Таким образом, либо $\lambda = \mu, y = \overline{\varphi} = \overline{\overline{\varphi}},$ либо $\lambda = -\mu, y = \overline{\overline{\varphi}} - \overline{\varphi}$ являются собственным значением и собственной функцией уравнения (1.23) По теореме Арцеля существует подпоследовательность φ_m последовательности $\varphi_{2n},$ равномерно сходящаяся к некоторой непрерывной функции $\overline{\varphi}(x).$ Из равномерной сходимости следует сходимость φ_m к $\overline{\varphi}$ в среднем.

Докажем, что вся последовательность $\varphi_{2m},$ а не только последовательность φ_m сходится к $\overline{\varphi}$ в среднем. Действительно, из сходимости φ_m следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что для любых функций φ_{m_1} и φ_{m_2} из последовательности φ_m с номерами $m_1, m_2 > n_0(\varepsilon)$ будет выполнено: $J_{m_1,m_2} = \|\varphi_{m_1} - \varphi_{m_2}\| < \varepsilon.$ Пусть для определенности $m_2 > m_1.$ Убедимся, что для всех четных m и k таких, что $m_1 \le m \le k \le m_2,$ выполнено неравенство $\|\varphi_m - \varphi_k\| < \varepsilon.$ Этим будет доказана сходимость в среднем всей последовательности $\varphi_{2n}.$ Действительно, рассмотрим выражение $J_{m,k} = \|\varphi_m - \varphi_k\|.$ Учитывая, что $\|\varphi_m\| = \|\varphi_k\| = 1,$ имеем $J^2_{m,k} = 2 - 2(\varphi_m, \varphi_k),$ или

$$2 - J^2_{m,k} = 2(\varphi_m, \varphi_k) = \frac{2(y_m, y_k)}{N_m N_k} = \frac{2N^2_{\frac{m+k}{2}}}{N_m N_k}. \tag{1.34}$$

Последнее равенство имеет место в силу (3.6). За меняя в (3.8) k на $k+2,$ получим

$$\frac{2 - J^2_{m,k+2}}{2 - J^2_{m,k}} = \frac{N^2_{\frac{m+k}{2}+1}}{N^2_{\frac{m+k}{2}}} \cdot \frac{N_m N_k}{N_{k+2} N_m} = \frac{N^2_{\frac{m+k}{2}+1}}{N^2_{\frac{m+k}{2}}} \cdot \frac{N_{k+1} N_k}{N_{k+2} N_{k+1}} = \frac{\mu_k \mu_{k+1}}{\mu^2_{m+k}} \le 1, \tag{1.35}$$

так как $\mu_{\frac{m+k}{2}+1} \geq \mu_k \geq \mu_{k+1}$ при $m<k.$ Заменяя в (3.8) m на $m-2,$ имеем

$$\frac{2-J_{m-2,k}^2}{2-J_{m,k}^2} = \frac{N_{\frac{m+k}{2}-1}^2}{N_{\frac{m+k}{2}}^2} \cdot \frac{N_m N_{m-1}}{N_{m-1}N_{m-2}} = \frac{\mu_{\frac{m+k}{2}}^2}{\mu_{m-1}\mu_{m-2}} \leq 1. \quad (1.36)$$

Из (1.35) и (1.36) получаем, что $J_{m,k+2} \geq J_{m,k}$ и $J_{m-2,k} \geq J_{m,k}.$ Увеличивая индекс k до m_2 и уменьшая индекс m до $m_1,$ будем иметь $\|\varphi_m - \varphi_k\| = J_{m,k} \leq J_{m_1,m_2} < \varepsilon,$ что и требовалась доказать.

Аналогично устанавливается сходимость в среднем последовательности φ_{2n+1} к некоторой непрерывной функции $\overline{\overline{\varphi}}(x).$

Докажем, что из равностепенной непрерывности и сходимости в среднем последовательности φ_{2n} следует ее равномерная сходимость к $\overline{\varphi}(x).$

Рассмотрим разность $\omega_{mn}(x) = \varphi_m(x) - \varphi_n(x)$ при четных $m,n.$ В силу равностепенной непрерывности $\varphi_m(x)$ и $\varphi_n(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|\omega_{mn}(x_1) - \omega_{mn}(x_2)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \quad (1.37)$$

Для всех $m,n.$ Кроме того,

$$\int_a^b \omega_{mn}^2 dx = \int_a^b [\varphi_m(x) - \varphi_n(x)]^2 dx < \varepsilon \quad (1.38)$$

При $m,n > \overline{n}(\varepsilon)$ в силу последовательности сходимости $\varphi_n(x)$ в среднем. Докажем, что

$$|\omega_{mn}| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m,n > N(\varepsilon) \quad (1.39)$$

Для всех $x \in [a,b].$ отсюда следует справедливость утверждения настоящего пункта.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0.$ тогда для любого $x \in [a,b]$ найдется x_k такое, что при $|x - x_k| < \delta(\varepsilon/2)$ справедливо неравенство

$$|\omega_{mn}(x) - \omega_{mn}(x_k)| < \varepsilon/2 \quad (1.40)$$

Для всех $x \in [a,b]$. Покроем $[a,b]$ конечным числом интервалов I_k, длина которых равна $\delta(\varepsilon/2)$. Тогда можно утверждать, что для всех достаточно больших $m,n > N(\varepsilon)$ и любого I_k найдется точка $x_k \in I_k$, в которой

$$|\omega_{mn}(x_k)| < \varepsilon/2. \qquad (1.41)$$

Действительно, допустим противное. Тогда найдется интервал I_k и такие сколь угодно большие номера $m,n,$ что для всех $x \in I_k$ имеет место неравенство $|\omega_{m,n}(x)| \ge \varepsilon/2.$ Следовательно, для таких m,n имеет место неравенство $J_{mn} = \int_a^b \omega_{mn}^2 dx \ge \int_{I_k} \omega_{mn}^2 dx \ge \frac{\varepsilon^2}{4}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$ противоречащее (3.12).

Из (3.14) и (3.15) следует, что для любого $x \in I_k$ выполнено

$$|\omega_{mn}(x)| \le |\omega_{mn}(x) - \omega_{mn}| + |\omega_{mn}(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при $m,n > N(\varepsilon),$ т.е. доказано неравенство (3.13).

1 Итак, доказано, что $\varphi_{2n} \Rightarrow \overline{\varphi}.$ Аналогично доказывается, что $\varphi_{2n+1} \Rightarrow \overline{\overline{\varphi}}.$

Совершая предельных переход в (3.7) по последовательности с четными номерами, получим

$$\overline{\varphi} = \mu A \overline{\overline{\varphi}}, \overline{\overline{\varphi}} = \mu A \overline{\varphi}. \qquad (1.42)$$

Отсюда $\overline{\varphi} = \mu^2 A^2 \overline{\varphi}$ или $(\mu A + 1)(\mu A - 1)\overline{\varphi} = 0.$ Последнее равенство возможно в двух случаях:

в $(\mu A - 1)\overline{\varphi} = 0,$ т.е. $\overline{\varphi} = \mu A \overline{\varphi}.$ В этом случае μ является собственным значением уравнения (1.23) а из (1.42) следует, что $\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi};$

г $z = (\mu A - 1)\overline{\varphi} \not\equiv 0.$ Тогда $(\mu A + 1)z = 0,$ или $z = -\mu A z.$ Следовательно, $(-\mu)$ является собственным значением уравнения (1.23) Из (1.42) следует тогда, что $z = \mu A \overline{\varphi} - \overline{\varphi} = \overline{\overline{\varphi}} - \overline{\varphi}.$

$$\lambda = \mu, y = \overline{\varphi} = \overline{\overline{\varphi}}, \qquad \lambda = -\mu, y = \overline{\overline{\varphi}} - \overline{\varphi}$$

Таким образом, либо либо являются собственным значением и собственной функцией уравнения (1.23)

Приведенные рассуждения представляют собой доказательство существования собственного значения и собственной функцией уравнения, а кроме того, дают возможность эффективного получения собственного значения и собственной функции в виде пределов последовательностей.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$-e$$

$$¿$$

$$(¿x+s¿)\, y(s)\, ds (1.43)$$

$$¿$$

$$y(x)=\lambda \int_0^1 ¿$$

Набираем начальное приближение $y_0 \equiv 0$. Из реккурентного соотношения $y_{i+1}=Ay_i i$ определяем последующие приближения:

$$-e$$

$$(¿¿x+s)\,ds=-e^x(e-1)$$

$$y_1(x)=\int_0^1 ¿$$

$$-e$$

$$(¿¿x+s)(-e^s)(e-1)\,ds=-e^x(e-1)\frac{e^2}{2},\ldots,$$

$$y_2(x)=\int_0^1 ¿$$

$$y_n(x)=(-1)^n e^x(e-1)\left[\frac{e^2-1}{2}\right]^{n-1}.$$

Находим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\|y_n\|}{\|y_{n+1}\|}=\frac{2}{e^2-1}=|\lambda|$. Строим нормированные функции

$$\varphi_n=\frac{y_n}{\|y_n\|}=(-1)^n\frac{e^x}{e^2-1} \quad .$$

Отсюда

$$\varphi_{2n}=\frac{e^x}{e^2-1}=-¿\lim_{n\to\infty}\varphi_{2n+1}=-\acute{\varphi}=\acute{\varphi}$$

$$\acute{\varphi}=\lim_{n\to\infty}¿$$

таким образом, $\acute{\varphi}-\acute{\varphi}=\frac{2e^x}{e^2-1}$ является собственной функцией интегрального уравнения (1.43), соответствующей собственному значению $\lambda=\frac{-2}{e^2-1}$.

1.2.3 Случай «малого» λ .

Пусть $K(x,s)$ и $f(x)$ – произвольные непрерывные при $x,s\in[a,b]$ функции. Симметрии $K(x,s)$ не требуем. Обозначим

$$\sup_{\substack{a\le x\le b\\ a\le s\le b}}|K(x,s)|=\overline{K}.$$

Теорема существования и единственности.

Теорема 1. Если $|\lambda|<\frac{1}{\overline{K}(a-b)}$, то решение уравнения (1.16) существует и единственно. Решение может быть найдено как предел равномерно сходящейся последовательности приближений $\varphi_n(x)$, определяемых рекуррентным соотношением

$$\varphi_{n+1}=\lambda A\varphi_n+f, \tag{1.44}$$

где $\varphi_0(x)$ – произвольная непрерывная функция.

Доказательство. Используем принцип сжатых отображений. Рассмотрим полное метрическое пространство $C[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ функций, где $\rho(\varphi_m,\varphi_k)=\sup_{[a,b]}|\varphi_m(x)-\varphi_k(x)|$.

Рассмотрим оператор

$$z=L\varphi=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds+f(x). \tag{1.45}$$

если $\varphi(x)$ непрерывна, то и $z(x)$ непрерывная функция. Следовательно, оператор L отображает элементы пространства $C[a,b]$ снова в элементы $C[a,b]$. кроме того,

$$\left|L\varphi_m - L\varphi_k\right| = \left|\lambda\int_a^b K(x,s)(\varphi_m(s)-\varphi_k(s))ds\right| \le |\lambda|\overline{K}(b-a)\sup_{[a,b]}|\varphi_m(x)-\varphi_k(x)|.$$

Отсюда $\rho\left(L\varphi_m, L\varphi_k\right) = \sup_{[a,b]}\left|L\varphi_m - L\varphi_k\right| \le \alpha\rho\left(\varphi_m,\varphi_k\right),$ где $\alpha = |\lambda|\overline{K}(b-a).$ Из условий теоремы следует, $\alpha < 1$ и тем самым оператор L сжимающий.

Таким образом выполнены все условия, при которых имеет место принцип сжатых отображений. Согласно этому принципу оператор L имеет единственную неподвижную точку, которая может быть найдена как предел сходящейся по метрике пространства $C[a,b]$ последовательности приближений, определяемых соотношением (1.44) Неподвижная точка оператора $L,$ как видно из (1.45) совпадает с решением интегрального уравнения (1.16) Следовательно, решение (1.16) существует и единственно. Наконец последовательность приближений (1.44) сходится равномерно относительно $x\in[a,b],$ поскольку сходимость в метрике пространства $C[a,b]$ означает равномерную сходимость.

Замечание. Если ядро K имеет собственные значения, то $|\lambda_k| \ge \dfrac{1}{\overline{K}(b-a)}.$ Действительно, допустим противное. Тогда при некотором λ_k таком что $|\lambda_k| \ge \dfrac{1}{\overline{K}(b-a)},$ существует нетривиальное решение уравнения $y = \lambda_k Ay.$ С другой стороны, $y(x)\equiv 0$ очевидно также удовлетворяет этому уравнению. Тем самым приходим к противоречию с доказанной в теореме 1 единственностью решения. Противоречие доказывает справедливость неравенства $|\lambda_k| \ge \dfrac{1}{\overline{K}(b-a)}.$

2.Резольвента. Построим выражение для резольвента ядра $K(x,s)$ в рассматриваемом случае. Положим $\varphi_0 = f.$ Тогда из (6.14) имеем

$$\varphi_1 = \lambda Af + f,$$

$$\varphi_2 = \lambda A(\lambda Af + f) + f = \lambda^2 A^2 f + f,$$

$$\ldots$$

$$\varphi_n = \sum_{m=1}^{n} \lambda^m A^m f + f.$$

(1.46)

Сcправедливо представление $A^m f = \int_a^b K_m(x,s) f(s) ds,$ где $K_m(x,s)$ повторное ядро порядка m (считаем $K_1(x,s) \equiv K(x,s)$).

имеем последовательность оценок

$$\sup|K_m(x,s)| = \sup\left|\int_a^b K(x,t) K_{m-1}(t,s) dt\right| \le \overline{K}(b-a) \sup|K_{m-1}(x,s)| \le \ldots \le \overline{K}^m (b-a)^{m-1}.$$

Отсюда ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$ равномерно сходится при $|\lambda| < \dfrac{1}{\overline{K}(b-a)}.$ Это позволяет перейти к пределу при $n \to \infty$ в (1.46) и поменять места операции суммирования и интегрирования. Получим

$$y(x) = f + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m A^m f = f + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x,s) f(s) ds = f + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s) ds, \quad (6.17)$$

где

$$R(x,s,\lambda) = K(x,s) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$$

(1.48)

резольвента ядра $K(x,s).$

Соотношения (1.39) и (1.48) определяют резольвенту соответственно в случае симметричного ядра и в случае произвольного ядра и «малого» $\lambda.$

Проверим, что в случае, когда ядро симметрично, а $|\lambda| < \dfrac{1}{\overline{K}(b-a)},$ выражения и эквивалентны.

Действительно, в этом случае согласно для $m \ge 2$ справедливо представление $K_m(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{y_i(x) y_i(s)}{\lambda_i^m},$ где $y_i(x)$ собственные функции ядра $K(x,s).$

Подставим $K_m(x,s)$ в этом виде в (1.48) Учитывая, что $|\lambda| < \dfrac{1}{\overline{K}(b-a)} \le |\lambda_k|,$ имеем

$$R(x,s,\lambda)=K(x,s)+\sum_{m=2}^{\infty}\lambda^{m-1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i^m}=K(x,s)+\sum_{i=1}^{\infty}y_i(x)y_i(s)\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{\lambda_i^m}=$$

$$=K(x,s)+\sum_{i=1}^{\infty}y_i(x)y_i(s)\frac{\lambda/\lambda_i^2}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_i}}=K(x,s)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)},$$

что совпадает с выражением для резольвенты, что и требовалось. Абсолютная и равномерная сходимость полученного ядра оправдывает проделанную перестановку порядка суммирования по i и m.

Теорема 2. При $|\lambda|<\dfrac{1}{\overline{K}(b-a)}$ решение уравнения (1.16) дается формулой(1.47) в которой резольвента $R(x,s,\lambda)$ определяется как сумма равномерно и абсолютно сходящегося ряда (1.48) Если при этом ядро $K(x,s)$ симметрично, то (1.48) совпадает с

Пример. Построить резольвенту для уравнения

$$y(x)=\lambda\int_0^{\pi}\sin(x-s)y(s)ds+f(x).$$

Имеем

$$K(x,s)=\sin(x-s);K_2(x,s)=\int_0^{\pi}\sin(x-t)\sin(t-s)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(x+s-2t)-$$

$$-\cos(x-s)]dt=-\frac{\pi}{2}\cos(x-s);K_3(x,s)=\int_0^{\pi}\sin(x-t)\left[-\frac{\pi}{2}\cos(t-s)\right]dt=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}[\sin(x-s)+\sin(x+s-2t]dt=-\frac{\pi}{4}\sin(x-s).$$

Очевидно,

$K_{2m+1}(x,s)=\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)^{2m}\sin(x-s),$ а $K_{2m}(x,s)=\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)^{2m-1}\cos(x-s)$ для $m=1,2,\ldots.$

Получаем

$$R(x,s,\lambda)-\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,s)=\sin(x,s)\left[1-\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2-\cdots\right]-\lambda\frac{\pi}{2}\cos(x-s)[1-$$

$$-\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4-\cdots\Bigg].$$

При $|\lambda|\frac{\pi}{2}<1$ ряды, стоящие в квадратных скобках, сходятся и представляют собой геометрические прогрессии. Отсюда при $|\lambda|<\frac{2}{\pi}$ получим

$$R(x,s,\lambda)=\frac{\sin(x-s)-\frac{\lambda\pi}{2}\cos(x-s)}{1+\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

В данном примере ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,s)$ сходятся при $|\lambda|<\frac{2}{\pi}$, в то время как в теореме 2 указана оценка

$$|\lambda|<\frac{1}{\overline{K}(b-a)}=\frac{1}{\pi}.$$

Это говорит о том, что оценка $|\lambda|<\frac{1}{\overline{K}(b-a)}$ является достаточной, но не является необходимой для сходимости ряда (1.48)

Обобщение результатов на случай полярных ядер. Напомним, что полярным ядром называется ядро вида $K(x,s)=\frac{\Phi(x,s)}{|x-s|^{\alpha}}$, где $0<\alpha<1$, а $\Phi(x,s)$ непрерывная функция. Рассмотрим оператор Фредгольма с полярным ядром

$$z(x)=Ay=\int_a^b\frac{\Phi(x,s)}{|x-s|^{\alpha}}y(s)ds.$$

Он отображает ограниченные функции $y(x)$ в непрерывные функции $z(x)$.

Действительно, обозначим $\sup\limits_{\substack{a\le x\le b\\ a\le s\le b}}|\Phi(x,s)|=H$ а $\sup\limits_{a\le x\le b}|y(x)|=y_0.$ Тогда

$$|z(x_1)-z(x_2)|\le\int_a^b|\Phi(x_1,s)-\Phi(x_2,s)|\frac{|y(s)|}{|x_2-s|^{\alpha}}ds+\int_a^b|\Phi(x_1,s)|\left|\frac{1}{|x_1-s|^{\alpha}}-\frac{1}{|x_2-s|^{\alpha}}\right|\times$$

$$\times|y(s)|ds\le\sup_{a\le s\le b}|\Phi(x_1,s)-\Phi(x_2,s)|\frac{2y_0(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{Hy_o}{1-\alpha}\left[(x_1-a)^{1-\alpha}-(x_2-a)^{1-\alpha}+\right.$$

$$+(b-x_2)^{1-\alpha}-(b-x_1)^{1-\alpha}+4\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^{1-\alpha}\Bigg]\to 0$$

При $|x_1-x_2|\to 0.$ Отсюда следует непрерывность функции $z(x).$

Обозначим $\sup\limits_{a\le x\le b}\int\limits_a^b |K(x,s)|ds = P.$ Тогда

$$|Ay_1-Ay_2|\le |y_1-y_2|\left|\int\limits_a^b\right| K(x,s)|ds\le P|y_1-y_2|.$$

Следовательно, оператор $z=\lambda Ay+f$ сжимающий, если $|\lambda|<\dfrac{1}{P}.$ Отсюда видно, что теорема 1. остается в силе и для полярных ядер, если условие $|\lambda|<\dfrac{1}{\overline{K}(b-a)}$ заменить условием

$$|\lambda|<\frac{1}{P}.$$

Обратимся к выражению для резольвенты (1.48) в случае полярного ядра $K(x,s).$

Убедимся в том, что повторные ядра $K_n(x,s)$ могут иметь особенность лишь до некоторого конечного номера $n,$ а ядра более высокого порядка непрерывные функции.

Действуем по индукции. Пусть n-е повторное ядро имеет вид $K_n(x,s)=\dfrac{\Phi_n(x,s)}{|x-s|^{\beta}},$ где $0<\beta<1,\ |\Phi_n(x,s)|<H_n$ (для $n=1$ условия выполнены). Тогда

$$K_{n+1}(x,s)=\int\limits_a^b K(x,t)K_n(t,s)dt=\int\limits_a^b\frac{\Phi(x,t)\Phi_n(t,s)}{|x-t|^{\alpha}|s-t|^{\beta}}dt. \tag{1.49}$$

Если $\alpha+\beta<1,$ то $K_{n+1}(x,s)\le HH_n\int\limits_a^b\dfrac{dt}{|x-t|^{\alpha}|t-s|^{\beta}}.$ Этот интеграл, а следовательно, и $K_{n+1}(x,s)$ ограниченная величина при любых x и s

Если $\alpha+\beta\ge 1$ то делаем замену переменной $t=s+\xi(x-s)$. Обозначаем $a_1=\dfrac{a-s}{x-s},\ b_1=\dfrac{b-s}{x-s}$. Тогда из (1.49) получаем $K_{n+1}(x,s)=|x-s|^{1-\alpha-\beta}F(x,s)$, где

$$F(x,s)=\frac{x-s}{|x-s|}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\Phi_n(x,s+\xi(x-s))\Phi_n(s+\xi(x-s),s)}{|1-\xi|^{\alpha}|\xi|^{\beta}}d\xi.$$

При $\alpha+\beta>1$ очевидно $|F(x,s)|<HH_nI$, где $I=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{d\xi}{|1-\xi|^{\alpha}|\xi|^{\beta}}$ сходящийся интеграл. При $\alpha+\beta=1$ выполнено $|F(x,s)|\le\int_{a_1}^{b_1}\dfrac{HH_nd\xi}{|1-\xi|^{\alpha}|\xi|^{\beta}}=g(x,s)\ln|x-s|$, где $g(x,s)$ ограниченная функция. Поскольку $\ln z=0(z^{\frac{\alpha-1}{2}})$ при $z\to 0$, то $|F(x,s)|\le C|x-s|^{\frac{\alpha-1}{2}}$.

Итак, ядро $K_n(x,s)$ имело особенность $0(|x-s|^{-\beta})$. Ядро $K_{n+1}(x,s)$ при $\alpha+\beta<1$ ограничено, а при $\alpha+\beta\ge 1$ имеет особенность более низкого порядка, чем $K_n(x,s)$ а именно в последнем случае $K_{n+1}(x,s)$ представимо в виде $K_{n+1}(x,s)=\dfrac{\Phi_{n+1}(x,s)}{|x-s|^{\beta-\frac{1-\alpha}{2}}}$, где $\Phi_{n+1}(x,s)$ ограниченная функция. Поскольку при повышении индекса повторного ядра на единицу порядок особенности убывает не менее чем на $\dfrac{1-\alpha}{2}$, то повторные ядра $K_n(x,s)$ по крайней мере с индексами $n>n_0$, где n_0 целая часть числа $\left(\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}+1\right)$, ограниченные функции.

При $n>n_0$, ядра $K_{n+1}(x,s)$ являются непрерывными функциями. Действительно, выше было показано, что оператор Фредгольма с полярным ядром переводит ограниченные функции в непрерывные. Поскольку K_n ограничены, то $K_{n+1}=AK_n$ непрерывны при $n>n_0$.

Ряд (1.48) можно разбить на две части. В одну войдет конечное число слагаемых, которые могут иметь особенность, в другую бесконечная сумма ограниченных и непрерывных повторных ядер:

$$R(x,s,\lambda) = R_1(x,s,\lambda) + R_2(x,s,\lambda),$$

где

$$R_1(x,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{n_0} \lambda^{n-1} K_n(x,s), \;\; R_2(x,s,\lambda) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s).$$

Ограниченные повторные ядра при связаны соотношением

$$\sup_{x,s\in[a,b]} \left|\lambda K_{n+1}(x,s)\right| = \sup_{x,s\in[a,b]} \left|\lambda \int_a^b K(x,t) K_n(t,s)\,dt\right| \le |\lambda| P \sup_{x,s\in[a,b]} \left|K_n(x,s)\right|,$$

Из которого следует равномерная сходимость ядра R_2 Отсюда видно, что формулы (1.47) и (1.48) остаются в силе и для полярных ядер при условии $|\lambda| < 1/P.$

Ослабление требований на $\lambda.$ Пусть $K(x,s)$ и $f(x)$ непрерывные функции. Обозначим $B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,s)\,dx\,ds}.$ Заметим, что $\frac{1}{B} \ge \frac{1}{\overline{K}(b-a)}.$ Имеет место следующая

Теорема 3. Утверждение теоремы1остается в силе при $|\lambda| < 1/B.$

Доказательство. Выберем произвольную непрерывную функцию $\varphi_0(x).$ Обозначим $\|\varphi_0\| = C_0,$ где норма берется в пространстве $h[a,b]$ т.е. под $\| \; \|$ понимается величина

$$\|y^2\| = (y,y) = \int_a^b y^2(x)\,dx.$$

Обозначим $C = \max\left[\frac{\|f\|}{1-|\lambda|B}, C_0\right].$ Рассмотрим последовательность, задаваемую рекуррентным соотношением (1.44) $\varphi_{n+1} = \lambda A \varphi_n + f.$

Пусть $\varphi_n(x)$ непрерывная функция и $\|\varphi_n\| \le C.$ Это имеет место при $n = 0.$ Тогда $\varphi_{n+1}(x)$ обладает теми же свойствами. Действительно.

Непрерывность $\varphi_{n+1}(x)$ очевидна. Для доказательства того, что $\|\varphi_{n+1}\| \le C,$ предварительно оценим $\|\varphi_{n+1} - f\|.$ Имеем

$$\|\varphi_{n+1} - f\|^2 = \|\lambda A\varphi_n\|^2 = \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)\varphi_n(s)ds \right)^2 dx \le \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b K^2(x,s)ds \int_a^b \varphi_n^2(s)ds \right) dx =$$

$$= \lambda^2 \int_a^b \varphi_n^2(s)ds \int_a^b \int_a^b K^2(x,s)dxds \le \lambda^2 B^2 C^2.$$

отсюда получаем $\|\varphi_{n+1}\| \le \|\varphi_{n+1} - f\| + \|f\|BC + \|f\| \le C.$ Последнее неравенство выполнено в силу того, что $C \ge \dfrac{\|f\|}{1-|\lambda|B}.$ Итак, $\varphi_n(x)$ образуют последовательность непрерывных, ограниченных по норме функций.

Из доказательства теоремы1 следует, что оператор A переводит ограниченную по норме последовательность функции $\varphi_n(x)$ в последовательность равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных на $[a,b]$ функций $z_n(x) = A\varphi_n.$ так как $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b],$ то она ограничена на нем и равномерно-непрерывна. Поэтому последовательность $\varphi_{n+1} = \lambda A\varphi_n + f = \lambda z_n + f$ также будет равномерно ограниченной и равностепенно-непрерывной.

Итак, последовательность функций $\varphi_n(x)$ является равномерно ограниченной и равностепенно-непрерывной. Тогда по теореме Арцела существует подпоследовательность $\varphi_{n_k}(x),$ равномерно сходящаяся к некоторой непрерывной функции $\overline{\varphi}(x).$ Докажем, что вся последовательность φ_n равномерно сходится к $\overline{\varphi}.$ Допустим, что это не так. Тогда существует $\delta > 0,$ подпоследовательность φ_{n_p} и такие $x_{n_p} \in [a,b],$ что $\left|\varphi_{n_p}(x_{n_p}) - \overline{\varphi}(x_{n_p})\right| > \delta.$ из последовательности φ_{n_p} в силу той же теоремы Арцела можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой непрерывной функции $\overline{\overline{\varphi}}(x).$

Будем считать φ_{n_m} такой подпоследовательностью. Тогда при достаточно большом n_m будем иметь $\left|\varphi_{n_m}(x)-\overline{\overline{\varphi}}(x)\right|<\delta/2$ для всех $x\in[a,b]$ и, в частности, $\left|\varphi_{n_m}(x_{n_m})-\overline{\overline{\varphi}}(x_{n_m})\right|<\delta/2$ Поэтому

$$\left|\overline{\varphi}(x_{n_m})-\overline{\overline{\varphi}}(x_{n_m})\right|\ge\left|\varphi_{n_m}(x_{n_m})-\overline{\varphi}(x_{n_m})\right|-\left|\varphi_{n_m}(x_{n_m})-\overline{\overline{\varphi}}(x_{n_m})\right|\ge\delta-\delta/2=\delta/2.$$

Отсюда можно заключить, что $\sup\limits_{[a,b]}\left|\overline{\varphi}(x)-\overline{\overline{\varphi}}(x)\right|\ge\delta/2,$ т.е. $\overline{\varphi}(x)\not\equiv\overline{\overline{\varphi}}(x),$ а следовательно, $\left\|\overline{\varphi}-\overline{\overline{\varphi}}\right\|=\mu>0.$

Докажем, что $\varphi_n(x)$ является фундаментальной последовательностью в смысле сходимости по норме. Действительно,

$$\left\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\right\|^2=\int_a^b\left(\lambda\int_a^b K(x,s)\big(\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)\big)ds\right)^2dx\le\lambda^2\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dsdx\times$$

$$\times\int_a^b\big(\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)\big)^2ds=\lambda^2B^2\left\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\right\|^2\le\left(\lambda^2B^2\right)^2\left\|\varphi_{n-1}-\varphi_{n-2}\right\|^2\le\ldots$$

$$\ldots\le\left(\lambda^2B^2\right)^n\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\|^2=\left(\lambda^2B^2\right)^nD^2,$$

где $D=\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\|.$ Отсюда $\left\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\right\|\le(\lambda B)^nD.$ Далее имеем

$$\left\|\varphi_{n+p}-\varphi_n\right\|\le\left\|\varphi_{n+p}-\varphi_{n+p-1}\right\|+\left\|\varphi_{n+p-1}-\varphi_{n+p-2}\right\|+\ldots+\left\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\right\|\le D\big[(\lambda B)^{n+p-1}+(\lambda B)^{n+p-2}+$$

$$+\ldots+(\lambda B)^n\big]\le D\frac{(\lambda B)^n}{1-\lambda B}.$$

Из полученного неравенства можно сделать вывод о том, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать N_0 такое, что $\left\|\varphi_{n+p}-\varphi_n\right\|<\varepsilon/3,$ если $n>N_0,$ а p любое целое число.

Так как $\varphi_{n_k}(x)\rightrightarrows\overline{\varphi}(x),$ а $\varphi_{n_m}(x)\rightrightarrows\overline{\overline{\varphi}}(x),$ то при достаточно больших n_k и n_m имеем $\left\|\overline{\varphi}-\varphi_{n_k}\right\|<\varepsilon/3,\ \left\|\overline{\overline{\varphi}}-\varphi_{n_m}\right\|<\varepsilon/3.$ Пусть, кроме того, $n_k>N_0$ и $n_m>N_0.$

Тогда $\|\overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}}\| \le \|\overline{\varphi} - \varphi_{n_k}\| + \|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_m}\| + \|\varphi_{n_m} - \overline{\overline{\varphi}}\| < \varepsilon,$ что противоречит соотношению $\|\overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}}\| = \mu$ при $\varepsilon < \mu.$

Полученное противоречие доказывает равномерную сходимость всей последовательности $\varphi_n(x)$ к непрерывной функции $\overline{\varphi}(x).$ Переходя к пределу в (1.44) получаем, что φ является решением уравнения (1.16)

Осталось доказать единственность. Пусть φ и $\widetilde{\varphi}$ два различных непрерывных решения уравнения (1.16).

Тогда

$$\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|^2 = \int_a^b \left(\lambda \int_a^b K(x,s)(\varphi(s) - \widetilde{\varphi}(s))ds \right)^2 dx \le \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x,s)dxds \int_a^b (\varphi(s) - \widetilde{\varphi}(s))^2 ds \le$$

$$\le \lambda^2 B^2 \|\varphi - \widetilde{\varphi}\|.$$

Поскольку $\lambda^2 B^2 < 1,$ получаем $\|\varphi - \widetilde{\varphi}\| = 0$ и, следовательно, теорема доказана.

$$B = \sqrt{\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(x-s)dxds} = \frac{\pi}{2}.$$

Вернемся к Согласно теореме 2 сходимость ряда для резольвенты имеет место при $|\lambda| \le \frac{1}{B} = \frac{2}{\pi},$ что совпадает с результатом, полученным в данном примере непосредственным расчетом.

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{du}{dx} = \psi(x,u) + \int_0^1 [K_0(x,t) + \lambda K_1(x,t)] f(t,u)dt \tag{1.50}$$

Пусть при $\lambda=\lambda_0$ уравнение (1.50) имеет решение $u_0(x)$ т.е.

$$\frac{du_0}{dx} = \psi(x,u_0) + \int_0^1 [K_0(x,t) + \lambda_0 K_1(x,t)] f(t,u_0)dt \tag{1.51}$$

Произведя замену

$$u(x) = U_0(x) + Z(x), \quad \lambda = \lambda_0 + \mu, \tag{1.52}$$

и учитывая аналогичность функции ψ и f, а также (1.1.3), из уравнения (1.1.2) получим

$$\frac{dz}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A_n(x)Z^n(x)+\int_0^1[K_0(x,t)+\lambda_0K_1(x,t)]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}B_n(t)Z^n(t)dt+\mu\int_0^1K_1(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}B_n(t)Z^n(t)dt,$$

$$A_n(x)=\frac{\partial^n\psi(x,u_0)}{\partial u_0^n},\ B_n(t)=\frac{\partial^n f(t,u_0)}{\partial u_0^n};\ \ (n=0,1,...)$$

(1.53)

Решение уравнения (1.53) ищем в виде ряда

$$z(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^n z_n(x)$$

(1.54)

Подставляя ряд (1.54) в уравнение (1.53) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, приходим к линейным интегро-дифференциальным уравнениям для определения неизвестных коэффициентов ряда (1.54).

$$\frac{dz_1}{dx}=A_1(x)z_1(x)+\int_0^1[K_0(x,t)+\lambda_0K_1(x,t)]B_1(t)z_1(t)dt+\int_0^1K_1(x,t)B_0(t)dt,$$

(1.55_1)

$$\frac{dz_2}{dx}=A_1(x)z_2(x)+\int_0^1[K_0(x,t)+\lambda_0K_1(x,t)]B_1(t)z_2(t)dt+\frac{1}{2!}\int_0^1[K_{01}(x,t)+\lambda_0K(x,t)]B_2(t)z_1^2(t)dt+$$

$$+\int_0^1K_1(x,t)B_1(t)z_1\quad(t)dt+\frac{1}{2!}A_2(t)z_1^2(x),$$

(1.55_2)

$$\frac{dz_n}{dx}=A_1(x)z_n(x)+\int_0^1[K_0(x,t)+\lambda_0K_1(x,t)]B_1(t)z_n(t)dt+f_n(x),$$

(1.56_n)

где

$$f_n(x)=\int_0^1[K_0(x,t)+\lambda_0K_1(x,t)]\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}B_m(t)\left(\sum_{k=1}^{n-1}z_k(t)\right)^m\right]' dt+$$

$$+\int_0^1 K_1(x,t)\left[\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m!}B_m(t)\left(\sum_{k=1}^{n-1}z_k(t)\right)^m\right]' dt+\left[\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m!}A_m(t)\left(\sum_{k=1}^{n-1}z_k(t)\right)^m\right]' ;$$

(1.57)

Здесь и всюду в дальнейшем штрих у квадратной скобки означает, что в $f_n(x)$ входят только те члены двойной суммы, для которых сумма всевозможных произведений индексов k, m равна верхнему числу внешнего знака $\sum$.

Пусть Δ (x, s) решение уравнения $\Delta'(x)=A_1(x)\Delta(x)$, при $\Delta(x,s)\big|_{x=s}=1$.

Тогда из (1.7_n) с учетом нулевых начальных условий будем иметь

$$z_n(x)=\int_0^x\Delta(x,s)\left[\int_0^1[\overline{K}_0(s,t)+\lambda_0\overline{K}_1(s,t)]z_n(t)dt+f_n(s)\right]ds,$$

или

$$z_n=\int_0^{ч}[H_0(x,t)+\lambda_0H_1(x,t)]z_n(t)dt+\phi_n(x) \qquad (1.58)$$

где

$$\overline{K}_i(x,t)=K_i(x,t)B_1(t),$$

$$H_i(x,t)=\int_0^x\Delta(x,s)\overline{K}_i(s,t)ds,\quad (i=0,1)$$

(1.59)

$$\phi_n(x)=\int_0^x\Delta(x,s)f_n(s)ds.$$

Следуя работе, будем называть ядро $H_0(x,t)+\lambda_0H_1(x,t)$ нормальным, если уравнение (1.1.9) имеет единственное решение для всякой функции $\Phi_n(x)$ при любом λ_0, и число единица не является собственным значением для $H_0(x, t)$.

Пусть ядро $H_0(x,t)+\lambda_0H_1(x,t)$ есть нормальное и $Д(\lambda_0)\neq 0$, где $Д(\lambda)$ определитель Фредгольма ядра

$$K(x,t) = H_1(x,t) + \int_0^1 H_1(x,s) R_0(s,t) ds$$

,

$R_0(x,t)$ – резольвента ядра $H_0(x,t)$.

Следовательно, уравнение (1.1.9) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$z_n(x) = \lambda_0 \int_0^1 R_0(x,s,\lambda_0)\phi_n(s)ds + \lambda_0 \int_0^1 R_0(x,s) \int_0^1 R(s,t,\lambda_0)\phi_n(t)dtds + +$$

$$+ \int_0^1 R_0(x,s)\phi_n(s)ds + \phi_n(s)ds + \phi_n(x).$$

(1.60)

здесь $R(x, t,\lambda_0)$ есть резольвента ядра К (x,t). Таким образом, мы можем последовательно определить все функции $z_n(x)$, и при этом такое определение будет однозначным. Подставляя (1.1.11) в (1.1.6) получим решение уравнения (1.1.5):

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^n \left[\lambda_0 \int_0^1 R(x,s,\lambda_0)\phi_n(s)ds + \lambda_0 \int_0^1 R_0(x,s) \int_0^1 R(s,t,\lambda_0)\phi_n(t)dtds + \int_0^1 R_0(x,s)\phi_n(s)ds + \phi_n(x) \right]$$

(1.61)

остается теперь показать, что ряд (1.61), а также ряд получающийся из него почленным дифференцированием по x, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n'(x)\rho^n$$

(1.62)

сходится для всех $x \in [0,1]$ при достаточно малых значениях ρ. Для этого применим метод мажорантных рядов. Пусть имеют место следующие неравенства

$$\left|\Delta(x,s), \Delta_x'(x,s)\right| \le M, \quad (0 \le s \le x \le 1)$$

$$\max_{0 \le s,x \le 1} \left\{ \frac{1}{m!} \int_0^1 |K_i(x,t) B_m(t)| dt,\ \left| \frac{1}{m!} A_m(x) \right| \right\} \le B, \qquad (i = 0,1;\ \ m = 0,1,...)$$

$$\max_{0 \le s, x \le 1} \left\{ \int_0^1 |R(x,s,\lambda_0)| ds, \int_0^1 |R_0(x,s)| ds \right\} \le R_0,$$

$$\max_{0 \le s, x \le 1} \left\{ \int_0^1 |R'_x(x,s,\lambda_0)| ds, \int_0^1 |R'_{0x}(x,s)| ds \right\} \le R_1, \tag{1.63}$$

где M, B, R_0 и R_1 константы.

$$|f_1(x)| = \int_0^1 |K_1(x,t) B_0(t)| dt \le B \qquad |\phi_1(x)| \le \int_0^x |\Delta(x,s)| |f_1(s)| ds \le MB$$

имеем

поэтому

$$|z_1(x)| \le |\lambda_0| \int_0^1 |R(x,s,\lambda_0)| |\phi_1(s)| ds + |\lambda_0| \int_0^1 |R_0(x,s)| \int_0^1 R(s,t,\lambda_0) |\phi_1(t)| dt ds + \int_0^1 |R_0(x.s)| |\phi_1(s) ds| + |\phi_{11}(x)| \le$$

$$\le MB \left[1 + R_0 + R_0^2 |\lambda_0| + |\lambda_0| R_0 \right] = MB(1+R_0)(1+R_0|\lambda_0|) \equiv a_1,$$

т.е. $|z'_1(x)| \le a_1$

оценим $z'_1(x)$. Продифференцировав выражение для $z'_1(x)$ получим

$$z'_1(x) = \lambda_0 \int_0^1 R'_x(x,s,\lambda_0) \phi_1(s) ds + \lambda_0 \int_0^1 R'_{0x}(x,s) \int_0^1 R(x,t,\lambda_0) \phi_1(t) dt ds + \int_0^1 R'_{0x}(x,s) \phi_1(s) ds + \phi'_1(x),$$

где

$$\phi'_1(x) = \int_0^x \Delta'_x(x,s) f_1(s) ds + f_1(x).$$

отсюда в силу (1.63) вытекают неравенства

$$|\phi'_1(x)| \le \int_0^x |\Delta'_x(x,s)| |f_1(s)| ds + |f_1(x)| \le (M+1)B,$$

$$|z'_1(x)| \le |\lambda_0| R_1 MB + |\lambda_0| R_1^2 MB + R_1 MB + (1+M)B \le B\left[M(1+R_1)(1+|\lambda_0| R_1) + 1 \right] \equiv b_1,$$

т.е. $|z'_1(x)| \le b_1$

Рассмотрим систему двух уравнений

$$F_1(\mu, v, w) = -v + \mu a \ + N_0\left[\mu\sum_{k=1}^{\infty} v^k + (1+|\lambda_0|)\sum_{k=2}^{\infty} v^k + \sum_{k=2}^{\infty} v^k\right] = 0,$$

$$F_2(\mu, v, w) = -w + \rho b_1 + N_1\left[\mu\sum_{k=1}^{\infty} v^k + (1+|\lambda_0|)\sum_{k=2}^{\infty} v^k + \sum_{k=2}^{\infty} v^k\right] = 0,$$

(1.64)

где

$$N_0 = MB(1+R_0)(1+R_0|\lambda_0|), \qquad N_1 = \left[M(1+R_1)(1+R_1|\lambda_0|)+1\right]B.$$

функции $F_1(\mu, v, w)$, $F_2(\mu, v, w)$ обладают следующими свойствами:

1) они голоморфны в окрестности точки $\mu = v = w = 0$,

2) $F_1(0, 0, 0) = F_2(0,0,0) \equiv 0$

3) якобиан

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Следовательно, на основании теоремы о существовании неявной функции, система уравнений (1.64) в окрестности точки μ=0 имеет единственное голоморфное относительно параметра μ решение. Это решение будем искать в виде

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k a_k, \qquad w = \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k b_k$$

(1.65)

подставляя (1.65) в (1.64) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ $(к = \overline{1,\infty})$ получим рекуррентные соотношения для $a_к$ и $в_к$

$a_1 = a_1$

$a_2 = N_0\left[a_1 + (1+|\lambda_0|)a_1^2 + a_1^2\right]$,

$$a_k = N_0\left\{(1+|\lambda_0|)\left[\sum_{m=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)^m\right]' + \left[\sum_{m=1}^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)^m\right]' + \left[\sum_{m=2}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)^m\right]'\right\}$$

(1.66)

Аналогичные выражения получаются и для $в_к$:

$в_1 = в_1$

$в_2 = N_0\left[a_1 + (1+|\lambda_0|)a_1^2 + a_1^2\right]$

$$= N_1 \left\{ (1+|\lambda_0|) \left[\sum_{m=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i \right)^m \right]^{/} + \left[\sum_{m=1}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i \right)^m \right]^{/} + \left[\sum_{m=2}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i \right)^m \right]^{/} \right\}$$

$в_к$ (1.67)

При этом справедливы неравенства:

$$|z_k(x)| \le a_k, \qquad |z^{/}{}_k(x)| \le в_k, \tag{1.68}$$

Полученный результат можно сформулировать так:
Теорема . Пусть

1) φ(x,u) и f(x,u) непрерывные по x$\in$[0,1], и аналитические функции;

2) $D(\lambda_0)\neq 0$ и ядро $H_0(x,t)+\lambda_0 H_1(x,t)$ есть нормальное, где $D(\lambda)$ - определитель Фредгольма ядра

$$K(x,t) = H_1(x,t) + \int_0^1 H_1(x,s) R_0(s,t) ds$$

,

3)имеют место неравенства (1.63).

Тогда вырожденное уравнение (1.50) имеет единственное голоморфное решение, определяемое формулой

u(x)=u_0(x)+

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^m \left[\lambda_0 \int_0^1 R(x,s,\lambda_0) \Phi_m(s) ds + \lambda_0 \int_0^1 R_0(x,s,\ ) \int_0^1 R\ (x,s,\lambda_0) \Phi_m(t) dt ds + \int_0^1 R_m\ (x,s) \Phi_m(s) ds + \Phi_m(s) \right]$$

1.2.4 Теоремы Фредгольма.

Интегральные уравнения

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x) \tag{1.69}$$

и

$$z(x) = \lambda * \int_a^b K*(s,x)z(s)ds + g(x)$$

называются союзными, если $K*(s,x)$ эрмитово сопряженное по отношению к $K(x,s)$ ядро. При этом сами ядра $K(x,s)$ и $K*(s,x)$ Также называют союзными.

Если $K(x,s)$ и λ вещественны, то союзными к уравнению (1.69) является уравнение

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(s,x)z(s)ds + g(x). \tag{1.70}$$

Мы для простоты изложения будем рассматривать случай вещественных функций $K(x,s),\ f(x),\ g(x),$ и вещественного $\lambda.$ Для комплексных $K(x,s)$ и λ могут быть проведены рассуждения, аналогичные нижеприведенным, и все результаты настоящего параграфа остаются справедливыми.

Случай вырожденного непрерывного ядра**.** В начале рассмотрим вопрос разрешимости уравнений (1.69) и (1.70) для вырожденного ядра, а затем покажем, что все полученные результаты переносятся также и на невырожденные ядра.

Итак, пусть

$$K(x,s) = \sum_{m=1}^{n} \Omega_m(x)\omega_m(s). \tag{1.71}$$

пусть все функции $\Omega_m(x)$ линейно независимы между собой. Из (1.69) учитывая имеем

$$y(x) = \lambda \int_a^b \sum_{m=1}^{n} \Omega_m(x)\omega_m(s)y(s)ds + f(x) = \lambda \sum_{m=1}^{n} \Omega_m(x)C_m + f(x), \tag{1.72}$$

где

$$C_m = \int_a^b \omega_m(s)y(s)ds. \tag{1.73}$$

умножая (1.72) на $\omega_i(x)$ и интегрируя, получим

$$C_i - \lambda \sum_{m=1}^{n} C_m \alpha_{im} = d_i, \tag{1.74}$$

где

$$\alpha_{im} = \int_a^b \omega_i(x)\Omega_m(x)dx, \;\; d_i = \int_a^b f(x)\omega_i(x)dx. \tag{1.75}$$

Интегральное уравнение (1.69) и алгебраическая система (1.75) эквивалентны. Действительно, если $y(x)$ решение (1.69) то C_i определяемые из (1.69) удовлетворяют системе уравнений (1.74) Наоборот, пусть C_i определяются из (1.72) Тогда функция $y(x),$ построенная согласно (1.72) удовлетворяет уравнению (1.69):

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds - f(s) = \lambda \sum_{m=1}^{n} \Omega_m(x)C_m - \lambda \int_a^b \sum_{m=1}^{n} \Omega_m(x)\omega_m(s)\left[\sum_{i=1}^{n} \Omega_i(s)C_i + \right.$$

$$\left. + f(s)\right]ds = \lambda \sum_{m=1}^{n} \Omega_m(x)\left[C_m - \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_{im} - d_m\right] = 0.$$

Проделав аналогичные преобразования для решения $z(x)$ союзного уравнения (1.70) получаем

$$z(x) = \lambda \sum_{m=1}^{n} \omega_m(x)Q_m + g(x), \tag{1.76}$$

где коэффициенты

$$Q_m = \int_a^b \Omega_m(s)z(s)ds$$

удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$Q_i - \lambda \sum_{m=1}^{n} Q_m \alpha_{mi} = \gamma_i, \tag{1.77}$$

а

$$\gamma_i = \int_a^b g(x)\Omega_i(x)dx.$$

Итак, союзные интегральные уравнения (1.69) и (1.70) соответственно эквивалентны системам алгебраических уравнений (1.74) и (1.77) с транспонированными друг относительно друга главными матрицами.

Обозначим через E единичную матрицу, через α матрицу с элементами α_{im}, звездочкой обозначим транспонирование. Тогда согласно сказанному выше главные определители систем (1.74) и (1.77) т.е. определители $\det\{E-\lambda\alpha\}$ и $\det\{E-\lambda\alpha *\}$, равны. Обозначим и тот и другой через $D(\lambda)$.

Корни определителя $D(\lambda)$ совпадают с собственными значениями ядра $K(x,s)$. Действительно, пусть λ собственное значение ядра $K(x,s)$. т.е. при $f(x)=0$ имеется нетривиальное решение уравнения (1.69) При этом, как следует из (1.72) и (1.75) существует нетривиальное решение однородной системы (1.74). Это возможно только тогда, когда $D(\lambda)=0.$ Наоборот, пусть λ не является собственным значением ядра $K(x,s)$. Тогда при $f(x)=0$ существует лишь тривиальное решение уравнения (1.69) Следовательно, в силу (1.73) существует лишь тривиальное решение однородной системы (1.74) а это возможно только тогда, когда $D(\lambda)\neq 0.$

Точно так же можно убедиться, что корни $D(\lambda)$ совпадают с собственными значениями союзного ядра $K(s,x)$. Таким образом имеет место теорема

Теорема 4. собственные значения ядер $K(x,s)$ и $K(s,x)$ совпадают.
Рассмотрим различные случаи.

Пусть λ не является собственным значением ядра $K(x,s)$ или ядра $K(s,x)$. Тогда, по доказанному, $D(\lambda)\neq 0.$ Следовательно, существует единственное решение систем (6.25) и (6.28) при любых d_i и γ_i, а значит, существует единственное решение уравнений (6.20) и (6.21). Тем самым доказана.

Теорема 6.5. Пусть λ не является собственным значением ядра $K(x,s)$. Тогда, решение интегрального уравнения (1.69) и решение союзного уравнения (1.70) существуют и единственны при любых функциях $f(x)$ и $g(x)$.

Пусть λ является собственным значением ядра $K(x,s)$, а $f(x)=g(x)=0.$ Тогда $D(\lambda)=0,\ \ d_i=0,\ \ \gamma_i=0.$ Матрицы однородных систем (1.74) и (1.78) являются транспонированными друг относительно друга. Следовательно, их ранг одинаков и существует равное число линейно независимых решений и однородных алгебраических систем (1.74) и (1.77) Пусть таких решений $l.$ Обозначим их $\overset{p}{C}=\left\{\overset{p}{C}_1,..,\overset{p}{C}_n\right\}$ и $\overset{p}{Q}=\left\{\overset{p}{Q}_1,..,\overset{p}{Q}_n\right\}$ $(p=1,..,l).$ соответственно

Убедимся, что функции

$$\overset{p}{y}(x)=\sum_{m=1}^{n}\Omega_m(x)\overset{p}{C}_m,$$

отвечающие различным $p,$ линейно независимы между собой. Допустим противное. Пусть

$$\sum_{p=1}^{l}\mu_p\overset{p}{y}(x)\equiv 0,$$

где

$$\sum_{p=1}^{l}\mu_p^2\neq 0.$$

тогда

$$\sum_{p=1}^{l}\mu_p\sum_{m=1}^{n}\Omega_m(x)\overset{p}{C}_m=\sum_{m=1}^{n}\Omega_m(x)\sum_{p=1}^{i}\mu_p\overset{p}{C}_m=0.$$

в силу линейно независимости функций $\Omega_m(x)$ получаем

$$\sum_{p=1}^{n}\mu_p\overset{p}{C}_m=0$$

для всех $m=1,2,..,n.$ Это противоречит линейно независимости решений однородной системы (1.74)

Аналогичным образом соотношения

$$\overset{p}{z}(x)=\sum_{m=1}^{n}\omega_m(x)\overset{p}{Q}_m$$

определяют l линейно независимых решений однородного уравнения (1.70) Таким образом, доказана теорема.

Теорема 6. Если λ является собственным значением ядра $K(x,s)$, то однородное уравнение (1.69) и союзное с ним однородное уравнение (1.70) имеют одинаковое число линейно независимых собственных функций.

Теорема 7. Если λ является собственным значением ядра $K(x,s)$, то для существования решения неоднородного уравнения (1.69) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была ортогональна всем собственным функциям союзного ядра $K(s,x)$ отвечающим тому же λ.

1.3. Методы решения уравнений Фредгольма второго рода.
1.3.1Метод определителей Фредгольма.

Решение уравнения Фредгольма второго рода :

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b \kappa(x,t)\varphi(t)dt=f(x) \tag{1.71}$$

дается формулой:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)dt. \tag{1.72}$$

где функция $R(x,t;\lambda)$, называемая резольвентой Фредгольма уравнения (1.71), определяется равенством:

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{1.73}$$

при условии что D(λ)≠0. Здесь D(x,t;λ) и D(λ)- степенные ряды по λ;

$$D(x,t;\lambda)=k(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,t)\lambda^n, \tag{1.74}$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C\lambda^n, \tag{1.75}$$

коэффициенты которых определяются формулами:

$$B_n(x,t)=\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1)\ldots k(x,t_n) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1)\ldots k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t) & k(t_2,t_2)\ldots k(t_2,t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k(t_n,t) & k(t_n,t_1)\ldots k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1\ldots dt_n \tag{1.76}$$

причем

$$B_0(x,t)=k(x,t)$$

$$C_n=\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b \begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2)\ldots k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2)\ldots k(t_2,t_n) \\ k(t_3,t_1) & k(t_3,t_2)\ldots k(t_3,t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2)\ldots k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1\ldots dt_n \tag{1.77}$$

Функция от $D(x,t;\lambda)$ называется минором Фредгольма, а $D(\lambda)$-определителем Фредгольма. В случае, когда ядро $k(x, t)$ ограничено или же интеграл

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b k^2(x,t)\ dxdt$$

имеет конечное значение, ряды (1.74) и (1.75) сходятся для всех значений, λ и значит являются целыми аналитическими функциями от λ.

Резольвента

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

есть аналитическая функция от λ, кроме тех значений λ, которые являются нулями функции $D(\lambda)$.

1.3.2 Пример нахождения резольвенты ядра.

С помощью определителей Фредгольма найти резольвенту ядра $k(x,t)=xe^t$; $a=0$; $b=1$.

Решение. Имеем $B_0(x,t)=xe^t$.

$$B_1(x,t)=\int\limits_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1=0$$

$$B_2(x,t)=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} x\ell^{t} & x\ell^{t_1} & x\ell^{t_2} \\ t_1\ell^{t} & t_1\ell^{t_1} & t_1\ell^{t_2} \\ t_2\ell^{t} & t_2\ell^{t_1} & t_2\ell^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0,$$

Так как определители под знаком интеграла равны нулю. Очевидно, что и все последующие $B_n(x,t)$=0. Находим коэффициенты C_n:

$$C_1=\int_0^1 k(t_1,t_1)dt_1=\int_0^1 t_1\ell^{t_1}=1,$$

$$C_2=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} t_1\ell^{t_1} & t_1\ell^{t_2} \\ t_2\ell^{t_1} & t_2\ell^{t_2} \end{vmatrix}$$

Очевидно, что и все последующие C_n=0. Согласно формулам (1.74) и (1.75) в нашем случае имеем:

$$D(x,t;\lambda)=k(x, t)= xe^{t};\ \ D(\lambda)=1-\lambda.$$

таким образом,

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}=\frac{x\ell^{t}}{1-\lambda}$$

применим полученный результат к решению интегрального уравнения:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 x\ell^{t}\varphi(t)dt=f(x)$$

$$(\lambda\neq 1)$$

согласно формуле (1.72):

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{x\ell^{t}}{1-\lambda}f(t)dt=0$$

в частности, для $f(x)=e^{-x}$ получаем:

$$\varphi(x)=\ell^{-x}+\frac{\lambda}{1-\lambda}x$$

Пример. Решить уравнение Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 x\ e^{t}\ \varphi(t)\ dt=e^{-x},\ (\lambda\neq 1).$$

Решение. Здесь $K(x,t)=xe^{t}$, $f(x)=e^{-x}$, $a=0$, $b=1$. Имеем

$$A(t_1)=K(t_1,t_1)=t_1e^{t_1},$$

$$A(t_1,t_2)=\begin{vmatrix}K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2)\\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2}\\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2}\end{vmatrix}=0;$$

аналогично найдем: $A(t_1,...,t_n)=0$ при $n\geq 2$.

Поэтому

$$D(\lambda)=1-\lambda\int_0^1 A(t_1)\,dt_1=1-\lambda\int_0^1 t_1\,e^{t_1}\,dt_1=1-\lambda.$$

В силу теоремы данное уравнение разрешимо при $\lambda\neq 1$. Аналогично найдем:

$$B(x,t)=x\,e^{t},$$

$$B(x,t,t_1)=\begin{vmatrix}K(x,t) & K(x,t_1)\\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x\,e^{t} & x\,e^{t_1}\\ t_1\,e^{t} & t_1\,e^{t_1}\end{vmatrix}=0,$$

$B(x,t,t_1,...,t_n)=0$ при $n\geq 1$.

поэтому

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)=xe^{t}.$$

Таким образом, получаем

$$R(x,t;\lambda)=\frac{x\,e^{t}}{1-\lambda}.$$

Согласно формуле (1.26), решение данного уравнения имеет вид

$$\varphi(x)=e^{-x}+\lambda\int_0^1\frac{x\,e^{t}}{1-\lambda}\times e^{-t}\,dt=e^{-x}+\frac{\lambda}{1-\lambda}x.$$

С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)\,dt.$$

Решение. Имеем $K_1(x,t)=K(x,t)=e^{x^2-t^2}$, $f(x)=e^{x^2}$, $\lambda=1$. Согласно формулам (1.28),

$$K_2(x,t)=\int_t^x K(x,z)\,K_1(z,t)\,dz=\int_t^x e^{x^2-z^2}\cdot e^{z^2-t^2}dz=e^{x^2-t^2}\int_t^x dz=e^{x^2-t^2}(x-t),$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x e^{x^2-z^2}\cdot K_2(z,t)\,dz=\int_t^x e^{x^2-z^2}\cdot e^{z^2-t^2}(z-t)\,dz=e^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^2}{2},$$

....

$$K_n(x,t)=\int_t^x e^{x^2-z^2}\cdot K_{n-1}(z,t)\,dz=\int_t^x e^{x^2-z^2}\cdot e^{z^2-t^2}\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz=e^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Подстановка в формулу (1.29) для резольвенты дает

$$R(x,t;\lambda)=e^{x^2-t^2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}=e^{x^2-t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda(x-t)\right]^n}{n!}=e^{x^2-t^2}\cdot e^{\lambda(x-t)},$$

при $\lambda=1$ получим $R(x,t;1)=e^{x-t}\cdot e^{x^2-t^2}$.

Согласно формуле (1.30), решением данного интегрального уравнения является функция

$$\varphi(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x-t}\cdot e^{x^2-t^2}\cdot e^{t^2}dt=e^{x+x^2}.$$

1.3.3 Реккурентные соотношения.

Вычисление по формулам (1.71) и (1.72)

$$B_n(x,t)=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1)\ldots k(x,t_n) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1)\ldots k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t) & k(t_2,t_2)\ldots k(t_2,t_n) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k(t_n,t) & k(t_n,t_1)\ldots k(t_n,t_n) \end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n$$

(1.78)

$$C_n=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2)\ldots k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2)\ldots k(t_2,t_n) \\ k(t_3,t_1) & k(t_3,t_2)\ldots k(t_3,t_n) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2)\ldots k(t_n,t_n) \end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n$$

(1.79)

коэффициентов $B_n(x,t)$ и C_n практически возможно лишь в очень редких случаях, но из этих формул получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$B_n(x,t)=C_nk(x,t)-n\int_a^b k(x,s)B_{n-1}(s,t)ds$$

(1.80)

$$C_n=\int_a^b B_{n-1}(s,s)ds$$

(1.81)

Зная, что коэффициент $C_0=1$ и $B_0(x,t)=k(x,t)$ по формулам (1.80) и (1.81) найдем последовательно C_1, $B_1(x,t)$, C_2, $B_2(x,t)$, C_3 и т.д.

1.3.4 Пример нахождения резольвенты ядра с помощью реккурентных соотношений.

Пользуясь формулами (1.80) и (1.81) найти резольвенту ядра $k(x,t)=x-2t$, где $0\le x\le 1$, $0\le t\le 1$.

Решение. Имеем $C_0=1$, $B_0(x,t)=x-2t$. Пользуясь формулой (1.75) найдем:

$$C_1=\int_0^1(-s)ds=-\frac{1}{2}$$

По формуле (1.80) получим:

$$B_1(x,y)=\frac{x-2t}{3}-\int_0^1(x-2s)(s-2t)ds=-x-t+2xt+\frac{2}{3}$$

Далее будем иметь:

$$C_2=\int_0^1(-2s+2s^2+\frac{2}{3})ds=\frac{1}{3}$$

$$B_2(x,y)=\frac{x-2t}{3}-2\int_0^1(x-2s)(-s-t+2st+\frac{2}{3})ds=0$$

$C_3=C_4=\ldots=0$, $B_3(x, t)=B4(x, t)=\ldots=0$

Следовательно,

$$D(\lambda)=1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6};\, D(x,t;\lambda)=x-2t+(x+t-2xt-\frac{2}{3})\lambda$$

Резольвента данного ядра будет:

$$R(x,t;\lambda)=\frac{x-2t+(x+t-2xt-\frac{2}{3})}{1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}}$$

2 РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА.

2.1Классификация задач, приводящих к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

2.1.1 Задачи приводящие к уравнениям Фредгольма первого рода.

Многие задачи математической физики приводят к линейным интегральным уравнениям. Рассмотрим некоторые примеры.

К интегральному уравнению Фредгольма первого рода приводит задача восстановления размытого изображения. Пусть при фотографировании объекта его изображение было сфокусировано не в плоскости эмульсионного слоя пленки, а на некотором малом расстоянии *h* от него (рисунок 1.). Обозначим: (A) — плоскость фотопленки; (B) плоскость изображения объекта; R радиус объектива; f расстояние от линзы до плоскости (B); x и y координаты в плоскостях (A) и (B); *v(x,y)* — освещенность в плоскости (A); *u(x,y)* — освещенность в плоскости (B); S — поверхность фотокадра. Тогда в рамках геометрической оптики получаем, что пучок лучей, сходящийся в точку на плоскости (B), в плоскости (.A) равномерно осветит круг Ω_r радиуса $t = Rh/f$.

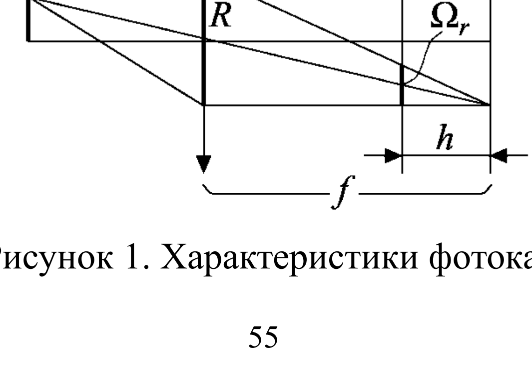

Рисунок 1. Характеристики фотокадра

Аналитически эта ситуация описывается так: сходящемуся в точку с координатами (ξ, η;) на плоскости (В) световому пучку, несущему единичный световой поток, соответствует освещенность $u_0(x.y) = \delta(x\text{-}\xi,\ y\text{-}\eta)$; при этом в плоскости (А) получим освещенность $v_0(x,y)=F[(x\text{-}\xi)^2+(y\text{-}\eta)^2]$. Здесь δ — дельта-функция,

$$f(\alpha)=\begin{cases}0, \text{если} \quad \alpha > r^2\\ \dfrac{1}{\pi r^2}, \text{если} \quad r^2 > \alpha > 0\end{cases}$$

отсюда, распределенной освещенности

$$u(x,y)=\int_S \delta(x-\xi, y-\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

в плоскости (В) соответствует освещенность в плоскости (А):

$$v(x,y)=\int_S F\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]u(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

Это соотношение является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, определяющим u(x,y) при заданной v(x,y). Измеряя на фотографии значение функции *v(x, y)* и решая полученное интегральное уравнение, можно восстанавливать размытое изображение *u(x,y)* (рис 2.).

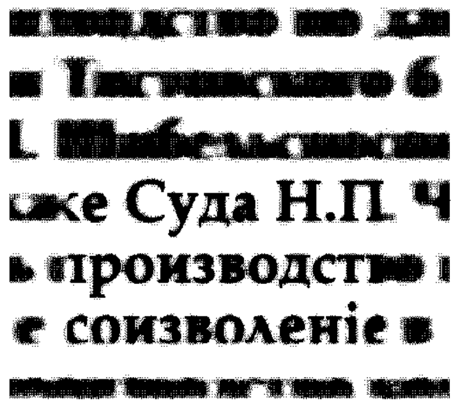

Рисунок 2 Размытое изображение.

2.1.2 Задачи приводящие к уравнениям Фредгольма второго рода

К однородным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода приводят задачи о собственных колебаниях систем, т.е. колебаниях при отсутствии внешней силы. Рассмотрим задачу о малых поперечных свободных колебаниях струны переменной плотности $p(x)$. Пусть концы струны закреплены. Тогда для поперечных отклонений струны $u(x,t)$ выполнено:

$$P(x)u_{tt} = A^2u_{xx}\ ,\ u(0,\ t)=0\ ,\ u(l,\ t)=0. \qquad (2.1)$$

Поставим задачу определить профиль струны при свободных гармонических колебаниях, т.е. будем искать решения вида $u(x,t)= y(x)sin(\omega t)$. Значения ω, при которых существует решение такого типа, называются собственными частотами колебаний струны.

Для *y(x)* из (1) получаем задачу

$$y'' = -\frac{\omega^2}{A^2}$$

, y(0)=0 , y(l)=0. (2.2)

Рассматривая правую часть уравнения (2) как неоднородность, записываем решение задачи (2) в форме

$$y(x) = -\frac{\omega^2}{A^2}\int_0^l G(x,s)\,p(s)\,y(s)\,ds$$

(2.3)

где G(x,s) — функция Грина. Таким образом, поставленная задача свелась к определению тех значений ω, при которых существует нетривиальное решение однородного уравнения Фредгольма второго рода (3), и нахождению этих решений.

2.1.3 Интегрально-дифференциально уравнения

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) + \lambda\int_a^b K(x,s)\,f_1(s,y(s))\,ds \,(2.4)$$

с начальным условием $(x)¿_{x=x_0} = y_0(2.4')$

Справедлива теорема: Пусть $K(x,s)$ непрерывна в квадрате $H\{a \le x, s \le b\}$, функции $f(x,y), f_1(x,y)$ непрерывны в прямоугольнике $R\begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{Bmatrix}$. Пусть $|f(x,y)| \le M_1, |f_1(x,y)| \le M_2,$ $|K(x,s)|M_3$ соответственно в областях Q, H и $M = max\{M_1, M_2\}$. Пусть далее $f(x,y), f_1(x,y)$ удовлетворяют условию Липшица в прямоугольнике

$$R\begin{Bmatrix} a \le x \le b, \\ c - \frac{1}{1-\tau}\left[1 - |\lambda| M_3(b-a)\right](b-a) \le y \le d + ¿ + \frac{1}{1-\tau} M\left[1 + |\lambda| M_3(b-a)\right](b-a) \end{Bmatrix}$$

$$|f(x,y_2) - f(x_1 y_1)| \le N_1 |y_2 - y_1|$$

$$\left|f_1(x_1 y_2)-f_1(x_1 y_1)\right|\le N_2\left|y_2-y_1\right| \tag{2.5}$$

$$0<\tau<1, N=max\{N_1, N_2\}$$

Тогда через каждую точку области R проходит единственная интегральная кривая уравнения (1).

Доказательство. Для этого применим метод последовательного приближения. Пусть $A(x_0, y_0)$ - произвольная точка области Р. От интегро-дифференциального уравнения (1) с начальным условием ($1'$) перейдем к интегральному уравнению

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y)\,ds+\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s) f_1(s,y(s))\,dsdt \, (2.6)$$

Построим функцию

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)\,ds+\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s) f_1(s,y_0(s))\,dsdt$$

Она непрерывна на $[a,b]$, отражается при $x=x_0$ в y_0 и ее график не выходит из прямоугольника R, т.к.

$$\left|y_1(x)-y_0\right|\le\int_{x_0}^{x}\left|f(s,y_0)\right|ds+|\lambda|\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b}|K(t,s)|\left|f_1(s,y_0)\right|dsdt\le$$

$$\le M\left|x-x_0\right|+|\lambda| MM_3(b-a)\left|x-x_0\right|\le M\left[1+|\lambda| M_3(b-a)\right](b-a)\equiv\alpha .$$

далее

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_1(s))\,ds+\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s) f_1(s,y_1(s))\,dsdt$$

В силу отмеченных свойств функции $y_1(x)$, интегралы в правой части существуют, а функция $y_2(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и ее график невыходит из прямоугольника Р, т.к.

$$\left|f(s,y_1(s))-f(s,y_0)\right|ds+|\lambda|\int_{x_0}^{x}|K(t,s)|\left|f_2(s,y_1(s))\right|-¿$$

$$\left|y_2(x)-y_1(x)\right|\le\int_{x_0}^{x} ¿$$

$$-f_1(s,y_0)\Big|dsdt\le N\left|x-x_0\right|\max_{x\in[a,b]}\left|y_1(x)-y_0\right|+¿$$

$$+\left|\lambda_0\right| M_3 N(b-a)\left|x-x_0\right|\max_{x\in[a,b]}\left|y_1(x)-y_0\right|\le N\left[1+|\lambda| M_3(b-a)\right](b-a)\alpha$$

$$¿\alpha\tau$$

,

$$\left|y_2(x)-y_0\right|\le\left|y_2(x)-y_1(x)\right|+\left|y_1(x)-y_0\right|\le\alpha\tau+\alpha=\alpha(\tau+1)$$

Функция

$$y_3(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds+\lambda\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{a}^{b} K(t,s) f_1(s, y_2(s))dsdt$$

непрерывна на $[a,b]$ и ее график не выходит из прямоугольника Р, т.к.

$$|y_3(x)-y_1(x)|\le\int\limits_{x_0}^{x}|f_1(s,y_2(s))-f(s,y_0)|_{dx}+|\lambda|\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{a}^{b}|K(x_0 t)||f_1(s,y_2(s))-f_1(s,y_0)|dsdt\le N|x-x_0|max|y_2(x$$

$$|y_3(x)-y_0|\le|y_3(x)-y_1(x)|+|y_1(x)-y_0|\le$$

$$\le\alpha\tau(\tau+1)+\alpha=\alpha(\tau^2+\tau+1)\le\alpha(\tau^2+\tau+1)$$

Пусть $|y_n(x)-y_0|\le\alpha(\tau^{n-1}+\tau^{n-2}+\ldots+\tau+1)$,

тогда

$$|f(s,y_n(s))-f(s,y_0(s))|ds+\text{¿}$$

$$|y_{n+1}(x)-y_0(x)|\le\int\limits_{x_0}^{x}\text{¿}$$

$$+|\lambda|\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{a}^{b}|K(t,s)||f_1(s,y_n(s))-f_1(s,y_0)|dsdt\le$$

$$\le N|x-x_0|max|y_n(x)-y_0|+|\lambda|N M_3(b-a)|x-x_0|\cdot$$

$$\cdot max|y_n(x)-y_0|\le N[1+|\lambda|M_3(b-a)](b-a)\cdot max|y_n(x)-y_0|\le$$

$$\le\alpha\tau(\tau^{n-1}+\tau^{n-2}+\ldots+\tau+1),$$

$$|y_{n+1}(x)-y_0|\le|y_{n+1}(x)-y_1(x)|+|y_1(x)-y_0|\le\alpha(\tau^n+\tau^{n-1}+\ldots+1)$$

Далее из этих оценок вытекает, что $z=N[1+|\lambda|M_3(b-a)](b-a)$ будет меньше чем единица при достаточно малых λ и при любых *n* справедлива оценка

$$|y_{n+1}(x)-y_0|<\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

т.е. все члены последовательности

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x),\ldots(2.7)$$

Принадлежат прямоугольнику Р. Покажем теперь, что последовательность (2.7) сходится равномерно на $[a,b]$.

В самом деле, рассмотрим ряд

$$y_0+(y_1(x)-y_0)+(y_2(x)-y_1(x))+(y_3(x)-y_2(x))+\ldots$$

$$\ldots+(y_{n+1}(x)-y_n(x))+\ldots(2.8)$$

Последовательности частных сумм каждого является последовательности (2.7). Оценил каждый член ряда (2.8).

$$\left|y_1(x)-y_0(x)\right|\le\alpha$$

$$\left|y_2(x)-y_1(x)\right|\le\alpha\cdot\tau$$

$$\left|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))\right|ds+¿$$

$$\left|y_3(x)-y_2(x)\right|\le\int_{x_0}^{x}¿$$

$$+|\lambda|\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b}|K(t,s)|\left|f_1(s,y_2(s))-f_1(s,y_1(s))\right|dsdt\le$$

$$\le N|x-x_0|max\left|y_2(x)-y_1(x)\right|+|\lambda|M_3N(b-a)\left|\left|x-x_0\right|max\left|y_2(x)-y_1(x)\right|\right|\le$$

$$\le N\left[1+|\lambda|M_3(b-a)\right](b-a)\,max\left|y_2(x)-y_1(x)\right|\le\alpha\tau^2.$$

Пусть $\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right|\le\alpha\tau^{n-1}$.

Тогда

$$\left|f(s,y_n(s))-f(s,y_{n-1}(s))\right|ds+¿$$

$$\left|y_{n+1}(x)-y_n(x)\right|\le\int_{x_0}^{x}¿$$

$$+|\lambda|\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b}|K(t,s)|\left|f_1(s,y_n(s))-f_1(s,y_{n-1}(s))\right|dsdt\le$$

$$\le N|x-x_0|max\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right|+|\lambda|M_3N(b-a)|x-x_0|max\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right|\le$$

$$\le N\left[1+|\lambda|M_3(b-a)\right](b-a)\,max\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right|\le\alpha\tau^n$$

Следовательно, члены ряда (2.8) по модулю не превышает соответствующих членов сходящегося ряда

$$\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\tau^{n-1}(2.9)$$

Ряд (2.5) на $[a,b]$ сходится абсолютно и равномерно, и его сумма $Y(x)$ есть непрерывная функция на $[a,b]$ функция, график которой не выходит из прямоугольника P. Следовательно, интегралы имеют смысл.

$$\int_{x_0}^{x}f(s,Y(s))ds,\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b}K(t,s)f_1(s,Y(s))dsdt$$

Для доказательства того, что $Y(x)$ есть решение уравнения (2.3), зададим $\varepsilon>0$

И подберем $m_0>0$ такое, чтобы для всех $m>m_0$ выполнялось неравенство $\left|y_m(x)-Y(x)\right|<\varepsilon$

Рассмотрим разность

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_m(s))ds+\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s)f_1(s,y_m(s))dsdt-\int_{x_0}^{x} f(s,Y(s))ds-\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s)f_1(s,Y(s))dsdt\right|$$

$$\left|f(s,y_m(s))-f(s,Y(s))\right|ds+¿|\lambda|\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b}|K(t,s)|\left|f_1(s,y_m(s))-f_1(s,Y(s))\right|dsdt\leq$$

$$\leq\int_{x_0}^{x} ¿$$

$$\leq N\left|x-x_0\right|\varepsilon+|\lambda|M_3N(b-a)\left|x-x_0\right|\varepsilon\leq$$

$$\leq N\left[1+|\lambda|M_3(b-a)\right](b-a)\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\left[\int_{x_0}^{x} f(s,y_m(s)ds)+\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s)f_1(s,y_m(s))dsdt\right]\equiv$$

$$\equiv\int_{x_0}^{x} f(s,Y(s))ds+\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s)f_1(s,Y(s))dsdt.$$

Переходя в тождество

$$y_{m+1}=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_m(s))ds+\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s)f_1(s,y_m(s))dsdt$$

Пределу при $m\to\infty$ имеем

$$Y(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,Y(s))ds+\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s)f_1(s,Y(s))dsdt.$$

Значит, Y(x) есть решение уравнения (2.3).
Докажем, что оно единственно. Допустим, что есть решения уравнения (2.3): Y(x) и $\Psi(x)$ причем они неравны:

$$max\left|Y(x)-\Psi(x)\right|=\Theta\neq 0.$$

Тогда

$$Y(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,Y(s))ds+\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s)f_1(s,Y(s))dsdt$$

$$\Psi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\Psi(s))ds+\lambda\int_{x_0}^{x}\int_{a}^{b} K(t,s)f_1(s,\Psi(s))dsdt(2.10)$$

Отсюда

$$\left|Y(s)-\Psi(s)\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|f(s,Y(s))-f(s,\Psi(s))\right| ds + ¿$$

$s, Y(s) - f_1(s, \Psi(s))$

$f_1 ¿ dsdt \le$

$|K(t,s)| ¿$

$+|\lambda| \int_{x_0}^{x} ¿$

$$\le N\left|x-x_0\right| max\left|Y(x)-\Psi(x)\right| + |\lambda| M_3 N(b-a)\left|x-x_0\right| max\left|Y(x)-\Psi(x)\right| \le$$

$\le N\left[1+|\lambda| M_3 (b-a)\right]\Theta < \Theta$, т.е. $\Theta < \Theta$

Полученное противоречие доказывает единственность решения. Отсюда при $\lambda \to 0$ или при $K(x,t)=0$. Из доказанной теоремы мы имеем известную теорему Пикара существования и единственности решения для дифференциальных уравнений

2.2 Примеры решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

2.2.1Задача о собственных колебаниях систем.

К однородным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода приводят задачи о собственных колебаниях систем, т.е. колебаниях при отсутствии внешней силы.

Например, задача о малых поперечных свободных колебаниях струны переменной плотности $\rho(x)$. Пусть концы струны закреплены. Тогда для поперечных отклонений струны $u(x,t)$ выполнено:

$$\rho(x)u_{tt} = \left|A^2 u_{xx}, u(0,t)\right| = \left|0, u(l,t) = 0.\right. \tag{2.11}$$

Поставим задачу определить профиль струны при свободных гармонических колебаниях, т.е. будем искать решения вида $u(x,t) = y(x)\sin \omega t.$

Значения $\omega,$ при которых существует решение такого типа, называются собственными частотами колебаний струны.

Для $y(x)$ из (1.10) получаем задачу

$$y'' = -\frac{\omega^2}{A^2}\rho y, y(0) = 0, y(l) = 0. \tag{2.12}$$

Рассматривая правую часть уравнения (2.12) как неоднородность, записываем решение задачи (2.12) в форме

$$y(x) = -\frac{\omega^2}{A^2}\int_0^l G(x,s)\rho(s)y(s)ds, \tag{2.13}$$

где $G(x,s)$ – функция Грина. Таким образом, поставленная задача свелась к определению тех значений $\omega,$ при которых существует нетривиальное решение однородного уравнения Фредгольма второго рода (2.13) и нахождению этих решений.

Пусть теперь струна находится под воздействием внешней нагрузки, меняющейся по гармоническому закону $F(x,t) = B(x)\sin\omega t,$ где ω – заданный параметр, $B(x)$ – заданная амплитуда. Тогда $\rho(x)u_{tt} = A^2u_{xx} - B(x)\sin\omega t, u(0,t) = 0, u(l,t).$

Будем искать решение в виде $u(x,t) = y(x)\sin\omega t.$ Для функции $y(x)$ получим интегральное уравнение

$$y(x) = -\frac{\omega^2}{A^2}\int_0^l G(x,s)\rho(s)y(s)ds + f(x), \tag{2.14}$$

где $f(x) = \frac{1}{A^2}\int_0^l G(x,s)B(s)ds$ – известная функция. Интегральное уравнение (2.14) является неоднородным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Рассмотрим еще один пример, приводящий к интегральному уравнению того же типа.

В электростатике, гидростатике и многих других разделах физики стационарные по времени поля в отсутствие источников описываются уравнением Лапласа. При этом часто ставится задача определения функции $u,$ удовлетворяющей соотношениям

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, \\ u\big|_{M\in\Sigma} = \varphi(M), \end{cases} M \in G, \tag{2.15}$$

где G – область пространства, ограниченная поверхностью Σ; M – точка, принадлежащая G; $\varphi(M)$ – заданная функция; $u(M)$ – искомое решение.

В курсах математической физики показано, что решение задачи (2.15) дается выражением

$$u(M) = \int_\Sigma \frac{\cos\psi_{MP}}{R_{MP}^2}\nu(P)d\sigma_P, \quad M \in G, \tag{2.16}$$

Где $P \in \Sigma$; R_{MP} – расстояние между точками M и P; $d\sigma_P$ – элемент поверхности Σ, содержащий точку P; ψ_{MP} – угол между вектором $\overrightarrow{MP}$ и нормалью к поверхности Σ, восстановленной из точки P внутрь области G; $\nu(P)$ – некоторая неизвестная функция, которую можно найти из следующего неоднородного уравнения Фредгольма второго рода:

$$\nu(M) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{\cos\psi_{MP}}{R_{MP}^2}\nu(P)d\sigma_P + \varphi(M), \quad M \in \Sigma. \tag{2.17}$$

Определение искомой функции $u(M)$ сводится к решению интегрального уравнения (2.15) с использованием выражения (2.16)
Для интегральных уравнений Фредгольма имеет место следующая теорема о разрешимости уравнения (1.26).

2.2.2 Примеры решения интегрального уравнения методом последовательных приближений.

Мы докажем существование уравнения

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b \kappa(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.18}$$

(при достаточно малых |λ|) методом последовательных приближений.

Для простоты выкладок будем предполагать, что:

1 ядро k(x, s) непрерывно в квадрате a≤x, s≤b; тогда оно ограничено некоторой константой A, |k|≤A.
2 функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], следовательно, она ограничена на этом отрезке некоторой константой B, |f|≤B.

Построим последовательность функций
$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$
по следующему правилу:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \kappa(x,s)\varphi_0(s)ds \tag{2.19}$$

где $\varphi_0(s)$ – произвольная фиксированная непрерывная функция.

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \kappa(x,s)\varphi_1(s)ds \tag{2.20}$$

……………………………………

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \kappa(x,s)\varphi_n(s)ds$$

(2.21)

…………………………………..

Теорема1. Последовательность (2.19) – (2.21) функций $\varphi_n(x)$ равномерно сходится на отрезке [a, b], к функции φ(x), являющейся решением уравнения (2.18) при $\lambda < \frac{1}{A(b-a)}$.

Доказательство:

Преобразуем формулы для получения $\varphi_n(x)$. Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования, получим:

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \kappa_1(x,s) f(s)ds + \lambda^2 \int_a^b \kappa_2(x,s)\varphi_0(s)ds$$

$$k_2(x,s) = \int_a^b \kappa_1(x,t)\kappa_1(t,s)dt$$

$K_1(x, s)=k(x, s)$,

Аналогично находим:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \kappa_1(x,s) f(s)ds + \lambda^2 \int_a^b \kappa_2(x,s) f(s)ds + \cdots$$

$$\cdots + \lambda^{n-1} \int_a^b \kappa_{n-1}(x,s) f(s)ds + \lambda^n \int_a^b \kappa_n(x,s)\varphi_0(s)ds$$

где

$$k_n(x,s) = \int_a^b \kappa_1(x,t)\kappa_{n-1}(t,s)dt$$

Предел функции $\varphi_n(x)$, если он существует, равен сумме ряда:

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \kappa_1(x,s) f(s)ds + \lambda^n \int_a^b \kappa_n(x,s) f(s)ds$$

(2.22)

Докажем равномерную сходимость ряда. Для этого оценим интегралы:

$$\int_a^b \kappa(x,s) f(s)ds$$

имеем

$$\left|k_2(x,s)\right| \le \int_a^b \left|\kappa_1(x,t)\kappa_1(t,s)\right| dt \le A^2(b-a)$$

$$\left|k_3(x,s)\right| \le \int_a^b \left|\kappa_1(x,t)\kappa_2(t,s)\right| dt \le A^3(b-a)^2$$

………………………………………………..

$$\left|k_n(x,s)\right| \le \int_a^b \left|\kappa_1(x,t)\kappa_{n-1}(t,s)\right| dt \le A^n(b-a)^{n-1}$$

поэтому

$$\left|\int_a^b \kappa(x,s) f(s) ds\right| \le A^n(b-a)^{n-1}\int_a^b \left|f(s)\right| ds \le A^n B(b-a)^n$$

следовательно, числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n B\left|\lambda\right|(b-a)^n \tag{2.23}$$

является мажорантным для ряда (2.22). Если $\lambda < \frac{1}{A(b-a)}$, то ряд (2.23) сходится. Следовательно, при таких λ ряд (2.23) сходится, а вместе с ним и последовательность функций $\varphi_n(x)$ равномерно сходится к функции $\overline{\varphi}(x)$. Эта функция является решением уравнения (1.18) В самом деле, переходя в формуле (2.21) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\overline{\varphi}(x) = \lambda\int_a^b \kappa\ (x,s)\overline{\varphi}(s) ds + f(x)$$

Переход к пределу под знаком интеграла здесь закончен, так как последовательность сходится равномерно.

Заметим, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \overline{\varphi}(x)$ не зависит от выбора функции $\varphi_0(x)$(нулевого приближения). В самом деле, если существует еще одно решение $\psi(x)$ уравнения (2.18), то, полагая в процедуре построения функций (2.19) – (2.21) $\varphi_0(x)= \psi(x)$, получим

$\varphi_1(x)= \psi(x)$, $\varphi_2(x)= \psi(x)$,…, $\varphi_n(x)= \psi(x)$…

Эта последовательность имеет пределом функцию $\overline{\varphi}(x)$. Но вместе с тем очевидно:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\psi(x)$$

Таким образом, $\overline{\varphi}(x)$ =ψ(x). Теорема доказана.

Поскольку ряд (2.24) сходится при $\lambda < \frac{1}{A(b-a)}$, то при таких же λ сходится и ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n B|\lambda|^{n-1}(b-a)^{n-1}$$

но этот ряд является мажорантным для ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n k_n(x,s) \tag{2.25}$$

Следовательно, ряд (2.25) сходится равномерно. Поэтому ряд (2.23) можно записать в виде:

$$\overline{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\left\{\sum_{n-1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x,s)\right\}f(s)ds$$

Или

$$\overline{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)ds \tag{2.26}$$

где функция

$$R(x,s,\lambda)=\sum_{n-1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x,s)$$

называется резольвентой уравнения (1).

Пример**.** Решить интегральное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_0^1 xy(t)tdt=f(x)$$

, 0≤x≤1

методом последовательных приближений. Здесь *k(x, t)=xt, a=0, b=1.*

Решение. Последовательно найдем

$$k_2(x,t)=\int_0^1(xz)(zt)dz=\frac{xt}{3}$$

K_1(x, t)=xt,

$$k_3(x,t)=\frac{1}{3}\int_0^1(xz)(zt)dz=\frac{xt}{3^2},\ldots,k_n(x,t)=\frac{xt}{3^{n-1}}$$

Согласно формуле

$$R(x,s,\lambda)=\sum_{n-1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x,s)$$

Получим

$$R(x,s,\lambda)=\sum_{n-1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x,s)=xt\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1}=\frac{3xt}{3-\lambda},$$

причем $|\lambda|<3$ и в силу формулы:

$$\overline{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)ds$$

решение данного интегрального уравнения запишется в форме:

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{3xt}{3-\lambda}f(t)dt$$

, $0\le x\le 1$, $\lambda\ne 3$

В частности, при $f(x)=x$ получим

$$y(x)=\frac{3x}{3-\lambda}$$

, $0\le x\le 1$, $\lambda\ne 3$

Пример**.** Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=1+\int_0^x\varphi(t)\ dt,$$

взяв $\varphi_0(x)\equiv 0$.

Решение. Так как $\varphi_0(x)\equiv 0$, то $\varphi_1(x)=1$.

Далее –

$$\varphi_2(x)=1+\int_0^x 1\ dt=1+x,$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_4(x) = 1 + \int_0^x (1+t+\frac{t^2}{2})\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Таким образом, $\varphi_n(x)$ есть n-я частичная сумма ряда

Отсюда следует, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ к функции e^x. Значит, функция $\varphi(x) = e^x$ есть решение данного интегрального уравнения.

Теорема (альтернатива Фредгольма). Либо уравнение

$$\phi(x) - \int_a^b K(t,x)\, \phi(t)\, dt = 0 \tag{2.26}$$

имеет только нулевое решение, и тогда уравнение

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{2.27}$$

имеет единственное решение при любой непрерывной функции $f(x)$; либо уравнение (2.26) имеет конечное число линейно независимых решений

$$\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x), \tag{2.28}$$

и тогда уравнение (2.27) разрешимо только при условии, что свободный член $f(x)$ ортогонален всем решениям (2.28):

$$f \perp \phi_k, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Здесь ортогональность $f \perp g$ означает выполнение равенства

$$\int_a^b f\ g\ dx = 0.$$

Пример. Показать, что функция $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ является решением интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\ \varphi(t)\ dt = \frac{x}{2},$$

где ядро имеет вид

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, \ 0 \le x \le t, \\ \dfrac{t(2-x)}{2}, \ t \le x \le 1. \end{cases}$$

Решение. Левую часть уравнения запишем в виде

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + \int_x^1 K(x,t)\varphi(t)dt\right\} =$$

$$= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\varphi(t)dt + \int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}\varphi(t)dt\right\}.$$

Подставляя в полученное выражение вместо $\varphi(x)$ функцию $\sin\frac{\pi x}{2}$, будем иметь

$$\frac{\sin\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\int_0^x t\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt+x\int_x^1(2-t)\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt\right\}=$$

$$=\frac{\sin\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\left(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}+\right.$$

$$\left.+x\left(-\frac{2-t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\Bigg|_{t=x}^{t=1}\right\}=\frac{x}{2}.$$

Итак, получаем $\frac{x}{2}\equiv\frac{x}{2}$, а это означает, что $\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ есть решение данного интегрального уравнения.

Пример. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \sin\ \ln x\ \ \varphi(t)\ dt=2x.$$

Решение. Имеем $\varphi(x)=C\ \lambda\ \sin\ \ln\ x+2x$, где $C=\int_0^1\varphi(t)\ dt$. Подставляя выражение $\varphi(t)$ в интеграл, найдем

$$C=C\lambda\int_0^1 \sin\ \ln t\ \ dt+1,$$

откуда $C\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)=1$.

Если $\lambda \neq -2$, то данное уравнение имеет единственное решение

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda}{2+\lambda}\sin\ \ln x + 2x$$,

а соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \sin\ \ln x\ \ \varphi(t)\ dt = 0$$

только нулевое решение: $\varphi(x) \equiv 0$.

Если же $\lambda = -2$, то данное уравнение не имеет решений, т.к. правая часть $f(x) = 2x$ не ортогональна к функции $\sin\ \ln\ x$; однородное уравнение имеет бесконечное множество решений, т.к. из уравнения для определения C: $0 \times C = 0$ следует, что C – произвольная постоянная; все эти решения даются формулой

$$\varphi(x) = \tilde{C}\lambda\ \sin\ \ln\ x\ \ (\tilde{C} = -2C)$$.

Приближенное решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\ \varphi(t)\ dt = f(x) \tag{2.29}$$

по методу Галеркина находится следующим образом. Выбираем координатную систему на $[a,b]$, т.е. систему функций $\{v_n(x)\}$, такую, что при любом n функции $v_1(x),\dots,v_n(x)$ линейно независимы и множество линейных комбинаций этих функций плотно расположено в множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[a,b]$, равных нулю на концах отрезка. Будем искать приближенное решение $\varphi_n(x)$ уравнения (2.29) в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x). \tag{2.30}$$

Коэффициенты $c_k \ (k=1,2,...,n)$ определяются из системы Галеркина:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = b_1, \\ .... \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + ... + a_{nn}c_n = b_n, \end{cases} \tag{2.31}$$

где a_{ij}, b_i вычисляются по формулам

$$a_{ij} = \int_a^b v_i(v_j - w_j)\, dx, \qquad w_j(x) = \int_a^b K(x,t)\, v_j(t)\, dt,$$

$$b_i = \int_a^b f\, v_i\, dx, \qquad i, j = 1,...,n.$$

Решая систему Галеркина (2.31), получим приближенное решение $\varphi = \varphi_n$ уравнения (2.29) по формуле (2.30). Теоретический анализ показывает, что при большом n оно близко к точному решению.

Пример. Методом Галеркина построить приближенное решение уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \int_{-1}^{1} (x\,t + x^2)\, \varphi(t)\, dt = 1.$$

Решение. Имеем $K(x,t) = xt + x^2,\ f(x) = 1.$ В качестве координатной системы на $[-1,\ 1]$ примем систему многочленов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \times n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right],\ n = 0,1,2,... .$$

Приближенное решение $\varphi_n(x)$ уравнения будем искать в виде

$$\varphi_3(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + c_3 v_3(x)$$,

где $v_1(x) = P_0(x) = 1$, $v_2(x) = P_1(x) = x$, $v_1(x) = P_2(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2}.$

Составим систему Галеркина для определения коэффициентов $c_k \ (k = 1, 2, 3)$.

$$a_{11} = \int_{-1}^{1} v_1(v_1 - w_1)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\left(1 - \int_{-1}^{1}\left(xt + x^2\right)1\,dt\right)dx = \frac{2}{3},$$

$$a_{12} = \int_{-1}^{1} v_1(v_2 - w_2)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\left(x - \int_{-1}^{1}\left(xt + x^2\right)t\,dt\right)dx = 0,$$

$$a_{13} = \int_{-1}^{1} v_1(v_3 - w_3)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\left(\frac{3x^2 - 1}{2} - \int_{-1}^{1}\left(xt + x^2\right)\left(\frac{3t^2 - 1}{2}\right)dt\right)dx = 0.$$

Аналогично получаем $a_{21} = 0$, $a_{22} = \dfrac{2}{9}$, $a_{23} = 0$, $a_{31} = -\dfrac{8}{15}$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = \dfrac{2}{5}$, $b_1 = 2$, $b_2 = b_3 = 0$.

Система Галеркина принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}c_1 = 2, \\ \dfrac{2}{9}c_2 = 0, \\ -\dfrac{8}{15}c_1 + \dfrac{2}{5}c_3 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $(c_1, c_2, c_3) = (3, 0, 4)$.

Таким образом, решение данного интегрального уравнения имеет вид

$$\varphi(x)=\varphi_3(x)=3\cdot 1+0\cdot x+4\cdot\frac{3x^2-1}{2}=6x^2+1.$$

Теорема Пикара.

Если в уравнении

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

при

$$y(x_0)=y_0\ , \qquad (2.32)$$

1. $f(x,y)$ определена и непрерывна в области

$$D\begin{cases}|x-x_0|\le a\\ |y-y_0|\le b\end{cases}$$

и, следовательно, ограничена в области D, т. е. $f(x,y)\le H$.

2. Удовлетворяет в области D условию Липшица по y:

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L\,|y_1-y_2|$, ($L-const>0$

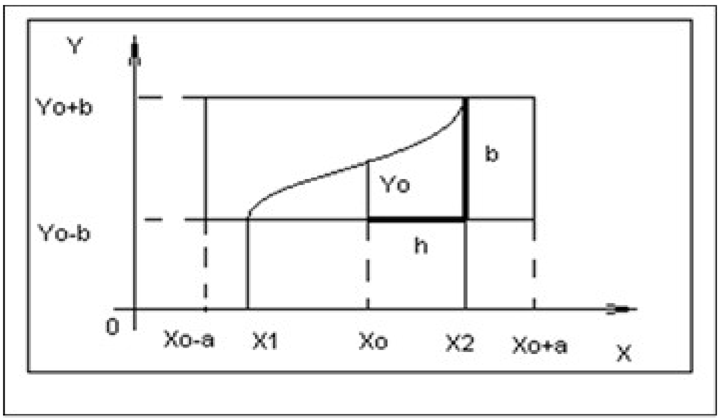

Рисунок 3. Пределы области D

$$,\ (x,y_1),(x,y_2)\in D$$

то существует единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее условию
0
$x¿$
¿
$y¿$, а в промежутке $|x-x_0|\le h$,

где

$$h = \min(a, \frac{b}{M})$$

и решение это определено и непрерывно дифференцируемо для x из отрезка $|x-x_0|\le h$ и не выходит за пределы области D при этих значениях x (рисунок 3).

Поясним некоторые условия теоремы Пикара.

$$tg\varphi = M = \frac{b}{h} \Rightarrow h = \frac{b}{M}$$

$$h = \min(a, \frac{b}{M})$$

$$\max(tg\varphi) = M$$

1 На практике условие Липшица заменяется

$$\frac{\partial f}{\partial y} \le L$$

Из этого условия следует условие Липшица.

$$| f(x,y_1) - f(x,y_2) | = | f_y^{/}(x,\xi) || y_1 - y_2 | \le (x,\xi) \in D \le L | y_1 - y_2 |$$

Обратно, из условия Липшица не следует условие.

$$\frac{\partial f}{\partial y} \le L$$

Примером может служить функция $f(x,y)=|y|$. Производная Не принадлежит в ($x_0, 0¿$.

Доказательство:

Предположим, что существует решение $y = y(x)$ с условием $\begin{matrix} x_0 = y_0 \\ y¿ \end{matrix}$.

$$y(x) = y_o + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx) \tag{2.33}$$

Тогда уравнение (2.32) и (2.33) равносильны. Решение (2.32) является решением (2.33).

Если найдено решение интегрального уравнения (2.33), тем самым найдено решение уравнения (2.32).

Доказывать существование и единственность решения уравнения (2.32) при заданных условиях будем методом приближений.

За нулевые приближения возьмём

$$y(x_0) = y_o,$$

$$y_1(x) = y_o + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$$

$$y_2(x) = y_o + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx \tag{2.34}$$

$$y_k(x) = y_o + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{k-1}(x))dx$$

1. Покажем, что все члены функциональной последовательности (2.34) определены и непрерывны на отрезке $|x - x_0| \le h$ и не выходят за пределы области D.

$y_1(x)$ - определена и непрерывна,

Предположим, что $y_{k-1}(x)$ - определена и непрерывна на промежутка

$|x-x_0|\le h$

$$y_k(x) = y_o + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{k-1}(x))dx$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y_{k-1}(x))dx$$

даже дифференцируемая функция (интеграл с верхним переменным пределом).

$$| y_n(x) - y_o | = \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx \le \left| \int_{x_0}^{x} | f(x, y_{n-1}(x)) | dx \right| \le M \mid x - x_0 \mid \le b$$

Таким образом, все члены последовательности (2.34) определены и непрерывны в промежутках $|x-x_0|\le h$ и не выходят при этих значениях за пределы области D.

Докажем равномерную сходимость функциональной последовательности (2.34) в промежутке $|x-x_0|\le R$. Вместо (2.34) будем рассматривать функциональный ряд:

$$y_0 + (y_1(x) - y_0(x)) + (y_2(x) - y_1(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \ldots =$$

$$= y_0 + \sum_{n=1}^{oo} (y_n(x) - y_{n-1}(x)) \qquad (2.35)$$

Сходимость последовательности (2.34) равносильна сходимости ряда (2.35), так как частные суммы ряда (2.35) являются $y_n(x)$.

Оценим разность

$$| y\ (x) - y_0(x) | = \int_{x_0}^{x} (f(x, y_1(x) - f(x, y_0))dx) \le \left| \int_{x_0}^{x} | f(x, y_1) - f(x, y_0) | dx \right| \le$$

{применяем условие Липшица} $\left| \int_{x_0}^{x} L \mid y_1 - y_0 \mid dx \right| \le ML \dfrac{| x - x_0 |^2}{2}$, Учитывая

$$| y_1 - y_o | \le M | x - x_0 | .$$

Аналогично

$$| y_3(x) - y_2(x) | \le ML^2 \frac{| x - x_0 |^3}{3!}$$

И так далее.

$$| y_{n+1}(x) - y_n(x) | \le ML^n \frac{| x - x_0 |^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.36}$$

Предполагая, что это утверждение верно для

$$| y_n(x) - y_{n-1}(x) | \le ML^{n-1} \frac{| x - x_0 |^n}{n!}$$

доказывается (2.36).

Члены ряда для всех значений x из промежутка $|x - x_0| \le h$ не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов следующего ряда с положительными членами:

$$| y_0 | + \sum_{n=1}^{oo} ML^{n-1} \frac{h^n}{n!} \tag{2.37}$$

Ряд (2.37) сходится. Сумма этого ряда равна

$$| y_0 | + \frac{M}{L}(e^{Lh} - 1) \tag{2.38}$$

Согласно признаку Ваейрштрасса ряд (2.35) сходится равномерно в промежутке $|x - x_0| \le h$.

Пусть $y(x)$ сумма ряда (2.35) или предельная функция последовательности (2.34). Тогда по теореме непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда функция $y(x)$ также непрерывна в промежутке $|x - x_0| \le h$. Покажем, что функция $y(x)$ является решение интегрального уравнения (3) и её значения не выходят за пределы области D при $|x-x_0|\le h$. Так как

$$|\ y_n(x)-y_0\ |\le b,$$

то переходя к пределу при $n\to\infty$ получим:

$$|\ y_n(x)-y_0\ |\le b.$$

В формуле (4) перейдём к пределу при $n\to\infty$:

$$\lim y_n(x)=y_o+\lim\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1}(x))dx$$

Докажем, что

$$\frac{\lim}{n\to oo}\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1}(x))dx=\int_{x_0}^{x} f(x,y(x)dx$$

$$|\int_{x_0}^{x}(f(x,y_{n-1}(x)-f(x,y(x)))dx)\le|\int_{x_0}^{x}|\ f(x,y_{n-1}(x))-f(x,y(x))\ |\ dx\ |\le$$

$$|\int_{x_0}^{x}L\ |\ y_{n-1}(x)-y(x)\ |\ dx)\le|\ Lh\varepsilon\to 0,\varepsilon\to 0$$

$$\forall\,\varepsilon>0..\exists N(\varepsilon).\forall(n-1)>N.|\ y_{n-1}(x)-y(x)\ |<\varepsilon$$

Для $\forall x$ из промежутка $|x-x_0|\le h$

$$y(x)=y_o+\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx$$

Итак, докажем, что получено решение единственное. Предположим, что существует ещё одно решение $y=y(x)$, удовлетворяющее тем же начальным условиям, которое определено и непрерывно в промежутке $|x-x_0|\le h$ и не выходит при этих значениях x за пределы области D .

Итак, $$y^*(x) = y_o + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$$

$$| y_0 - y^*(x) | = | \int_{x_0}^{x} f(x, y^*(x))dx | \le | \int_{x_0}^{x} | f(x, y^*(x) | dx | \le M | x - x_0 |,$$

$$| y_1(x) - y^*(x) | = | \int_{x_0}^{x} (f(x, y_0) - f(x, y^*(x))dx | \le | \int_{x_0}^{x} | f(x, y_0) - f(x, y^*(x) | dx | \le$$

$$\le | \int_{x_0}^{x} L | y_0 - y^*(x) | dx | \le LM \frac{| x - x_0 |^2}{2!}$$

и т. д.

$$| y_n(x) - y^*(x) | \le ML^n \frac{| x - x_0 |^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (2.39)$$

Устремляем $n \to \infty$ в формуле (2.39):

$$\lim y_n(x) = y^*(x)$$

откуда

$$y_n(x) = y^*(x).$$

Замечание:

1. Формула (2.39) даёт оценку погрешности нашего приближения к решению $y(x)$.

2. Формула (2.38) даёт оценку решения

$$| y(x) | = | y_0 | + \frac{M}{L}(e^{Lh} - 1).$$

3. За нулевое приближение не обязательно брать y_0. Можно брать любую непрерывно дифференцируемую функцию, значения которой не выходят за пределы области D.

Пример:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

$$D\begin{cases} |x| \le 1 \\ |y| \le 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad M = 2, h = \frac{1}{2}, L = 2$$

$$y_1(x) = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x) = \int_0^x (x^2 + \frac{x^6}{9}) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3(x) = \int_0^x (x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{63^2}) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{11*189} + \frac{x^{15}}{15*63^2}.$$

$$| y_3(x) - y(x) | \le ML^3 \frac{h^4}{4!} = 2*8\frac{1/16}{24} = \frac{1}{24}$$

Пример. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данного уравнения с данными начальными условиями: $y' = x - y^2,\ y(0) = 0$.

Решение. Последовательные приближения к решению данной задачи определим по рекуррентной формуле

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x (\xi - y_n^2(\xi)) d\xi, \quad y(x_0) = 0 \ (n = 0,1).$$

Подставляя в последнюю формулу поочередно n=0,1 найдем нужные приближения:

$$y_1(x) = \int_0^x \xi d\xi = \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(\xi - \frac{\xi^4}{4} \right) d\xi = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}.$$

Пример. Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями:

$$y' = x + y^3,\ y(0) = 0.$$

Решение. Воспользуемся теоремой Пикара. В данном случае

$x_0 = y_0 = 0,\ \ f(x,y) = x + y^3$.

Функция f непрерывна в любом прямоугольнике

$$\Pi = \{(x,y):\ |x| \le a,\ \ |y| \le b\}$$

и удовлетворяет условию Липшица, поскольку производная

$$f'_y(x,y) = 3y^2$$

ограничена числом $3b^2$. Следовательно, на сегменте $[-h,h]$, где

$$N = \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)| = a + b^3,\ \ h = \min\left(a, \frac{b}{N}\right)$$

существует единственное решение данной задачи. Найдем число

$$h = \min\left(a, \frac{b}{a+b^3}\right).$$

Ясно, что если на каком - то сегменте I существует единственное решение, то оно существует и на меньшем сегменте, вложенном в I. Отсюда следует, что желательно найти как можно больший отрезок I, т.е.

$$\max\min\left\{a, \frac{b}{a+b^3}\right\}.$$

Так как функция $\Psi(a)=a$ возрастает при $a\ge 0$, а функция

$$\tau(a) = \frac{b}{a+b^3}$$

убывает, то

$$\max\min\left\{a, \frac{b}{a+b^3}\right\}$$

достигается при условии, что $\Psi(a)=\tau(a)$, т.е.

$$a = \frac{b}{a+b^3}.$$

Взяв производную по b от правой части, найдем, что при $b^3=\frac{a}{2}$ достигается максимум a, который легко вычислить, подставив значение $a=2b^3$. Тогда получим

$$b = \frac{1}{\sqrt[5]{6}},\qquad a = \frac{2}{\sqrt[5]{216}} \approx 0,66.$$

Таким образом, можно гарантировать существование и единственность решения данной задачи на сегменте $-0,66\le x\le 0,66$.

Пример. При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения $y''-y\,y'''=\sqrt[5]{y'-x}$.

Решение.
Поскольку функция

$$f(x,y,y',y'')=\frac{1}{y}\left(y''-\sqrt[5]{y'-x}\right)$$

вместе с частными производными

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\left(y''-\sqrt[5]{y'-x}\right),\ \frac{\partial f}{\partial y'}=-\frac{1}{5y\sqrt[5]{(y'-x)^4}},\ \frac{\partial f}{\partial y''}=\frac{1}{y}$$

непрерывна при $y\neq 0$ и $y'\neq 0$, то через каждую точку x_0, y_0, y_0', y_0'', где $y_0\neq 0$ и $y_0'\neq 0$, проходит единственная интегральная кривая уравнения

$$y'''=\frac{1}{y}\left(y''-\sqrt[5]{y'-x}\right).$$

Метод следов для отыскания характеристических чисел. Назовем m-м следом ядра $K(x,t)$ число

$$A_m=\int_a^b K_m(x,t)\,dt$$

где $K_m(x,t)$ означает m-е итерированное ядро.

Для наименьшего характеристического числа λ_1 при достаточно большом m справедлива следующая приближенная формула:

$$|\lambda_1|\approx\sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}$$

Эта формула дает значение $|\lambda_1|$ с избытком.

Следы четного порядка для симметричного ядра вычисляются по формуле:

$$A_{2m}=\int_a^b\int_a^b K_m^2(x,t)\,dxdt=2\int_a^b\int_a^x K_m^2(x,t)\,dtdx$$

Пример. Найти по методу следов первое характеристическое число ядра

$$K(x,t)=\begin{cases}t, x\geq t,\\ x, x\leq t,\end{cases}\quad a=0,\ b=1.$$

Решение. Так как ядро $K(x,t)$ симметрично, то достаточно найти $K_2(x,t)$ только при $t<x$. Имеем

$$K(x,z)K(z,t)dz=\int_0^t z^2 dz+\int_t^x ztdz+\int_x^1 xtdz=¿\,xt-\frac{x^2}{2}-\frac{t^3}{6}$$

$$K_2(x,t)=\int_0^1 ¿$$

Далее, по формуле следа четного порядка для симметричного ядра, для m=1 и m=2 соответственно находим:

$$A_2=2\int_0^1 dx\int_0^x K_1^2(x,t)\,dt=2\int_0^1 dx\int_0^x t^2 dt=2\int_0^1 \frac{x^3}{3}dx=\frac{1}{6},$$

$$x^2t^2+\frac{x^4t^3}{4}+\frac{t^6}{36}-x^3t^2-\frac{xt^4}{3}+\frac{x^2t^4}{6}$$

$$¿$$

$$(¿¿¿)\,dt=¿\,2\int_0^1\left(\frac{t^3x^2}{3}+\frac{t^3x^4}{12}-\frac{t^7}{252}-\frac{x^3y^3}{3}-\frac{xt^5}{15}+\frac{x^2t^5}{30}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}dx=¿\,2\int_0^1\left(\frac{x^5}{3}+\frac{x^7}{12}+\frac{x^7}{252}-\frac{x^8}{3}-\frac{x^6}{15}+\frac{x^7}{30}\right.$$

$$dx\int_0^x ¿$$

$$K_2^2(x,t)\,dt=¿\,2\int_0^1 ¿$$

$$dx\int_0^x ¿$$

$$A_4=2\int_0^1 ¿$$

Отсюда следует

$$|\lambda_1|\approx\sqrt{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{630}}}=2{,}48.$$

2.2.3 Итерированные ядра. Построение резольвенты с помощью итерированных ядер

Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x)$$

Интегральное уравнение () можно решать методом последовательных приближений. Для этого полагаем

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\lambda^n$$

Где $\varphi_n(x)$ определяются по формулам

$$\varphi_1(x)=\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt,$$

$$\varphi_2=\int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)\,dt=\int_a^b K_2(x,t)f(t)\,dt,$$

$$\varphi_3=\int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)\,dt=\int_a^b K_3(x,t)f(t)\,dt\, и\, т.д.$$

Здесь

$$K_2(x,t)=\int_a^b K(x,z)K_1(z,t)\,dz,$$

$$K_3(x,t)=\int_a^b K(x,z)K_2(z,t)\,dz,$$

И вообще

$$K_n(x,t)=\int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,t)\,dz,$$

n=2,3,…, причем $K_1(x,t)\equiv K(x,t)$. Функции $K_n(x,t)$ определяется по формулам (), называются итерированными ядрами. Для них справедливо соотношение

$$K_n(x,t)=\int_a^b K_m(x,s)K_{n-m}(s,t)\,ds,$$

Где m любое натуральное число, меньше n.

Резольвента интегрального уравнения определяется через итерированные ядра формулой

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,t)\lambda^{n-1},$$

где ряд, стоящий в правой части, называется рядом Неймана ядра $K(x,t)$. Он сходится для

$$|\lambda|<\frac{1}{B},$$

где

$$B=\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt}.$$

Решение уравнения Фредгольма второго рода () выражается формулой

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)\,dt$$

Граница является существенной для сходимости ряда. Однако решение уравнения может существовать и для значений $|\lambda|>\frac{1}{B}$.

Рассмотрим пример:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\varphi(t)\,dt=1$$

Здесь $K(x,t)\equiv 1,$ и, следовательно,

$$B^2=\int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)\,dx\,dt=\int_0^1\int_0^1 dx\,dt=1.$$

Таким образом, условие () дает, что ряд () сходится при $|\lambda|<1$.

Решая уравнение (), как уравнение с вырожденным ядром, получим $(1-\lambda)C=1$, где

$$C=\int_0^1\varphi(t)\,dt$$

При $\lambda=1$ это уравнение не разрешимо, а значит, при $\lambda=1$ интегральное уравнение () решения не имеет. Отсюда следует, что в круге радиуса, большего единицы, последовательные приближения для уравнения () не могут сходиться. Однако при $\lambda>1$ уравнение () разрешимо. В самом деле, если $\lambda\neq 1$, то функция $\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda}$ является решением данного уравнения, что легко проверить непосредственной подстановкой.

Для некоторых уравнений Фредгольма ряд Неймана () для резольвенты сходится при любых значениях λ. Покажем это.

Пусть имеем два ядра : $K(x,t)$ и $L(x,t)$. Будем называть эти ядра ортогональными, если выполняются два условия:

$$\int_a^b K(x,z)L(z,t)\,dz=0,$$

$$\int_a^b L(x,z)K(z,t)\,dz=0.$$

При любых допустимых x и t .

Пример. Ядра $K(x,t)=xt$ и $L(x,t)=x^2t^2$ ортогональны на $[-1,1]$. В самом деле,

$$\int_{-1}^{1}(xz)(z^2t^2)\,dz=x\,t^2\int_{-1}^{1}z^3\,dz=0$$

$$x\text{¿}$$

$$(\text{¿}2z^2\text{¿})(zt)\,dz=x^2t\int_{-1}^{1}z^3\,dz=0.$$

$$\text{¿}$$

$$\int_{-1}^{1}\text{¿}$$

Существуют ядра, ортогональные самим себе. Для таких ядер $K_2(x,t)\equiv 0$, где $K_2(x,t)$ – второе итерированное ядро. В этом случае, очевидно, все последующие итерированные ядра также равны нулю и резольвента совпадает с ядром $K(x,t)$.

Пример. $K(x,t)=\sin(x-2t)$; $0\le x\le 2\pi$, $0\le t\le 2\pi$. Имеем

$$\int_0^{2\pi}\sin(x-2z)\sin(z-2t)\,dz=\text{¿}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(x+2t-3z)-\cos(x-2t-z)]\,dz=\text{¿}\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{3}\sin(x+2t-3z)+\sin(x-2\right.$$

Таким образом, в этом случае резольвента ядра равна самому ядру:

$$R(x,t;\lambda)\equiv\sin(x-2t),$$

Так что ряд Неймана () состоит из одного члена и, очевидно, сходится при любом λ.

Итерированные ядра $K_n(x,t)$ можно непосредственно выразить через данное ядро $K(x,t)$ по формуле

$$K_n(x,t)=\int_a^b\int_a^b\dots\int_a^b K(x,s_1)K(s_1,s_2)\dots K(s_{n-1},t)\,ds_1\,ds_2\dots ds_{n-1}.$$

Все итерированные ядра $K_n(x,t)$, начиная с $K_2(x,t)$, будут непрерывными функциями в квадрате $a\le x\le b$, $a\le t\le b$, если начальное ядро $K(x,t)$ квадратично суммируемо в этом квадрате.

Если данное ядро $K(x,t)$ симметрично, то все итерированные ядра $K_n(x,t)$ тоже симметричны.

Приведем примеры отыскания итерированных ядер.

Пример 1. Найти итерированные ядра для ядра $K(x,t)=x-t$, если $a=0, b=1$.

Решение. Пользуясь формулами (), найдем последовательно:

$K_1=(x,t)=x-t,$

$$K_2(x,t)=\int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds=\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3},$$

$x-s$

$$(¿)\left(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3}\right)ds=\frac{-x-t}{12},$$

$$K_3(x,t)=\int_0^1 ¿$$

$$K_4(x,t)=\frac{-1}{12}\int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds=\frac{-1}{12}K_2(x,t)=\frac{-1}{12}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right),$$

$$K_6(x,t)=\frac{-1}{12}\int_0^1 (x-s)\left(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3}\right)ds=\frac{-1}{12}K_3(x,t)=\frac{x-t}{12^2},$$

$$K_8(x,t)=\frac{1}{12^2}\int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds=\frac{K_2(x,t)}{12^2}=\frac{1}{12^2}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right).$$

Отсюда следует, что итерированные ядра имеют вид:

1)для $n=2k-1$

$$K_{2k-1}(x,t)=\frac{(-1)^k}{12^{k-1}}(x-t),$$

2)для $n=2k$

$$K_{2k}(x,t)=\frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right),$$

где $k=1,2,3,\ldots$.

Пример 2. Найти итерированные ядра $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$, если $a=0, b=1$ и

$$K(x,t)=\begin{cases} x+t,\, если\, 0\le x<t. \\ x-t,\, если\, t<x\le 1. \end{cases}$$

Решение. Имеем $K_1(x,t)=K(x,t),$

$$K_2(x,t)=\int_0^1 K(x,s)K(s,t)\,ds,$$

где

$$K(x,s)=\begin{cases} x+s, 0\le x<s,\\ x-s, s<x\le 1,\end{cases} \qquad K(s,t)=\begin{cases} s+t, 0\le s<t\\ s-t, t<s\le 1\end{cases}$$

Так как данное ядро $K(x,t)$ не симметрично, то при нахождении $K_2(x,t)$ рассмотрим отдельно два случая: 1) $x<t$ и 2) $x>t$.

1)Пусть $x<t$. Тогда

$$K_2(x,t)=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\int_0^x (x-s)(s+t)\,ds=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2t}{2},$$

$$I_2=\int_x^t (x+s)(s+t)\,ds=\frac{5t^3}{6}-\frac{5x^3}{6}+\frac{3}{2}xt^2-\frac{3}{2}x^2t,$$

$$I_3=\int_t^1 (x+s)(s-t)\,ds=\frac{t^3}{6}+\frac{xt^2}{2}-xt+\frac{x}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}.$$

Складываем эти интегралы, получим

$$K_3(x,t)=t^3-\frac{2}{3}x^3-x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}(x<t).$$

1) Пусть $x>t$. Тогда

$$K_2(x,t)=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\int_0^t (x-s)(s+t)\,ds=\frac{3}{2}xt^2-\frac{5t^3}{6},$$

$$I_2=\int_t^x (x-s)(s-t)\,ds=\frac{x^3}{6}-\frac{t^3}{6}-\frac{x^2t}{2}+\frac{xt^2}{2},$$

$$I_3=\int_x^1 (x+s)(s-t)\,ds=\frac{-5}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2t+\frac{x-t}{2}-xt+\frac{1}{3}.$$

Складывая эти интегралы, получим

$$K_2(x,t)=\frac{-2}{3}x^3-t^3+x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}(x>t).$$

Итак, второе итерированное ядро имеет вид

$$K_2(x,t)=\begin{cases}\frac{-2}{3}x^3+t^3-x^2t+2xt^3-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}, 0\le x<t,\\ \frac{-2}{3}x^3-t^3+x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}, t<x\le 1.\end{cases}$$

Аналогично находится и остальные итерированные ядра $K_n(x,t) \quad (n=3,4,\ldots)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Возрастающая значимость изучения интегральных уравнений и их применение в решении большого класса задач технической или естественной природы в виде математических моделей, заставляют глубже изучить теорию интегральных уравнений Фредгольма.

В результате выполнения магистерской диссертации выполнены следующие задачи:

рассмотрены понятие интегрального уравнения, и понятие интегральных уравнений Фредгольма;

рассмотрены и показаны однородные и неоднородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода;

изучены методы решения интегральных уравнений Фредгольма.

показаны приемы решения интегральных уравнений в различных физических явлениях и процессах.

В результате проведенной работы, цель которго было расмотрение особенностей интегральных уравнений Фредгольма и изучение применения этого метода в физических явлениях, можно сделать выводы:

целенаправленная работа по реализации применения интегральных уравнений при объяснении природных явлений способствует, с одной стороны получению качественной характеристики, с другой стороны проникнуть в суть физических явлений;

при использовании интегральных уравнений Фредгольма второго рода можно решить задачи о собственных колебаниях систем, то есть, колебания при отсутствии внешней силы;

интегральные уравнения Фредгольма в настоящее время представляет собой исключительно богатый содержанием, развивающийся раздел матемамического анализа.

В данной работе изложена теория решения интегральных уравнений Фредгольма, в частности, однородных и неоднородных уравнения Фредгольма второго рода. Проведена классификация задач, приводящих к интегральным уравнениям Фредгольма первого и второго рода. Рассмотрены разные методы решения интегральных уравнений, такие как метод определителей Фредгольма, метод нахождения резольвенты ядра с помощью реккурентных соотношений, метод последовательных приближений и др.

В работе представлен ряд примеров, решенных самостоятельно автором, а также подобрал комплекс задач по теме исследования и дал ответы к ним.
В ходе исследования была опубликована статья в «Вестнике ИнЕУ» об основных методах решения интегральных уравнений Фредгольма.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.

1 Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения- М., 1966.
2 Толстов Г.П. Курс математического анализа.- ГТТИ, 1957.
3 Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения.- М.,1989.
4 Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями.2003.
5 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу мат. анализа.- М.,1985.
6 Фихтенголец Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.- М., 1949.
7 Ефимов А.В. Мат. анализ.- М., 1980.
8 Смирнов Н.С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений.- М., 1936.
9 Романовский Р. К., Степанов В.Н. Лекции по уравнениям математической физики. Стационарное уравнение: учеб. пособие. Омск: изд-во ОмГТУ, 2005. 108 с.
10 Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики: учебник для студентов вузов. М.: изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996.
11 Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
12 Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.
13 Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1974.
14 Б.А. Зон: Лекции по интегральным уравнениям; Москва «Высшая школа» 2004.
15 Васильева А. В., Медведев Г. Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т. А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
16 Васильева А. Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. - 2-е изд., стереот. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
17 Манжиров А. В., Полянин А. Д. Методы решения интегральных уравнений: Справочник. — М.: «Факториал»,
18 Байков В. А., Жибер А. В. Уравнения математической физики. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
19 Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа.-М,: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
20 Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики. — 2-е изд., испр. — М.: МЦНМО,

21. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач математической физике. М: «Физматлит», 2003.

22. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. М: Изд-во МГУ, 1998.
23. Боголюбов А.Н., Левашова Н.Т., Могилевский И.Е. , Мухартова Ю.В., Шапкина Н.Е.. Функция Грина оператора Лапласа. М.: Физический факультет МГУ. 2012.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь определителями Фредгольма, найти резольвенты следующих ядер:

а) $$K(x,t) = 2x - t; \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

б) $$K(x,t) = \sin x \ \cos t; \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

в) $$K(x,t) = x^2 t - x t^2; \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

г) $$K(x,t) = \sin x - \sin t; \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

2. Используя рекуррентные соотношения, найти резольвенты следующих ядер:

а) $$K(x,t) = x + t + 1; \quad -1 \le x \le 1, \quad -1 \le t \le 1.$$

б) $$K(x,t) = e^{x-t}; \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

в) $$K(x,t) = 1 + 3x\,t; \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

г) $$K(x,t) = x - \operatorname{sh} t; \quad -1 \le x \le 1, \quad -1 \le t \le 1.$$

3. Методом определителей Фредгольма решить следующие интегральные уравнения:

а) $$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2x - t)\ \varphi(t)\ dt = \frac{x}{6}.$$

б) $$\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \ \cos t \ \ \varphi(t)\,dt = \cos 2x.$$

в) $$\varphi(x) + \int_0^1 e^{x-t}\ \varphi(t)\ dt = e^x.$$

г) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\sin(x+t)\,\varphi(t)\,dt=1.$

д) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1\left(4xt-x^2\right)\,\varphi(t)\,dt=x.$

Ответы

1.а) $$R(x,t;\lambda)=\frac{2x-t+\left(x+t-2xt-\frac{2}{3}\right)\lambda}{1-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}}.$$

б) $R(x,t;\lambda)=\sin x\ \cos t.$

в) $$R(x,t;\lambda)=\frac{x^2t-xt^2+xt\left(\frac{x+t}{4}-\frac{xt}{3}-\frac{1}{5}\right)\lambda}{1+\frac{\lambda^2}{240}}.$$

г) $$R(x,t;\lambda)=\frac{\sin x-\sin t-\pi\left(1+2\sin x\ \sin t\right)\lambda}{1+2\pi^2\lambda^2}.$$

2.а) $$R(x,t;\lambda)=\frac{x+t+1+2\left(xt+\frac{1}{3}\right)\lambda}{1-2\lambda-\frac{4}{3}\lambda^2}.$$

б) $$R(x,t;\lambda)=\frac{e^{x-t}}{1-\lambda}.$$

в) $$R(x,t;\lambda)=\frac{1+3xt+\left(3\frac{x+t}{2}-3xt-1\right)\lambda}{1-2\lambda+\frac{1}{4}\lambda^2}.$$

г) $R(x,t;\lambda) = \dfrac{x - \operatorname{sh} t - 2\left(e^{-1} + x \operatorname{sh} t\right)\lambda}{1 + 4e^{-1}\lambda^2}.$

3.а) $\varphi(x) = \dfrac{1}{6}\left[x + \dfrac{(6x-2)\lambda - \lambda^2 x}{\lambda^2 - 3\lambda + 6}\right].$

б) $\varphi(x) = \cos 2x.$

в) $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}e^x.$

г) $\varphi(x) = 1.$

д) $\varphi(x) = \dfrac{3x(2\lambda - 3\lambda x + 6)}{\lambda^2 - 18\lambda + 18}.$

1. Проверить, какие из данных функций являются решениями указанных интегральных уравнений:

а) $\varphi(x) = 2e^x\left(x - \dfrac{1}{3}\right), \quad \varphi(x) + 2\displaystyle\int_0^1 e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt = 2xe^x.$

б) $\varphi(x) = \cos x, \quad \varphi(x) - \displaystyle\int_0^{\pi}\left(x^2 + t\right)\cos t\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$

в) $\varphi(x) = xe^{-x}, \quad \varphi(x) - 4\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(x+t)}\varphi(t)\,dt = \left(x - 1\right)e^{-x}.$

г) $\varphi(x) = \cos 2x, \quad \varphi(x) - 3\displaystyle\int_0^{\pi} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = \cos x,$

$$K(x,t) = \begin{cases} \sin x \ \cos t, & 0 \le x \le t, \\ \sin t \ \cos x, & t \le x \le \pi. \end{cases}$$

λ

2. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра следующие интегральные уравнения:

$$\text{а)}\ \ \varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos^2 x\ \ \varphi(t)\ dt=1.$$

$$\text{б)}\ \ \varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}x\ e^t\ \varphi(t)\ dt=x.$$

$$\text{в)}\ \ \varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}|x-\pi|\ \ \varphi(t)\ dt=x.$$

$$\text{г)}\ \ \varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(x^2-2xt\right)\ \varphi(t)\ dt=x^3-x.$$

$$\text{д)}\ \ \varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}\cos x\ \ \cos t+\frac{1}{\pi}\sin 2x\ \ \sin 2t\right)\ \varphi(t)\ dt=\sin\ x.$$

Ответы

1. а) да; б) нет; в) да; г) да.

2. а) $\varphi(x)=1+\dfrac{2\lambda\pi}{2-\lambda\pi}\cos^2 x,\ \ \lambda\neq\dfrac{2}{\pi}.$ При $\lambda=\dfrac{2}{\pi}$ решений нет.

б) $\varphi(x)=\dfrac{e}{e-2\lambda}\cdot x,\ \ \lambda\neq\dfrac{e}{2}.$ При $\lambda=\dfrac{e}{2}$ решений нет.

в) $\varphi(x)=x+\dfrac{2\pi^2\lambda}{1-\pi^2\lambda}|x-\pi|,\ \ \lambda\neq\dfrac{1}{\pi^2}.$ При $\lambda=\dfrac{1}{\pi^2}$ решений нет.

$$г)\ \varphi(x)=\begin{cases} x^3-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4\lambda+5}{4\lambda+3}\cdot x, \text{если} & \lambda\neq\dfrac{3}{2},\ \lambda\neq\dfrac{3}{4} \\ x^3-\dfrac{11}{5}\cdot x+cx^2, \text{если} & \lambda=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

При $\lambda=-\dfrac{3}{4}$ решений нет.

д) $$\varphi(x)=\begin{cases} \sin x, \text{если}\ \ \lambda\neq 1, \\ c_1\cos x+c_2\sin 2x+\sin x, \text{если}\ \ \lambda=1. \end{cases}$$

1. Проверить, какие из данных функций являются решениями указанных интегральных уравнений:

$$а)\ \varphi(x)=2e^x\left(x-\frac{1}{3}\right),\quad \varphi(x)+2\int_0^1 e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt=2xe^x.$$

$$б)\ \varphi(x)=\cos x,\quad \varphi(x)-\int_0^{\pi}\left(x^2+t\right)\cos t\ \varphi(t)\,dt=\sin x.$$

$$в)\ \varphi(x)=xe^{-x},\quad \varphi(x)-4\int_0^{\infty} e^{-(x+t)}\varphi(t)\,dt=\left(x-1\right)e^{-x}.$$

$$г)\ \varphi(x)=\cos 2x,\quad \varphi(x)-3\int_0^{\pi} K(x,t)\ \varphi(t)\,dt=\cos x,$$

$$K(x,t)=\begin{cases} \sin x\ \cos t,\ 0\le x\le t, \\ \sin t\ \cos x,\ \ t\le x\le\pi. \end{cases}$$

2. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ следующие интегральные уравнения:

а) $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x \ \ \varphi(t)\, dt = 1.$

б) $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} x\ e^t\ \ \varphi(t)\ \ dt = x.$

в) $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} |x - \pi|\ \ \varphi(t)\, dt = x.$

г) $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - 2xt \right)\ \ \varphi(t)\, dt = x^3 - x.$

д) $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} \cos x\ \ \cos t + \frac{1}{\pi} \sin 2x\ \ \sin 2t \right)\ \ \varphi(t)\ \ dt = \sin\ x.$

Ответы

1. а) да; б) нет; в) да; г) да.

2. а) $\varphi(x) = 1 + \frac{2\lambda\pi}{2 - \lambda\pi} \cos^2 x, \quad \lambda \neq \frac{2}{\pi}.$ При $\lambda = \frac{2}{\pi}$ решений нет.

б) $\varphi(x) = \frac{e}{e - 2\lambda} \times x, \quad \lambda \neq \frac{e}{2}.$ При $\lambda = \frac{e}{2}$ решений нет.

в) $\varphi(x) = x + \frac{2\pi^2\lambda}{1 - \pi^2\lambda} |x - \pi|, \quad \lambda \neq \frac{1}{\pi^2}.$ При $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$ решений нет.

г) $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{3}{5} \times \frac{4\lambda + 5}{4\lambda + 3} \times x, \text{если} & \lambda \neq \frac{3}{2},\ \lambda \neq \frac{3}{4} \\ x^3 - \frac{11}{5} \times x + cx^2, \text{если} & \lambda = \frac{3}{2} \end{cases}$

При $\lambda = -\frac{3}{4}$ решений нет.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, \text{если} \quad \lambda \neq 1, \\ c_1 \cos x + c_2 \sin 2x + \sin x, \text{если} \quad \lambda = 1. \end{cases}$$

д)