

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
КАЗАХСТАН**

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Б.Ж. Балыкова

**КРУГОВЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К
ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ЧИСЕЛ В ВИДЕ СТЕПЕНЕЙ**

Магистерская диссертация на соискание
академической степени магистра естественных наук
по специальности «6М060100 Математика»

ПАВЛОДАР – 2014

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Инновационный Евразийский университет

Допущен (а) к защите:
зав. кафедрой «Математика и
информационные технологии»,
кандидат ф.-м.н,

_____ Ж.К.

Даниярова

(подпись)

« ____ » _____ 20__ г

Магистерская диссертация

**КРУГОВЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К
ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ЧИСЕЛ В ВИДЕ СТЕПЕНЕЙ**

специальность: 6М060100 - Математика

Магистрант

(подпись)

Б.Ж.Балыкова

(инициалы, фамилия)

Научный руководитель,
доктор ф.-м.н., профессор

(подпись)

Д.И.Исмоилов

(инициалы, фамилия)

ПАВЛОДАР – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Комплексные числа.....	6
1.1 Построение системы комплексных чисел над полем вещественных чисел.....	6
1.2 Геометрическая интерпретация комплексных чисел.....	11
1.3 Свойство действий во множестве комплексных чисел.....	19
1.4 Сопряженные комплексные числа.....	23
1.5 Извлечение корня в области комплексных чисел. Корни из единицы..	26
1.6 Одно применение комплексных чисел в теории Пифагоровских треугольников.....	34
2. Круговые многочлены.....	36
2.1 Деление многочленов. Делимость многочленов. Свойства делимости.	36
2.2 Основные свойства круговых многочленов.....	39
2.3 Формула обращения Мёбиуса.....	39
2.4 Неприводимость круговых многочленов. Коэффициенты круговых многочленов.....	42
2.5 Дискриминант кругового многочлена.....	44
2.6 Выражение Φ_m через Φ_n	45
2.7 Результат пары круговых многочленов. Многочлены, неприводимые по модулю p	50
3. Комплексные числа и многочлены.....	53
3.1 Основная теорема алгебры.....	53
3.2 Теорема Руше.....	56
3.3 Теорема Гаусса-Люка.....	61
3.4 Геометрия корней многочленов.....	63
4. Числа Фибоначчи. Тождество Исмоилова.....	70
4.1 Тождество Фибоначчи и его обобщения.....	70
4.2 Последовательность Фибоначчи.....	73
4.3 Функциональное уравнение.....	77
4.4 Об одном функциональном уравнении.....	78
4.5 Тождество Исмоилова.....	81
4.5.1 Применение теоремы Исмоилова к комплексным числам.....	81
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	84
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	86
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	87

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность магистерской диссертации. Комплексные числа возникли в математике в начале XVI века в связи с решением алгебраических уравнений 3-ей степени, а позднее, и уравнений 2-ой степени. Некоторые итальянские математики того времени (Сципион дель Ферро, Николо Тарталья, Джироламо Кардано, Рафаэль Бомбелли) ввели в рассмотрение символ $\sqrt{-1}$ как формально решение уравнения $x^2 + 1 = 0$, а также выражение $(a + b \cdot \sqrt{-1})$ $(x - a)^2 + b^2 = 0$ более общего вида для записи решения уравнения bi . В последствии выражения вида bi стали называть «мнимыми», а затем «комплексными» числами и записывать их в виде $(a + bi)$, (символ i для обозначения $\sqrt{-1}$ ввёл Леонард Эйлер в XVIII в.). Таких чисел, чисел новой природы, оказалось достаточно для решения любого квадратного уравнения, а также уравнения 3-ей и 4-ой степени.

Мы сталкиваемся со случаями, когда дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$; $D = b^2 - 4ac < 0$, т.е. под квадратным корнем появляется отрицательное число. Поэтому было необходимо пополнить запас действительных чисел при помощи комплексных чисел, для которых квадратный корень из отрицательного числа имеет смысл.

Популярность круговых многочленов лишь возрастает со временем, и причиной этому является поистине неисчерпаемое богатство вновь и вновь открываемых их замечательных свойств. Ещё большее разнообразие наблюдается в сфере различных обобщений этих многочленов. Изучение поведения последовательностей круговых параметров является актуальным и поныне. Особенно популярной стала теория ортогональных многочленов на окружности после появления многочисленных физических приложений.

В математике функциональным уравнением называется уравнение, выражающее связь между значениями функции в нескольких точках. Это весьма общий класс уравнений, в которых искомой является некоторая функция, а не значения переменных. Под функциональными уравнениями в узком смысле слова понимают уравнения, в которых искомые функции связаны с известными, функциями одного или нескольких переменных при помощи операции образования сложной функции. Решения функционального уравнения могут быть как конкретными функциями, так и классами функций, зависящими от произвольных параметров или произвольных функций.

Выбор темы «Круговые многочлены и их применение к представлению чисел в виде степеней», как темы магистерской диссертации, заключается в том, что понятие комплексного числа и корней n -ой степени расширяет знания учащихся о числовых системах, о решении широкого класса задач как

алгебраического, так и геометрического содержания, о решении алгебраических уравнений любой степени и о решении задач с параметрами.

Цели исследования:

- исследовать теорию комплексных чисел;
- получить результаты деления многочленов и выражения Φ_m через Φ_n
- изучить тождество Фибоначчи и его обобщения;
- исследовать множества решений систем функциональных уравнений, выразить связь с тригонометрическими функциями;
- получить обобщения и выводы теоремы Исмоилова.

Задачи исследования: рассмотреть решения задач по теории «Комплексные числа», выявить область применения комплексных чисел; рассмотреть решения простейших задач с помощью «Ряда Фибоначчи», убедиться в универсальности этого числового ряда, определить области жизни современного общества, в которых применяется «Ряд Фибоначчи»; решить поставленные задачи на функциональное уравнение.

В первой части основного раздела «Комплексные числа» приведено теоретическое построение систем комплексных чисел и решения примеров с комплексными числами в алгебраической форме, определяются операции сложения, вычитания, умножения, деления (кроме деления на нуль), операция сопряжения для комплексных чисел в алгебраической форме, степень мнимой единицы, геометрическая интерпретация комплексных чисел, свойства действий во множестве комплексных чисел в целом.

Далее рассматривается вопрос о возведении комплексных чисел в степень и извлечении из них корня. Вопрос извлечения корней из вещественных чисел был основным в историческом развитии понятия числа, приведшим к пониманию необходимости расширения числовых систем до системы комплексных чисел. Особенно важен случай извлечения корня n -ой степени из числа единицы и дальнейшее обобщение (т.е. извлечения корня n -ой степени от любого комплексного числа. Рассмотрено одно применение целых комплексных чисел в теории Пифагоровских треугольников.

Во второй части работы изучаются круговые многочлены и их основные свойства на базе системы комплексных чисел.

В третьей части рассматриваем «Комплексные числа и многочлены». В этой части будут рассмотрены теоремы Гаусса-Люка, Руше, основная теорема алгебры. Все теоремы представлены с доказательствами.

В четвертой части рассматриваем «Тождество Фибоначчи и его обобщение» и «Тождество Исмоилова». В этой части будут рассмотрены частные и общие случаи умножения n - слагаемых с применением к ним свойства умножения комплексных чисел. Также изучаются функциональные уравнения и некоторые его обобщения.

Структура данной магистерской диссертации обусловлена поставленной нами целью, задачами и предметом исследования. Работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Особенностью изложения материала каждой части является первоначальный ввод теоретических основ, а впоследствии практическое их применение при решении задач.

В конце магистерской диссертации представлен список использованной литературы и приложения.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1 Построение системы комплексных чисел над полем вещественных чисел

На протяжении курса элементарной алгебры несколько раз происходит обогащение запаса чисел. Школьник, приступающий к изучению алгебры, приносит из арифметики знакомство с положительными целыми и дробными числами. Алгебра начинается по существу с введения отрицательных чисел, т.е. с оформления первой среди важнейших числовых систем, системы целых чисел, состоящей из всех положительных и всех отрицательных целых чисел и нуля, и более широкой системы рациональных чисел, состоящей из всех целых чисел и всех дробных чисел, как положительных, так и отрицательных.

Дальнейшее расширение запаса чисел происходит тогда, когда в рассмотрение вводятся иррациональные числа. Система, состоящая из всех рациональных и всех иррациональных чисел, называется системой действительных (или вещественных) чисел. Строгое построение системы действительных чисел содержится обычно в университетском курсе математического анализа.

Наконец, в самом конце курса элементарной алгебры система действительных чисел расширяется до системы комплексных чисел. Эта система чисел остается для читателя менее привычной, конечно, чем система действительных чисел, хотя на самом деле она обладает многими очень хорошими свойствами. В дипломной работе будет изложена теория комплексных чисел.

Комплексные числа вводятся в связи со следующей задачей. Известно, что действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Простейшее из квадратных уравнений, не имеющих корней среди действительных чисел, есть

$$x^2 + 1 = 0$$

(1.1.1)

только это уравнение будет нас сейчас интересовать. Задача, стоящая перед нами, такова: нужно расширить систему действительных чисел до такой системы чисел, в которой уравнение (1.1.1) уже обладало бы корнем.

В качестве материала, из которого будет строиться эта новая система чисел, мы возьмем точки плоскости. Напомним, что изображение действительных чисел точками прямой линии (основанное на том, что мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел, если при заданном начале координат и единице масштаба всякой точке прямой поставим в соответствие ее абсциссу) систематически используется во всех отделах математики и является столь привычным, что обычно мы не делаем различия между действительным числом и точкой, его изображающей.

Таким образом, нашей задачей было определить систему чисел, изображающихся всеми точками плоскости. До сих пор нам не требовалось складывать или перемножать точки плоскости, поэтому мы имеем право выбирать определение операций над точками, уделяя внимание лишь тому, чтобы новая система чисел обладала всеми теми свойствами, ради которых мы ее создаем. Такие определения, в особенности для произведения, изначально покажутся весьма искусственными.

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат. Условимся обозначать точки плоскости, буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ и записывать точку α с абсциссой a и ординатой b через (a, b) т. е., несколько отступая от того, что принято в аналитической геометрии, писать $\alpha = (a, b)$. Если даны точки $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$, то суммой этих точек мы будем называть точку с абсциссой $a + c$ и ординатой $b + d$, т. е.,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (1.1.2)$$

Произведением точек $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ мы будем называть точку с абсциссой $ac - bd$ и ординатой $ad + bc$, т. е.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (1.1.3)$$

Этим путем мы определили множество всех точек плоскости две алгебраические операции. Покажем, что эти операции обладают всеми основными свойствами, какими обладают операции в системе действительных чисел или в системе рациональных чисел: они обе коммутативны и ассоциативны, связаны законом дистрибутивности и для них существуют обратные операции - вычитание и деление (кроме деления на нуль).

Коммутативность и ассоциативность сложения очевидны (точнее, вытекают из соответствующих свойств сложения действительных чисел), так как при сложении точек плоскости мы отдельно складываем их абсциссы и отдельно ординаты. Коммутативность умножения основана на том, что в определении произведения точки α и β входят симметричным образом.

Свойства умножения:

1. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (коммутативность);
2. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (ассоциативность);
3. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ (дистрибутивность).

Рассмотрим вопрос об обратных операциях. Если даны точки $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$, то их разностью будет такая точка (x, y) , что

$$(c, d) + (x, y) = (a, b)$$

Отсюда, ввиду (1.1.2),

$$c + x = a \quad d + y = b$$

Таким образом, разностью точек $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ служит точка

$$\alpha - \beta = (a - c, b - d)$$

(1.1.4)

и эта разность однозначно определена. В частности, нулем будет служить начало координат $(0, 0)$, а точкой, противоположной, для точки $\alpha = (a, b)$, будет точка

$$-\alpha = (-a, -b). \quad -\alpha = (-a, -b)$$

(1.1.5)

Пусть, далее, даны точки $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$,
 причем точка β отлична от нуля, т.е. хотя бы одна из координат c, d не есть
 нуль и поэтому $c^2 + d^2 \neq 0$. Частным от деления α на β
 должна быть такая точка (x, y) , что $(c, d) \cdot (x, y) = (a, b)$. Отсюда,
 ввиду (1.1.3),

$$cx - dy = a$$

$$dx + cy = b$$

Решая эту систему уравнений, мы получим:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Таким образом, при $\beta \neq 0$, частное $\frac{\alpha}{\beta}$ существует и однозначно
 определено:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \quad (1.1.6)$$

Полагая здесь $\beta = \alpha$, мы получим, что единицей при нашем
 умножении точек служит точка $(1, 0)$, лежащая на оси абсцисс на расстоянии
 1 вправо от начала координат. Полагая, далее, в (1.1.6), что $\alpha = 1 = (1, 0)$
 мы получим, что при $\beta \neq 0$ точкой, обратной для β ,
 будет:

$$\beta^{-1} = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right) \quad \beta^{-1} = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right)$$

(1.1.7)

Таким образом, мы построили систему чисел, изображаемых точками плоскости, причем операции над этими числами определяются по формулам (1.1.2) и (1.1.3). Такая система чисел называется системой комплексных чисел.

Покажем, что система комплексных чисел является расширением системы действительных чисел. Для этой цели рассмотрим точки, лежащие на оси абсцисс, т. е. точки вида $(a, 0)$; ставя в соответствие точке $(a, 0)$ действительное число a , мы получаем, очевидно, взаимно однозначное соответствие между рассматриваемым множеством точек и множеством всех действительных чисел. Применение к этим точкам формул (1.1.2) и (1.1.3) даёт равенства

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

т. е. точки $(a, 0)$ складываются и перемножаются друг с другом так же, как соответствующие действительные числа. Таким образом, множество точек, лежащих на оси абсцисс, рассматриваемое как часть системы комплексных чисел, по своим алгебраическим свойствам ничем не отличается от системы действительных чисел, обычным способом изображенной точками прямой линии. Это позволяет нам не различать в будущем точку $(a, 0)$ и действительное число a , т. е. всегда полагать $(a, 0) = a$. В частности, нуль $(0, 0)$ и единица $(1, 0)$ системы комплексных чисел оказываются обычными действительными числами 0 и 1.

Нам нужно теперь показать, что среди комплексных чисел содержится корень уравнения (1.1.1), т. е. такое число, квадрат которого равен действительному числу -1 . Это будет, например, точка $(0, 1)$, т. е. точка, лежащая на оси ординат на расстоянии 1 вверх от начала координат. Действительно, применяя (1.1.3), получаем:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Условимся обозначать эту точку буквой i , так что $i^2 = -1$.

Покажем, наконец, что для построенных нами комплексных чисел может быть получена их обычная запись. Для этого найдем сначала произведение действительного числа b на точку i :

$$bi = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b)$$

это будет, следовательно, точка, лежащая на оси ординат и имеющая ординату b , причем все точки оси ординат представимы в вид таких произведений. Если

теперь (a, b) (a, b) - произвольная точка, то ввиду равенства

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

получаем:

$$(a, b) = a + ib$$

т. е. мы действительно приходим к обычной записи комплексных чисел; произведение и сумму в выражении $a + ib$ $a + bi$ следует понимать, конечно, в смысле операций, определенных в построенной нами системе комплексных чисел.

В соответствии с исторически сложившимися традициями мы будем называть комплексное число i мнимой единицей, а числа вида bi - чисто мнимыми числами, хотя существование этих чисел не вызывает у нас сомнений и мы можем указать те точки плоскости точки оси ординат, которыми эти числа изображаются. В записи комплексного числа α α в

виде $\alpha = a + bi$ $\alpha = a + ib$ число a называется действительной частью числа α , а bi - его мнимой частью. Плоскость, точки которой отождествлены с

комплексными числами, будет называться комплексной плоскостью. Ось абсцисс этой плоскости называется действительной осью, так как ее точки изображают действительные числа; соответственно ось ординат комплексной плоскости называется мнимой осью.

Сложение, умножение, вычитание и деление комплексных чисел, записанных в виде $a + ib$ $a + bi$ производятся следующим образом.

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

;

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

;

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc);$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Мы можем сказать, что при сложении комплексных чисел складываются отдельно их действительные части и отдельно их мнимые части; аналогичное правило имеет место и для вычитания. Словесные выражения для формул умножения и деления были бы слишком громоздкими, и мы их не даем. Последнюю из этих формул нет необходимости запоминать; следует лишь помнить, что ее можно вывести, умножая числитель и знаменатель заданной дроби на число, отличающееся от знаменателя лишь знаком при мнимой части [1].

Примеры:

$$(2 + 3i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) + i \cdot (3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 12 + 5i$$

1)

$$\frac{2+i}{3-i} + \frac{3+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2-i) + (3+i)(3-i)}{(3-i)(2-i)} = \frac{4-i^2 + 9-i^2}{6-5i+i^2} = \frac{13+2}{5(1-i)} =$$

$$= \frac{15}{5(1-i)} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{15(1+i)}{5(1-i^2)} = \frac{15}{10}(1+i) = 1.5 + 1.5i$$

2)

$$(2 + 3i)(-3 - 4i) = -6 - 8i - 9i + 12 = (-6 + 12) - 17i = 6 - 17i$$

3)

$$(1 + 2i) - (2 + 4i) = (1 - 2) - (2 - 4)i = -1 + 2i$$

4)

1.2 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

На плоскости рассмотрим декартову систему прямоугольных координат. Имея в виду изображать в дальнейшем точками этой плоскости комплексные числа, будем называть эту плоскость, рассматриваемую совместно с фиксированной на ней системой координат, комплексной плоскостью.

Между множеством всех точек комплексной плоскости и множеством всех пар вещественных чисел имеет место взаимно однозначное соответствие, при котором точке соответствует пара (a, b) (a, b)

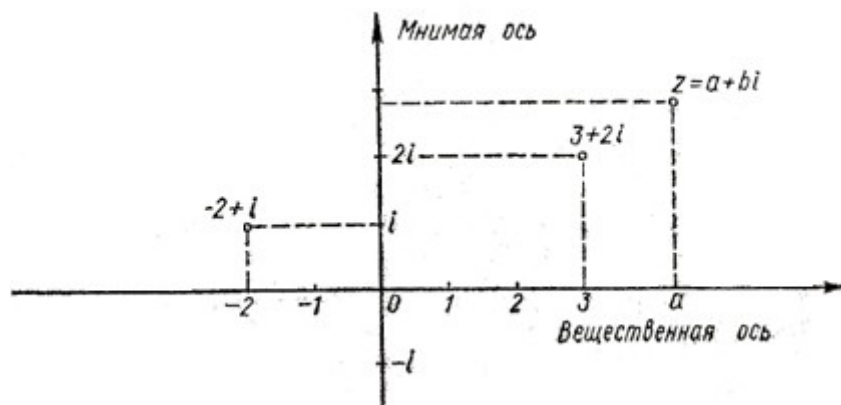


Рисунок 1

$(a, b \in \mathbb{R})$ $(a, b \in \mathbb{R})$, где a — абсцисса и b — ордината этой точки (Рисунок 1).
 $(a, b) | (a, b \in \mathbb{R})$ $(a, b) | (a, b \in \mathbb{R})$

Но каждую пару (a, b) можно считать комплексным числом. Таким образом, мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек нашей плоскости и множеством всех комплексных чисел. Его называют также геометрической интерпретацией комплексных чисел.

Очевидно, при указанном соответствии вещественные числа изображаются точками, лежащими на оси абсцисс. Поэтому ось абсцисс комплексной плоскости называют обычно вещественной осью.

Точки оси ординат изображают так называемые чисто мнимые числа, т. е. числа вида bi ($b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) и число $0 = 0i$. Поэтому ось ординат комплексной плоскости называют обычно мнимой осью.

Ценность геометрической интерпретации комплексных чисел заключается не только в том, что числам можно сопоставлять точки, но и в том, что действиям и соотношениям между комплексными числами соответствуют естественные и наглядные соотношения между изображающими их точками.

Выясним для начала, как интерпретируются действие сложения комплексных чисел.

Теорема 1. Если $z_1 + z_2 = z_3$ ($z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$), то на комплексной плоскости начало координат и три точки, изображающие комплексные числа z_1, z_2, z_3 являются четырьмя вершинами параллелограмма, в котором точки, изображающие z_1 и z_2 , являются противоположными вершинами.

Доказательство. Если $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$, то $z_3 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$.
 $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i \quad z_3 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$
, то .

На комплексной плоскости рассмотрим параллелограмм, тремя вершинами которого являются точки O, P_1, P_2 с координатами которые изображают комплексные числа $0, z_1, z_2$ (Рисунок 2). При этом точки P_1, P_2 берем в качестве противоположных вершин параллелограмма. Координаты четвертой вершины P_3 обозначим через (a_3, b_3) .

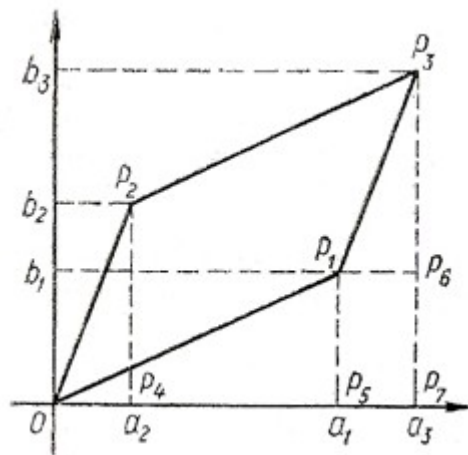


Рисунок 2

Стороны прямоугольного треугольника с вершинами O, P_2, P_4 и P_1, P_2, P_6 параллельны, а длины гипотенуз, являющихся противоположными сторонами параллелограмма, равны. Поэтому эти треугольники равны. Отсюда следует, что длина отрезка (P_5, P_7) (P_5, P_7) , равная длине отрезка (P_1, P_6) (P_1, P_6) , равна длине отрезка (O, P_4) $(0, P_4)$. Поэтому длина отрезка (P_5, P_7) (P_5, P_7) , равна a_2 P_7 , если P_5 P_5 . Отсюда следует, что $a_3 = a_2 + a_1$. $a_3 = a_1 + a_2$.

Совершенно аналогично получаем $b_3 = b_2 + b_1$. $b_3 = b_1 + b_2$.

Оказывается, что точка P_3 , являющаяся четвертой вершиной интересующего нас параллелограмма, есть точка, изображающая комплексное число $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$ т.е. сумму исходных комплексных чисел $z_3 = z_2 + z_1$. $z_3 = z_1 + z_2$.

Рассуждения в случаях, когда точки P_1 и P_2 лежат в других четвертях координатной плоскости, что соответствует тому, что некоторые из вещественных чисел a_1, a_2, b_1, b_2 не положительны, совершенно аналогичны. Только следует при этом учитывать также направления отрезков a_k и b_k ($k=1,2,3$) и соответственно знаки вещественных чисел a_k и b_k ($k=1,2,3$). Рассуждения остаются в силе также и в тех случаях, когда получаем «сплюснутый» параллелограмм, т. е. когда точки O, P_1, P_2 лежат на одной прямой.

Как известно, каждой точке плоскости соответствует вектор, имеющий начало в точке O и конец в данной точке. Такое соответствие между точками и векторами взаимно однозначно. Благодаря этому можно говорить о взаимно однозначном соответствии между комплексными числами и векторами плоскости. Мы получаем новую, очевидным образом связанную с предыдущей, геометрическую интерпретацию комплексных чисел.

Именно в векторной терминологии особенно естественно выглядит определение сложения комплексных чисел. Ведь векторы складываются как раз по правилу параллелограмма. Благодаря этому предыдущая теорема означает следующее.

Если для комплексных чисел z_1, z_2, z_3 по правилу сложения в Z имеет место $z_1 + z_2 = z_3$, то для соответствующих им векторов $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$ по правилу сложения векторов имеет место $\vec{U}_1 + \vec{U}_2 = \vec{U}_3$.

Коротко можно сказать, что сложение комплексных чисел осуществляется по правилу сложения векторов.

Геометрическая интерпретация умножения комплексных чисел не столь непосредственна. Она будет получена после того, как мы введем некоторые новые характеристики комплексных чисел, которые важны и вне зависимости от геометрической интерпретации [2].

Определение. Для комплексного числа $z = a + bi$ арифметическое значение корня $\sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулем комплексного числа z и обозначается через $|z|$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.2.8)$$

Вещественное число φ называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = \arg z$.

Для комплексного числа имеем

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1.2.9)$$

Как следует из свойств извлечения корней в $\mathbb{R}$, для всякого комплексного числа модуль определен и притом единственным образом.

Для числа 0 модуль равен 0. Для прочих комплексных чисел модуль есть положительное вещественное число.

Если $\varphi_0 = \arg z$, то и $\varphi_0 + 2\pi k$ $\varphi_0 = \arg z$, то и $\varphi_0 + 2\pi k$ при любом $k \in \mathbb{N}$ k будет аргументом z . Но никакие другие числа аргументом для $z \neq 0$ $z \neq 0$ не будут.

В дальнейшем очень важно всегда помнить, что аргумент определен для комплексного числа неоднозначно. Если $\varphi_1 = \arg z$ $\varphi_1 = \arg z$ и $\varphi_2 = \arg z$ $\varphi_2 = \arg z$, то нельзя утверждать, что $\varphi_1 = \varphi_2$ $\varphi_1 = \varphi_2$. Можно только сказать, что $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$ $k \in \mathbb{N}$ $k \in \mathbb{N}$, где $k \in \mathbb{N}$.

Что касается числа 0, то ввиду $|0|=0$ $\arg 0$ формул (1.2.8) и (1.2.9) для $\arg 0$ теряют смысл. Поэтому говорят, что аргумент для нуля не определен, или же, что любое вещественное число можно рассматривать в качестве аргумента числа 0.

Смысл введенных в выше понятий делается особенно наглядным при геометрической интерпретации комплексных чисел (Рисунок 3).

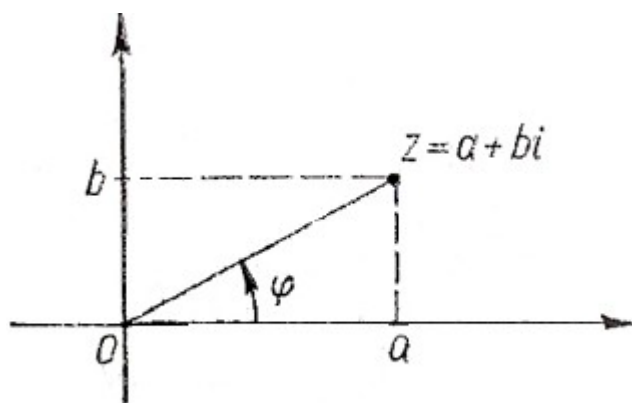


Рисунок 3

Модуль комплексного числа z равен длине отрезка соединяющего начало координат и точку, изображающую z . Иными словами, $|z|$ равен расстоянию от точки, изображающей z , до начала координат.

Угол φ между положительным направлением вещественной оси и направлением из O точку, изображающую $z = a + bi \neq 0$, если его отсчитывать в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, связан с числами a и b как раз формулами (1.2.9):

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}$$

Можно использовать также и отрицательные углы, которые получаются при отсчете в направлении по движению часовой стрелки.

Отсюда следует, что мера указанного угла в радианной системе исчисления равна аргументу комплексного числа z .

В связи с этим обычно несколько неточно, но образно принято говорить, что аргументом комплексного числа является указанный выше угол. Иногда в связи с этим аргумент и задают как угол в градусной мере. Например, говорят, что аргумент некоторого комплексного числа равен 60° или $243^\circ 37'$ и т. п.

Отмеченная выше неоднозначность аргумента связана, очевидно, с рассмотрением углов, превосходящих полный оборот (2π или 360° - в градусном измерении), а также отрицательных углов.

Как следует из формул (1.2.8) и (1.2.9), а с еще большей очевидностью из геометрического их толкования, задание модуля и аргумента в свою очередь вполне определяет комплексное число. Это значит, что для любой пары вещественных чисел r и φ , где $r \geq 0$, $\varphi \geq 0$, существует и притом единственное комплексное число, для которого

$$|z| = r, \arg z = \varphi. \quad |z| = r, \arg z = \varphi$$

(1.2.10)

При этом, если $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq r_2$, то для комплексных чисел z_1 и z_2 , таких, что $|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$, $|z_1| = r_1 u$, $|z_2| = r_2$, $z_1 \neq z_2$, $z_1 \neq z_2$, имеет место

Если же $r_1 = r_2 \neq 0$, то для комплексных чисел z_1 и z_2 , таких, что

$$|z_1| = r_1, \arg z_1 = \varphi_1, |z_2| = r_2, \arg z_2 = \varphi_2$$

равенство $z_1 = z_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$, где k - целое число.

Задание комплексного числа при помощи модуля и аргумента соответствует полярной системе координат на плоскости.

Непосредственно из сказанного выше вытекает справедливость следующего.

Положительные вещественные числа характеризуются тем условием, что их аргументы равны нулю.

Отрицательные вещественные числа характеризуются тем условием, что их аргументы равны π .

Модуль вещественного числа в Z равен его модулю в R .

Чисто мнимые числа характеризуются тем условием, что их аргументы равны $\pm \frac{\pi}{2}$.

Модуль чисто мнимого числа равен модулю коэффициента его мнимой части [3].

Примеры:

5) Для мнимой единицы i имеем:

$$i = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1;$$

$$\arg i = \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{0}{1} = 0, \quad \sin \varphi = \frac{1}{1} = 1,$$

Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, число i характеризуется условиями:

$$|i| = 1, \quad \arg i = \frac{\pi}{2}$$

Это непосредственно видно и из геометрического изображения числа i и геометрического значения модуля и аргумента.

6) Для $z=1-i$ найдем модуль и аргумент.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$\arg z = \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Известно, что в качестве φ можно взять число $-\frac{\pi}{4}$ (разумеется, и всякое число вида $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{N}$).

Теорема 2. Каждое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

где $\varphi \in \mathbb{R}, r > 0$.

Для чисел r и φ имеет место $r = |z|, \varphi = \arg z$.

Доказательство.

1) Для $z = (a, b) = a + bi$ обозначим: $r = |z|, \varphi = \arg z$.

Согласно формулам (1.2.8) и (1.2.9) получаем требуемую форму:

$$z = (a, b) = r \left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r} \right) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

2) Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где r и φ - какие-то вещественные числа, $r > 0$.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r(\cos \varphi, \sin \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r(\cos \varphi, \sin \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

Для $|z|$ и $\arg z = \varphi$ и $|z|u \arg z = \varphi'$ получаем

$$|z| = \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \sqrt{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \sqrt{r^2} = r$$

$$\cos \varphi = \frac{(r \cos \varphi)}{r} = \cos \varphi \quad \sin \varphi' = \frac{(r \sin \varphi)}{r} = \sin \varphi$$

и, следовательно, φ отличается от φ' на целое кратное 2π : $2\pi: \varphi = \varphi' + 2\pi k (k \in \mathbb{N})$.

Определение. Выражение комплексного числа z в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

(1.2.11)

где r и φ вещественны и $r \geq 0$, в котором обязательно имеет место $r = |z|, \varphi = \arg z$. $r = |z|, \varphi = \arg z$, называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Всякое комплексное число может быть задано в тригонометрической форме.

Мы не делаем здесь исключения для случая $z = 0$, поскольку для $z = 0$ тригонометрической формой можно считать выражение

$$0 = 0(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad 0 = 0(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

при любом $\varphi \in \mathbb{R}$.

Согласно (1.2.10) две тригонометрические формы одного и того же комплексного числа $z \neq 0$ могут отличаться лишь аргументами, разность между которыми должна быть целым кратным числа 2π .

Тригонометрическая форма комплексных чисел очень удобна при их перемножении.

Пусть два комплексных числа заданы и в нормальной и в тригонометрической формах:

$$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad z_2 = a_2 + b_2 i = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

На основании исходного определения правила умножения и формулы косинуса и синуса суммы получаем:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$r_2 (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2, \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)];$$

(1.2.12)

$$r_1 r_2 \geq 0$$

Мы получили для произведения комплексных чисел выражение, которое является тригонометрической формой этого произведения:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Во многих случаях рассмотрение и вычисление произведения в такой форме оказывается наиболее удобным.

Так как полученное в формуле (1.2.12) выражение для $z_1 \cdot z_2$ является тригонометрической формой числа $z_1 \cdot z_2$, то благодаря формуле (1.2.11) в этом выражении должно иметь место:

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$$

(1.2.13)

Это означает следующее важное соотношение.

Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей.

Аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей.

Примеры:

7) Найдём произведение комплексных чисел

$$z_1 = 2 \cos 50^\circ + 2i \sin 50^\circ \quad z_2 = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$$

Тригонометрические формы этих чисел имеют вид:

$$z_1 = 2 \cdot (\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ) \quad z_2 = 1 \cdot (\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$$

Поэтому

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot [\cos(50^\circ + 40^\circ) + i \sin(50^\circ + 40^\circ)] = 2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 2 \cdot (0 + i) = 2i$$

8) Произведение

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi) = (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

можно найти, используя тригонометрические формы, если заметить, что тригонометрическая форма второго сомножителя имеет вид:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \cos(\varphi - \varphi) + i \sin(\varphi - \varphi) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)$$

То же можно легко получить, используя умножение комплексных чисел в нормальной форме.

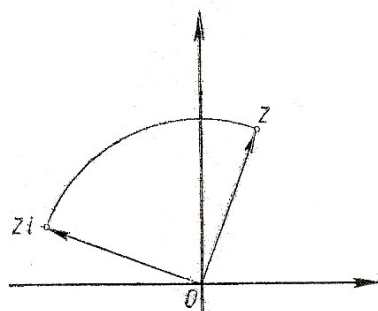


Рисунок 4

9) Так как $|i| = 1$ и $\arg i = \frac{\pi}{2}$ то произведение $z \cdot i$ ($z \in \mathbb{C}$) характеризуется вектором, который получается из вектора, характеризующего z , путём поворота его на $\frac{\pi}{2}$ в направлении, противоположном движению часовой стрелки (Рисунок 4).

10) Число $-z = (-1) \cdot z$ изображается вектором, получающимся путём простого изменения направления для вектора, изображающего z , поскольку $|-1| = 1$ и $\arg(-1) = \pi$.

1.3 Свойство действий во множестве комплексных чисел.

Действия сложения и умножения в Z обладают всеми свойствами, которые имели место во всех предыдущих числовых областях [3].

Действие сложения в Z обладает следующими свойствами:

- 1) Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
- 2) Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
- 3) Обратимость: для любых $z_1, z_2 \in Z$ найдётся $x \in Z$, для которого $z_1 + x = z_2$.

Действие умножения в Z обладает следующими свойствами:

- 1) Коммутативность: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
- 2) Ассоциативность: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;
- 3) Обратимость с ограничением относительно нуля: для любых $z_1, z_2 \in Z$, где $z_1 \neq 0$, найдётся $y \in Z$, для которого $z_1 \cdot y = z_2$.

Действия сложения и умножения в Z связаны свойством дистрибутивности: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Вычитание в Z всегда выполнимо. Если числа заданы в нормальной форме: $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то число $x = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) i$ является разностью: $x = z_2 - z_1$, $z_1 + x = z_2$.

Число $0 - z$ называется противоположным к z и обозначается $-z$: $-z = 0 - z$ (т.е. $z + (-z) = 0$).

Поскольку вычитание в Z всегда выполнимо, для любого $z \in Z$ всегда существует противоположное ему число $-z$. При этом, если $z = a + bi$, то $-z = -a - bi$.

Так же, как и в предыдущих числовых областях доказываются следующие свойства, связанные с вычитанием в Z :

- 1) единственность противоположного числа для данного;

$$\begin{aligned}
2) \quad & -(-z) = z; \quad -(-z) = z \\
3) \quad & -(z_1 + z_2) = (-z_1) + (-z_2) \quad -(z_1 + z_2) = (-z_1) + (-z_2); \\
4) \quad & z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \quad z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).
\end{aligned}$$

Отсюда, как обычно, вытекает однозначность вычитания. А значит, и свойство сокращения сложения: если $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, то $z_1 = z_2$ $z_1 = z_2$.

Также имеют место и другие свойства:

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) - z_3 &= (z_1 - z_3) + z_2 \quad (z_1 - z_3) + z_2 = z_1 + (z_2 - z_3) \\
(z_1 - z_2) - z_3 &= z_1 - (z_2 + z_3) \quad -(z_1 - z_2) = z_2 - z_1 \\
(z_1 - z_2)z_3 &= z_1z_3 - z_2z_3 \quad (-1)z = -z \\
-(z_1)z_2 &= z_1(-z_2) = -z_1z_2 \quad (-z_1) \cdot (-z_2) = z_1 \cdot z_2
\end{aligned}$$

Важным является геометрический смысл модуля разности. Для комплексных чисел z_1 и z_2 модуль их разности $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками, изображающими комплексные числа z_1 и z_2 .

Действительно, если $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$, то $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. Как известно, это и есть расстояние между точками с координатами (a_1, b_1) и (a_2, b_2) .

Для изображенного на рисунке 5 случая имеем:

$$l^2 = |a_1 - a_2|^2 + |b_1 - b_2|^2 \quad l = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \quad (1.3.14)$$

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2| &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \\
|z_1 - z_2| &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \quad (1.3.15)
\end{aligned}$$

Пример:

11) Выясним, что представляет собой совокупность точек, изображающих комплексные числа z , для которых $|z+1-i| \leq 1$.

Указанное соотношение представим в виде $|z - (-1+i)| \leq 1$. Согласно (1.3.14) и (1.3.15) нам нужно найти все точки, расстояние от которых до точки, изображающей комплексное число $-1+i$, не превосходит числа 1. Все такие точки ограничены окружностью (включая точки, лежащие на окружности) с центром в точке, изображающей и радиусом длины 1 (Рисунок).

Деление в Z на числа, отличные от нуля, всегда выполнимо. Если числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме:

$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, $z_1 \neq 0$, $r_1 > 0$, то комплексное число $y = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$ является частным $y = \frac{z_1}{z_2}$ (т.е. $z_1 \cdot y = z_2$).

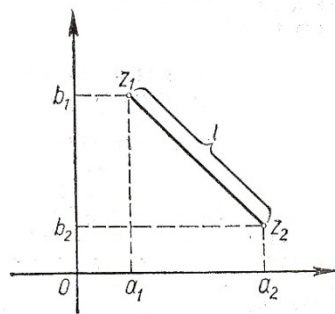


Рисунок 5

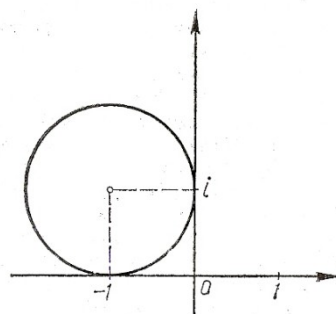


Рисунок 6

Отсюда, в частности, вытекают соотношения:

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \left(\frac{z_1}{z_2}\right) \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg z_2 - \arg z_1$$

Доказательства свойства, связанные с делением в Z :

- 1) Единственность обратного числа для данного;
 $(z^{-1})^{-1} = z (z \neq 0); \quad (z^{-1})^{-1} = z, \quad z \neq 0;$
- 2) $(z_1 \cdot z_2)^{-1} = z_1^{-1} \cdot z_2^{-1} (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0); \quad (z_1 \cdot z_2)^{-1} = z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}, \quad z_1 \neq 0, z_2 \neq 0;$
- 3) $\frac{z_2}{z_1} = z_2 \cdot z_1^{-1}, \quad z_1 \neq 0, \quad \frac{z_2}{z_1} = z_2 \cdot z_1^{-1} (z_1 \neq 0).$
- 4) , .

Отсюда, как обычно, получаем однозначность деления в Z на числа, отличные от нуля. А значит, и свойство сокращения с ограничением относительно нуля для умножения: если $z_1 z = z_2 z$ и $z \neq 0$, то $z_1 = z_2$ и $z_1 z = z_2 z$ и $z \neq 0$, то $z_1 = z_2$.

Имеют место также и другие свойства:

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} \cdot z_2, \quad z_3 \neq 0; \quad \frac{z_1}{z_2} \cdot z_3 = \frac{z_1}{\left(\frac{z_2}{z_3}\right)}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \frac{z_1}{z_3} = \frac{z_1}{z_2 \cdot z_3} \quad (z_2, z_3 \neq 0); \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (z_1, z_2 \neq 0).$$

Вполне аналогично тому, как это делалось в предыдущих числовых областях, для чисел из Z определяется целая степень:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n, \quad z^{-n} = (z^{-1})^n, \quad z \neq 0, \quad z^0 = 1, \quad n \in N^+$$

-и доказываются свойства:

- 1) $z^{-u} = (z^{-1})^u = (z^u)^{-1};$
- 2) $(z_1 \cdot z_2)^u = z_1^u \cdot z_2^u;$
- 3) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^u = \frac{z_1^u}{z_2^u};$
- 4) $z^{u+v} = z^u \cdot z^v;$
- 5) $z^{u-v} = \frac{z^u}{z^v};$

$$6) \quad z^{uv} = (z^u)^v \\ (z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}; z, z_1, z_2 \neq 0; u, v \in \mathbb{N})$$

Рассмотрим возведение в целую степень числа i .
Первые четыре целые неотрицательные степени числа i дают:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i$$

Имеем: $i^4 = 1$. Для нахождения целой степени i^u , где $u \in \mathbb{N}$, следует разделить u на 4:

$$u = 4q + r, (r = 0, 1, 2, 3)$$

Тогда $i^u = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = i^r$. Но для $r = 0, 1, 2, 3$ значения i^r уже определены.

Примеры:

12) Найдем i^{233} . Так как при делении с остатком имеем:

$$-233 = 4 \cdot (-59) + 3, \quad \text{то } i^{-233} = i^3 = -i$$

При возведении комплексного числа $z = a + bi$ в натуральную степень, т.е. при нахождении $z^n = (a + bi)^n$ ($n \in \mathbb{N}$), можно проводить непосредственные перемножения комплексных чисел в нормальной форме или же воспользоваться формулой бинома Ньютона, учитывая правило нахождения натуральных степеней числа i .

Отрицательная степень z^{-n} ($n \in \mathbb{N}^+$) может быть найдена в

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$

Как и при умножении, возведение в целую степень удобно производить исходя из тригонометрической формы комплексного числа.

Пусть комплексное число z задано в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Тогда тригонометрическая форма числа $z^u, (u \in \mathbb{N})$ $z^u (u \in \mathbb{N})$ имеет вид:

$$z^u = (r^u) [\cos(u\varphi) + i \sin(u\varphi)]$$

При $u=0$ $u=0$ требуемое соотношение тоже справедливо:

$$z^0 = 1 = \cos 0 + i \sin 0 = (r^0) [\cos(0\varphi) + i \sin(0\varphi)]$$

Полученную формулу при $r=1$ $r=1$ часто называют формулой Муавра:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

Если левую часть разложить по формуле бинома Ньютона, то равенство вещественных частей и равенство коэффициентов мнимых частей левой и правой частей этого равенства дадут нам выражения $\cos(n\varphi)$ $\cos(n\varphi)$ и $\sin(n\varphi)$ $\sin(n\varphi)$, через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

13) Найдем нормальную форму числа $(1+i)^{100}$ $(1+i)^{100}$.
Представим число $1+i$ $1+i$ в тригонометрической форме:

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (1+i)^{100} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{100} = (\sqrt{2})^{100} [\cos 25\pi + i \sin 25\pi] = \\ &= 2^{50} (\cos \pi + i \sin \pi) = 2^{50} \cdot (-1) = -2^{50} \end{aligned}$$

Этот же ответ мы можем получить и другим путём, если заметим, что $(1+i)^2 = 2i$

$$(1+i)^2 = 2i. \quad \text{Тогда} \quad (1+i)^{100} = (2i)^{50} = 2^{50} \cdot i^{50} = -2^{50}$$

1.4 Сопряжённые комплексные числа

Пусть дано комплексное число $\alpha = a + bi$. Число $\overline{\alpha} = a - bi$, отличающееся от α лишь знаком при мнимой части, называется числом, сопряженным с α , и обозначается $\overline{\alpha}$.

Напомним, что при рассмотрении деления комплексных чисел мы прибегали к сопряженным числам, хотя и не вводили этого названия.

Числом, сопряженным с $\overline{\alpha}$, будет, очевидно, α , т. е. можно говорить о паре сопряженных чисел. Действительные числа, и только они, сопряжены сами себе.

Геометрически сопряженные числа являются точками, симметричными относительно действительной оси. Отсюда следуют равенства

$$|\overline{\alpha}| = |\alpha| \quad \arg \overline{\alpha} = -\arg \alpha$$

Сумма и произведение сопряженных комплексных являются действительными числами. В самом деле,

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \overline{\alpha} &= 2a, \\ \alpha \overline{\alpha} &= a^2 + b^2 = |\alpha|^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.16)$$

Последнее равенство показывает, что число $\alpha \overline{\alpha}$ даже положительно при $\alpha \neq 0$.
Равенство

$$(a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$$

показывает, что число, сопряженное с суммой двух чисел, равно сумме чисел, сопряженных со слагаемыми:

$$\alpha + \beta = \alpha + \beta, \quad \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

(1.4.17)

Аналогично, из равенства

$$(a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

вытекает, что число, сопряженное с произведением, равно произведению чисел, сопряженных с сомножителями:

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} \quad \alpha'\beta = \alpha' \cdot \beta$$

Непосредственная проверка показывает также справедливость форму

$$\alpha - \beta = \alpha - \beta \quad \overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$$

(1.4.18)

$$\left(\frac{\overline{\alpha}}{\beta}\right) = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \quad \left(\frac{\alpha'}{\beta}\right) = \frac{\alpha'}{\beta}$$

(1.4.19)

Докажем следующее утверждение: если число α некоторым образом выражено через комплексные числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ при помощи сложения, умножения, вычитания и деления, то, заменяя в этом выражении все числа β_k их сопряженными, мы получим число, сопряженное с α ; в частности, если число α действительное, то оно не меняется при замене всех комплексных чисел β_k их сопряженными.

Будем доказывать это утверждение индукцией по n , так как при $n=2$ оно вытекает из формул (1.4.16) - (1.4.19).

Пусть число α выражено через числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ не обязательно различные. В этом выражении указан определенный порядок, в котором применяются операции сложения, умножения, вычитания и деления.

Последним шагом будет применение одной из этих операций к числу γ_1 , выраженному через числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ $1 \leq k \leq n-1$ $1 \leq k \leq n-1$, где

и к числу γ_2 , выраженному через числа $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$. По индуктивному предположению замена чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ на сопряженные влечет за собой замену числа γ_1 на $\overline{\gamma_1}$, а замена чисел $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n$ на сопряженные заменяет γ_2 на $\overline{\gamma_2}$. Однако по одной из формул (1.4.16) — (1.4.19) переход от γ_1 и γ_2 к $\overline{\gamma_1}$ и $\overline{\gamma_2}$ превращает число α в $\overline{\alpha}$.

Вполне ясна геометрическая интерпретация взаимно сопряженных чисел. Они изображаются точками, расположенными симметрично относительно оси абсцисс (Рисунок 7)

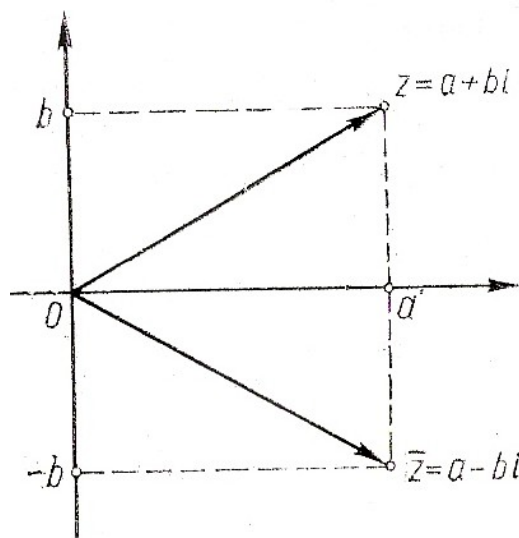


Рисунок 7

Геометрическая интерпретация операции сопряжения, заключается в симметрии координатной плоскости относительно оси абсцисс, т.е. в таком преобразовании координатной плоскости, которое всякой точке плоскости сопоставляет симметричную ей точку относительно оси абсцисс. «Неподвижными» точками при таком преобразовании оказываются точки, лежащие на оси абсцисс, т.е. точки, изображающие вещественные числа [4].

1.5 Извлечение корня в области комплексных чисел. Корни из единицы

Комплексное число u называется корнем n -й степени комплексного числа z , если $u^n = z$ $u^n = z$ $(n \in N^+)$ $n \in N^+$ i из

Как обычно, в этом случае используется обозначение: $u = \sqrt[n]{z}$ $u = \sqrt[n]{z}$.

Как уже отмечалось, такое обозначение, вообще говоря, неоднозначно, т.е. могут существовать числа $u_1 \neq u_2$ $u_1 \neq u_2$ $u_1^n = u_2^n = z$, для которых

$u_1^n = u_2^n = z$, т.е. $u_1 = \sqrt[n]{z}$ $u_2 = \sqrt[n]{z}$ $u_1 = \sqrt[n]{z}, u_2 = \sqrt[n]{z}$. В случаях, когда такая неоднозначность в обозначениях нежелательна, обычно устанавливается

договоренность о том, что в пределах какого-то одного рассуждения под $\sqrt[n]{z}$ понимается какое-либо одно определенное значение корня. Именно так мы поступали при рассмотрении свойств арифметического корня в области вещественных чисел R .

Одной из важнейших и характерных особенностей системы комплексных чисел Z , отличающей ее от предыдущих числовых систем, является неограниченная возможность извлечения корня.

Вопрос извлечения корней из вещественных чисел был основным в историческом развитии понятия числа, приведшим к пониманию необходимости расширения числовых систем до системы комплексных чисел.

При использовании общей формулы для нахождения решений квадратного уравнения приходилось рассматривать выражения вида $\sqrt{-a}$, где a - положительное вещественное число. Отсутствие значений этого корня в области вещественных чисел заставляло считать невозможными те случаи, которые приводили к таким выражениям. Однако уже в XVI в. при рассмотрении кубических уравнений, решаемых методом, предложенным Кардано, пришлось сталкиваться с таким положением, когда все решения кубического уравнения оказывались вещественными, но формулы Кардано содержали квадратные корни из отрицательных вещественных чисел. Такие случаи стали предметом специальных исследований. Появилась необходимость в оперировании с такими выражениями. Начиная с XVI в. проводились исследования возможности совершения формальных действий с выражениями, содержащими квадратные корни из отрицательных вещественных чисел.

Введение в рассмотрение формальных выражений $a + b\sqrt{-1}$ ($a, b \in R$), называемых комплексными числами, и изучение формальных правил действий с ними имело положительное влияние на

развитие алгебры и математического анализа. Однако истинный смысл рассматриваемых понятий не был выяснен вплоть до начала XIX в. Комплексные числа в понимании исследователей оставались «ложными», «поистине софистическими», «мнимыми» числами. Такое представление отразилось и на самом названии мнимых чисел.

На рубеже XVIII и XIX вв. Гауссом была доказана одна из важнейших алгебраических теорем о разрешимости в области комплексных чисел всякого алгебраического уравнения ненулевой степени (при этом рассматривались вещественные коэффициенты), т. е. уравнения вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_i \in R, a_0 \neq 0, n \geq 1)$$

$(a_i \in R, a_0 \neq 0, n \geq 1)$. Это значит, что для любого такого уравнения найдется комплексное число, являющееся его решением. Гаусс провел разнообразные исследования свойств комплексных чисел. В частности, он указал на геометрическую интерпретацию комплексных чисел с помощью точек координатной плоскости.

Исследования французским математиком О. Коши (1789-4857) свойств комплексных чисел в применении их к математическому анализу привели к развитию теории функций комплексной переменной, которая в настоящее время достигла большого развития для широкого применения. Коши обратил внимание на то, что условие равенства двух комплексных чисел означает совокупность двух равенств между вещественными числами. Такой подход означал возможность строгого обоснования теории комплексных чисел.

Первое формально - логическое обоснование системы комплексных чисел было проведено английским математиком В. Гамильтоном (1805—1865). Теория комплексных чисел по Гамильтону - операторная; комплексные числа характеризуются векторами, обозначающими переход из одной точки плоскости в другую. Такой подход привел к рассмотрению комплексных чисел как пар вещественных чисел.

Исследования возможности дальнейшего расширения понятия числа с помощью n -членных последовательностей проводились Гамильтоном, а также немецкими математиками Грассманом (1809—1877), Фробениусом (1849 — 1917) и другими. Оказалось невозможным дальнейшее расширение понятия числа с сохранением всех свойств, присущих системе комплексных чисел.

Прежде чем перейти к решению вопроса об извлечении корня в области комплексных чисел, заметим, что этот вопрос можно было бы естественно связать с нахождением всех решений уравнений вида

$$x^2 - z = 0$$

где $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^+$ $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^+$. Как легко видеть, все решения этого уравнения образуют множество всех значений корня n -й степени из z .

Вопрос об извлечении корня из нуля решается очень просто. Число 0 является единственным значением $\sqrt[n]{0}$, число 0 - единственное число, n -я степень которого равна нулю: $0^n = 0$ $0^n = 0$.

Вопрос о нахождении всех значений корня n -й степени из произвольного комплексного числа $z \neq 0$ $z \neq 0$ с полной ясностью решается лишь при использовании тригонометрической формы задания комплексного числа.

Теорема 3. Корень n -й степени $(n \in \mathbb{N}^+)$ $n \in \mathbb{N}^+$ из комплексного числа $z \neq 0$ $z \neq 0$ имеет ровно n значений.

Если число z задано в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), (r > 0)$$

то всеми значениями $\sqrt[n]{z}$ $\sqrt[n]{z}$ являются числа

$$t_k = \left(\sqrt[n]{r} \right) \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right)$$

при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. В этой формуле $\sqrt[n]{r}$ $\sqrt[n]{r}$ означает арифметический корень n -й степени из положительного вещественного числа r . [6]

Доказательство.

1) Каждое из указанных чисел t_k t_k является значением $\sqrt[n]{z}$ $\sqrt[n]{z}$.

$$(t_k)^n = \left(\sqrt[n]{r} \right)^n \left[\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k) \right] = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z$$

2) Пусть какое-либо значение $\sqrt[n]{z}$, т. е. $v^n = z$ $v^n = z$. Зададим v в тригонометрической форме:

$$v = \rho(\cos \omega + i \sin \omega)$$

$$v^n = \rho^n (\cos n\omega + i \sin n\omega)$$

Из равенства $v^n = z$ $v^n = z$ получаем, что $\rho^n = r$ $\rho^n = r$ и, значит, $\rho = \sqrt[n]{r}$ $\rho = \sqrt[n]{r}$ - арифметический корень n -й степени из r : $\rho = \sqrt[n]{r}$ $\rho = \sqrt[n]{r}$. Также получаем,

что $n\omega = \varphi + 2\pi s$ $n\omega = \varphi + 2\pi s$ при некотором $s \in N$ $s \in N$, т. е. $\omega = \frac{\varphi + 2\pi s}{n}$ $\omega = \frac{\varphi + 2\pi s}{n}$.

Разделив s остатком s на n : $s = nq + r$ $(r = 0, 1, 2, \dots, n-1)$, $s = nq + r$ $(r = 0, 1, 2, \dots, n-1)$, имеем

$$v = \left(\sqrt[n]{r}\right) \left[\cos \frac{\varphi + 2\pi(nq + r)}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi(nq + r)}{n} \right] = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi r}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi r}{n} \right)$$

Значит, указанные в формуле теоремы числа t_k $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ t_k $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ дают все значения $\sqrt[n]{z}$ $\sqrt[n]{z}$.

3) Осталось показать, что числа $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ различны между собой. Для этого достаточно показать, что разность между аргументами любых двух различных чисел из указанной совокупности не является целым кратным числа t_k .

Рассмотрим аргументы чисел t_k t_k и t_j $0 \leq k < j \leq n-1$; $0 \leq k < j \leq n-1$;

$$\arg(t_k) = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad \arg(t_j) = \frac{\varphi + 2\pi j}{n} \quad 0 \leq k < j \leq n-1;$$

$$\arg(t_k) = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \arg(t_j) = \frac{\varphi + 2\pi j}{n}$$

Разность между аргументами этих чисел

$$\arg(t_j) - \arg(t_k) = 2\pi \left(\frac{j-k}{n} \right)$$

не является целым кратным числа 2π .

В связи с доказанной теоремой мы приходим к геометрической интерпретации извлечения корня n -й степени из комплексного числа.

Изобразим точками на комплексной плоскости значения $\sqrt[n]{z}$ ($z \neq 0$), $\sqrt[n]{z}$ ($z \neq 0$).

$$t_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ (Рисунок 8).

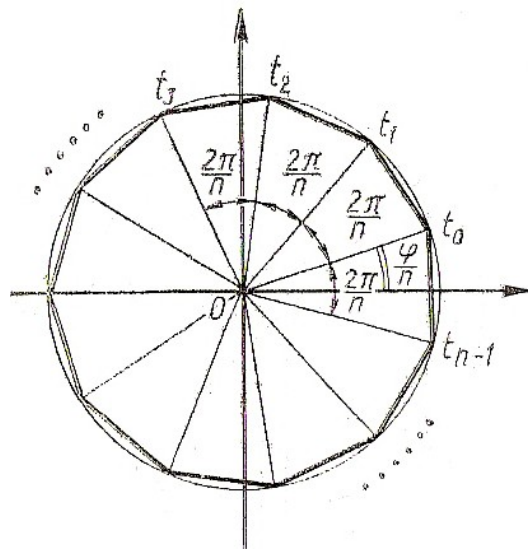


Рисунок 8

Модули комплексных чисел $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ равны арифметическому значению корня $\sqrt[n]{r}$. Поэтому точки, изображающие числа $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ все находятся на расстоянии $\sqrt[n]{r}$ от начала координат, т.е. лежат на окружности (Рисунок 6) с центром в точке 0 и радиусом, длина которого равна $\sqrt[n]{r}$.

Аргумент числа t_0 равен $\frac{\varphi}{n}$.

Таким образом, точки, изображающие значения $\sqrt[n]{z}$, оказываются расположенными в вершинах правильного n -угольника, который в свою очередь вписан в окружность с центром в начале координат и радиусом

длины $\sqrt[n]{r}$. При этом вектор, соответствующий одному из значений $\sqrt[n]{z}$ (именно числу t_0), образует с осью абсцисс угол, равный $\frac{\varphi}{n}$.

Пример:

14) Найдем все значения $\sqrt[4]{-4}$. Тригонометрической формой числа -4 является: $-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Всеми значениями $\sqrt[4]{-4}$ являются числа:

$$t_k = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

то есть

$$t_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = 1 + i$$

$$t_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = -1 + i$$

$$t_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = -1 - i$$

$$t_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = 1 - i$$

Полученные значения изобразим точками на координатной плоскости (Рисунок 9)

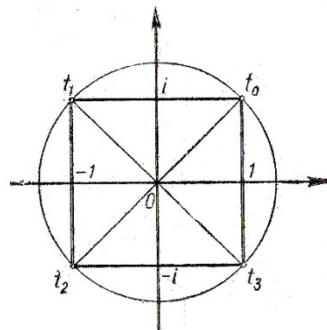


Рисунок 9

Особенно важен случай извлечения корня n -й степени из числа 1. Этот корень имеет n значений, причем, ввиду равенства $1 = \cos 0 + i \sin 0$ $1 = \cos 0 + i \sin 0$, все

эти значения или, как мы будем говорить, все корни n -й степени из единицы, даются формулой

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.5.20)$$

Действительные значения корня n -й степени из единицы получаются из

формулы (1.5.20) при значениях $k=0$ и $\frac{n}{2}$, если n четно, и при $k=0$, если n нечетно.

На комплексной плоскости корни n -й степени из единицы расположены на окружности единичного круга и делят ее на n равных дуг; одной из точек деления служит число 1. Отсюда следует, что те из корней n -й степени из единицы, которые не являются действительными, расположены симметрично относительно действительной оси, т. е. попарно сопряжены.

Квадратный корень из единицы имеет два значения: 1 и -1 корень четвертой степени из единицы - четыре значения: 1, -1, i и $-i$. Для дальнейшего полезно запомнить значения кубического корня из единицы. Это

будут, ввиду (1.5.20), числа $\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ и $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, где $k = 0, 1, 2$, т.е., кроме самой единицы, также сопряженные между собою числа

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \varepsilon_2 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.5.21)$$

Все значения корня n -й степени из комплексного числа α можно получить умножением одного из этих значений на все корни n -й степени из единицы. Действительно, пусть β будет одно из значений корня n -й степени из числа α , т.е. $\beta^n = \alpha$, а ε - произвольное значение корня n -й степени из единицы, т. е. $\varepsilon^n = 1$. Тогда $\beta \varepsilon$ также будет одним из значений для $\sqrt[n]{\alpha}$. Умножая β на каждый из корней n -й степени из единицы, мы получаем n различных значений корня n -й степени из числа α , т. е. все значения этого корня.

Произведение двух корней n -й степени из единицы само является корнем n -й степени из единицы. Действительно, если $\varepsilon^n = 1$ и $\mu^n = 1$

$\mu^n=1$, то $(\varepsilon\mu)^n = \varepsilon^n \mu^n = 1$ $(\varepsilon\mu)^n = \varepsilon^n \mu^n = 1$. В самом деле, пусть $\varepsilon^n = 1$ $\varepsilon^n = 1$.

Тогда из $\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} = 1$ $\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} = 1$ $\varepsilon^n \cdot (\varepsilon^{-1})^n = 1$ $(\varepsilon^{-1})^n = 1$ $(\varepsilon^{-1})^n = 1$ следует, т.е. Вообще, всякая степень корня n -й степени из единицы также есть корень n -й степени из единицы.

Всякий корень k -й степени из единицы будет также корнем n -й степени из единицы для всякого l , кратного k . Отсюда следует, что если мы будем рассматривать всю совокупность корней n -й степени из единицы, то некоторые из этих корней уже будут корнями n' -й степени из единицы для некоторых n' , являющихся делителями числа n . Для всякого n существуют, однако, такие корни n -й степени из единицы, которые не являются корнями из единицы никакой меньшей степени. Такие корни называются первообразными корнями n -й степени из единицы. Их существование вытекает из формулы (1.6.20): если значение корня, соответствующее данному значению k , мы обозначим через ε^k (так что $\varepsilon_0 = 1$ $\varepsilon_0 = 1$), то на основании формулы Муавра

$$\varepsilon_1^k = \varepsilon_k$$

Никакая степень числа ε_1 ε_1 , меньшая, чем n -я, не будет, следовательно, равна 1, т.е. $\varepsilon_1 \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ $\varepsilon_1 \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ является первообразным корнем.

Корень n -й степени из единицы ε ε тогда и только тогда будет первообразным, если его степени ε^k $k = 0, 1, \dots, n-1$ $\varepsilon^k, k = 0, 1, \dots, n-1$, различны, т.е. если ими исчерпываются все корни n -й степени из единицы.

Действительно, если все указанные степени числа ε ε различны, то ε будет, очевидно, первообразным корнем n -й степени. Если же, например, $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ при $0 \leq l < k \leq n-1$ $0 \leq l < k \leq n-1$, то $\varepsilon^{l-k} = 1$ $\varepsilon^{l-k} = 1$, т.е., ввиду неравенств $1 \leq l-k \leq n-1$ $1 \leq l-k \leq n-1$, корень ε ε не будет первообразным.

Число ε_1 ε_1 , найденное выше, в общем случае - не единственный первообразный корень n -й степени. Для разыскания всех этих корней служит следующая теорема.

Если ε есть первообразный корень n -й степени из единицы, то число ε^k тогда и только тогда будет первообразным корнем n -й степени, если k взаимно просто с n .

В самом деле, пусть d будет наибольшим общим делителем чисел k и n . Если $d > 1$ и $k = dk', n = dn'$, то

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{k'n} = (\varepsilon^n)^{k'} = 1$$

т.е. корень ε^k оказался корнем n' -й степени из единицы.

Пусть, с другой стороны, $d = 1$ и пусть, вместе с тем, число ε^k оказывается корнем n -й степени из единицы, $1 \leq m < n$. Таким образом

$$(\varepsilon^k)^m = \varepsilon^{km} = 1$$

Так как число ε - первообразный корень n -й степени из единицы, т. е. лишь его степени с показателями, кратными n , могут быть равными единице, то число km будет кратным n . Отсюда вытекает, однако, так как $1 \leq m < n$, что числа k и n не могут быть взаимно простыми в противоречие с предположением.

Таким образом, число первообразных корней n -й степени из единицы равно числу целых положительных чисел k , меньших n и взаимно простых с ним. Выражение для этого числа, обычно обозначаемого через $\varphi(n)$, можно найти в любом курсе теории чисел.

Если p - простое число, то первообразными корнями p -й степени из единицы будут все эти корни, кроме самой единицы. С другой стороны, среди корней четвертой степени из единицы первообразными будут i и $-i$, но не 1 и -1 .

Примеры:

15) Корни кубического уравнения $z^3 - 1 = 0$ имеют следующий вид:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Нужно показать, что

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \begin{cases} 2, n \equiv \text{mod } 3; \\ -1, n \not\equiv \text{mod } 3. \end{cases}$$

Решение необходимо проверить:

$$z_1^2 = z_2, \quad z_2^2 = z_1, \quad z_2^3 = z_2 \cdot z_1 = 1,$$

где z_1 и z_2 - попарно сопряженные комплексные числа.
Так как

$$z_1^3 = z_1 \cdot z_2 = 1,$$

то отсюда следует, что

$$z_1^{3k} = 1, \quad k \text{ - любое число.}$$

$$\text{Тогда } z_2^{3k} = 1, \quad z_1^{3k+1} = z_1, \quad z_1^{3k+2} = z_2, \quad z_1^{3k+1} + z_2^{3k+2} = z_1 + z_2 = -1.$$

$$\text{Аналогично, } z_1^{3k+2} + z_2^{3k+2} = z_2 + z_1 = -1.$$

Предложим еще один вариант решения задачи: $z^3 - 1 = 0$.
Для решения составим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + 1 = 0, \\ z_1 \cdot z_2 + z_1 + z_2 = 0, \\ z_1 \cdot z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1^3 = z_2^3 = 1, \\ z_1 + z_2 = -1, \\ z_1 \cdot z_2 = 1 \end{cases}$$

Возведем обе части второго уравнения системы в квадрат:

$$(z_1 + z_2)^2 = (-1)^2, \\ z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 1,$$

Удвоенный множитель $2z_1z_2 = 2 \cdot 1 = 2$, поэтому:

$$z_1^2 + z_2^2 = 1 - 2z_1z_2 = -1.$$

Тогда

$$\begin{cases} z_1^{3k} = 1, \\ z_1^{3k+1} = z_1, \\ z_1^{3k+2} = z_1^2. \end{cases}; \begin{cases} z_2^{3k} = 1, \\ z_2^{3k+1} = z_2, \\ z_2^{3k+2} = z_1. \end{cases}$$

1.6 Одно применение целых комплексных чисел в теории Пифагоровских треугольников

Приведём одно утверждение, связанное с Пифагоровскими треугольниками. Напомним, что треугольник со сторонами $\{x, y, z\}$ называется *Пифагоровым*, если (x, y, z) -

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x, y, z \in \mathbb{Z} \\ x, y, z \neq 0 \end{cases}; \quad x, y, z \in \mathbb{Z}; x, y, z \neq 0;$$

Пример:

16) Вавилонский треугольник $(3, 4, 5)$: $3^2 + 4^2 = 5^2$ или $4^2 + 3^2 = 5^2$.
 $3^2 + 4^2 = 5^2$ или $4^2 + 3^2 = 5^2$. Введём понятие множества целых комплексных чисел $\mathbb{K}(i)$ $\mathbb{K}(i)$.

Теорема 4. Пусть $z \in \mathbb{K}(i)$ $z \in \mathbb{K}(i)$ - множество всех комплексных чисел и $z = a + bi$; $a^2 + b^2 \neq 0$ и $z = a + bi$; $a^2 + b^2 \neq 0$; Тогда z^2 - порождает $x^2 + y^2 = z^2$ Π_Δ - пифагоровский треугольник. В этом множестве все операции (сложение, вычитание, умножение) выполняются, но операции деления (кроме на нуль) не всегда!

Доказательство. Найдём произведение $z^2 = z \cdot z = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
 $z^2 = z \cdot z = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

Положим:

$$\begin{aligned} x &= a^2 + b^2 = \operatorname{Re} Z^2; \\ y &= 2ab = \operatorname{Im} Z^2 \end{aligned}$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

Примеры:

17) $z = 2 + i$;

$$z^2 = (2 + i)(2 + i) = 4 + 2i + 2i + i^2 = (4 - 1) + 4i = 3 + 4i \quad ; \quad z = (2 + i);$$

$$x = 3, y = 4, z = 5$$

$$z = x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$$

18) $z = (3 + 2i) \quad ; \quad z = (4 + i);$

$$(3 + 2i)(3 + 2i) = 9 + 6i + 6i - 4 = (9 - 4) + 12i = 5 + 12i \quad ;$$

$$x = 5, y = 12, z = 13$$

$$z = x^2 + y^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$$

2. КРУГОВЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Общий вид уравнения n -ной степени, в котором n некоторое положительное число, есть

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (2.1)$$

Коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ этого уравнения, при условии что старший коэффициент a_0 отличен от нуля, мы будем считать произвольными комплексными числами.

Если написано уравнение (2.1), то значит предполагается, что требуется найти такие числовые значения для неизвестного x , которые будут удовлетворять этому уравнению, а это значит, что после того, как мы подставим его вместо неизвестного и выполним все указанные операции левая часть уравнения (2.1) обратится в нуль.

Целесообразно будет, если мы заменим задачу решения уравнения (2.1) более общей задачей изучения левой части этого уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (2.2)$$

которая называется *многочленом n -ной степени от неизвестного x* .

Многочленом называется только сумма целых неотрицательных степеней неизвестного x , которые взяты с некоторыми числовыми коэффициентами, то есть только выражение вида (3.2). Выражения, которые содержат неизвестное x с дробными или отрицательными показателями мы не будем называть многочленам. Сокращенно для записи многочленов употребляются символы $f(x)$, $g(x)$ и так далее.

2.1 Деление многочленов. Делимость многочленов. Свойства делимости

Теория многочленов, в некоторой степени похожа на теорию целых чисел, несмотря на то, что внешне эти две теории не имеют ничего общего. Сходство этих теорий объясняется тем, что для многочленов, так же как и для целых чисел, можно определить деление и даже деление с остатком.

Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x) \neq 0$, если существует такой многочлен $q(x)$, что выполняется равенство

$$f(x) = g(x)q(x). \quad (2.1.1)$$

Пример:

19) Из равенства $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ мы видим, что $x^3 + 1$ делится на многочлен $x + 1$ и на многочлен $x^2 - x + 1$.
Многочлен $q(x)$ в равенстве (2.1.1) определяется однозначно. В случае существования многочлена $q_1(x)$, удовлетворяющего равенству (2.1.1), мы получили бы, что

$$f(x) = g(x)q(x) = g(x)q_1(x) \quad (2.1.2)$$

откуда $g(x)[q(x) - q_1(x)] = 0$.

Так как многочлен $g(x)$ по условию ненулевой, и в силу утверждения $s(x)g(x) = 0 \Rightarrow s(x) = 0$ или $g(x) = 0$ видим, что многочлен $q(x) - q_1(x)$ является нулевым, т.е. многочлен $q_1(x)$ совпадает с $q(x)$.

В равенстве (2.1.1) многочлен $q(x)$ называется частным от деления $f(x)$ на $g(x)$, а $g(x)$ — делителем.

Отметим несколько основных свойств делимости многочленов.

Свойства:

1. Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ будет делиться на $h(x)$.

В самом деле, по условию $f(x) = g(x)\varphi(x)$ и $g(x) = h(x)\psi(x)$, а поэтому $f(x) = h(x)[\psi(x)\varphi(x)]$.

2. Если $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то произведение $f(x)$ на любой многочлен $g(x)$ также будет делиться на $\varphi(x)$.

Если $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, то $f(x)g(x) = \varphi(x)[\psi(x)g(x)]$.

3. Если $f(x)$ и $g(x)$ делятся на $\varphi(x)$, то их сумма и разность также делятся на $\varphi(x)$.

Из равенств $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ и $g(x) = \varphi(x)\chi(x)$ вытекает $f(x) \pm g(x) = \varphi(x)[\psi(x) \pm \chi(x)]$.

Из свойств 2 и 3 вытекает следующее свойство:

4. Если каждый из многочленов $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ делится на $\varphi(x)$, то на $\varphi(x)$ будет делиться и многочлен $f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \dots + f_n(x)g_n(x)$, где $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ - произвольные многочлены.

5. Если $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то $f(x)$ делится и на $c\varphi(x)$, где c - произвольное число отличное от нуля.

Из равенства $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ следует равенство $f(x) = c \cdot c^{-1}\varphi(x) \cdot \psi(x) = [c\varphi(x)][c^{-1}\psi(x)]$.

6. Всякий многочлен $f(x)$ делится на любой многочлен нулевой степени.

Если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, а c - произвольное число, не равное нулю, то есть произвольный многочлен нулевой степени, то

$$f(x) = c\left(\frac{a_0}{c}x^n + \frac{a_1}{c}x^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{c}\right).$$

7. Многочлены $cf(x)$, $c \neq 0$, и только они будут делителями многочлена $f(x)$, имеющими такую же степень, что и $f(x)$.

Действительно, $f(x) = c^{-1}[cf(x)]$. То есть $f(x)$ делится на $cf(x)$.

Если $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, причем степени $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают, то степень частного от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ должна быть равной нулю, то есть $f(x) = b\varphi(x)$ $b \neq 0$, откуда $\varphi(x) = b^{-1}f(x)$.

Отсюда вытекает следующее свойство:

8. Тогда и только тогда многочлены $f(x)$, $g(x)$ одновременно делятся друг на друга, если $g(x) = cf(x)$ $c \neq 0$.

Из 1 и 8 вытекает свойство:

9. Всякий делитель одного из двух многочленов $f(x)$, $cf(x)$, где $c \neq 0$, будет делителем и для другого многочлена.

Указанные выше свойства делимости многочленов можно применять для изучения делимости во множестве целых чисел.

Пример:

20) Для каких целых чисел n число $n^3 + n^2 - 5n - 2$ является простым? Натуральное число, отличное от 1, в случае, если оно делится только на 1 и на само себя, называется простым и целое отрицательное число k называется простым, если число $-k$ простое.

Для того чтобы найти ответ на поставленный вопрос отметим справедливость равенства

$$x^3 + x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(x^2 + 3x + 1), \quad (2.1.3)$$

и поэтому число $n^3 + n^2 - 5n - 2$ делится на $n - 2$ и на $n^2 + 3n + 1$. Отсюда, оно может быть простым лишь в случае, когда один из этих делителей равен 1 или -1 , т.е. выполняется хотя бы одно из равенств $n - 2 = 1$, $n - 2 = -1$, $n^2 + 3n + 1 = -1$.

Нам осталось проверить следующие значения n : 3, 1, 0, -3, -1 и -2. При этих значениях n рассматриваемое нами число будет равно соответственно $\{3, 1, 0, -3, -1\}$.

19, -5, 3, 4, следовательно, искомое множество чисел есть

Из данного примера мы видим, что для решения задач, которые связаны с делимостью целых чисел, умение выяснять, делится ли данный многочлен на некоторый другой многочлен (раскладывается ли на множители) является полезным.

2.2 Основные свойства круговых многочленов.

Многочлен $\Phi_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - \varepsilon_k)$, где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ - примитивные корни степени n из единицы и $\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$, называют *круговым многочленом*, или *многочленом деления круга* порядка n . Например, $\Phi_1(x) = x - 1$, $\Phi_2(x) = x + 1$, $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$.

В число первообразных корней (из единицы) при $n > 2$ степени n не входит ± 1 . В этом случае первообразные корни следует разбить на пары комплексно сопряженных чисел. Отсюда при $n > 2$ степень многочлена Φ_n четна [10].

Из определения кругового многочлена видим, что

$$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$$

Теорема 5. Пусть $n > 1$ - нечетное число. Тогда

$$\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$$

Доказательство. Если $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ - первообразные корни степени n , то $-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_{\varphi(n)}$ - первообразные корни степени $2n$. Таким образом,

$$\Phi_n(-x) = (-x - \varepsilon_1) \cdot \dots \cdot (-x - \varepsilon_{\varphi(n)})$$

$$\Phi_{2n}(x) = (x + \varepsilon_1) \cdot \dots \cdot (x + \varepsilon_{\varphi(n)})$$

Теорема доказана. Заметим, что степень многочлена Φ_n четна.

Следствие. Если $m = 1$, $P_1(x) = 1$, то $P_m(x) = P_n(x)$ и тогда если подставлять данные в равенство (1), получаем:

$$P_n(x) = P_n(x)$$

2.3 Формула обращения Мёбиуса

Функция Мёбиуса - мультипликативная функция, которая определена равенствами: $\mu(p) = -1$, $\mu(p^\alpha) = 0$, $\alpha > 1$, если p простое.

Из этого определения, в частности следует, что:

1) Если в каноническом разложении $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ числа a по меньшей мере один из показателей $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ превосходит 1 (если a делится на квадрат, отличный от 1), то имеем $\mu(a) = 0$.

2) В противном случае, то есть в случае, когда каноническое разложение числа a имеет вид $a = p_1 \dots p_k$, имеем $\mu(a) = (-1)^k$.

Примеры:

21) $\mu(1) = 1$,	25) $\mu(5) = -1$,	29) $\mu(9) = 0$,
22) $\mu(2) = -1$,	26) $\mu(6) = 1$,	30) $\mu(10) = 1$,
23) $\mu(3) = -1$,	27) $\mu(7) = -1$,	31) $\mu(11) = -1$,
24) $\mu(4) = 0$,	28) $\mu(8) = 0$,	32) $\mu(12) = 0$.

Теорема 6. Пусть $\theta(a)$ - мультипликативная функция и $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ - каноническое разложение числа a . Тогда имеем:

$$\sum_{a|b} \mu(d)\theta(d) = (1 - \theta(p_1)) \dots (1 - \theta(p_k))$$

(в случае $a=1$ правую часть считаем равной 1).

Соотношение

$$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$$

Позволяет нам получить явное выражение для $\Phi_n(x)$ через $x^d - 1$, где d пробегает делители n . Для этого имеется общая конструкция, которая основана на функции Мёбиуса

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ (-1)^k, n = p_1 \dots p_k \\ 0, n = p^2 m \end{cases};$$

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

Теорема 7 (Мёбиус). Если , то

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d) = \sum_{d|n} \mu(n/d) F(d)$$

Доказательство. Для начала проверим, что при всех $n > 1$ выполняется

соотношение $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Тогда

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|p_1 \dots p_k} \mu(d) = 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \dots + (-1)^k = (1-1)^k = 0$$

Ясно, что

$$\sum_{ab=n} F(a) \mu(b) = \sum_{d_1 d_2 b = n} f(d_1) \mu(b) = \sum_{d_1|n} \left(f(d_1) \sum_{d_1 b = n/d_1} \mu(b) \right)$$

Пусть $n/d_1 = m$. Тогда

$$\sum_{d_2 b = m} \mu(b) = \sum_{b|m} \mu(b) = \begin{cases} 1, n = d_1; \\ 0, n \neq d_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_{d_1|n} \left(f(d_1) \sum_{d_2 b = n/d_1} \mu(b) \right) = f(n)$$

$$F(n) = \prod_{d|n} f(d)$$

Следствие. Если , то

$$f(n) = \prod_{d|n} F(n/d)^{\mu(d)} = \prod_{d|n} F(d)^{\mu(n/d)}$$

Для круговых многочленов формула обращения Мёбиуса дает выражение

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$$

Теорема 8. Коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ - целые числа.

Доказательство. В произведении $\prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$ сгруппируем отдельные множители с $\mu = 1$ и множители с $\mu = -1$. В результате мы получим $\Phi_n(x) = P(x)/Q(x)$, где P и Q - это многочлены с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1. Алгоритм деления многочленов показывает, что Φ_n - многочлен с рациональными коэффициентами. Поэтому существует такое целое m , что множитель $m\Phi_n$ имеет целые коэффициенты, причем наибольший их делитель равен 1. Согласно лемме Гаусса [11] наибольший общий делитель коэффициентов многочлена $m\Phi_n$ равен произведению наибольших общих делителей коэффициентов многочленов $m\Phi_n$ и Q , то есть он равен 1. Но наибольший общий делитель коэффициентов $m\Phi_n$ равен m . Поэтому $m = \pm 1$, то есть коэффициенты многочлена Φ_n - целые числа.

2.4 Неприводимость круговых многочленов. Коэффициенты круговых многочленов

Теорема 9. Многочлен Φ_n неприводим над $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Предположим, что $\Phi_n = fg$, где f и g являются многочленами с целыми коэффициентами. Пусть ε - корень многочлена Φ_n . Будем считать, что $f(\varepsilon) = 0$ и многочлен f неприводим. Пусть число p - простое число, взаимно простое с n . Тогда ε^p - корень многочлена Φ_n . Докажем, что ε^p - корень многочлена f . Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что ε^p не является корнем многочлена f . В этом

случае можно считать, что $\Phi_n = fgh$, где f и g - неприводимые многочлены со старшим коэффициентом 1 и $f(\varepsilon) = 0$, $g(\varepsilon^p) = 0$.

Оба многочлена: $x^n - 1$ и неприводимый многочлен $f(x)$ имеют общий корень ε , откуда видно, что $x^n - 1$ делится на $f(x)$. Аналогично $x^n - 1$ делится на $g(x)$. Так как многочлены f и g взаимно простые, то $x^n - 1$ делится на их произведение. Отсюда следует, дискриминант D многочлена $x^n - 1$ делится на результат $R(f, g)$. Легко можем проверить, что $D = \pm n^n$. Для того, чтобы прийти к противоречию, будет достаточно показать, что $R(f, g)$ [10]

Лемма. Если p - простое число и $f(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами, то $(f(x))^p = f(x^p) \pmod{p}$.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Тогда,

$$(f(x))^p = \sum_{\kappa_0 + \dots + \kappa_n = p} \frac{p!}{\kappa_0! \dots \kappa_n!} (a_n x^n)^{\kappa_n} \dots (a_0)^{\kappa_0}.$$

Когда одно из чисел $\kappa_0, \dots, \kappa_n$ равно p , то число $p! / (\kappa_0! \dots \kappa_n!)$ не делится на p . Следовательно,

$$(f(x))^p \equiv (a_n x)^p + \dots + (a_0)^p \pmod{p}.$$

Воспользовавшись тем, что $a^p \equiv a \pmod{p}$ при всех a , получим требуемое.

Пусть $y_1 = \varepsilon^p, y_2, \dots, y_\kappa$ - корни многочлена g . Согласно лемме $f(\varepsilon^p) \equiv (f(\varepsilon))^p \equiv 0 \pmod{p}$, $f(y_1) = p\phi(y_1)$, где ϕ - многочлен с целыми коэффициентами. Многочлен $f - p\phi$ и неприводимый многочлен g имеют общий корень y_1 , поэтому $f - p\phi$ делится на g , а значит, $f(y_1) - p\phi(y_1) = 0$ при всех i . Отсюда получается,

$$R(f, g) = \pm f(y_1) \cdot \dots \cdot f(y_k) = \pm p^k \phi(y_1) \cdot \dots \cdot \phi(y_k)$$

Выражение вида $\phi(y_1) \cdot \dots \cdot \phi(y_k)$ является симметрическим многочленом с целыми коэффициентами от корней многочлена g . Итак, это выражение-целое число, то есть $R(f, g)$ делится на p^k .

Таким образом, для любого простого числа p , взаимно простого с n , число ε^p также будет корнем многочлена f , если Φ_n делится на неприводимый многочлен f и ε - корень f . Далее легко показать, что все корни многочлена Φ_n будут являться корнями многочлена f , то есть $f = \pm \Phi_n$. На самом деле, любой корень ω многочлена Φ_n имеет вид ε^m , где $(m, n) = 1$. m мы запишем в виде $m = p_1 \cdot \dots \cdot p_s$, где $p_1, \dots, p_s$ - простые числа, среди которых можем наблюдать совпадающие между собой числа. Равенство $(p_i, n) = 1$ при всех i следует из условия $(m, n) = 1$. Поэтому $\varepsilon^{p_1}, \varepsilon^{p_1 p_2}, \dots, \varepsilon^{p_1 \dots p_s} = \omega$ - корни многочлена f .

При малых значениях n примеры многочленов $\Phi_n(x)$ показывают нам, что их коэффициенты равны 0 и ± 1 . Но, нам известно, что любое целое число служит коэффициентом некоторого кругового многочлена. Данное доказательство основано на вспомогательном утверждении, изложенном ниже.

Лемма. Для любого натурального $t \geq 3$ существуют такие простые числа $p_1 < p_2 < \dots < p_t$, что $p_1 + p_2 > p_t$.

Доказательство. Зафиксируем $t \geq 3$. Для доказательства леммы предположим, что для любого набора простых чисел $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ выполняется равенство $p_1 + p_2 > p_t$. В таком случае $2p_1 < p_t$, откуда, между 2^{k-1} и 2^k заключено менее t простых чисел, а это означает, что $\pi(2^k) < kt$ (здесь $\pi(s)$ - количество простых чисел между 1 и s).

Согласно теореме Чебышева, $\pi(x) > cx / \ln x$, где c - положительная константа. Поэтому $c2^k / \ln 2^k < kt$, то есть $c2^k < k^2 t \ln 2$. Тогда это неравенство не будет выполняться при достаточно больших k .

Возьмем $t \geq 3$ - нечетное число. Выберем простые числа $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ так, что $p_1 + p_2 > p_t$. Положим $p = p_t$. Далее рассмотрим многочлен $\Phi_n(x)$ по модулю x^{p+1} . При нечетном t

$$\Phi_{p_1 \dots p_t} = \frac{(x^{p_1} - 1) \cdot \dots \cdot (x^{p_t} - 1)}{x - 1} \cdot \frac{\prod (x^{p_i p_j p_k} - 1)}{\prod (x^{p_i p_j} - 1)} \cdot \dots$$

Но $x^{p_i p_j} \equiv 0 \pmod{x^{p+1}}$, $x^{p_i p_j p_k} \equiv 0 \pmod{x^{p+1}}$ и так далее. Поэтому

$$\Phi_{p_1 \dots p_t} = \pm \frac{(1 - x^{p_1}) \cdot \dots \cdot (1 - x^{p_t})}{1 - x} \pmod{x^{p+1}}.$$

Равенство $\Phi_{p_1 \dots p_t}(0) = 1$ позволяет нам выбрать знак «+». Из неравенства $p_i + p_j \geq p_1 + p_2 > p_t = p$ следует:

$$(1 - x^{p_1}) \cdot \dots \cdot (1 - x^{p_t}) \equiv (1 - x^{p_1} - \dots - x^{p_t}) \pmod{x^{p+1}}.$$

Также ясно, что $(1 - x)^{-1} \equiv (1 + x + \dots + x^p) \pmod{x^{p+1}}$. Поэтому

$$\Phi_{p_1 \dots p_t} \equiv (1 + x + \dots + x^p)(1 - x^{p_1} - \dots - x^{p_t}) \pmod{x^{p+1}}.$$

Среди мономов $x^{p_i}, x^{p_i+1}, \dots, x^{p_i+p}$ моном x^p встречается при всех i , а мономы x^{p-1} и x^{p-2} встречаются при всех $i \neq t$. Поэтому у многочлена $\Phi_{p_1 \dots p_t}$ коэффициент при x^p равен $-t + 1$, а коэффициент при x^{p-2} равен $-(t-1) + 1 = -t + 2$.

Числа $-t + 1$ и $-t + 2$ пробегают все отрицательные числа тогда, когда t пробегает все нечетные числа, начиная с 3.

Для того, чтобы получить все положительные числа именно в качестве

многочленов, нужно рассмотреть многочлен $\Phi_{2p_1 \dots p_t}(x)$, где $p_1 \geq 3$ и $p_1 + p_2 > p_t$.

Так как число $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_t$ нечетно, то $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, что означает, что у

многочленов Φ_{2n} и Φ_n коэффициенты при x^p и при x^{p-2} отличаются знаком,

то есть у многочлена $\Phi_{2p_1 \dots p_t}$ коэффициенты x^p и x^{p-2} равны $t-1$ и $t-2$ соответственно.

2.5 Дискриминант кругового многочлена

Круговой многочлен $\Phi_n(x)$ мы представим в виде

$$\Phi_{pn}(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)} = (x^n - 1) \prod_{d|n, d \neq n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}.$$

Если ε - корень многочлена Φ_n , то

$$\Phi'_n = n\varepsilon^{n-1} \prod_{d|n, d \neq n} (\varepsilon^d - 1)^{\mu(n/d)}.$$

Поэтому дискриминант многочлена Φ_n по модулю равен

$$\prod_{\varepsilon} |\Phi'_n(\varepsilon)| = n^{\varphi(n)} \prod_{d|n, d \neq n} \prod_{\varepsilon} |1 - \varepsilon^d|^{\mu(n/d)}.$$

Очевидно, что ε^d - примитивный корень степени n/d , то есть

$$\prod_{\varepsilon} (1 - \varepsilon^d) = (\Phi_{n/d}(1))^{\varphi(n)/\varphi(n/d)},$$

поскольку отношение $\deg \Phi_n$ к $\deg \Phi_{n/d}$ равно $\varphi(n)/\varphi(n/d)$.

Значение многочлена $\Phi_{n/d}(x)$ при $x=1$ отлично от 1 тогда и только тогда, когда $n/d = p^\lambda$. С другой же стороны, $\mu(n/d) \neq 0$ лишь тогда, когда n/d

не делится на простое число, возведенное в квадрат. Поэтому остаются лишь те значения d , для которых n/d - простое число. Итак,

$$\prod_{\varepsilon} |\Phi'_n(\varepsilon)| = n^{\varphi(n)} \left(\prod_{p|n} p^{\frac{\varphi(n)}{p-1}} \right)^{-1}.$$

Нам осталось лишь определить знак дискриминанта многочлена Φ_n . Для этого мы воспользуемся тем, что у многочлена Φ_n степень равна $\varphi(n)$ и у него нет вещественных корней. В таком случае знак дискриминанта должен быть равен $(-1)^{\varphi(n)/2}$.

2.6 Выражение Φ_{mn} через Φ_n

Во многих случаях круговой многочлен $\Phi_{mn}(x)$ можно выразить через $\Phi_n(x)$. Ограничимся случаем, когда $m = p$ - простое число.

Теорема 10. Пусть p - простое число. Тогда

$$\Phi_{pn}(x) = \begin{cases} \Phi_n(x^p), & \text{при } (n, p) = p; \\ \Phi_n(x^p) / \Phi_n(x), & \text{при } (n, p) = 1 \end{cases}$$

Доказательство. Для начала мы рассмотрим случай, когда n делится на p . Если ε - будет примитивным корнем степени pn , то $\omega = \varepsilon^p$ будет примитивным корнем степени n . При этом корню ω соответствуют корни $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ $(x - \varepsilon_1) \cdot \dots \cdot (x - \varepsilon_p) = x^p - \omega$ так, что . Отсюда,

$$\Phi_{pn}(x) = \prod_{\varepsilon} (x - \varepsilon) = \prod_{\omega = \varepsilon^p} (x^p - \omega) = \Phi_n(x^p)$$

Теперь рассмотрим случай, когда n не делится на p . В данном случае делители pn состоят из делителей n и их произведений на p . Поэтому

$$\Phi_{pn}(x) = \prod_{d|pn} (x^d - 1)^{\mu(pn/d)} = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(pn/d)} \prod_{d|n} (x^{dp} - 1)^{\mu(n/d)}$$

А так как $\mu(pn/d) = -\mu(n/d)$, то

$$\Phi_{pn}(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{-\mu(n/d)} = \prod_{d|n} (x^{dp} - 1)^{\mu(n/d)} = (\Phi_n(x))^{-1} \Phi_n(x^p)$$

Пример:

33) Воспользовавшись последней теоремой, можно вычислить $\Phi_n(\pm 1)$.
 Для начала вычислим $\Phi_n(1)$. Если n делится на p , то по теореме 5 $\Phi_n(1) = \Phi_{n/p}(1)$. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_\kappa^{\alpha_\kappa}$ и $m = p_1 \cdot \dots \cdot p_\kappa$, то $\Phi_n(1) = \Phi_m(1)$. Если $m = p$ - простое число, то $\Phi_p(1) = p$. Если же $m = p_1 \cdot \dots \cdot p_\kappa$, где $\kappa > 1$, то мы положим $p = p_1$ и $n = m/p$. Согласно пятой теореме $\Phi_m(1) = \Phi_n(1) / \Phi_p(1) = 1$.
 Получаем, если $n > 1$, то

$$\Phi_n(1) = \begin{cases} p, \text{ при } (n = p^\lambda); \\ 1, \text{ при } (n \neq p^\lambda) \end{cases}$$

Для вычисления $\Phi_n(-1)$ рассмотрим следующие возможные варианты:

- 1) $n > 1$ - нечетное число. Тогда $\Phi_n(-1) = \Phi_{2n}(1) = 1$.
- 2) $n = 2^\kappa$. В этом случае $\Phi_n(x) = (x^n - 1)/(x^{n/2} - 1) = (x^{n/2} + 1)$. Поэтому $\Phi_n(-1) = 0$.
 при $n = 2$ и $\Phi_n(-1) = 2$ при $n = 2^\kappa$, где $\kappa > 1$.
- 3) $n = 2m$, где $m > 1$ - нечетное число. Тогда $\Phi_n(-1) = \Phi_m(1)$. То есть, $\Phi_n(-1) = p$, если $m = p^\alpha$, и $\Phi_n(-1) = 1$, если в m входит более одного простого делителя.
- 4) $n = 2^\kappa m$, где $\kappa > 1$ и $m > 1$ - нечетное число. Пусть $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t}$. Тогда $\Phi_n(x) = \Phi_{2r}(x^s)$, где $r = p_1 \cdot \dots \cdot p_t$ и $s = 2^{\kappa-1} p_1^{\alpha_1-1} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t-1}$. Поэтому $\Phi_n(-1) = \Phi_{2r}(1) = 1$.

$$\tilde{P}_{mn}(x) = (x^m)^n + (x^m)^{n-1} + \dots + (x^m)^2 + x^m + 1$$

Пусть

Гипотеза. Имеют место следующие равенства:

- 1) $\tilde{P}_{mn}(x) : P_n(x)$;
- 2) $\tilde{P}_{mn}(x) : P_m(x)$;
- 3) $\tilde{P}_{mn}(x) : (x^m - 1)$;
- 4) $\tilde{P}_{m \cdot n}(x) \equiv (n+1) \pmod{P_m(x)}$

Частные примеры:

Доказать, что

$$x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 : (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Для решения примера многочлен $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делим на многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ столбиком.

$$\begin{array}{r}
 x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 \quad | \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
 \underline{x^{44} + x^{43} + x^{42} + x^{41} + x^{40}} \\
 x^{40} - x^{39} + x^{35} - x^{34} + x^{30} - x^{28} + x^{25} - x^{23} + x^{20} - x^{17} + x^{15} - x^{12} + x^{10} \\
 \underline{-x^{43} - x^{42} - x^{41} - x^{40} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1} \\
 -x^{43} - x^{42} - x^{41} - x^{40} - x^{39} \\
 \underline{\phantom{-x^{43} - x^{42} - x^{41} - x^{40} - x^{39}}} \\
 x^{39} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 \\
 \underline{x^{39} + x^{38} + x^{37} + x^{36} + x^{35}} \\
 -x^{38} - x^{37} - x^{36} - x^{35} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 \\
 \underline{-x^{38} - x^{37} - x^{36} - x^{35} - x^{34}} \\
 x^{34} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 \\
 \underline{x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} + x^{30}} \\
 -x^{32} - x^{31} - x^{30} + x^{22} + x^{11} + 1 \\
 \underline{-x^{32} - x^{31} - x^{30} - x^{29} - x^{28}} \\
 x^{29} + x^{28} + x^{22} + x^{11} + 1 \\
 \underline{x^{29} + x^{28} + x^{27} + x^{26} + x^{25}} \\
 -x^{27} - x^{26} - x^{25} + x^{22} + x^{11} + 1 \\
 \underline{-x^{27} - x^{26} - x^{25} - x^{24} - x^{23}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
x^{24} + x^{23} + x^{22} + x^{11} + 1 \\
x^{24} + x^{23} + x^{22} + x^{21} + x^{20} \\
\hline
-x^{21} - x^{20} + x^{11} + 1 \\
-x^{21} - x^{20} - x^{19} - x^{18} - x^{17} \\
\hline
-x^{16} - x^{15} + x^{11} + 1 \\
-x^{16} - x^{15} - x^{14} - x^{13} - x^{12} \\
\hline
x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + 1 \\
x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + 1 \\
\hline
0
\end{array}$$

Из решения видно, что многочлен $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ без остатка и их частное равно многочлену $x^{40} - x^{39} + x^{35} - x^{34} + x^{30} - x^{28} + x^{25} - x^{23} + x^{20} - x^{17} + x^{15} - x^{12} + x^{10}$. Преобразуем ответ:

$$\begin{aligned}
& x^{40} - x^{39} + x^{35} - x^{34} + x^{30} - x^{28} + x^{25} - x^{23} + x^{20} - x^{17} + x^{15} - x^{12} + x^{10} = \\
& = x^{39}(x-1) + x^{34}(x-1) + x^{28}(x^2-1) + x^{23}(x^2-1) + x^{17}(x^3-1) + x^{12}(x^3-1) + x^{10} = \\
& = (x-1)(x^{39} + x^{34}) + (x^2-1)(x^{28} + x^{23}) + (x^3-1)(x^{17} + x^{12}) + x^{10}
\end{aligned}$$

Далее мы выяснили, что многочлен $P_{33}(x) = x^{32} + x^{31} + x^{30} + \dots + x + 1$ делится на $P_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x + 1$ нацело. Разделим многочлены столбиком:

$$\begin{array}{r}
x^{32} + x^{31} + x^{30} + \dots + x + 1 \quad | \quad x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x + 1 \\
x^{32} + x^{31} + x^{30} + \dots + x^{22} \quad | \quad x^{22} + x^{11} + 1 \\
\hline
x^{21} + x^{20} + x^{19} + \dots + x + 1 \\
x^{21} + x^{20} + x^{19} + \dots + x^{11} \\
\hline
x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x + 1 \\
x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x + 1 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\frac{P_{33}(x)}{P_{11}(x)} = x^{22} + x^{11} + 1 = P_{22}(x)$$

Из решения видно, что

$$x^{11} = y$$

$$f_{33}(x) = x^{33} + x^{22} + x + 1$$

Предположим, что

, тогда многочлен

примет

$$f_{33}(x) = y^3 + y^2 + y + 1$$

вид

. Для того чтобы данный многочлен делился на

$$x^{11} - 1 \quad y - 1$$

круговой многочлен

или

соответственно, нужно представлять его

в виде многочлена:

$$F_{pn}(x) = x^{pn} + x^{p(n-1)} + \dots + x^p - n$$

В нашем случае $p = 11$, $n = 3$

. Тогда получаем:

$$F_{33}(x) = x^{33} + x^{22} + x^{11} - 3$$

Делим полученный многочлен на многочлен $x^{11} - 1$:

$$x^{33} + x^{22} + x^{11} - 3 \Big| x^{11} - 1$$

$$x^{33} - x^{22} \quad \underline{x^{22} + 2x^{11} + 3}$$

$$2x^{22} + x^{11} - 3$$

$$\underline{2x^{22} - 2x^{11}}$$

$$3x^{11} - 3$$

$$\underline{3x^{11} - 3}$$

$$0$$

Из данного решения мы видим, что аналогично можно получить решения для:

$$1) \quad x^{11} - 1 : x^{11} - 1 ;$$

$$2) \quad x^{22} + x^{11} - 2 : x^{11} - 1 ;$$

$$3) \quad x^{33} + f_{33}(x) - 1 : x^{11} - 1 ;$$

$$4) \quad x^{44} + f_{33}(x) - 1 : x^{11} - 1 ;$$

$$5) \quad x^{55} + f_{44}(x) - 1 : x^{11} - 1$$

и так далее.

Также были получены результаты деления заданного многочлена в нечетной степени на многочлен $P_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x + 1$, решение примет следующий вид:

$$\begin{array}{r}
 x^{33} + x^{22} + x^{11} - 3 \quad \left| \begin{array}{l} x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x + 1 \end{array} \right. \\
 \hline
 x^{33} + x^{32} + x^{31} + \dots + x^{23} \quad \left| \begin{array}{l} x^{23} - x^{22} + 2x^{12} - 2x^{11} + 3x - 3 \end{array} \right. \\
 \hline
 -x^{32} - x^{31} - x^{30} - \dots - x^{23} + x^{22} + x^{11} - 3 \\
 \hline
 -x^{32} - x^{31} - x^{30} - \dots - x^{22} \\
 \hline
 2x^{22} + x^{11} - 3 \\
 \hline
 2x^{22} + 2x^{21} + 2x^{20} + \dots + 2x^{12} \\
 \hline
 -2x^{21} - 2x^{20} - \dots - 2x^{12} + x^{11} - 3 \\
 \hline
 -2x^{21} - 2x^{20} - \dots - 2x^{12} \\
 \hline
 3x^{11} - 3 \\
 \hline
 3x^{11} + 3x^{10} + 3x^9 + \dots + 3x \\
 \hline
 -3x^{10} - 3x^9 - 3x^8 - \dots - 3x - 3 \\
 \hline
 -3x^{10} - 3x^9 - 3x^8 - \dots - 3x - 3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Немного преобразуем полученный ответ:

$$\begin{aligned}
 x^{23} - x^{22} + 2x^{12} - 2x^{11} + 3x - 3 &= x^{22}(x-1) + 2x^{11}(x-1) + 3(x-1) = \\
 &= (x-1)(x^{22} + 2x^{11} + 3) = (x-1)(x^{22} + x^{11} + 1 + x^{11} + 1 + 1) = \\
 &= (x-1)(\tilde{P}_{2,11}(x) + \tilde{P}_{11}(x) + \tilde{P}_{0,11}(x))
 \end{aligned}$$

Как видим из преобразований, мы получаем в ответе круговые многочлены.

Далее представим решение для деления заданного многочлена в четной степени на многочлен $P_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x + 1$.

$$\begin{array}{r}
 x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} - 4 \quad \left| \begin{array}{l} x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x + 1 \end{array} \right. \\
 \hline
 x^{44} + x^{43} + x^{42} + \dots + x^{34} \quad \left| \begin{array}{l} x^{34} - x^{33} + 2x^{23} - 2x^{22} + 3x^{12} - 3x^{11} + 4x - 4 \end{array} \right. \\
 \hline
 -x^{43} - x^{42} - x^{41} - \dots - x^{34} + x^{33} + x^{22} + x^{11} - 4 \\
 \hline
 -x^{43} - x^{42} - x^{41} - \dots - x^{34} - x^{33} \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
2x^{33} + x^{22} + x^{11} - 4 \\
2x^{33} + 2x^{32} + 2x^{31} + \dots + 2x^{23} \\
\hline
- 2x^{32} - 2x^{31} - \dots - 2x^{23} + x^{22} + x^{11} - 4 \\
- 2x^{32} - 2x^{31} - \dots - 2x^{23} - 2x^{22} \\
\hline
3x^{22} + x^{11} - 4 \\
3x^{22} + 3x^{21} + \dots + 3x^{12} \\
\hline
- 3x^{21} - 3x^{20} - \dots - 3x^{12} + x^{11} - 4 \\
- 3x^{21} - 3x^{20} - \dots - 3x^{12} - 3x^{11} \\
\hline
4x^{11} - 4 \\
4x^{11} + 4x^{10} + \dots + 4x \\
\hline
- 4x^{10} - 4x^9 - \dots - 4x - 4 \\
- 4x^{10} - 4x^9 - \dots - 4x - 4 \\
\hline
0
\end{array}$$

Ответ преобразуем и получим:

$$\begin{aligned}
& x^{34} - x^{33} + 2x^{23} - 2x^{22} + 3x^{12} - 3x^{11} + 4x - 4 = \\
& x^{33}(x-1) + 2x^{22}(x-1) + 3x^{11}(x-1) + 4(x-1) = \\
& = (x-1)(x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 + x^{22} + x^{11} + 1 + x^{11} + 1 + 1) = \\
& = (x-1)(\tilde{P}_{3+11}(x) + \tilde{P}_{2+11}(x) + \tilde{P}_{11}(x) + \tilde{P}_{0+11}(x))
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\tilde{P}_{4+11}(x) = 5 + (x-1)(\tilde{P}_{3+11}(x) + \tilde{P}_{2+11}(x) + \tilde{P}_{11}(x) + 1)$$

Используя полученные ответы, можем сделать вывод, что

$$\tilde{P}_{m \cdot n}(x) \equiv (n+1) \pmod{P_m(x)}$$

что значит:

$$P_m(x) / (\tilde{P}_{m \cdot n} - (n+1))$$

2.7 Результат пары круговых многочленов. Многочлены, неприводимые по модулю p

Вычислим для начала результат $R(\Phi_n, x^m - 1)$. Так как многочлен $x^m - 1$ делится на $\Phi_1 = x - 1$, то $R(\Phi_1, x^m - 1) = 0$. Для вычисления результата можно предположить, что $n \geq 2$. Возьмем $d = (n, m)$, $n_1 = n/d, \xi_1, \xi_2, \dots$ как первообразные корни степени n , а $\eta_1, \eta_2, \dots$ как первообразные корни степени n_1 . Тогда получаем:

$$\begin{aligned} R(\Phi_n, x^m - 1) &= \prod (\xi_i^m - 1) = \prod (1 - \xi_i^m) = \\ &= \left(\prod (1 - \eta_i) \right)^{\varphi(n)/\varphi(n_1)} = (\Phi_{n_1}(1))^{\varphi(n)/\varphi(n_1)} \end{aligned}$$

Если m делится на n или, можно сказать, $n_1 = 1$, $\Phi_{n_1}(1) = 0$, откуда: $R(\Phi_1, x^m - 1) = 0$. А если $n_1 \neq 1$, $\Phi_{n_1}(1) = p$, $n_1 = p^\lambda$, $\Phi_{n_1}(1) = 1$, $n_1 \neq p^\lambda$. При $n_1 = p^\lambda$ и $n_1 \neq p^\lambda$.

Перед тем как переходить к вычислению $R(\Phi_n, \Phi_m)$ нужно заметить, что это- целое число, которое в свою очередь является делителем чисел $R(\Phi_n, x^m - 1)$ и $R(\Phi_m, x^n - 1)$. На самом деле, $x^m - 1 = \Phi_m(x)f(x)$, где $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, исходя из выше изложенного, получаем:

$$R(\Phi_n, x^m - 1) = R(\Phi_n, \Phi_m f) = R(\Phi_n, \Phi_m) R(\Phi_n, f)$$

Помимо этого отметим, если $n > m > 1$, то

$$R(\Phi_n, \Phi_m) = (-1)^{\varphi(m)\varphi(n)} R(\Phi_m, \Phi_n) = R(\Phi_m, \Phi_n)$$

и $R(\Phi_n, \Phi_m) > 0$. Последнее свойство будем доказывать следующим образом. Очевидно, что

$$0 \neq R(\Phi_n, x^m - 1) = \prod_{d|m} R(\Phi_n, \Phi_d)$$

поэтому

$$R(\Phi_n, \Phi_m) = \prod_{d|n} R(\Phi_n, x^d - 1)^{\mu(m/d)} > 0$$

Числа $\frac{m}{d}$ и $\frac{n}{d}$, где $d = (m, n)$, не равны 1 и взаимно просты, только при условии, что $\frac{m}{d}$ не делится на $\frac{n}{d}$ и $\frac{n}{d}$ не делится на $\frac{m}{d}$. Отсюда, числа $R(\Phi_n, x^m - 1)$ и $R(\Phi_m, x^n - 1)$ взаимно просты, а значит, $R(\Phi_n, \Phi_m) = 1$.

Для определенности теперь пусть $\frac{m}{d}$ делится на $\frac{n}{d}$. При $m = n$ имеем $R(\Phi_n, \Phi_m) = 0$. Если $m/n \neq p^\lambda$, то $R(\Phi_m, x^n - 1) = 1$ и $R(\Phi_n, \Phi_m) = 1$. Нам осталось рассмотреть один случай, когда $m/n = p^\lambda$. Ясно, что

$$R(\Phi_n, \Phi_m) = \prod_{\delta|n} R(\Phi_m, x^\delta - 1)^{\mu(n/\delta)}$$

В правой части записанного выражения все множители равны 1, за исключением тех, для которых $m/\delta = p^a$.

Если n не делится на p , то неединичные множители возникают лишь при $\delta = n$ и $\delta = n/p$. Тогда

$$R(\Phi_n, \Phi_m) = \frac{R(\Phi_m, x^n - 1)}{R(\Phi_m, x^{n/p} - 1)} = p^a,$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{\varphi(m)}{\varphi(m/n)} - \frac{\varphi(m)}{\varphi(mp/n)} = \\ &= \varphi(m) \left(\frac{1}{p^{\lambda-1}(p-1)} - \frac{1}{p^\lambda(p-1)} \right) = \frac{\varphi(m)}{p^\lambda} = \varphi(n). \end{aligned}$$

Если $(n, p) = 1$, то неединичный множитель возникает только при $\delta = n$. Тогда

$$R(\Phi_n, \Phi_m) = R(\Phi_m, x^n - 1) = p^{\varphi(m)/\varphi(m/n)} = p^{\varphi(n)}.$$

Итак, если $m \geq n$, то

$$R(\Phi_n, \Phi_m) = \begin{cases} 0 & \text{при } m = n; \\ p^{\varphi(n)} & \text{при } m = np^\lambda; \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Выражение для числа неприводимых коэффициентов степени n со старшим коэффициентом 1 над полем $F_p = \mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$ можно получить с помощью формулы обращения Мёбиуса. Для начала мы докажем следующее утверждение.

Теорема 11. Пусть $F_d(x)$ - произведение всех неприводимых многочленов степени d со старшим коэффициентом 1 над полем F_p . Тогда

$$x^{p^n} - x = \prod_{d|n} F_d(x).$$

Доказательство. Многочлен $x^{p^n} - x$ взаимно прост со своей производной $p^n x^{p^n-1} - 1 = -1$, поэтому у него нет кратных корней. Таким образом, нам достаточно доказать, что если $f(x)$ - неприводимый многочлен степени d со старшим коэффициентом 1, то $f(x)$ делит $x^{p^n} - x$ тогда и только тогда, когда d делит n .

Пусть α - корень многочлена f и $K = F_p(\alpha)$ - расширение степени d поля F_p . Все его элементы удовлетворяют уравнению $x^{p^d} - x = 0$ и оно состоит из p^d элементов. Так как мультипликативная группа поля F_p имеет порядок $p-1$, то любой ненулевой элемент $x \in F_p$ удовлетворяют уравнению $x^{p-1} = 1$.

Лемма.

а) Над произвольным полем многочлен $x^n - 1$ делит $x^m - 1$ тогда и только тогда, когда n делит m .

б) Если $a \geq 2$ - натуральное число, то $a^n - 1$ делит $a^m - 1$ тогда и только тогда, когда n делит m .

Доказательство. а) Пусть $m = qn + r$, где $0 \leq r < n$. Получаем

$$\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = x^r \frac{x^{qn} - 1}{x^n - 1} + \frac{x^r - 1}{x^n - 1}.$$

Многочлен $\frac{x^{qn} - 1}{x^n - 1}$ делится на $\frac{x^n - 1}{x^n - 1}$. $\frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ делится на $\frac{x^n - 1}{x^n - 1}$ тогда и только тогда, когда $\frac{x^r - 1}{x^n - 1}$ делится на $\frac{x^n - 1}{x^n - 1}$. Но $r < n$, тогда $\frac{x^r - 1}{x^n - 1}$ делится на $\frac{x^n - 1}{x^n - 1}$ только при $r = 0$.

б) Для начала мы предположим, что d делит n . Отсюда $p^d - 1$ делит $p^n - 1$, а значит, $x^{p^d} - x$ делит $x^{p^n} - x$. Корень α неприводимого многочлена $f(x)$ является еще и корнем уравнения $x^{p^d} = x$, тогда $f(x)$ делит $x^{p^d} - x$.

Далее мы будем предполагать, что $f(x)$ делит $x^{p^n} - x$. Тогда $\alpha^{p^n} - \alpha = 0$.
Если $b_1 \alpha^{d-1} + b_2 \alpha^{d-2} + \dots + b_d$ - это произвольный элемент поля K , то

$$(b_1 \alpha^{d-1} + \dots + b_d)^p = b_1 (\alpha^{p^{d-1}})^{d-1} + \dots + b_d = b_1 \alpha^{d-1} + \dots + b_d.$$

Тогда любой элемент поля K удовлетворяет уравнению $x^{p^n} = x$, то есть $x^{p^n} - x$ делится на $x^{p^d} - x$. Отсюда следует, n делится на d .

Например, если мы имеем N_d - число неприводимых многочленов степени d со старшим коэффициентом 1 над полем F_p равна dN_d , поэтому

$$p^n = \sum_{d|n} dN_d.$$

Применим формулу обращения Мёбиуса. В результате получаем

$$N_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d) p^d.$$

В частности, $N_n \neq 0$, так как сумма $\sum_{d|n} \mu(n/d) p^d$ имеет вид $p^{d_1} \pm p^{d_2} \pm \dots \pm p^{d_k}$, где числа d_i попарно различны.

3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

3.1 Основная теорема алгебры.

Основная теорема алгебры. Любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.

Следствие. Любой многочлен может быть представлен в виде произведения линейных множителей.

Доказательство. Пусть $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$. По основной теореме алгебры у многочлена $f(z)$ существует корень z_1 . Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_1)g_1(z)$. Аналогично у многочлена $g_1(z)$ существует корень z_2 , тогда $g_1(z) = (z - z_2)g_2(z)$ и, значит, $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)g_2(z)$. Продолжая этот процесс, мы придем в конце концов к полному разложению $f(z)$ на n линейных множителей.

Следствие. Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет в точности n комплексных корней (при этом каждый корень a учитывается столько раз, сколько скобка $(z - a)$ входит в разложение на множители).

Доказательство основной теоремы алгебры. Рассмотрим многочлен

$$f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

с вещественными коэффициентами. Возьмем достаточно большое число r (для начала как минимум больше единицы) и произвольное φ и подставим $z = r e^{i\varphi}$, получим

$$f(re^{i\varphi}) = r^n e^{i\varphi n} + a_{n-1} r^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} + \dots + a_1 r e^{i\varphi} + a_0 = g(\varphi) + ih(\varphi),$$

где

$$g(\varphi) = r^n \cos(n\varphi) + a_{n-1} r^{n-1} \cos((n-1)\varphi) + \dots + a_1 r \cos\varphi + a_0,$$

$$h(\varphi) = r^n \sin(n\varphi) + a_{n-1} r^{n-1} \sin((n-1)\varphi) + \dots + a_1 r \sin\varphi + a_0.$$

Рассмотрим круг $B(r_0)$ с центром в нуле и радиусом

$$r_0 = 10(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|).$$

Если точка $z = r e^{i\varphi}$ лежит вне этого круга, то

$$|a_{n-1} r^{n-1} \cos((n-1)\varphi) + \dots + a_1 r \cos\varphi + a_0| \leq |a_{n-1}| r^{n-1} + |a_{n-2}| r^{n-2} + \dots + |a_1| r + |a_0| \leq (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|) r.$$

Таким образом, в тех точках, лежащих вне круга $B(r_0)$, где $|\cos(n\varphi)| > 1/10$, знак функции $g(\varphi)$ совпадает со знаком $\cos(n\varphi)$.

Аналогично в точках, в которых $|\sin(n\varphi)| > 1/10$, знак функции $h(\varphi)$ совпадает со знаком $\sin(n\varphi)$.

Заметим, что при $t = tg \frac{\varphi}{2}$

$$\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Учитывая это соотношение, преобразуем формулы для $g(\varphi)$ и $h(\varphi)$. В результате получим

$$g(2 \operatorname{arctg} t) = \frac{G(t)}{(1+t^2)^n} \quad \text{и} \quad h(2 \operatorname{arctg} t) = \frac{H(t)}{(1+t^2)^n},$$

где $G(t)$ и $H(t)$ – некоторые многочлены степени, не превосходящей $2n$. Таким образом, при каждом фиксированном r функции $g(\varphi)$ и $h(\varphi)$ имеют не более $2n$ корней. С другой стороны функция $g(\varphi)$ меняет знак не менее чем $2n$ раз, поскольку в точках $\frac{\pi k}{2n}$ при четных k она

положительна, а в точках $\frac{\pi k}{2n}$ при нечетных k она отрицательна. Это означает, что функция $g(\varphi)$ имеет в точности $2n$ корней. Более того, между точками $\frac{\pi k}{2n}$ и $\frac{\pi(k+1)}{2n}$ находится ровно один корень.

Рассмотрим произвольную кривую на плоскости, соединяющую некоторые точки z_1 и z_2 . Если $\operatorname{Ref}(z_1)$ и $\operatorname{Ref}(z_2)$ разных знаков, то по теореме Больцано-Коши на кривой найдется точка z_1 , в которой $\operatorname{Ref}(z)$ обращается в нуль. Таким образом, точки, расположенные внутри круга радиуса r_0 , разбиваются на области, внутри которых $\operatorname{Ref}(z)$ положительно, и области внутри которых $\operatorname{Ref}(z)$ отрицательно. На границе этих областей функция $\operatorname{Ref}(z)$ обращается в нуль. Значит, множество $\operatorname{Ref}(z)=0$ представляет собой объединение нескольких кривых на плоскости. Аналогичное утверждение верно и для $\operatorname{Imf}(z)$. По доказанному выше, при $\frac{\pi}{6n} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6n}$ точки $r_0 e^{i\varphi}$ заведомо лежат в области, где $\operatorname{Imf}(z) > 0$ (обозначим эту область через A), и в этой области есть точка $z_0 = r_0 e^{i\varphi}$, в которой $\operatorname{Ref}(z_0)=0$. Эта точка лежит на одной из тех кривых γ , где обращается в нуль $\operatorname{Ref}(z)$. Заметим, что эта кривая не имеет концов, поскольку в противном случае нашлись бы точки, в которых $\operatorname{Imf}(z)$ было бы одновременно и положительно и отрицательно. Рассмотрим поведение кривой γ внутри круга $B(r_0)$. Граница области $A \cap B(r_0)$ содержит дугу окружности радиуса r_0 . На этой дуге есть лишь одна точка, принадлежащая кривой γ . Но если эта кривая зашла в область $A \cap B(r_0)$, то она должна быть где-то из этой области и выйти. На дуге окружности второй точки, принадлежащей кривой, нет. Значит, она есть на той части границы. Которая является границей области A . А это как раз те точки, где $\operatorname{Imf}(z)=0$. Таким образом, мы установили, что обязательно найдется точка пересечения кривых $\operatorname{Ref}(z)=0$ и $\operatorname{Imf}(z)=0$.

Итак, для многочленов с вещественными коэффициентами основная теорема алгебры доказана.

Возьмем далее многочлен

$$f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

с произвольными коэффициентами. Рассмотрим вспомогательный многочлен

$$g(z) = f(z)\tilde{f}(z),$$

где

$$\tilde{f}(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0.$$

Коэффициенты многочлена $g(z)$ вещественны. Следовательно, по доказанному он имеет некоторый корень w . Но этот корень должен быть корнем либо многочлена $f(z)$, либо многочлена $\tilde{f}(z)$. Заметим, что

$$f(w) = \tilde{f}(w) = 0.$$

Пример. Рассмотрим многочлен $f(z) = z^3 - 1$. Для него

$$g(\varphi) = r^3 \cos(3\varphi) - 1, \quad h(\varphi) = r^3 \sin(3\varphi), \quad r_0 = 10,$$

$$G(t) = -(r^3 + 1)t^6 + (15r^3 - 3)t^4 - (15r^3 + 3)t^2 + (r^3 - 1),$$

$$H(t) = r^3(6t^5 - 20t^3 + 6t).$$

Функция $\text{Im}f(z)$ обращается в нуль на трех прямых, идущих под углами 60° друг к другу. Область $A \cap B$ представляет собой сектор, в который в некоторой точке входит кривая γ .

3.2 Теорема Руше

Для удобства введем общепринятые обозначения:

$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

-единичная окружность с центром в нуле,

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad \text{и} \quad \dot{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

- единичные круги (без границы и с границей) также с центром в нуле.

Рассмотрим на плоскости некоторую кривую, но не проходящую через нуль. Будем перемещать по этой кривой точку и следить за изменением ее

аргумента. Если кривая не пересекает положительную часть вещественной оси, то аргумент при движении точки вдоль кривой будет меняться непрерывно. Если же кривая пересекает положительную часть вещественной оси, то при ее пересечении аргумент будет делать скачок на 2π .

Рассмотрим число $w \in \mathbb{C}$, модуль которого равен 1. Определим функцию $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по следующему правилу. Положим $S(0) = \arg(1-w)$ и $S(\theta) = \arg(e^{i\theta} - w) + 2\pi k$ при $\theta \neq 0$, где $k = k(\theta)$ – целое число, выбираемое так, чтобы функция $S(\theta)$ стала непрерывной. Чтобы обосновать возможность такого выбора, рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в точке $-w$. Будем по этой окружности двигать точку, задавая ее положение углом поворота θ . (Угол θ считаем равным нулю в точке $1 - w$). Тогда функция $S(\theta)$ с точностью до добавки вида $2\pi k$ представляет собой аргумент точки на окружности, соответствующей числу θ . При пересечении окружности и положительной части вещественной оси этот аргумент будет иметь скачок $\pm 2\pi$, который мы сможем «погасить» за счет изменения числа k . Таким образом, нам удастся сохранить функцию $S(\theta)$ непрерывной.

Чтобы различать функции $S(\theta)$ для разных точек w , мы будем писать $S_w(\theta)$. Отметим, что

$$S_w(2\pi) - S_w(0) = \begin{cases} 2\pi, & w \in D, \\ 0, & w \notin D. \end{cases}$$

Теорема Руше. Два многочлена $f(z)$ и $g(z)$ с комплексными коэффициентами удовлетворяют условию

$$\frac{|f(z)|}{|f(z) + g(z)|} < 1 \quad (3.2.1)$$

при всех $z \in T$. Тогда многочлены $f(z)$ и $g(z)$ имеют в круге D одинаковое число нулей.

Доказательство теоремы Руше. Заметим, что если $f(z) = 0$, то неравенство (3) не может иметь места, поскольку и левая и правая части равны $|g(z)|$. Таким образом. Нули многочленов $f(z)$ и $g(z)$ не могут лежать на единичной окружности T .

Обозначим через n число нулей многочленов $f(z)$ и $g(z)$, лежащих в круге D . В силу симметричности условия на многочлены, достаточно

установить неравенство $m \geq n$. Мы покажем, что для некоторого $\varphi \in [0; 2\pi]$ справедливо равенство

$$|f(e^{i\varphi}) + g(e^{i\varphi})| = |f(e^{i\varphi})| + |g(e^{i\varphi})|, \quad (3.2.2)$$

что приведет к противоречию с неравенством (3.2.1). Из сказанного выше следует, что равенство (3.2.2) будет иметь место, когда аргументы чисел $f(e^{i\varphi})$ и $g(e^{i\varphi})$ окажутся равными. Это соображение подсказывает основную идею доказательства: нужно перемещать точку по окружности и следить за изменением аргументов чисел $f(e^{i\varphi})$ и $g(e^{i\varphi})$.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_m$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — корни многочленов $f(z)$ и $g(z)$ соответственно, а A и B — их старшие коэффициенты. Как мы уже узнаем, $|a_k| \neq 1$ и $|b_k| \neq 1$. Определим функции

$$F(\theta) = \arg A + \sum_{k=1}^m S a_k(\theta) \quad \text{и}$$

$$G(\theta) = \arg B + \sum_{k=1}^n S b_k(\theta) + 2\pi l, \quad \text{где } l \text{ выбрано таким образом, что}$$

$F(0) \leq G(0) < F(0) + 2\pi$. Эти функции непрерывны на множестве вещественных чисел.

По основной теореме алгебры

$$\begin{aligned} f(z) &= A(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_m) \\ g(z) &= B(z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_n). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \arg f(e^{i\theta}) &\equiv \arg A + \arg(e^{i\theta} - a_1) + \dots + \arg(e^{i\theta} - a_m) \equiv \\ &\equiv \arg A + S a_1(e^{i\theta}) + \dots + S a_m(e^{i\theta}) = F(\theta) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

При изменении θ от 0 до 2π функции $S a_k(e^{i\theta})$, соответствующие корням $a_k \notin D$, останутся неизменными, а те функции, которые соответствуют корням, лежащим в круге D , увеличатся на 2π . Таким образом, $F(2\pi) = F(0) + 2\pi m$. Аналогично $\arg g(e^{i\theta}) \equiv G(\theta) \pmod{2\pi}$ и $G(2\pi) = G(0) + 2\pi n$.

Рассмотрим непрерывную функцию $H(\theta) = F(\theta) - G(\theta)$. По определению функций $F(\theta)$ и $G(\theta)$ имеем $-2\pi < H(0) = F(0) - G(0) \leq 0$.

Кроме того,

$$H(2\pi) = F(2\pi) - G(2\pi) = 2(m-n) + F(0) - G(0) > 0.$$

По теореме Больцано-Коши существует число $\varphi \in [0; 2\pi)$, для которого $H(\varphi) = 0$. Следовательно,

$$\arg f(e^{i\varphi}) \equiv \arg g(e^{i\varphi}) \pmod{2\pi}$$

Таким образом, аргументы чисел $f(e^{i\varphi})$ и $g(e^{i\varphi})$ совпадают и, значит, имеет место равенство (3.2.2).

Следствие 1. Для многочлена $f(z)$ и $g(z)$ с комплексными коэффициентами удовлетворяют условию

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

При всех z , принадлежащих некоторой окружности C . Тогда многочлены $f(z)$ и $g(z)$ имеют одинаковое число нулей внутри круга с границей C .

Доказательство. Пусть C – окружность радиуса r с центром в точке w . Воспользуемся теоремой Руше для многочленов $\tilde{f}(z) = f\left(\frac{z-w}{r}\right)$ и

$$\tilde{g}(z) = g\left(\frac{z-w}{r}\right).$$

Следствие 2. Два многочлена $f(z)$ и $h(z)$ с комплексными коэффициентами удовлетворяют условию $|h(z)| < |f(z)| + |f(z) + h(z)|$ при всех z , принадлежащих некоторой окружности C . Тогда многочлены $f(z)$ и $f(z) + h(z)$ имеют одинаковое число нулей внутри круга D , ограниченного окружностью C .

В частности, это верно, если $|h(z)| < |f(z)|$ при всех z , принадлежащих окружности C .

Доказательство. Рассмотрим многочлен $g(z)=f(z)+h(z)$. По условию

$$|f(z)|+|g(z)|=|f(z)|+|g(z)|>|g(z)-f(z)|$$

на окружности C . Поэтому многочлены $-f(z)$ и $g(z)$ имеют одинаковое количество нулей в круге D . А значит, одинаковое количество нулей имеют и многочлены $f(z)$ и $f(z)+h(z)$.

Пример. Проверим, что все корни многочлена

$$g(z)=7z^4+8z^3+2z^2+3z+1$$

лежат в круге $|z|<3/2$. Возьмем $h(z)=8z^3+3z+1$ и $f(z)=7z^4+2z^2$. Покажем, что $|h(z)|<|f(z)|$ на окружности $|z|<3/2$. Поскольку оба многочлена с вещественными коэффициентами, а при замене z на $\bar{z}$ модули не поменяются, достаточно проверить неравенство лишь на верхней половине окружности. Заметим, что при $z=re^{i\varphi}$

$$|f(z)|^2=|7z^4+2z^2|^2=|z^2|^2|7z^2+2|^2=r^4|7r^2\cos 2\varphi+2+i7r^2\sin 2\varphi|^2=r^4((7r^2\cos 2\varphi+2)^2+(7r^2\sin 2\varphi)^2)=$$

.

Отсюда получаем, что наименьшее значение $|f(z)|$ достигается при $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $|f(z)|\geq|f(1,5i)|=30,9375$ при всех интересующих нас z . А на промежутке $0\leq\varphi\leq\pi/3$ наименьшее значение $|f(z)|$ достигается при

$z=1,5e^{i\varphi}$, т.е. $|f(z)|\geq\left|f\left(1,5e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\right|>33,4155$ при $0\leq\varphi\leq\pi/3$. С другой стороны, при $r=3/2$

$$|h(z)|=|8z^3+3z+1|\leq 8|z^3|+3|z|+1=8r^3+3r+1=32,5$$

Таким образом, нам достаточно доказать неравенство $|g(z)|<30,9375$ при $z=1,5e^{i\varphi}$, $\pi/3\leq\varphi\leq 0$. Это устанавливается аналогично оценке для многочлена f :

$$|h(z)|=|8z^3+3z+1|\leq|8z^3+3z|+1=|z|\cdot|8z^2+3|+1=r\cdot\sqrt{64r^4+9+48r^2\cos 2\varphi}+1.$$

Значит, наибольшее значение $|h(z)|$ не превосходит $|8z_0^3 + 3z_0| + 1$ при $z_0 = 1,5e^{\frac{i\pi}{3}}$. Легко заметить, что последнее выражение меньше чем 30.

Таким образом, для многочленов $|f(z)|$ и $|h(z)|$ выполнено условие теоремы Руше. Стало быть, в круге $|z| < 3/2$ они имеют одинаковое количество нулей. Нули многочлена $f(z)$ легко вычислить и проверить, что они лежат в круге $|z| < 3/2$. Стало быть, все нули многочлена $g(z)$ также лежат в этом круге.

Отметим еще одно полезное свойство теоремы Руше.

Следствие 3. Корни многочлена непрерывно зависят от коэффициентов.

А именно, пусть

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{и} \quad g(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$$

- многочлены с корнями $z_1, z_2, \dots, z_n$ и $w_1, w_2, \dots, w_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$. Что если $|a_j - b_j| < \delta$ при всех $1 \leq j \leq n-1$, то тогда корни $w_1, w_2, \dots, w_n$ можно перенумеровать таким образом, что $|z_j - w_j| < \varepsilon$ при всех $1 \leq j \leq n-1$.

Доказательство. Можно считать, что корни $z_1, z_2, \dots, z_n$ занумерованы таким образом, что кратные корни расположены подряд. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Достаточно установить, что для любого j в круге достаточно маленького радиуса с центром в точке z_j количество корней многочлена $g(z)$ в точности совпадает с кратностью корня z_j . Пусть корень z_1 имеет кратность l . Рассмотрим окружность C с центром в точке z_1 радиуса r , меньшего ε , и половины наименьшего расстояния между некрратными корнями многочлена $f(z)$. Функция $|f(z)|$ непрерывна, поэтому по теореме Вейерштрасса на окружности C она принимает наименьшее значение. Назовем его m . Заметим, что $m > 0$, поскольку на окружности $|f(z)| \neq 0$. Кроме того, если $z \in C$, то $|z| \leq |z_1| + |z - z_1| < |z_1| + r + 1$. Обозначим последнее выражение через K . Оценим разность $|f(z) - g(z)|$ для $z \in C$:

$$|f(z) - g(z)| = |(a_1 - b_1)z^{n-1} + (a_2 - b_2)z^{n-2} + \dots + (a_n - b_n)| \leq |a_1 - b_1|K^{n-1} + |a_2 - b_2|K^{n-2} + \dots + |a_n - b_n| < \delta(K^{n-1} + \dots + 1)$$

Теперь, если выбрать положительное число δ таким образом, что $\delta \cdot \frac{K^n - 1}{K - 1} \leq \epsilon$, то на окружности C мы получим неравенство $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Поэтому по следствию 1 теоремы Руше в круге, ограниченном C , находится ровно l нулей многочлена $g(z)$. Обозначим эти нули через $w_1, w_2, \dots, w_l$. Ясно, что $|z_1 - w_i| < r < \epsilon$ при всех $1 \leq i \leq l$. Действуя далее аналогичным образом, мы сможем требуемым образом перенумеровать остальные корни многочлена $g(z)$.

3.3 Теорема Гаусса-Люка

Теорема Ролля. Пусть $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная функция, дифференцируемая на промежутке $(a; b)$. Если $f(a) = f(b)$, то производная f' имеет корень на $(a; b)$.

Доказательство. Если функция на отрезке постоянна, то утверждение очевидно, поскольку производная функции равна нулю в любой точке интервала.

Если же нет, поскольку значения функции в граничных точках сегмента равны, то согласно [теореме Вейерштрасса](#), она принимает своё наибольшее или наименьшее значение в некоторой точке интервала, то есть имеет в этой точке локальный экстремум, и по [лемме Ферма](#), в этой точке производная равна 0.

Теорема Гаусса-Люка. Если все корни многочлена лежат в выпуклом многоугольнике K , то все корни его производной также лежат в многоугольнике K .

Эту теорему впервые сформулировал и доказал в 1874 г. французский инженер Ф.Люка. в работах Гаусса она даже не упоминается, хотя Люка к рассуждению Гаусса добавил немного более формулировки теоремы. В 1836 г. Гаусс привел физическую интерпретацию корней многочлена, из которой эта теорема легко выводится.

Рассмотрим многочлен $f(z)$ степени n . По основной теореме алгебры его можно представить в виде

$$f(z) = (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_k)^{n_k}, \quad (3.3.1)$$

где $z_1, z_2, \dots, z_k$ – различные корни многочлена и $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Из равенства (3.3.1) следует, что производная $f'(z)$ представляет собой сумму n слагаемых вида « n_j умножить на произведение таких же скобок, что и входили в $f(z)$, только j -я скобка будет в степени $n_j - 1$ ». Таким образом,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \frac{n_2}{z - z_2} + \dots + \frac{n_k}{z - z_k}. \quad (3.3.2)$$

Положим для краткости $w_i = 1/(z - z_i)$. Определим новую функцию

$$F(z) = f'(z)/f(z) = \frac{n_1}{z - z_1} + \frac{n_2}{z - z_2} + \dots + \frac{n_k}{z - z_k} = n_1 w_1 + n_2 w_2 + \dots + n_k w_k.$$

Отметим, что ее корни совпадают с корнями производной $f'(z)$, отличными от корней многочлена $f(z)$. Запишем разность $z - z_j$ в тригонометрической форме $z - z_j = \rho_j e^{i\varphi_j}$. Тогда j -е слагаемое будет иметь вид

$$n_j w_j = n_j \cdot \frac{1}{z - z_j} = n_j \cdot \frac{1}{\rho_j e^{i\varphi_j}} = n_j \cdot \frac{1}{\rho_j e^{-i\varphi_j}} = n_j \cdot \frac{e^{i\varphi_j}}{\rho_j}$$

Таким образом, $n_j w_j$ есть вектор, идущий от точки z_j к точке z и в n_j раз больший по длине между z_j и z . А функция $F(z)$ равна сумме таких векторов.

Всему изложенному выше можно придать физический смысл. Установим в точках плоскости $z_1, z_2, \dots, z_k$ перпендикулярно этой плоскости бесконечные металлические стержни зарядом с плоскостью $n_j/2$. Тогда в подходящей системе единиц на единичный заряд, расположенный в точке z со стороны стержня z_j будет действовать сила притяжения $n_j w_j$. Величина $F(z)$ будет суммарной силой притяжения заряда между стержнями. Таким образом, нули производной $f'(z)$ – это положения равновесия в электростатическом поле, порожденном стержнями, установленными в точках $z_1, z_2, \dots, z_k$. Если единичный заряд расположен «сбоку» от стержней, то действующая на него сила окажется ненулевой и будет направлена в сторону стержней. Значит, положение равновесия не

может находиться в стороне от заряженных стержней. Аналогичная трактовка возможна и в поле любой физической природы, в котором сила обратно пропорциональна расстоянию между точками. Эта интерпретация корней $f'(z)$ принадлежит Гауссу.

Функции $F(z)$ можно также придать и гидродинамическую интерпретацию. Рассмотрим плоский поток жидкости, т.е. поток, в котором скорость жидкости зависит только от абсциссы и ординаты, но не зависит от аппликаты. Предположим еще, что все скорости не зависят от времени. В точках z_j разместим источники интенсивности m_j . То есть за единицу времени из точки z_j будет вытекать m_j единиц жидкости. Тогда скорость в точке z будет равняться $F(z)$. Таким образом, корни производной $f'(z)$ совпадают с точками, в которых скорость потока равна нулю.

Корни функции $F(z)$ имеют и весьма неожиданную геометрическую интерпретацию. Оказывается, они являются фокусами кривой класса $k-1$, касающейся отрезков $z_j z_l$ в точках, делящих эти отрезки в отношении $m_j:m_l$. При $k=3$, корни функции

$$F(z) = \frac{m_1}{z-z_1} + \frac{m_2}{z-z_2} + \frac{m_3}{z-z_3}$$

являются фокусами эллипса, касающегося сторон треугольника с вершинами в z_1, z_2, z_3 в точках, делящих стороны $z_j z_l$ в отношении $m_j:m_l$.

Доказательство теоремы Гаусса-Люка. Если корень производной совпадает с корнем многочлена $f(z)$, то оно заведомо принадлежит K . Поэтому дальше будем говорить только о корнях производной, отличных от корней многочлена. Пусть w – один из таких корней. Предположим, что он не лежит в K . Рассмотрим новый многочлен $g(z) = f(z+w)$. Все его корни лежат в выпуклом многоугольнике K' , получающемся из K с помощью параллельного переноса на вектор $-w$. Пусть

$$g(z) = (z-z_1)^{n_1} (z-z_2)^{n_2} \dots (z-z_k)^{n_k}.$$

Тогда $g'(0) = 0$ и 0 не принадлежит множеству K' – выпуклый многоугольник, через начало координат можно провести прямую l , которая его не пересекает. Эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки $z_1, z_2, \dots, z_k$ лежат в одной полуплоскости, а векторы $-z_1, -z_2, \dots, -z_k$

– в другой. А значит, в одной полуплоскости будут лежать и векторы $\frac{-1}{z_1}, -1/z_2, \dots, -1/z_k$ поскольку $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Но тогда их сумма не равна нулю.

Следовательно,

$$\frac{-n_1}{z_1} - \frac{n_2}{z_2} - \dots - \frac{n_k}{z_k} \neq 0.$$

С другой стороны, по равенству (3.3.2)

$$0 = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{-z_1} + \frac{n_2}{-z_2} + \dots + \frac{n_k}{-z_k}$$

Мы пришли к противоречию.

Теорема Шпехта. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ – все корни многочлена $f(z)$.
при $j \neq k$ рассмотрим точки

$$w_{jk} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) z_j + \frac{1}{n} z_k.$$

Предположим, что выпуклый многоугольник K содержит все точки w_{jk} .
тогда он содержит и все корни производной $f'(z)$.

3.4 Геометрия корней многочленов.

Рассмотрим многочлен $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ с вещественными коэффициентами. Если w – его корень, то $\bar{w}$ также будет его корнем, поскольку

$$f(\bar{w}) = \bar{w}^n + a_1 \bar{w}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{w} + a_n = \overline{w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-1} w + a_n} = \overline{f(w)} = 0.$$

Таким образом, все вещественные корни $f(z)$ разбиваются на пары взаимно сопряженных.

Следуя Уолшу, будем называть кругами Йенсена круги (вместе с ограничивающей их окружностью), построенные как на диаметрах на отрезках, соединяющих пары взаимно сопряженных корней.

Теорема Йенсена. Если все коэффициенты многочлена $f(z)$ вещественны, то все невещественные корни производной $f'(z)$ лежат в объединении кругов Йенсена для многочлена $f(z)$.

Доказательство. Пусть многочлен $f(z)$ имеет вещественные корни $z_1, z_2, \dots, z_k, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_k$ и вещественные корни $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{n-k}$.

Рассмотрим не вещественную точку $z = x + iy$, лежащую вне всех кругов Йенсена. Покажем, что $\operatorname{Im} f'(z) \neq 0$. Отсюда будет следовать, что z не может быть корнем производной $f'(z)$.

Пусть $z_j = x_j + i y_j$. Преобразуем выражение

$$\frac{1}{z - z_j} + \frac{1}{z - \bar{z}_j} = \frac{1}{z - x_j + i y_j} + \frac{1}{z - x_j - i y_j} = \frac{(z - x_j + i y_j) + (z - x_j - i y_j)}{(z - x_j)^2 + y_j^2} = \frac{2(z - x_j)}{(z - x_j)^2 + y_j^2} = 2 \cdot \frac{(z - x_j)((z - x_j)^2 + y_j^2)}{|(z - x_j)^2 + y_j^2|^2}$$

Таким образом, мнимая часть числителя равна $2y(y_j^2 + |z - x_j|^2)$. Поскольку z лежит вне круга Йенсена, построенного на $z_j, \bar{z}_j$, то $y_j^2 - |z - x_j|^2 < 0$.

Следовательно, величина $\Im \left(\frac{1}{z - z_j} + \frac{1}{z - \bar{z}_j} \right)$ имеет знак, противоположный знаку $\operatorname{Im} z$.

С другой стороны,

$$\Im \frac{1}{z - x_j} = \Im \frac{\bar{z} - x_j}{|z - x_j|^2} = \frac{-\Im z}{|z - x_j|}$$

Значит, мнимые части дроби $\frac{1}{z - x_j}$ и числа z противоположны по знаку.

Стало быть, все слагаемые в сумме

$$\Im \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^k \Im \left(\frac{1}{z - z_j} + \frac{1}{z - \bar{z}_j} \right) + \sum_{j=k+1}^{n-k} \Im \frac{1}{z - x_j}$$

одного знака. Поэтому, она не обращается в нуль и, значит, $\Im f'(z) \neq 0$.

Теорема Гудмана-Рахмана-Ратти-Шмейссера. Предположим, что все корни многочлена на $f(z)$ лежат в круге $\dot{D}$ и $f(1) = 0$. Тогда его производная $f'(z)$ в круге $|z - 1/2| \leq 1/2$.

Доказательство. Если 1 — кратный корень многочлена $f(z)$, утверждение очевидно. Поэтому будем считать, что $f'(1) \neq 0$. Обозначим через $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ корни многочлена $f(z)$, отличные от 1, а через

$w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ - корни его производной $f'(z)$. Определим многочлен $g(z)$, исходя из равенства

$$f(z) = (z-1)g(z) \quad (3.4.1)$$

Тогда $g(1) \neq 0$. Продифференцируем обе части равенства (3.4.1), получим

$$f'(z) = (z-1)g'(z) + g(z) \quad \text{и} \quad f''(z) = (z-1)g''(z) + 2g'(z).$$

Следовательно, $f'(1) = g(1)$ и $f''(1) = 2g'(1)$. Таким образом, $f''(1)/f'(1) = 2g'(1)/g(1)$. Как и в большинстве предыдущих доказательств, воспользуемся равенством (6) при $z=1$ для многочленов $f'(z)$ и $g(z)$. Получим

$$\frac{1}{1-w_1} + \frac{1}{1-w_2} + \dots + \frac{1}{1-w_{n-1}} = 2 \left(\frac{1}{1-z_1} + \dots + \frac{1}{1-z_{n-1}} \right).$$

Равенство сохранится, если мы у обеих частей возьмем вещественные части. Далее заметим, что при $|z| \leq 1$ и $z \neq 1$

$$\Re \frac{1}{1-z} = \Re \frac{1-\bar{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-\Re z}{|1-z|^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Действительно, если $z = x+iy$, то последнее неравенство означает, что $2(1-x) \geq (1-x)^2 + y^2$, что равносильно неравенству $x^2 + y^2 \leq 1$ и $|z| \leq 1$.

Таким образом,

$$\Re \frac{1}{1-w_1} + \Re \frac{1}{1-w_2} + \dots + \Re \frac{1}{1-w_{n-1}} \geq n-1.$$

Следовательно, одно из слагаемых не меньше 1. Для определенности будем считать, что это первое слагаемое. Тогда

$$\frac{1-\Re w_1}{1-w_1} = \Re \frac{1}{1-w_1} \geq 1.$$

Перепишем неравенство, положив $w_1 = u+i\vartheta$, получим

$$1-u \geq (1-u)^2 + \vartheta^2.$$

Что, очевидно, равносильно неравенству $u^2 - u + \vartheta^2 \leq 0$ или, что то же самое

$$|w_1 - 1/2|^2 = (u - 1/2)^2 + \vartheta^2 \leq 1/4.$$

Замечание. В условиях теоремы нельзя гарантировать, что хотя бы один корень производной принадлежит некоторому заранее фиксированному выпуклому множеству K , которое существенно меньше круга $|z - 1/2| \leq 1/2$. Точнее мы покажем, что такое множество K заведомо должно содержать верхний или нижний полукруг указанного круга. Рассмотрим многочлен

$$f(z) = (z-1)(z-e^{i\varphi})(\overline{z}-e^{-i\varphi}) = \overline{z}^3 - (1+2\cos\varphi)z^2 + (1+2\cos\varphi)z - 1.$$

Тогда

$$f'(z) = 3z^2 - 2(1+2\cos\varphi)z + (1+2\cos\varphi).$$

При $0 < \varphi \leq 2\pi/3$ корнями $f'(z)$ будут числа

$$1 - \cos\varphi \pm i\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{1 + 2\cos\varphi}{3} \pm i\sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{2}}$$

Легко проверить, что при изменении φ от 0 до $2\pi/3$ корень со знаком «+» опишет верхнюю половину окружности $|z - 1/2| \leq 1/2$, а корень со знаком «-» опишет нижнюю половину. Таким образом, множество K содержит верхнюю или нижнюю половинку окружности. Незначительная модификация примера позволяет сделать тот же вывод о множестве K без предположения выпуклости. С помощью теоремы Гаусса-Люка несложно понять, что множество K не может быть в точности полукругом.

Теорема Азиза. Если все корни многочлена $f(z)$ лежат в круге $\dot{D}$ и w_0 - один из корней производной $f'(z)$, то в круге $|z - w_0| \leq 1$ расположен хотя бы один корень многочлена $f(z)$.

Доказательство. Утверждение очевидно, если $w_0=0$. Поэтому будем считать, что $w_0 \neq 0$. Через w_0 проведем прямую l , перпендикулярную вектору w_0 . Рассмотрим не содержащую 0 полуплоскость, задаваемую прямой l . По теореме Гаусса-Люка хотя бы один корень многочлена $f(z)$ лежит в этой полуплоскости, потому что в противном случае, w_0 не могло бы быть корнем производной $f'(z)$. Осталось заметить, что пересечение полуплоскости с кругом $\dot{D}$ содержится в круге $|z-w_0| \leq 1$.

Замечание. Как показывает доказательство, условие $f'(w_0)=0$ может быть заменено на условие, что w_0 принадлежит выпуклой оболочке $f'(z)$.

Доказательство.

Чтобы рассматривать делители чисел вида $a^n - b^n$, а не только $a^n - 1$, нужно заменить многочлены деления круга на многочлены двух переменных. Для этого превратим многочлен $x^n - 1$ в многочлен $x^n - y^n$, подставив в него x/y вместо x и умножив результат на y^n . Прделаав аналогичную процедуру с многочленами $f_n(x)$ и $g_n(x)$, получим многочлены

$$\begin{aligned} F_n(x, y) &= x^{\varphi(n)} f_n(x/y), \\ G_n(x, y) &= x^{n-\varphi(n)} g_n(x/y). \end{aligned}$$

Равенство $x^n - 1 = f_n(x) g_n(x)$ при этом превращается в равенство

$$x^n - y^n = F_n(x, y) G_n(x, y),$$

а формула (1) – в формулу

$$x^n - y^n = \prod_{d|n} F_d(x, y). \quad (3.4.2)$$

Любое разложение выражения $x^n - y^n$ как разности степени получается из этой формулы группировкой множителей. А именно, в разложении $x^n - y^n = (x^d - y^d)(\dots)$ все многочлены, номера которых являются делителями числа d , входят в первый множитель, а остальные в – во второй.

Заметим. Что достаточно доказать теорему 2 только в случае, когда a и b взаимно просты. Далее всюду предполагается, что это условие

выполнено. Из взаимной простоты a и b очевидно следует, что a и b просты с числом $a^n - b^n$.

Следующая лемма заменяет лемму 1 в случае двух переменных.

Лемма 2. Если простое число p является делителем числа $F_n(a, b)$ и не является делителем числа $G_n(a, b)$, то $p-1$ делится на n , в частности $p > n$.

Доказательство. Поскольку b не делится на p , найдется такое натуральное число c , что $bc \equiv 1 \pmod{p}$. Рассмотрим числа $a' = ac$ и $b' = bc$ вместо a и b . Так как F_n – однородный многочлен степени $\varphi(n)$, имеет место равенство

$$F_n(a', b') = c^{\varphi(n)} F_n(a, b),$$

откуда $F_n(a', b') \equiv 0 \pmod{p}$. С другой стороны,

$$F_n(a', b') \equiv F_n(a', 1) = f_n(a').$$

Таким образом, $f_n(a')$ делится на p . Аналогично доказывается, что $g_n(a')$ не делится на p . Осталось применить лемму 1.

Лемма 3. Если простое число p является общим делителем чисел $F_n(a, b)$ и $G_n(a, b)$, то n делится на p , а $F_n(a, b)$ не делится на p^2 .

Доказательство. Вспомним, что $G_n(a, b)$ равно произведению чисел $F_d(a, b)$ по всем собственным делителям d числа n . Значит, найдется d , для которого $F_d(a, b)$ делится на p . Тогда $a^d - b^d$ делится на p , так как $F_d(a, b)$ входит множителем в $a^d - b^d$. Умножив d на подходящее число, мы можем добиться того, что $d = n/q$, где q – некоторый простой делитель n . При этом p входит в число $a^n - b^n$ в большей степени, чем в число $a^d - b^d$, так как $F_n(a, b)$ делится на p и входит множителем в $\frac{a^n - b^n}{a^d - b^d}$.

Пусть $A = a^d$, $B = b^d$. Тогда

$$a^n - b^n = A^q - B^q = (A - B)(A^{q-1} + \dots + B^{q-1}).$$

Заметим, что $A \equiv B \pmod{p}$, так как $(A-B) \vdots p$. Следовательно, все слагаемые во второй скобке сравнимы с A^{q-1} по модулю p . Значит, вся вторая скобка сравнима с $q \cdot A^{q-1}$ по модулю p . С другой стороны, она делится на $F_n(a, b)$, а значит, и на p . Но A не делится на p , значит, $q = p$. Таким образом, n делится на p .

Осталось заметить, что число $q = p$ входит в $F_n(a, b)$ только в первой степени. Для случая нечетного p это аналогично по лемме 3. Достаточно проверить, что p входит в $\frac{A^p - B^p}{A - B}$ не более чем в первой степени. Если $A - B = kp$, то

$$\frac{A^p - B^p}{A - B} = pB^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}kpB^{p-2} + (kp)^2(\dots)$$

из разложения $A^p = (B + kp)^p$ по биному. В правой части все слагаемые, кроме первого, делятся на p^2 , а первое не делится, поэтому вся сумма не делится на p^2 .

Рассмотрим оставшийся случай $p = 2$. В этом случае a и b оба нечетны. Если n делится на 4, напомним разложение

$$a^n - b^n = (a^{\frac{n}{2}} - b^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}}).$$

Здесь $F_n(a, b)$ входит во второй множитель, но он не делится на 4 как сумма двух квадратов нечетных чисел.

Если же n не делится на 4, положим $k = n/2$, $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$ и разложим

$$a^n - b^n = \alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} + \dots + \beta^{k-1}).$$

Теперь во второй скобке стоит сумма нечетного числа нечетных слагаемых, поэтому она не делится даже на 2.

По лемме 2 для доказательства теоремы 2 достаточно найти хотя бы один простой делитель числа $F_n(a, b)$, не являющийся делителем числа $G_n(a, b)$. Предположим, что таких нет. Тогда по лемме 3 любой простой делитель числа $F_n(a, b)$ входит в него в первой степени и при этом входит

также и в n . Отсюда следует, что $F_n(a, b) \leq n$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Следствие. Если $F_n(a, b) > n$, то для данных n , a и b утверждение теоремы 2 верно.

Осталось проверить, что неравенство $F_n(a, b) > n$ верно для почти всех n , a и b , и разобрать случаи, в которых оно неверно. На самом деле есть всего один такой случай: $n=6$, $a=2$, $b=1$.

Случай $b > 1$. Докажем, что при $b > 1$ неравенство $F_n(a, b) > n$ всегда верно. Поскольку $F_n(a, b) = b^{\varphi(n)} f_n\left(\frac{a}{b}\right)$, нам нужно оценить снизу значение многочлена f_n в точке $\frac{a}{b}$. Мы оценим его единицей.

Для этого сначала заметим, что $f_n(x) > 0$ при всех вещественных x , так как у многочлена f_n нет вещественных корней. Действительно, все его комплексные корни лежат на единичной окружности и не равны ± 1 , так как 1 и -1 – первообразные корни степени 1 и 2 соответственно, а $n > 2$ по условию теоремы

Теперь докажем, что f_n возрастает на промежутке $(1, +\infty)$. Вспомним, что

$$f_n(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ – все комплексные первообразные корни степени n . Так как $f_n(x) > 0$, можно записать

$$f_n(x) = |f_n(x)| = |x - \xi_1| \cdot |x - \xi_2| \cdot \dots \cdot |x - \xi_{\varphi(n)}|.$$

Заметим, что каждый множитель $|x - \xi_k|$ возрастает при движении x по вещественной оси от 1 до $+\infty$.

Неравенство $f_n(1) \geq 1$ следует из положительности и целочисленности многочлена. Таким образом, $f_n(x) > 1$ при всех $x > 1$, в частности $f_n(a/b) > 1$. Следовательно,

$$F_n(a, b) = b^{\varphi(n)} f_n\left(\frac{a}{b}\right) > b^{\varphi(n)} \geq 2^{\varphi(n)}.$$

4. ТОЖДЕСТВО ФИБОНАЧЧИ И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ. ТОЖДЕСТВО ИСМОИЛОВА

4.1 Тождество Фибоначчи и его обобщение

В работе тождество Фибоначчи и его обобщения рассматриваются на базе системы комплексных чисел.

Известно, что верно так называемое тождество Фибоначчи:

$$(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$$

С правой стороны имеем мультипликативную форму записи (умножение), а с левой стороны аддитивную форму (сложение).

Доказывается данное тождество следующим образом. Рассмотрим:
 $|(z_1 \cdot z_2)|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$, где $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$. Умножаем эти два числа между собой:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 - b_1b_2 = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

Во всех случаях необходимо выделять реальные и мнимые части.

$$u^2 + v^2 = \omega^2 \quad u, v, \omega \in \Pi_3$$

где

$$u = \operatorname{Re} z \quad ; \quad \vartheta = 2(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) \quad ; \quad \omega = |z|^2 .$$

Далее возводим в квадрат обе части, получаем:

$$\begin{aligned} & (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2 = \\ & = a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 \end{aligned} .$$

Приведем общие множители:

$$a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2) = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) .$$

То есть

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$$

Что и требовалось доказать.

В работе были рассмотрены частные и общие случаи тождества Фибоначчи для 3-х, 4-х чисел и для более обобщенного случая, когда число слагаемых равно n .

Отметим равенство для трёх чисел z_1 , z_2 и z_3 , где $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$; $z_3 = a_3 + ib_3$.

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot |z_3|^2$$

Перемножив и раскрыв скобки, выделим реальную и мнимую части:

$$u = a_3 \cdot (a_1 a_2 - b_1 b_2) - b_3 \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad ; \quad \vartheta = b_3 \cdot (a_1 a_2 - b_1 b_2) + a_3 \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Возводим в квадрат и получаем:

$$\begin{aligned} u^2 + \vartheta^2 &= [a_3 \cdot (a_1 a_2 - b_1 b_2) + b_3 \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)]^2 + \\ &+ [b_3 \cdot (a_1 a_2 - b_1 b_2) + a_3 \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)]^2 = \\ &= [a_3 \cdot (a_1 a_2 - b_1 b_2)]^2 + [a_3 \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)]^2 + \\ &+ [b_3 \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)]^2 + [b_3 \cdot (a_1 a_2 - b_1 b_2)]^2 = (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) \cdot (a_3^2 + b_3^2) \end{aligned}$$

Заметим, что складывая 4 слагаемых, каждое из них возведенное в квадрат, в результате дали 3 множителя.

В итоге получаем тождество для трех чисел в общем случае:

$$\begin{aligned} [a_3 \cdot (a_1 a_2 - b_1 b_2) + b_3 \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)]^2 + [b_3 \cdot (a_1 a_2 - b_1 b_2) + a_3 \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)]^2 = \\ = (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) \cdot (a_3^2 + b_3^2) \end{aligned}$$

Также были рассмотрены некоторые частные случаи, когда нам даны три числа, два из которых равны между собой. Положим, что $z_1 = z_2$. Тогда тождество примет следующий вид:

$$\begin{aligned} (a_1^2 a_3 - 2a_1 b_1 b_3 - b_1^2 a_3)^2 + (a_1^2 b_3 + 2a_1 b_2 a_3 - b_1^2 b_3)^2 = \\ = (a_1^2 + b_1^2)^2 \cdot (a_3^2 + b_3^2) \end{aligned}$$

Если же все три числа равны между собой, то есть $z_1 = z_2 = z_3$, то также выделяя реальную и мнимую части, имеем

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3|^2 = (a^3 - 3ab^2)^2 + (3a^2b - b^3)^2 = (a^2 + b^2)^3$$

Далее были получены результаты в общем и частном случаях для четырех слагаемых z_1, z_2, z_3, z_4 , где $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$; $z_3 = a_3 + ib_3$; $z_4 = a_4 + ib_4$. В общем случае тождество примет вид:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4|^2 &= \\ &= [(a_1 a_2 - b_1 b_2) \cdot (a_3 a_4 - b_3 b_4) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot (a_3 b_4 + a_4 b_3)]^2 + \\ &+ [(a_1 a_2 - b_1 b_2) \cdot (a_3 b_4 + a_4 b_3) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot (a_3 a_4 - b_3 b_4)]^2 = \\ &= (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) \cdot (a_3^2 + b_3^2) \cdot (a_4^2 + b_4^2) \end{aligned}$$

В частном случае уравнение с множителями: $z_1 = z_2 = a_1 + ib_1$, $z_3 = z_4 = a_3 + ib_3$; будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4|^2 &= [(a_1 a_3 - b_1 b_3)^2 - (a_1 b_3 + a_3 b_1)^2]^2 + \\ &+ [2 \cdot (a_3 a_1 - b_3 b_1) \cdot (a_3 b_1 + a_1 b_3)]^2 = \\ &= (a_1^2 + b_1^2)^2 \cdot (a_3^2 + b_3^2)^2 \end{aligned}$$

Из выше изложенного можно выделить некоторые свойства:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)|^2 &= |z_1|^2 \cdot |(z_2 \cdot z_3)|^2 = |(z_1 \cdot z_2)|^2 \cdot |z_3|^2 = |z_2 \cdot (z_1 \cdot z_3)|^2 = \\ &= |z_3 \cdot (z_1 \cdot z_2)|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot |z_3|^2 \end{aligned}$$

Для большего количества слагаемых формула выводится аналогично. Перемножая n слагаемых, получаем:

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \cdot \dots \cdot (a_n + ib_n) = X + iY,$$

где

$$X = \operatorname{Re}(z_1 \dots z_n) \quad Y = \operatorname{Im}(z_1 \dots z_n)$$

Тогда тождество запишется в виде:

$$X^2 + Y^2 = \prod_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2)$$

или

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot \dots \cdot |z_n|^2 = (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) \cdot \dots \cdot (a_n^2 + b_n^2)$$

Также можно рассмотреть обобщение тождества Фибоначчи, когда комплексное число записывается в виде:

$$z = X + i \cdot \sqrt{m} \cdot Y \quad m \neq m_1^2$$

, где

То есть число m не является квадратом какого либо целого числа. Данное число, возведенное в квадрат имеет вид:

$$|z|^2 = (X + i \cdot \sqrt{m} \cdot Y)^2 = X^2 - mY^2 + i \cdot \sqrt{m} \cdot X \cdot Y$$

также как и в случаях с n слагаемыми, выделяем мнимую и реальную части:

$$u = X^2 - mY^2 \quad v = X \cdot Y \cdot \sqrt{m}$$

Как и в предыдущих случаях, возводим все в квадрат и получаем:

$$(X^2 - m \cdot Y^2)^2 + 4(X \cdot Y \cdot \sqrt{m})^2 = (X^2 + m^2 Y^2)^2$$

Докажем, что из чисел, представленных в таком виде также можно получить некоторое обобщение тождества Фибоначчи.

Рассмотрим два комплексных числа: $z_1 = a_1 + i \cdot \sqrt{m} \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot \sqrt{m} \cdot b_2$

. Перемножим данные два числа:

$$(a_1 + i \cdot \sqrt{m} \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot \sqrt{m} \cdot b_1) = (a_1 a_2 - m b_1 b_2) + i \cdot \sqrt{m} \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Далее, по стандарту:

$$(a_1 a_2 - m b_1 b_2)^2 + [\sqrt{m} \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)]^2 = (a_1^2 + m b_1^2)(a_2^2 + m b_2^2)$$

Что и требовалось доказать.

4.2 Последовательность Фибоначчи

Числа Фибоначчи- это элементы числовой последовательности 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,10946,..., в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Число 0 иногда не рассматривается как член последовательности. Название дано по имени средневекового математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи).

Последовательность чисел Фибоначчи задается линейным рекуррентным соотношением:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 2$$

Последовательность чисел Фибоначчи была хорошо известна в древней Индии и применялась она в метрических науках, например таких как просодии, или другими словами- стихосложении.

На западе эта последовательность была исследована Леонардо Пизанским в его труде «Liber Abaci», написанном в 1202 году. Рассматривал он развитие идеализированной, или можно сказать биологически нереальной, популяции кроликов, предполагая, что:

1. в «нулевом» месяце имеется пара роликов (1 новая пара).
2. в первом месяце первая пара производит на свет другую пару (1 новая пара).
3. во втором месяце обе пары кроликов порождают другие пары и первая пара погибает (2 новые пары).
4. в третьем месяце вторая пара и две новые пары порождают в общем три новые пары, а старая пара погибает (3 новые пары).

Тот факт, что каждая пара и две новые пары порождают еще две пары на протяжении жизни, а затем погибает является закономерным.

Обозначим популяцию за месяц n через $f(n)$. В то время только те кролики, которые жили в месяце $n-2$, являются способными к размножению и производят потомков, тогда $f(n-2)$ пар прибавится к текущей популяции $f(n-1)$.

Таким образом общее количество пар будет равно $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Требуется доказать, что

$$f_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2i \cos \frac{k\pi}{n} \right) \quad n \geq 2$$

Для четного числа n в произведении количество множителей будет нечетным и число, расположенное в середине произведения, всегда будет равно единице. Если n нечетное, то количество множителей четное, причем

первое и последнее, второе и предпоследнее и так далее расположенные числа будут сопряженными между собой.

Проверим данную формулу для $n=2,3,4,5,6$.

Для $n=2$:

$$f_2 = \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Для $n=3$:

$$f_3 = \prod_{k=1}^2 \left(1 - 2i \cos \frac{k\pi}{3}\right) = \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{3}\right) \left(1 - 2i \cos \frac{2\pi}{3}\right) = 1 - 2i \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3}\right) + 4 \cos^2 \frac{\pi}{3}$$

заметим, что $\left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{6} = 0$, тогда

$$f_3 = 1 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{3} = 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

С другой стороны мы видим, что если подставлять значения f_1 и f_2 в рекуррентную формулу, то получаем:

$$f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$$

Далее для $n=4$:

$$f_4 = \prod_{k=1}^3 \left(1 - 2i \cos \frac{k\pi}{4}\right) = \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{4}\right) \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{2}\right) \left(1 - 2i \cos \frac{3\pi}{4}\right)$$

так как $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, то $\left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{2}\right) = 1$, отсюда,

$$f_4 = \left(1 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + 2 = 3$$

$$f_4 = f_3 + f_2$$

Для $n = 5$:

$$f_5 = \prod_{k=1}^4 \left(1 - 2i \cos \frac{k\pi}{5} \right) = \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{5} \right) \left(1 - 2i \cos \frac{2\pi}{5} \right) \left(1 - 2i \cos \frac{3\pi}{5} \right) \left(1 - 2i \cos \frac{4\pi}{5} \right),$$

используя формулы приведения, получаем

$$\cos \frac{3\pi}{5} = \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{5} \right) = -\cos \frac{2\pi}{5} \quad \text{и} \quad \cos \frac{4\pi}{5} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right) = -\cos \frac{\pi}{5}.$$

Так как n четное, то первое и последнее, и второе и предпоследнее множители будут сопряженными, тогда

$$f_5 = \left(1 - 4i^2 \cos^2 \frac{\pi}{5} \right) \left(1 - 4i^2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right) = \left(1 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} \right) \left(1 + 4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right).$$

Вспомним, так называемое «золотое сечение», его значение равно:

$$\varphi = \cos \frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Используем формулы понижения степени:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

тогда

$$f_5 = \left(1 + 4 \cdot \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{5}}{2} \right) \left(1 + 4 \cdot \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{5}}{2} \right) = \left(3 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} \right) \left(3 + 2 \cos \frac{4\pi}{5} \right),$$

$$\cos \frac{4\pi}{5} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right) = -\cos \frac{\pi}{5}$$

также применяя формулы приведения для получаем далее:

$$f_5 = \left(3 + 2 \cos \frac{2\pi}{5}\right) \left(3 - 2 \cos \frac{\pi}{5}\right) = 9 - 6 \cos \frac{\pi}{5} + 6 \cos \frac{2\pi}{5} - 4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$$

Запишем $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$ и $\frac{2\pi}{5}$, тогда

$$f_5 = 9 - 6 \cos 36^\circ + 6 \cos 72^\circ - 4 \cos 36^\circ \cos 72^\circ$$

Далее с помощью формул приведения: $\cos 72^\circ = \cos(90^\circ - 18^\circ) = \sin 18^\circ$

$$f_5 = 9 + 6(\cos 72^\circ - \cos 36^\circ) - 4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ$$

К $4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ$ добавим и чтобы ничего не изменилось, разделим на $\cos 18^\circ$ и используем формулу синуса двойного угла, где $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$

$$f_5 = 9 - 6(\cos 36^\circ - \sin 18^\circ) - \frac{4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = 9 - 6(\cos 36^\circ - \sin 18^\circ) - \frac{2 \cos 36^\circ \sin 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \left| \frac{2 \cos 36^\circ \sin 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = 1 \right| = 9 - 6(\cos 36^\circ - \sin 18^\circ) - 1$$

Дальше по формуле разности косинусов, которая имеет вид: $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$ и также применяя формулы синуса двойного угла имеем:

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ = \frac{2 \cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos 36^\circ \sin 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{1}{2}$$

Подставляем полученное значение в f_5 , тогда

$$f_5 = 9 - 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 - 3 = 6$$

А с другой стороны:

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$$

Для $n = 6$:

$$\begin{aligned} f_6 &= \prod_{k=1}^5 \left(1 - 2i \cos \frac{k\pi}{6} \right) = \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{6} \right) \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{3} \right) \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{2} \right) \left(1 - 2i \cos \frac{2\pi}{3} \right) \left(1 - 2i \cos \frac{5\pi}{6} \right) = \\ &= \left(1^2 - \left(2i \cos \frac{\pi}{6} \right)^2 \right) \left(1^2 - \left(2i \cos \frac{\pi}{3} \right)^2 \right) = \left(1 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{6} \right) \left(1 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{3} \right) = \left(1 + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) \left(1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \\ &= \left(1 + 4 \cdot \frac{3}{4} \right) (1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8 \end{aligned}$$

$$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$$

или

4.3 Функциональное уравнение

Функциональное уравнение Коши

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (4.3.1)$$

и родственные ему уравнения

$$g(x+y) = g(x)g(y) \quad (4.3.2)$$

и т.п. были в начале века довольно популярными, с одной стороны, в связи с аксиоматикой механики, а с другой стороны – в связи с третьей проблемой Гильберта (равносоставлены ли равновеликие многогранники?). Хорошо известно, что непрерывные решения уравнения (4.3.1) суть только линейные функции AX , а для уравнения (4.3.2) это только $g \equiv 0$ и $g(x) = a^x$.

Поскольку переход от уравнения (4.3.2) к (4.3.1) осуществляется простым преобразованием $f(x) = \log g(x)$, ограничимся уравнением (4.3.1). Тот же результат, что и выше, мы получим, попробовав вместо непрерывности выполнения любого из следующих условий:

- а) $f(x)$ непрерывна хотя бы в одной точке;
- б) $f(x)$ имеет производную в нуле;
- в) $f(x)$ ограничена в окрестности нуля;
- г) $f(x)$ монотонна;
- д) $f(x)$ измерима по Лебегу;

е) существует точка $(x_0; y_0)$, в некоторой окрестности, в которой нет ни одной точки графика функции $y=f(x)$. Случаи «а», «б» и «г» довольно просты. Случай «в», из которого три вышеназванных получаются как следствия, несколько сложнее, но все же доказательство для него элементарно: случаи «д» и «е» связаны с глубокими исследованиями, о которых будет сказано ниже.

В 1905 г. Г. Гамель построил множество, называемое теперь базисом Гамеля. Это множество G действительных чисел обладает тем свойством, что каждое действительное число единственным образом представимо в виде конечной линейной комбинации

$$x = n_1 g_1 + n_2 g_2 + \dots + n_k g_k \quad (4.3.3)$$

Чисел $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ с целыми коэффициентами $n_1, n_2, \dots, n_k$. Произвольно задав значения функции $f(x)$ в точках множества G , мы можем однозначно продолжить ее на всю числовую ось при помощи равенства

$$f(x) = n_1 f(g_1) + n_2 f(g_2) + \dots + n_k f(g_k) \quad (4.3.4)$$

где n_j - те же, что и в (4.3.3). Уравнение (4.3.1) удовлетворяется, поскольку G - базис Гамеля. Этим исчерпываются все решения уравнения (4.3.1). К сожалению, базис Гамеля и построенные с его помощью решения уравнения (4.3.1) обладают весьма сложными свойствами.

Прежде всего само построение базиса Гамеля неконструктивно, оно осуществляется при помощи леммы Цорна или трансфинитной индукции (то есть, в сущности аксиомы Цермело). Усилиями целого ряда математиков, в том числе Фреме и Банаха установлено, что все решения уравнения (4.3.1), отличные от Ax , неизмеримы, график любого из них заполняет плоскость всюду плотно.

4.4 Об одном функциональном уравнении

I. Пусть $a > 0$ и $x \in R$;

$$f_a(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \iff f_a(x) = f_a(-x) \quad (4.4.1)$$

-четная функция и при $x \rightarrow ix$; $x \in R$ тогда $f_a(ix) = \cos_a x$.

Рассмотрим

$$\cos_a(x+y) + \cos_a(x-y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = 2 \cdot \cos x \cdot \cos y$$

Тогда

$$f_a(x+y) + f_a(x-y) = \frac{a^{x+y} + a^{-(x+y)} + a^{x-y} + a^{-(x-y)}}{2} = \frac{a^x(a^y + a^{-y}) + a^{-x}(a^y + a^{-y})}{2} = \frac{(a^y + a^{-y})(a^x + a^{-x})}{2} = 2 \cdot f_a(x) \cdot f_a(y)$$

Следовательно, мы доказали функциональное уравнение

$$f_a(x+y) + f_a(x-y) = 2 \cdot f_a(x) \cdot f_a(y) \quad (4.4.2)$$

или

$$\cos_a(x+y) + \cos_a(x-y) = 2 \cdot \cos_a(x) \cdot \cos_a(y). \quad (4.4.3)$$

Таким образом, равенство (4.4.2) и (4.4.3) эквивалентны. Равенства (4.4.2) и (4.4.3) полный аналог классического равенства для функции косинуса, при этом сохраняется свойство четности косинуса.

II. Введем в рассмотрение функцию $g_a(x)$ равенством

$$g_a(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2i} \iff g_a(x) = -g_a(-x) \quad (4.4.4)$$

-нечетная функция; $i^2 = -1$, то есть положим

$$g_a(ix) = \frac{a^{ix} - a^{-ix}}{2i} = \sin_a x.$$

Верны следующие равенства:

- 1) $g_a(x+y) + g_a(x-y) = 2 \cdot f_a(y) \cdot g_a(x)$
- 2) $g_a(x+y) - g_a(x-y) = 2 \cdot f_a(x) \cdot g_a(y).$

Проверим первое из них: на основании (4.4.3) имеем

$$g_a(x+y)+g_a(x-y)=\frac{a^{x+y}-a^{-(x+y)}+a^{x-y}-a^{-(x-y)}}{2i}=\frac{a^x(a^y+a^{-y})-a^{-x}(a^y+a^{-y})}{2i}=\frac{(a^y+a^{-y})(a^x-a^{-x})}{2i}=i\cdot 2\cdot \dots$$

$$f_a(x+y)-f_a(x-y)=-2\cdot g_a(x)\cdot g_a(y).$$

Аналогично проверяется и второе равенство.

Эти тождества повторяют обычные свойства функции синуса. Далее, легко показать, что

$$f_a(ix)+i g_a(ix)=a^{ix}\Leftrightarrow \cos_a x+i \sin_a x=a^{ix} \quad (4.4.5)$$

Равенство (4.4.5) является аналогом формулы Эйлера.

Действительно, по равенствам (4.4.1) и (4.4.4) имеем

$$\frac{a^{ix}+a^{-ix}}{2}+i\cdot \frac{a^{ix}-a^{-ix}}{2i}=\frac{2a^{ix}}{2}=a^{ix}, \forall x\in R; i=\sqrt{-1}; i^2=-1.$$

Отметим полученные результаты:

- 1) $f_a(x+y)+f_a(x-y)=2\cdot f_a(x)\cdot f_a(y)$
- 2) $f_a(x+y)-f_a(x-y)=-2\cdot g_a(x)\cdot g_a(y)$
- 3) $g_a(x+y)+g_a(x-y)=2\cdot g_a(x)\cdot f_a(y)$
- 4) $g_a(x+y)-g_a(x-y)=2\cdot f_a(x)\cdot g_a(y).$

Частные выводы:

$$a=e; x=i\alpha; \alpha\in R;$$

$$\left. \begin{aligned} f_e(i\alpha) &= \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ g_e(i\alpha) &= \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_e(i\alpha) + i g_e(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$$

- формула Эйлера.

$$\left. \begin{aligned} f_e(ix) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} x^{2k} = \cos x \\ g_e(ix) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \sin x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_e(i\alpha) + i g_e(i\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};$$

$$x \in (-\infty; +\infty) .$$

Далее нужно построить новую теорию обобщенных комплексных чисел, которая будет совпадать при $a=e$ с обычной теорией комплексных чисел.

4.5 Теорема Исмоилова

$$A^4+B^4+C^4=2 \cdot \left(\frac{A^2+B^2+C^2}{2} \right)^2, (4.5.1)$$

$$2(A^4+B^4+C^4)=(A^2+B^2+C^2)^2 \quad (4.5.2)$$

если $A=B+C$, $B=A+C$ или $C=B+A$.

Доказательство. Из правой части (4.5.2) после элементарных действий имеем равенство

$$A^4+B^4+C^4+2(A^2B^2+B^2C^2+C^2A^2)$$

с учетом условия $C=B+A$ получим

$$4+2(A^2B^2+B^2(A^2+2AB+B^2)+(A^2+2AB+B^2)A^2);$$

$$A^4+B^4+(A+B)^4+2(A^2B^2+B^2(A+B)^2+(A+B)^2A^2)=A^4+B^4+A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^6$$

отсюда после группировки однотипных членов, имеем:

$$2[A^4+B^4+A^4+B^4+(A+B)^4]=2(A^4+B^4+C^4) .$$

Утверждение доказано.

4.5.1 Применение теоремы Исмоилова к комплексным числам

1) Пусть $z=x+iy \neq 0$ комплексное число, тогда

$$|z|^2=x^2+y^2; x, y \in R .$$

По теореме Исмоилова получим:

Утверждение 1. Справедливо равенство

$$(x^2+y^2)^4+x^8+y^8=2\left(\frac{(x^2+y^2)^2+x^4+y^4}{2}\right)^2.$$

Утверждение 2. Пусть $z_1=a+ib$; $z_2=c+id$, тогда

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2;$$

это утверждение выводится прямым подсчетом из свойства модуля комплексных чисел:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Действительно, имеем:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Тогда

$$|z|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \quad (*)$$

С другой стороны

$$|z_1|^2 = (a^2 + b^2); |z_2|^2 = (c^2 + d^2);$$

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) \quad (**)$$

Сравнивая левую и правую часть (*) и (**), получим утверждение 2.

2) По определению определителя второго порядка

$$|z_1|^2 = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2; |z_2|^2 = \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = c^2 + d^2;$$

Следовательно, по теореме Исмоилова, получим равенство

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ad & \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a-c & \\ b & d \end{vmatrix}^2;$$

где

$$\left| \begin{array}{cc} ad & \\ b & c \end{array} \right|^2 = (ac - bd)^2;$$

$$\left| \begin{array}{cc} a-c & \\ b & d \end{array} \right|^2 = (ad + bc)^2.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Утверждение 3. Справедливо тождество

$$\left| \begin{array}{cc} a-b & \\ b & a \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} c-d & \\ d & c \end{array} \right|^4 + \left| \begin{array}{cc} ad & \\ b & c \end{array} \right|^8 + \left| \begin{array}{cc} a-c & \\ b & d \end{array} \right|^8 = 2 \left(\frac{\left| \begin{array}{cc} a-b & \\ b & a \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} c-d & \\ d & c \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} ad & \\ b & c \end{array} \right|^4 + \left| \begin{array}{cc} a-c & \\ b & d \end{array} \right|^4}{2} \right)^2.$$

Проверка осуществляется согласно теореме Исмоилова, где

$$\left. \begin{array}{l} C = \left| \begin{array}{cc} a-b & \\ b & a \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} c-d & \\ d & c \end{array} \right|; \\ A = \left| \begin{array}{cc} ad & \\ b & c \end{array} \right|^2; \\ B = \left| \begin{array}{cc} a-c & \\ b & d \end{array} \right|^2 \end{array} \right\} \Rightarrow C = A + B.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При написании магистерской диссертации были применены следующие методы решения задач:

1. Обсуждение цели, задач и конкретных направлений проекта.
2. Сбор материалов и изучение литературы.
3. Анализ прочитанного.
4. Систематизация материала.
5. План работы.
6. Создание доклада по теме «Круговые многочлены и их применение к представлению чисел в виде степеней».

Цели, поставленные в данной диссертации были достигнуты, в частности:

- была исследована теория комплексных чисел;
- получены результаты деления многочленов и выражения Φ_{mn} через Φ_n
- изучено тождество Фибоначчи и его обобщения, получены результаты;
- исследованы множества решений систем функциональных уравнений, выражена связь с тригонометрическими функциями;
- получены обобщения и выводы теоремы Исмоилова.

В работе были рассмотрены решения задач по теории «Комплексные числа», выявлена область применения комплексных чисел; рассмотрены решения простейших задач с помощью «Ряда Фибоначчи», решены поставленные задачи на функциональное уравнение.

В результате исследования, автором самостоятельно была выполнена следующая работа:

1. Доказана гипотеза деления многочлена на многочлен и получены некоторые обобщения;
2. Рассмотрены частные и общие случаи тождества Фибоначчи для 3-х, 4-х чисел и для более обобщенного случая, когда число слагаемых равно n ;
3. Выражена связь некоторого функционального уравнения с тригонометрическими функциями;
4. Получены обобщения теоремы Исмоилова.

В представленной магистерской диссертации выполнены следующие результаты.

1) В первой главе подробно рассмотрено построение системы комплексных чисел над полем вещественных чисел, подробно определяются операции сложения, вычитания, умножения, деления (кроме на нуль), операция сопряжения для комплексных чисел в алгебраической форме, степень мнимой единицы, геометрическая интерпретация комплексных чисел, свойства действий во множестве комплексных чисел. Во второй главе подробно рассмотрен вопрос о возведении комплексных чисел в степень и извлечения из них корня, также рассмотрен немаловажный случай извлечения корня n -ой степени из числа единицы. В третьей части кратко рассмотрено одно применение целых комплексных чисел в теории Пифагоровских треугольников.

2) Во второй главе были изучены круговые многочлены и их основные свойства на базе системы комплексных чисел. Основные результаты этой главы приведены в подглаве 2.7.

3) В третьей главе были рассмотрены комплексные числа и многочлены. Приведены теоремы с доказательствами.

4) В четвертой главе решалась задача обобщения тождества Фибоначчи, также рассматривалась последовательность Фибоначчи. Решалась задача об одном функциональном уравнении. В этой части были рассмотрены частные и общие случаи умножения n - слагаемых с применением к ним свойства умножения комплексных чисел. В ходе изучения данной темы были получены интересные результаты, решение задач подробно расписано в магистерской диссертации.

Схема выполнения работы первоначально использовала ввод теоретических основ, а впоследствии практическое применение при решении задач, примеров.

Материал, изложенный в магистерской диссертации, может быть использован в учебном процессе в курсе алгебры в высшем учебном заведении, а также в классах с углубленным изучением математики или на факультативных курсах в общеобразовательных школах. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области аналитической теории чисел и могут найти применение в различных разделах теории чисел и математического анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.- М.: Наука, 1971.- 430 с.
2. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел.- М.: Просвещение, 1975 г.
3. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Курс высшей алгебры.: Математика для техникумов.- М. Наука, 1980.- 496 с.
4. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. – М.: 1974 г. – I часть.
5. Шахмейстер А.Х. Комплексные числа.- М.: Издательство МЦНМО, 2009. 43-46 с.
6. Шахмейстер А.Х. Комплексные числа.- М.: Издательство МЦНМО, 2009. 80-87 с.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.- М. Методы теории функции комплексного переменного.
8. Яглом И.М. Комплексные числа и их приложения в геометрии. Изд.2-е, стереотипное.- М.: Едиториал УРСС, 2004.
9. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.- М.: Физматлит, Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
10. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функции комплексной переменной.- М.: Физматлит, 2005 г.-336 с.
11. Прасолов В.В. Многочлены.- 3-е издание, исправленное.- М.: МЦНМО, 2003.104-114 с.
12. Прасолов В.В. Многочлены.- 3-е издание, исправленное.- М.: МЦНМО, 2003.158-160 с.
13. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Функциональные уравнения.- К.: Вища

школа. Головное изд-во, 1983 г.

Приложение комплексных чисел в электротехнике.

Комплексные числа широко используются в электротехнике (символический метод) для расчета цепей переменного тока, содержащих активные (резисторы) и реактивные (индуктивности и конденсаторы) элементы. В частности для расчета сопротивления цепи. Проиллюстрируем это на примере.

Пример. Пусть $r_1 = 5 \text{ Ом}$, $r_{c1} = 15 \text{ Ом}$, $r_2 = 10 \text{ Ом}$, $r_{c2} = 16 \text{ Ом}$, $r_{c3} = 10 \text{ Ом}$.

Необходимо найти сопротивление всей цепи. Сопротивление на участке цепи АВ обозначим Z_1 . Это сопротивление на двух независимых величин, а именно- активной r_1 и реактивной r_{c1} , зависящей от частоты тока и емкости конденсатора: $r_{c1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1}$. Аналогично $r_{c3} = \frac{1}{\omega \cdot C_3}$. Здесь $\omega = 2\pi f$ - круговая частота.

Мы получим $Z_1 = (r_1 ; r_{c1}) = r_1 - r_{c1} i$, поскольку для емкостного сопротивления вектор реактивного сопротивления отстанет на $\frac{\pi}{2}$.

На участке BD_1 имеем $r_{c2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2}$. Индуктивное сопротивление опережает активное сопротивление на $\frac{\pi}{2}$, поэтому $Z_{c2} = (r_2 ; r_{c2}) = r_2 + r_{c2} i$.

На участке В D_2 присутствует только емкостное сопротивление $Z_3 = -r_{c3} i$.

Таким образом, $Z_1 = 5 - 15i \text{ Ом}$, $Z_2 = 12 + 16i \text{ Ом}$, $Z_3 = -10i \text{ Ом}$.

Для параллельного соединения $Z_{2-3} = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}$;

$$Z_{2-3} = \frac{(12+16i)(-10i)}{12+16i-10i} = \frac{160-12i}{2+16i} = \frac{80-6i}{1+8i} = \frac{(80-6i)(1-8i)}{1-64} = \frac{80-48-688i}{-63} = \frac{32-688i}{9} \text{ Ом}$$

Аналогичным образом комплексные числа применяются для выражения других характеристик электрических цепей.

Приложение А

$$2) \sqrt[4]{\cos 100^0 + i \sin 100^0} = \cos \frac{100^{0+360^0} k}{4} + i \sin \frac{100^{0+360^0} k}{4} = \cos(25^0 + 90^0 k) + i \sin(25^0 + 90^0 k)$$

Все значение корней получим, придавая k значение 0;1;2;3.
В дальнейшем для удобства мы будем использовать обозначение

$$\varepsilon_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Можно доказать, что все корни степени n из 1 выражаются через ε_n ;

$$\sqrt[n]{1} = \left[1; \varepsilon_n; \varepsilon_n^2; \dots; \varepsilon_n^{n-1}\right].$$

Покажем, как можно использовать первообразные корни для решения уравнений ,на примерах нахождения корней n-й степени из комплексного числа.

$$Z^3 = 1. \text{ Имеем: } z_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1 | (\cos 0 + i \sin 0)|};$$

$$z_k = \cos \frac{0+2\pi k}{3} + i \sin \frac{0+2\pi k}{3} = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}$$

При k=1,2 получим

$$k=1, \quad z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i;$$

$$k=2, \quad z_2 = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \cdot 2\right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \cdot 2\right) = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_1^2;$$

Задачи

$$1. \quad z^4 = -i$$

$$\text{Имеем: } -i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \quad (|-i|=1) ;$$

$$z_k = \sqrt[4]{\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{4}$$

Приложение А

$\frac{\varphi_0}{n} = \frac{3\pi}{8}$ (нумерация корней может начинаться и с $k=0$). Значит,

$$k=0, \quad z_0 = \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} ;$$

$$k=1, \quad z_1 = \cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} ;$$

$$k=2, \quad z_2 = \cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} ;$$

$$k=3, \quad z_3 = \cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8} ;$$

Учитывая что

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{6\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} ;$$

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{6\pi}{8}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} ;$$

Получаем

$$z_0 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} i ; \quad z_1 = \frac{-\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} i ;$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} i ; \quad z_3 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} i$$

Примечание. Иногда корни удобно оставить в тригонометрической, а иногда в алгебраической форме.

$$2. \quad z^3 = 8i.$$

$$\text{Имеем: } 8i = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right);$$

$$z_k = 2 \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = 2 \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right)$$

Приложение А

Следовательно $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{6}$ и $R=2$ - радиус окружности. Корни уравнения получаем при $k=0;1;2$;

$$k=0, \quad z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i ;$$

$$k=1, \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} + i ;$$

$$k=2, \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2(0 - i) = -2i$$

$$3. \quad z^3 = -i$$

$$\text{Имеем: } -i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} ;$$

$$z_k = \sqrt[3]{\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{2}$ и $R=1$. Корни уравнения:

$$k=0, \quad z_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i ;$$

$$k=1, \quad z_1 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i ;$$

$$k=2, \quad z_2 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i .$$

$$4. \quad z^4 = 16i$$

$$\text{Имеем: } i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} ;$$

$$z_k = \sqrt[4]{16 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)} = 2 \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4} \right)$$

Приложение А

Таким образом, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{8}$ и $R=2$. Корни уравнения:

$$k=0, \quad z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \right) = \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}} i ;$$

$$k=1, \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right) = 2 \left(\frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} i \right) = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}} i ;$$

$$k=2, \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right) = 2 \left(\frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \right) ;$$

$$k=3, \quad z_3 = 2 \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} i \right) = \sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}} i$$

$$5. \quad z^4 = -1 .$$

Имеем: $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$;

$$z_k = \sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} .$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{4}$ и $R=1$. Корни уравнения:

$$k=0, \quad z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i ;$$

$$k=1, \quad z_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i ;$$

$$k=2, \quad z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i ;$$

$$k=3, \quad z_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i .$$

$$6. \quad z^6 = 64.$$

Имеем: $64 = 64(1+0) = 64 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$;

$$z_k = \sqrt[6]{64 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)} = 2 \left(\cos \frac{2\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{2\pi + 2\pi k}{6} \right) .$$

Приложение А

Значит, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{3} u R = 2$. Корни уравнения:

$$k=0, \quad z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i ;$$

$$k=1, \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + \sqrt{3}i ;$$

$$k=2, \quad z_2 = 2 (\cos \pi + i \sin \pi) = -2 ;$$

$$k=3, \quad z = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i ;$$

$$k=4, \quad z_4 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i ;$$

$$k=5, \quad z_5 = 2 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2.$$

$$7. \quad z^6 = -64i.$$

$$\text{Имеем: } -64i = 64 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right);$$

$$z_k = \sqrt[6]{64 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)} = 2 \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{6} \right)$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{4} u R = 2$. Корни уравнения:

$$k=0, \quad z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$k=1, \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = -\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}i ;$$

$$k=2, \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = -\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}i ;$$

$$k=3, \quad z_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i ;$$

$$k=4, \quad z_4 = 2 \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}i ;$$

Приложение А

$$k=5, \quad z_5 = 2 \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right) = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}i ;$$

Здесь мы воспользовались преобразованиями типа

$$\cos \frac{7\pi}{12} = -\sqrt{\frac{1+\cos \frac{7\pi}{6}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$8. \quad z^8 = i.$$

$$\text{Имеем: } \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2};$$

$$z_k = \sqrt[8]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{8} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{8}.$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{16}$ и $R=1$. Корни уравнения:

$$k=0, \quad z_0 = \cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} ;$$

$$k=1, \quad z_1 = \cos \frac{5\pi}{16} + i \sin \frac{5\pi}{16} ;$$

$$k=2, \quad z_2 = \cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} ;$$

$$k=3, \quad z_3 = \cos \frac{13\pi}{16} + i \sin \frac{13\pi}{16} ;$$

$$k=4, \quad z_4 = \cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} ;$$

$$k=5, \quad z_5 = \cos \frac{21\pi}{16} + i \sin \frac{21\pi}{16} ;$$

$$k=6, \quad z_6 = \cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} ;$$

$$k=7, \quad z_7 = \cos \frac{29\pi}{16} + i \sin \frac{29\pi}{16} .$$

$$9. \text{ Имеем: } -1 = \cos \pi + i \sin \pi ;$$

Приложение А

$$z_k = \sqrt[6]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6}.$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{6}$ и $R=1$. Корни уравнения:

$$k=0, \quad z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$k=1, \quad z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i;$$

$$k=2, \quad z_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$k=3, \quad z_3 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$$

$$k=4, \quad z_4 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i;$$

$$k=5, \quad z_5 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$10. \quad z^5 = -32, \quad -32 = 32 (\cos \pi + i \sin \pi);$$

$$z_k = \sqrt[5]{32 (\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{5} \right).$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{5}$ и $R=2$. Корни уравнения:

$$k=0, \quad z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right);$$

$$k=1, \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right);$$

$$k=2, \quad z_2 = 2 (\cos \pi + i \sin \pi) = -2;$$

$$k=3, \quad z_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right);$$

Приложение А

$$k=4, \quad z_4=2\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right) .$$

Балыкова Бибигуль Жанарбековна

**Круговые многочлены и их применение к представлению чисел в
виде степеней**

6M060100 - Математика

Реферат
диссертации на соискание академической
степени магистра естественных наук

Работа выполнена в Инновационном Евразийском университете

Научный руководитель:

доктор ф.-м. наук,
профессор
Исмоилов Д.И.

Официальный оппонент:

кандидат ф.-м.н,
доцент ПГУ
Павлюк И.И.

Защита состоится «____» _____ 20__ г. в «____» ч. на заседании Государственной
Аттестационной Комиссии по защите магистерских диссертаций на соискание
академической степени магистра в Инновационном Евразийском университете по адресу
г.Павлодар, ул. М.Горького, 102/4

Секретарь государственной
аттестационной комиссии
магистр информатики

С.К.Асылбекова

Түйін

Дипломдық жұмыстың тақырыбы: «Айналмалы көпмүшеліктер және олардың сандарды қолданып, дәреже түрінде көрсетілуі».

Жұмыстың негізгі бір бөлігі комплекстік сандар және айналмалы көпмүшеліктердің ерекшеліктерін құрайды. Фибоначчи тепе-теңдігі және оның комплекстік сандар жүйесіндегі база негізінде жалпыландыруы жұмыстың бір тармағын құрайды. Есептердің шешу жолдары келтірілген.

Summary

Theme of my diploma is: «Circular multinomials and their application to representation of numbers in the form of degrees». This dissertation belongs to problems in analytic number theory.

The basic part of work devoted to features of complex numbers and circular multinomials. One of heads is devoted a question of generalization of identity of Fibonacci. We resulted many examples of the decision of problems are resulted.

Актуальность темы

Выбор темы «Круговые многочлены и их применение к представлению чисел в виде степеней», как темы магистерской диссертации, заключается в том, что понятие комплексного числа и корней n -ой степени расширяет знания учащихся о числовых системах, о решении широкого класса задач как алгебраического, так и геометрического содержания, о решении алгебраических уравнений любой степени и о решении задач с параметрами.

Комплексные числа возникли в математике в начале XVI века в связи с решением алгебраических уравнений 3-ей степени, а позднее, и уравнений 2-ой степени. Некоторые итальянские математики того времени (Сципион дель Ферро, Николо Тарталья, Джироламо Кардано, Рафаэль Бомбелли) ввели в

рассмотрение символ $\sqrt{-1}$ как формально решение уравнения $x^2 + 1 = 0$, а также выражение более общего вида $(a + b \cdot \sqrt{-1})$ для записи решения уравнения

$(x - a)^2 + b^2 = 0$ bi

. В последствии выражения вида $(a + bi)$ стали называть «мнимыми», а затем «комплексными» числами и записывать их в виде $(a + bi)$, (символ i

для обозначения $\sqrt{-1}$ ввёл Леонард Эйлер в XVIII в.). Таких чисел, чисел новой природы, оказалось достаточно для решения любого квадратного уравнения, а также уравнения 3-ей и 4-ой степени.

Мы сталкиваемся со случаями, когда дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ $D = b^2 - 4ac < 0$, т.е. под квадратным корнем появляется отрицательное число. Поэтому было необходимо пополнить запас действительных чисел при помощи комплексных чисел, для которых квадратный корень из отрицательного числа имеет смысл.

Популярность круговых многочленов лишь возрастает со временем, и причиной этому является поистине неисчерпаемое богатство вновь и вновь открываемых их замечательных свойств. Ещё большее разнообразие наблюдается в сфере различных обобщений этих многочленов. Изучение поведения последовательностей круговых параметров является актуальным и поныне. Особенно популярной стала теория ортогональных многочленов на окружности после появления многочисленных физических приложений.

В работе была выдвинута гипотеза.

Гипотеза. Имеют место следующие равенства:

- 1) $\tilde{P}_{mn}(x) : P_n(x)$;
- 2) $\tilde{P}_{mn}(x) : P_m(x)$;
- 3) $\tilde{P}_{mn}(x) : (x^m - 1)$;

$$\tilde{P}_{m \cdot n}(x) \equiv (n+1) \pmod{P_m(x)}$$

4)

В ходе решений, был сделан вывод, что

$$\tilde{P}_{m \cdot n}(x) \equiv (n+1) \pmod{P_m(x)}$$

что значит:

$$P_m(x) / (\tilde{P}_{m \cdot n} - (n+1))$$

В четвертой части магистерской работы были изучены тождество Фибоначчи и его обобщения, функциональные уравнения и их свойства.

Было дано тождество Фибоначчи

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$$

Далее для большего количества слагаемых была выведена формула. Перемножая n слагаемых, получаем:

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \cdot \dots \cdot (a_n + ib_n) = X + iY$$

где

$$X = \operatorname{Re}(z_1 \dots z_n) \quad Y = \operatorname{Im}(z_1 \dots z_n)$$

Тогда тождество запишется в виде:

$$X^2 + Y^2 = \prod_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2)$$

или

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot \dots \cdot |z_n|^2 = (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) \cdot \dots \cdot (a_n^2 + b_n^2)$$

В математике функциональным уравнением называется уравнение, выражающее связь между значениями функции в нескольких точках. Это

весьма общий класс уравнений, в которых искомой является некоторая функция, а не значения переменных. Под функциональными уравнениями в узком смысле слова понимают уравнения, в которых искомые функции связаны с известными, функциями одного или нескольких переменных при помощи операции образования сложной функции. Решения функционального уравнения могут быть как конкретными функциями, так и классами функций, зависящими от произвольных параметров или произвольных функций.

Было рассмотрено функциональное уравнение Коши

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

и родственные ему уравнения

$$g(x+y)=g(x)g(y)$$

и т.п. были в начале века довольно популярными, с одной стороны, в связи с аксиоматикой механики, а с другой стороны – в связи с третьей проблемой Гильберта (равносоставлены ли равновеликие многогранники?). Этот пример показывает, что функциональные уравнения можно также рассматривать как выражение некоторого свойства, характеризующего то или иное множество функций.

Отметим полученные результаты по этой главе:

- 1) $f_a(x+y)+f_a(x-y)=2 \cdot f_a(x) \cdot f_a(y)$
- 2) $f_a(x+y)-f_a(x-y)=-2 \cdot g_a(x) \cdot g_a(y)$
- 3) $g_a(x+y)+g_a(x-y)=2 \cdot g_a(x) \cdot f_a(y)$
- 4) $g_a(x+y)-g_a(x-y)=2 \cdot f_a(x) \cdot g_a(y).$

Частные выводы:

$$a=e; x=i\alpha; \alpha \in R;$$

$$\left. \begin{aligned} f_e(i\alpha) &= \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ g_e(i\alpha) &= \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_e(i\alpha) + i g_e(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$$

- формула Эйлера.

$$\left. \begin{aligned} f_e(ix) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} x^{2k} = \cos x \\ g_e(ix) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \sin x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_e(i\alpha) + i g_e(i\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};$$

$$x \in (-\infty; +\infty)$$

Обобщая вышеизложенное, можно сказать, что функциональные уравнения применяются практически во всех разделах математики: от теории множеств и общей (универсальной) алгебры до сугубо прикладных направлений математической физики. Особенно часто системы функциональных уравнений используются в разделах математики, включающих теории функций той или иной природы.

Также передо мной была поставлена задача доказать теорему Исмоилова

$$A^4 + B^4 + C^4 = 2 \cdot \left(\frac{A^2 + B^2 + C^2}{2} \right)^2,$$

$$2(A^4 + B^4 + C^4) = (A^2 + B^2 + C^2)^2$$

с помощью данной теоремы также были получены некоторые результаты.

Цели и задачи исследования

Цели исследования:

- исследовать теорию комплексных чисел;
- получить результаты деления многочленов и выражения Φ_{mn} Φ_n через
- изучить тождество Фибоначчи и его обобщения;
- исследовать множества решений систем функциональных уравнений, выразить связь с тригонометрическими функциями;
- получить обобщения и выводы теоремы Исмоилова.

Задачи исследования: рассмотреть решения задач по теории «Комплексные числа», выявить область применения комплексных чисел; рассмотреть решения простейших задач с помощью «Ряда Фибоначчи», убедиться в универсальности этого числового ряда, определить области жизни современного

общества, в которых применяется «Ряд Фибоначчи»; решить поставленные задачи на функциональное уравнение.

Научная новизна

Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

В результате исследования, автором самостоятельно

- 1) Доказана гипотеза деления многочлена на многочлен и получены некоторые обобщения;
- 2) Рассмотрены частные и общие случаи тождества Фибоначчи для 3-х, 4-х чисел и для более обобщенного случая, когда число слагаемых равно n ;
- 3) Выражена связь некоторого функционального уравнения с тригонометрическими функциями;
- 4) Получены обобщения теоремы Исмоилова.

Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области аналитической теории чисел и могут найти применение в различных разделах теории чисел и математического анализа.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из оглавления, списка используемых обозначений, введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Объем диссертации составляет 84 страницы. Количество иллюстраций – 9.

Во введении дается обоснование актуальности темы исследований и обзор основных результатов по вопросам, рассматриваемым в диссертации. Кроме того, во введении сформулированы цели диссертации и описана ее структура.

В первой части основного раздела «Комплексные числа» приведено теоретическое построение систем комплексных чисел и решения примеров с комплексными числами в алгебраической форме, определяются операции сложения, вычитания, умножения, деления (кроме деления на нуль), операция сопряжения для комплексных чисел в алгебраической форме, степень мнимой единицы, геометрическая интерпретация комплексных чисел, свойства действий во множестве комплексных чисел в целом.

Далее рассматривается вопрос о возведении комплексных чисел в степень и извлечении из них корня. Вопрос извлечения корней из вещественных чисел был основным в историческом развитии понятия числа, приведшим к пониманию необходимости расширения числовых систем до системы комплексных чисел. Особенно важен случай извлечения корня n -ой степени из числа единицы и дальнейшее обобщение (т.е. извлечения корня n -ой степени от

любого комплексного числа. Рассмотрено одно применение целых комплексных чисел в теории Пифагоровских треугольников.

Во второй части работы изучаются круговые многочлены и их основные свойства на базе системы комплексных чисел.

В третьей части рассматриваем «Комплексные числа и многочлены». В этой части будут рассмотрены теоремы Гаусса-Люка, Руше, основная теорема алгебры. Все теоремы представлены с доказательствами.

В четвертой части рассматриваем «Тождество Фибоначчи и его обобщение» и «Тождество Исмоилова». В этой части будут рассмотрены частные и общие случаи умножения n - слагаемых с применением к ним свойства умножения комплексных чисел. Также изучаются функциональные уравнения и некоторые его обобщения.

Ключевые слова: комплексные числа, сопряженные числа, круговые многочлены, тождество Фибоначчи, функциональное уравнение, неприводимость круговых многочленов, дискриминант кругового многочлена, результат пары круговых многочленов, тождество Исмоилова.

Публикации по теме диссертации:

1. Балыкова Б.Ж. Круговые многочлены и их применение к представлению чисел в виде степеней. Вестник ИнЕУ. Естественные науки. Вып. №2(50) 2013 С.97-100
2. Балыкова Б.Ж., под редакцией проф. Исмоилова Д.И. Математический практикум 1 ч. "Ўстаздар газеті". Вып. №21(260) от 1 марта 2014г.
3. Балыкова Б.Ж., под редакцией проф. Исмоилова Д.И. Математический практикум 1 ч. "Ўстаздар газеті". Вып. №22(261) от 1 апреля 2014г.
4. Балыкова Б.Ж., под редакцией проф. Исмоилова Д.И. Математический практикум 1 ч. "Ўстаздар газеті". Вып. №11(274) от 1 июня 2014г.