МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р.С.Ахметов

СИМЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Магистерская диссертация на соискание
академической степени магистра естественных наук
по специальности 6М060100 - Математика

ПАВЛОДАР – 2014

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Инновационный Евразийский университет

Допущен (а) к защите:
зав. кафедрой «МиИ»,
кандидат педагогических наук,
__________________Ж.К. Даниярова
(подпись)
«___»____________________20__ г

Магистерская диссертация

СИМЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

специальность: 6М060100 - Математика

Магистрант ____________________ Р.С. Ахметов
(подпись) *(инициалы, фамилия)*

Научный руководитель,
Д.ф-м.н., профессор ____________________ Д.И. Исмоилов
(подпись) *(инициалы, фамилия)*

ПАВЛОДАР – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Каждый человек, исходя из своего житейского опыта, имеет какое-то представление о симметрии, поскольку это одно из самых распространенных явлений в природе, искусстве и науке. Однако обычно под симметрией понимается либо зеркальная симметрия, когда одна половина предмета зеркально-симметрична другой, либо центральная, как у буквы И. Такая симметрия означает, что есть преобразование (поворот), которое переводит предмет сам в себя.

В ряде случаев симметрия является достаточно очевидным фактом. Например, любой школьник, рассматривая равносторонний треугольник, может показать, почему эта фигура симметрична, и для подтверждения своей мысли может предложить несколько преобразований, в результате которых треугольник не изменит своего вида. В действительности понятие симметрии гораздо шире, и под ней понимается неизменность при какой-либо операции не только предметов, но и физических явлений, математических формул, уравнений и т.д.

Цель исследования:

Исследовать теорию симметрических многочленов от трех переменных. Определить по аналогии, симметрическую функцию от нескольких переменных, которая не изменяет своего значения при произвольных перестановках своих аргументов. Изучить нахождение формулы Виета. Получить обобщения и выводы теоремы Ньютона.

Показать красоту закономерности симметрических многочленов. Например, в искусстве симметрия проявляется в соразмерности и взаимосвязанности отдельных частей, образующих произведение. В классической механике она выражается в виде принципа относительности. Симметрия сыграла чрезвычайно важную роль при проведении исследований в физике микромира. И не случайно крупнейший физик-теоретик академик А.Б. Мигдал в книге "Поиски истины" утверждал, что "главными направлениями физики двадцатого века были поиски симметрии и единства картины мира".

Математики также издавна стремились к красоте математических формул и справедливо считали, что красивая формула отличается от некрасивой тем, что в красоте больше симметрии.

Актуальность исследования: Данная работа посвящена изучению возможностей применения для решения различных алгебраических задач метода, основанного на свойствах симметрических многочленов. Применение для решения олимпиадных задач повышенной трудности.

Научная новизна: Рассмотрен метод, основанный на свойствах симметрических многочленов. Рассмотрены задачи, предлагаемые на олимпиадах для учителей математики. Решение систем алгебраических уравнений 3-ей и высших степеней. Выражена связь некоторого функционального уравнения с тригонометрическими функциями;

К сожалению, такой раздел алгебры как теория симметрических многочленов выходит за рамки школьной программы, хотя минимальные знания по этой теме могут быть весьма полезны при решении целого ряда задач. Например, решение алгебраических уравнений высших степеней и их систем, разложение многочленов на множители, доказательство тождеств и др.

При решении систем алгебраических уравнений в школьном курсе, как правило, предлагается использовать наиболее универсальный метод исключения переменных. Однако при решении систем уравнений высших степеней этим методом могут возникнуть ситуации, приводящие к решению общих уравнений 3-й и более степени, что само по себе является непростой задачей. Метод, основанный на свойствах симметрических многочленов, не является столь универсальным при решении систем как первый метод, но при выполнении определенных условий приводит к решению уравнений, степени которых ниже исходных. Кроме того, данный метод позволяет решать и другие алгебраические задачи.

Таким образом, основная задача моей работы – изучение основных понятий и фактов теории симметрических многочленов от трех переменных и применение их в решении уравнений, неравенств, доказательстве тождеств и систем уравнений.

1 Понятие симметрического многочлена от двух переменных

При решении некоторых алгебраических уравнений высшего порядка и некоторых систем алгебраических уравнений используются специальные многочлены, называемые симметрическими, определение которых дадим на примере многочленов от двух переменных.

1. Примеры симметрических многочленов. Многочлены, в которые и входят одинаковым образом, называют симметрическими. Точнее говоря: многочлен от и называют симметрическим, если он не меняется при замене на и на .

Многочлен - симметрический. Напротив, многочлен не является симметрическим: при замене на , на он превращается в многочлен , который не совпадает с первоначальным.

Приведем важнейшие примеры симметрических многочленов. Как известно из арифметики, сумма двух чисел не меняется при перестановке слагаемых, т.е.

Для любых чисел и . Это равенство показывает, что многочлен является симметрическим.

Точно так же из закона коммутативности умножения

следует, что произведение является симметрическим многочленом.

Симметрические многочлены и являются самыми простыми. Их называют элементарными симметрическими многочленами от и . Для них используют специальные обозначения:

, .

Кроме и , нам часто будут встречаться степенные суммы, т.е. многочлены , , …, ,… Принято обозначать многочлен через . Таким образом,

,

,

,

,

…….

Основная теорема: Любой симметрический многочлен от и можно представить в виде многочлена от и .

[Симметрия в алгебре. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я.]

Существует простой прием, позволяющий получать симметрические многочлены. Итак, если взять любой многочлен от и и подставить в него вместо и их выражение , , то получится симметрический многочлен от и .

Возникает вопрос, является ли этот прием построения симметрических многочленов общим, т.е. можно ли с его помощью получить любой симметрический многочлен?

Рассмотрение примеров делает это предположение вероятным. Например, степенные суммы , , , без труда выражаются через и :

,

,

.

В качестве следующего примера рассмотрим олимпиадную задачу, где нужно доказать, что при любых значениях и справедливо неравенство:

Для начала представим симметрический многочлен от и в виде многочлена от и . Мы получим:

Для доказательства данного неравенства воспользуемся неравенством Коши, где

,

заметим, что неравенство Коши можно представить в виде многочлена от

и .

,

отсюда следует, что или

Из полученных нами неравенств составляем систему от двух переменных:

Чтобы решить систему найдем корни квадратного уравнения:

Мы привели нашу систему уравнений от двух переменных к уравнению от одной переменной.

Так как дискриминант равен нулю, мы получаем два одинаковых корня

,

отсюда , - имеет множество решений. А это означает, что симметрический многочлен так же имеет множество решений. Следовательно, что для любых значений и справедливо данное неравенство ч.т.д.

Разбор дальнейших приемов дает тот же результат: какой бы симметрический многочлен мы бы не взяли, после более или менее сложных выкладок его удается выразить через элементарные симметрические многочлены и . Таким образом, примеры приводят нас к предположению о справедливости Основная теорема: Любой симметрический многочлен от и можно представить в виде многочлена от и .

Переходим к доказательству основной теоремы. Мы проведем его в два приема.

Во-первых:

2. Выражение степенных сумм через и . Сначала мы докажем теорему для степенных сумм.

Теорема: [Симметрия в алгебре. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я.]

В каждую степенную сумму можно представить в виде многочлена от и .

С этой целью мы умножим обе части равенства на . Получим:

Таким образом,

(1.1)

Из этой формулы вытекает справедливость нашего утверждения. В самом деле, мы уже знаем, что степенные суммы выражаются в виде многочленов от и , то подставляя эти выражения в формулу (1.1), мы получим выражение степенной суммы через и . Далее методом математической индукции мы можем последовательно находить выражения степенных сумм через и : зная и , находим по формуле (1.1) , затем , и т.д. Ясно, что рано или поздно мы получим выражение любой степенной суммы через и . Таким образом, наше утверждение доказано.

Формула (1.1), составляющая основу изложенного доказательства Теоремы, позволяет не только утверждать, что выражается через и , но и также позволяет последовательно вычислять выражения степенных сумм через и . Так, с помощью формулы (1.1) мы последовательно находим

,

,

и т.д. В ниже приведенной таблице сведены выражения степенных сумм через и , эти выражения будут нам полезны при решении задач. Читателю можно самому построить таблицу с помощью формулы (1.1).

Таблица 1Выражения стенных сумм через и

	…………………………………….

Во-вторых:

3. Доказательство основной теоремы. Теперь нетрудно завершить доказательство основной теоремы. Любой симметрический многочлен от и содержит (после приведения подобных членов) слагаемые двух видов.

Во-первых, могут встретиться одночлены, в которые и входят в одинаковых степенях, т.е. одночлены вида . Ясно, что

,

т.е. одночлены этого вида непосредственно выражаются через .

Во-вторых, могут встретиться одночлены, имеющие разные степени относительно и т.е. одночлены вида , где . Ясно, что вместе с одночленом симметрический многочлен содержит также и одночлен , получаемый из перестановкой букв и . Иными словами, в симметрический многочлен входит двучлен вида . Предполагая для определенности , мы сможем переписать этот двучлен следующим образом:

А так как по доказанной теореме степенная сумма представляется в виде многочлена и , то и рассматриваемый двучлен выражается через и .

Итак, каждый симметрический многочлен представляется в виде суммы одночленов вида и двучленов вида , каждый из которых выражается через и . Следовательно, любой симметрический многочлен, представляется в виде от и . Теорема полностью доказана.

Аналогично, симметрическая функция трёх переменных определяется как функция, которая не изменяет своего значения при произвольных перестановках своих аргументов.

1.1 Применения к элементарной алгебре 1

1.1.1 Уравнения

Многочлен вида , где называют возвратным, если в нем коэффициенты, равноудаленные от концов, совпадают, т.е.

…

Например, многочлен и т.д.

Уравнение , левая часть которого возвратный многочлен, называют возвратным.

Теорема: Всякий возвратный многочлен

четной степени представляется в виде , где и

- некоторый многочлен степени от σ. Всякий возвратный многочлен

нечетной степени делится на , причем частное представляет собой возвратный многочлен четной степени. (Теорема приводится без доказательства).

Выражения, заменяемые в возвратных многочленах через для четных многочленов (уравнений):

………………………………………….

Степень возвратного многочлена, а значит и уравнения, определяется как самая высокая степень при одном одночлене всего многочлена. Для многочлена (уравнения) нечетной степени сначала проводится деление на (согласно теореме о возвратных многочленах нечетной степени), а затем уже заменяется выражениями от .

1.1.2 Задания, связанные с квадратными уравнениями

Задание: Составить квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней заданного уравнения x

Решение: Пусть - корни исходного уравнения, - корни искомого уравнения, а и – коэффициенты искомого уравнения.

По теореме Виета:
сумма корней первого уравнения:

а произведение этих корней:

Аналогично, сумма корней второго уравнения:

а произведение этих корней:

По условию мы имеем:

Поэтому и

Таким образом, искомое уравнение имеет вид:

Ответ:

1.1.3 Иррациональные уравнения

Задача: Решить иррациональное уравнение

Решение: Положим .

Тогда исходное уравнение имеет вид:
Кроме того, мы имеем:

Таким образом, мы получили систему уравнений

Введем новые неизвестные . Теперь мы имеем систему уравнений:

из которой мы получаем для σ_2 квадратное уравнение:

.

Решим его. Пусть
По теореме Виета получаем

Так что и . Мы получили две системы уравнений

Или:

Первая система имеет два решения:

Но , и, следовательно, для первоначального есть два решения:

.

Вторая система дает для и (значит, и для) еще два решения, правда комплексные, а для иррациональных уравнений берутся лишь действительные значения.

Ответ: 16, 81.

1.1.4 Неравенства и тождества

Метод симметрических многочленов также с успехом применяется для доказательства многих неравенств (от двух, трех и более переменных). Главным образом используются степенные суммы и следующая теорема.

Теорема: Пусть и – действительные числа. Для того, чтобы оба числа x, y,определяемые из системы уравнений

были действительными, необходимо и достаточно, чтобы ,

удовлетворяли неравенству . Равенство достигается лишь в случае, если . Для того чтобы оба числа были действительными и неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы числа ,

удовлетворяли неравенствам (Теорема приводится без доказательства).

Для неравенств от двух переменных метод симметрических многочленов применяется так:

- заменяют симметрический многочлен его выражением через и

;

- заменяют выражением через и неотрицательную величину

, т.е. подставляют ;

- получают многочлен от и , и в зависимости от условия доказывают то, что нужно доказать (решить). Как правило, сделать это в отношении исходного неравенства значительно сложнее, для чего и применяется метод симметрических многочленов;

- иногда заменяют его выражением через и z, т.е.

Задача : Доказать, что если и – действительные числа,

удовлетворяющие условию , то справедливы неравенства:

.

Доказательство:

Введем элементарные симметрические многочлены

Мы имеем: .

Так как по условию задачи ,то , т.е.

.

Применяя к полученному неравенству то же рассуждение, находим:

.

Аналогично находим, что .

Применяя метод математической индукции, можно таким путем доказать, что если и - произвольное натуральное число, то

.

1.1.5 Системы уравнений от двух переменных

Задача: Решить систему уравнений:

Решение: Полагая $S_5=x^5 + y^5$,получаем:

Подставив в первое уравнение, получим квадратное уравнение относительно :

,

Решим его. Пусть , тогда уравнение имеет вид .

Тогда по теореме Виета получаем:

Итак, и . Мы получили две системы уравнений:

Решая их методом подстановки, получим четыре системы решения первоначальной системы:

Ответ: ;

2 Понятие симметрического многочлена от трех переменных

В многочлене от трех переменных перестановок можно сделать три: можно поменять местами и , или и , или, наконец, и . Назовем многочлен от трех переменных симметрическим, если при любой из этих трех перестановок он остается неизменным.

Условие симметричности многочлена записывается следующим образом:

= = = .

Например, из коммутативности сложения вытекает, что симметричным является многочлен , а из коммутативности умножения следует симметричность многочлена .

Симметричны и степенные суммы, то есть многочлены

.

Вот еще примеры симметрических многочленов от трех переменных:

Напротив, многочлен

не является симметрическим. Правда, при перестановке переменных и он не меняется:

.

Но перестановка переменных и меняет вид этого многочлена - он переходит в многочлен

Наиболее простыми являются симметрические многочлены

Их называют элементарными симметрическими многочленами от трех переменных и обозначают через

Заметим, что - многочлен первой степени, - второй степени и - третьей.

Основная теорема о симметрических многочленах от трех переменных.

Возьмем любой многочлен от переменных , , и заменим в нем

на - на и - на . В результате мы получим многочлен, симметрично зависящий от x, y, z. Например, из многочлена

мы получим таким путем многочлен

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем симметрический многочлен

Теорема: Любой симметрический многочлен от можно представить в виде многочлена от , , .

План доказательства таков. Сначала мы покажем, что любая степенная сумма может быть выражено через элементарные симметрические многочлены , , . Затем мы рассмотрим более сложные симметрические многочлены, каждый из которых получается из некоторого одночлена всевозможными перестановками переменных и суммированием получившихся результатов. Такие симметрические многочлены будем называть орбитами соответствующих одночленов. Мы покажем, что каждая орбита выражается

через степенные суммы, а значит, в конечном итоге, через , , наконец, будет установлено, что всякий симметрический многочлен представляется в виде суммы орбит.

Выражение степенных сумм через , , .

Итак, прежде всего мы покажем, что каждую степенную сумму

можно представить в виде многочлена от , , .

(2.1)

Эту формулу мы не будем «выводить», а прямо проверим. Подставляя в правую часть соотношения (2.1) вместо величин:

, , ,

(2.2)

(2.3)

Таким образом, правильность формулы (2.1) проверена.

Из этой формулы и вытекает справедливость нашего утверждения. Легко видеть, что степенные суммы , , выражаются через , , :

После этого формула (2.1) позволяет последовательно находить выражения следующих степенных сумм через , , : сначала , затем , и так далее. Иными словами, имея выражение степенных сумм , , через , , , мы с помощью метода математической индукции (на основе формулы (2.1)) заключаем, что любая степенная сумма выражается через , , . Таким образом, наше утверждение доказано.

Формула (2.3) не только доказывает возможность выразить степенные суммы через , , , но и позволяет фактически находить эти выражения.

Иными словами, проведенное выше доказательство конструктивно, то есть оно указывает вполне определенную последовательность действий, позволяющую за конечное число шагов добраться до выражения произвольной степенной суммы через , , . В таблице 2 сведены выражения степенных сумм (до) через , ,

Таблица 2. Выражения степенных сумм через , ,

3

2.1 Орбиты одночленов

Существуют одночлены, не меняющиеся при перестановках переменных, то есть симметрические. Легко видеть, что в такой одночлен все переменные должны входить в одной и той же степени, то есть этот одночлен должен совпадать с произведением .

Если же среди показателей одночлена имеются различные, то этот одночлен уже не будет симметрическим. Чтобы получить симметрический многочлен, один из слагаемых которого является одночлен , надо добавить к нему другие одночлены. Многочлен с наименьшим числом членов, одним из слагаемых которого является одночлен , назовем орбитой этого одночлена и обозначим через .

Ясно, что для получения орбиты одночлена надо прибавить к нему одночлены, получающиеся перестановкой переменных . Если все три показателя различны, то орбита будет содержать шесть членов, получающихся из одночлена перестановками переменных. Например:

Если же в одночлене два показателя совпадают, а третий одночлен от них, скажем (но), то перестановка переменных не меняет одночлена . В этом случае орбита содержит только три члена:

. Например,

Частными случаями таких орбит являются степенные суммы:

Наконец, если , то орбита является одночленом:

( )= .

Теперь покажем, что орбита любого одночлена выражается через и степенные суммы. А так как любая степенная сумма выражается через , , , то отсюда будет следовать, что орбита любого одночлена выражается через , , . Это будет вторым шагом в доказательстве основной теоремы.

Если одночлен зависит только от одного переменного (то есть), наше утверждение очевидно: в этом случае орбита сама является степенной суммой.

Перейдем к случаю, когда одночлен зависит от двух переменных, то есть имеет вид . Если , то имеет место формула

(2.2)

В самом деле,

Если же , то формула (2.2) заменяется следующей:

(2.3)

Справедливость формулы (2.3) также устанавливается непосредственной проверкой.

Наконец, если одночлен зависит от всех трех переменных , то одночлен делится на некоторую степень одночлена . Поэтому в многочлене можно вынести за скобки некоторую степень одночлена , после чего останется в скобках орбита некоторого одночлена, зависящего меньше чем от трех переменных . Например,

и т. п. Вообще, если, например, , , то

(2.4)

Итак, если одночлен зависит только от одного переменного, то орбита является степенной суммой; если он зависит от двух переменных, то орбита выражается через степенные суммы; наконец, случай, когда этот одночлен зависит от всех трех переменных , сводится к предыдущим, если в многочлене вынести за скобки общий множитель всех его членов. Легко видеть, что орбита любого одночлена выражается через и степенные суммы.

Приведенное выше доказательство также конструктивно: мы не только доказали возможность выразить каждую орбиту одночлена через , , , но и получили вполне определенный алгоритм, позволяющий для любой конкретно заданной орбиты найти ее выражение через , , . Основой этого алгоритма служат формулы (2.2), (2.3), (2.4) и найденное ранее выражение степенных сумм через , , .

Например,

(здесь мы применили формулу (2.3));

(применены формулы (2.2) и (2.4)).

В таблице 3 приведены выражения некоторых орбит через , , .

Таблица 3

Выражения орбит через , ,

0(xy)	

$0(x^2y)$	
$0(x^3y)$	
$0(x^2y^2)$	
$0(x^4y)$	
$0(x^3y^2)$	
$0(x^5y)$	
$0(x^4y^2)$	
$0(x^3y^3)$	

Доказательство основной теоремы

Теперь нетрудно завершить доказательство основной теоремы.

Пусть - симметрический многочлен и - одно из его слагаемых. В силу симметричности многочлена , он содержит вместе с этим слагаемым и всю орбиту , взятую с коэффициентом . Таким образом,

где - некоторый многочлен, который, симметричен и содержит меньше членов, чем . Из можно также выделить орбиту одного из его членов и так далее. После конечного числа шагов мы разложим многочлен

на сумму орбит отдельных одночленов.

Итак,

Любой симметрический многочлен есть сумма конечного числа орбит одночленов.

А так как каждая орбита выражается через , , , то и любой

симметрический многочлен может быть выражен через , , . Тем самым основная теорема полностью доказана.

Все доказательство является конструктивным: оно содержит сравнительно несложный алгоритм, позволяющий любой симметрический

многочлен выразить через , , .

Найдем выражение симметрического многочлена

через , , . Мы имеем:

Обратные степенные суммы

Степенные суммы, соответствующие отрицательным показателем, то есть выражения

(где), иногда называют обратными степенными суммами. Их

легко выразить через , , , если заметить, что

. (2.5)

Однако можно поступить и по-другому. Достаточно заметить, что

формула (1) справедлива для любых значений (в том числе и отрицательных),

поскольку при выводе этой формулы ни каких предположений относительно

не было сделано. Заменяя в формуле (1) на l+3, легко находим:

(2.6)

С помощью полученной формулы (2.6) можно последовательно находить значения обратных степенных сумм:

и так далее Наоборот, имея вычисленные таким образом значения обратных

степенных сумм, можно легко находить орбиты , пользуясь формулой (2.6):

и так далее.

Основные формулы необходимые для решения задач:

Справедливость формул можно проверить, подставив

значения , , .

2.2 Применение к элементарной алгебре 2

2.2.1. Решение систем уравнений с тремя неизвестными

Результаты выше сказанного позволяют решать некоторые системы алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Если левые части уравнений

симметрично зависят от неизвестных , то удобно принять , , , за новые неизвестные. Выгода такой замены неизвестных заключается в том, что

степени уравнений после замены уменьшаются (поскольку -

многочлен второй степени, а - многочлен третьей степени). Иными

словами, решение системы относительно новых неизвестных , , проще, чем решение первоначальной системы.

После того как найдены значения величин , , , нужно найти

значения первоначальных неизвестных . Это может быть сделано с помощью следующей теоремы.

Теорема: Пусть , , - три произвольных числа. Кубическое уравнение

(1)

и система уравнений

(2)

связаны друг с другом следующим образом: если - корни кубического уравнения, (1), то система уравнений (2) имеет шесть решений (получающихся друг от друга перестановками) и других решений не имеет;

обратно, если , , - решение системы (2), то числа являются корнями кубического уравнения (1).

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма: Если - корни кубического уравнения , то имеют место соотношения:

Эти соотношения называются формулами Виета для кубического

уравнения. Покажем, откуда эти формулы вытекают. Итак, пусть - корни

кубического уравнения ; числа могут быть

действительными или комплексными. Тогда многочлен следующим образом разлагается на множители:

(3)

Раскрывая скобки в правой части, находим:

Написанное равенство означает, что слева и справа стоит один и тот же многочлен, то есть что соответствующие коэффициенты в левой и правой частях совпадают. Иными словами,

, ,

,

что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Если - корни кубического уравнения (1), то, согласно лемме, имеют место соотношения

, , .

Но это и означает, что числа , , составляют решение системы (2). Еще пять решений получаются из этого перестановками значений неизвестных. То, что других решений система (2) не имеет, вытекает из последнего утверждения теоремы, которое мы сейчас докажем.

Итак, пусть , , - решение системы (2), то есть

, , .

Тогда мы имеем:

Это означает, что числа являются корнями кубического уравнения (1). Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема показывает также, что если уже найденные значения величин , , , то для нахождения значений первоначальных неизвестных (то есть для решения системы (2)) достаточно составить кубическое уравнение (1) и найти его корни. В учебниках высшей алгебры можно найти формулы для решения кубических уравнений. Однако формулы эти сложны и на практике редко применяются. Чаще всего пытаются найти один корень кубического уравнения, после чего пользуются теоремой Безу:

Теорема: Остаток от деления многочлена

на равен значению этого многочлена при , то есть равен числу

Чтобы доказать эту теорему, разделим многочлен на . Мы получим частное, которое обозначим через , и некоторый остаток . Этот остаток является многочленом, степень которого меньше степени делителя , то есть равна нулю. Поэтому является числом. Итак,

.

Чтобы найти число , положим в этом равенстве . Мы получим

. Теорема Безу доказана.

Подчеркнем еще раз, что, решив кубическое уравнение (1), мы находим сразу шесть решений для первоначальных неизвестных : так как в систему (2) неизвестные входят симметрично, то можно переставлять их и в решении.

Рассмотрим примеры.

1. Решить систему уравнений

Введем новые неизвестные , , , положив

,

,

.

В силу формул, приведенных в таблице 1, мы имеем для новых неизвестных систему уравнений:

Из этой системы находим:

В развернутом виде эта система записывается так:

,

,

.

Для решения этой системы составляем (согласно теореме) кубическое уравнение

Левая часть уравнения раскладывается на множители:

Следовательно, корнями этого уравнения являются числа

.

Поэтому наша исходная система имеет шесть решений, получающихся перестановками из решения

Заметим, что в некоторых случаях несложная предварительная замена переменных позволяет свести несимметричную систему к симметричной.

2. Решить систему уравнений

Решение:

Это – симметрическая система уравнений. Положим ,

, . Поскольку , то

, и, следовательно, заданная система имеет следующий вид:

Отсюда мы получаем , , . Эта система полностью эквивалентна исходной системе. Для ее решения необходимо найти корни кубического уравнения :

,

Вынесем за скобки. Получим: , или ,

Получили три корня, а решения первоначальной системы получаются путем перестановок этих корней.

Ответ: (0;1;1), (1;1;0), (1;0;1).

2.2.2 Разложение на множители.

Переход к элементарным симметрическим многочленам , , удобен не только для решения систем алгебраических уравнений, но и в других алгебраических задачах. В этом пункте мы рассмотрим задачи о разложении на множители.

Пусть - симметрический многочлен от трех переменных. Чтобы разложить этот многочлен на множители, можно выразить его через , , и попытаться разложить на множители получившийся многочлен от , , .

Если это удастся, то, подставляя значения , , , мы получим разложение на множители исходного многочлена .

Рассмотрим примеры.

1. Разложить на множители многочлен

2. Разложить на множители многочлен

В силу основных формул, необходимых для решения задач, наш многочлен можно записать в виде

Указанные приемы пригодны лишь в том случае, если симметрический многочлен удается разложить на симметрические множители.

2.2.3 Доказательство тождеств

В целом ряде задач на доказательство тождеств с успехом могут быть применены элементарные симметрические многочлены. Рассмотрим примеры.

1. Доказать тождество

$=$

$=$

$=$

$=$ $=$

$=$

$=$

$=$.

2. Доказать, что при справедливо тождество

.

Согласно таблице 3, мы имеем:

.

В этом примере нам понадобилось вычислить значение степенной суммы при условии, что . Эти значения приведены в следующей таблице:

Таблица 3

Выражения степенных сумм через , при выполнении условия

s_1	0	s_6	
s_2		s_7	

S_3		S_8	
S_4		S_9	
S_5		S_{10}	

3. Разложить на множители многочлен

.

Полагая , , , находим:

= =

(мы воспользовались формулой приведенной в таблице 3).

4. доказать тождество .
Доказательство:

Левая часть тождества есть не что иное, как .
Раскроем скобки в правой части тождества. Мы получаем:

Итак, тождество доказано.

2.2.4 Неравенства

Для любых действительных чисел , справедливо неравенство

(5); равенство достигается лишь при .

Тождество — это уравнение, которое удовлетворяется тождественно, т.е. справедливо для любых допустимых значений входящих в него переменных. Для того чтобы доказать тождество, необходимо преобразовывать одну из частей тождества до полного совпадения этих частей. Если обе части доказываемого тождества выражаются через разности то удобно сделать замену: тогда

Ясно, что для любых действительных чисел справедливо неравенство

,

причем равенство достигается лишь в случае, когда . Левая часть написанного неравенства является симметрическим многочленом от .

Раскрывая скобки, мы без труда перепишем это неравенство в виде или, используя формулы, приведенные в таблице 1

(5)

Итак, для любых действительных чисел справедливо неравенство (5); равенство достигается лишь при .

Из соотношения (5) можно получить целый ряд других неравенств. Рассмотрим примеры.

1. Доказать, что для любых действительных чисел , справедливо неравенство

указанное неравенство имеет вид .

Неравенство (5) имеет вид

Полагая здесь , , , получаем:

Или

а это и есть доказываемое неравенство. (Равенство достигается лишь в случае, если или если среди чисел какие-либо два равны нулю.).

2. Доказать, что для любых положительных чисел справедливо неравенство

.

Указанное неравенство можно переписать в виде поскольку можно записать .

Так как числа положительны, то , , . Потому неравенства , можно перемножить. Мы получаем . Сокращая на положительную величину , мы получаем требуемое неравенство .

(Равенство достигается лишь в случае, если).

2.2.5 Освобождение от иррациональности в знаменателе

Симметрические многочлены позволяют решать многие трудные задачи на освобождение от иррациональности в знаменателе.

В случае, когда знаменатель имеет вид или , эту задачу можно решить и без применения симметрических многочленов. Для этого достаточно использовать формулы

,

Например, если надо освободиться от иррациональности в знаменателе выражения

,то сначала умножаем числитель и знаменатель на «сопряженное выражение» (что приводит знаменатель к виду), потом - на

. Мы получаем:

.

Теперь уже можно использовать вторую из приведенных выше формул.

Положим в ней , . Тогда ясно, что надо умножить числитель и знаменатель на выражение

.

После умножения получим:

.

Сложнее обстоит дело, если знаменатель состоит из трех или большего числа иррациональных слагаемых. Здесь-то и могут помочь симметрические многочлены.

Запишем формулы, которые позволяют избавиться от иррациональности в знаменателе с тремя слагаемыми.

полагая , , .

Рассмотрим следующие примеры.

1. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражения

полагая , , .

Воспользуемся формулой:

$$=$$ $$=$$

$$=$$ $$=$$

$$=$$

2.2.6 Разложение симметрических многочленов от трех переменных на множители

В случае трех переменных симметрия многочлена значительно облегчает отыскание его разложения на множители. В это разложение могут входить симметрические и несимметрические множители. При этом, если в разложение входит несимметричный множитель , то, в силу симметрии, разлагаемого многочлена, должны входить и все множители, получаемые из перестановкой переменных .

Как мы уже знаем переменные можно переставлять шестью различными способами. Поэтому, вообще говоря, вместе с несимметричным множителем должны входить еще пять множителей. Однако, если сам множитель имеет частичную симметрию, то число добавочных множителей уменьшается. Так, если множитель симметричен

относительно и , то есть удовлетворяет условию , то при

перестановках переменных получается еще два отличающихся от него

множителя и . (Они получаются с помощью циклических

перестановок.) Если же многочлен четно-симметричен, то есть обладает тем свойством, что

,

то в разложении с ним связан лишь один множитель .

Итак, в разложении на множители симметрического многочлена могут входить следующие виды сомножителей:

1. Симметричные множители ;

2. Произведения вида ,·где - многочлен, не меняющийся при четных перестановках;

Произведения вида , где - многочлен,

симметричный относительно и ;

Произведения вида

где - многочлен, не обладающий симметрией.

Покажем теперь, как сделанные замечания позволяют разлагать симметрические многочлены на множители. Разложение на симметричные множители мы уже рассматривали. После того как многочлен разложен на симметричные множители, надо разлагать далее (пользуясь сделанными замечаниями) сами эти множители.

Рассмотрим пример.

1. Разложить на множители многочлен

.

Указанный многочлен имеет вид и потому на симметричные множители не разлагается. Следовательно, остается возможность разложить его на три множителя первой степени, причем эти множители должны быть симметричными относительно двух переменных. Иначе говоря, разложение надо искать в виде

(3)

где k, l - искомые коэффициенты. Полагая в равенстве (3) ,

получаем , откуда . Далее, при получаем

, то есть одно из чисел , l равно нулю. Наконец, при

находим , откуда видно, что . Следовательно, . Мы получаем, таким образом, разложение

= .

Если теперь из каждой скобки вынести , то мы получим:

=

3 Антисимметрические многочлены от трех переменных

До сих пор мы рассматривали симметрические многочлены, то есть многочлены, не изменяющиеся при перестановке любых двух переменных. Теперь мы рассмотрим другой, очень близкий класс многочленов - антисимметрические многочлены. Так называют многочлены, меняющие знак при перестановке любых двух переменных.

Рассмотрим антисимметрические многочлены от трех переменных. Примером такого многочлена может служить многочлен

В самом деле, если поменять местами и , то он превратится в многочлен

Точно так же он меняет знак при перестановке любых других переменных.

Отметим следующее важное свойство антисимметрических многочленов: квадрат антисимметрического многочлена является симметрическим многочленом.

В самом деле, после перестановки любых двух переменных антисимметрический многочлен меняет знак. Но это оставляет неизменным квадрат многочлена. Значит, квадрат антисимметрического многочлена не меняется при любой перестановке двух переменных, то есть является симметрическим многочленом.

Но не только квадрат антисимметрического многочлена симметричен. Если мы перемножим два произвольных антисимметрических многочлена, то получим в произведении симметрический многочлен. Ведь при перестановке любых двух переменных оба сомножителя меняют знаки, а потому произведение остается неизменным.

Наконец, при умножении симметрического многочлена на антисимметрический получается антисимметрический многочлен.

В этом случае при перестановке двух переменных один множитель меняет знак, а второй не меняет.

3.1 Основная теорема об антисимметрических многочленах

Выясним теперь, как устроен произвольный антисимметрический многочлен. Последнее замечание предыдущего пункта указывает способ, с помощью которого можно построить сколько угодно антисимметрических многочленов. Достаточно взять какой-нибудь один такой многочлен и умножить его на всевозможные симметрические многочлены; в произведении мы будем получать антисимметрические многочлены.

Возникает естественный вопрос: можно ли найти такой антисимметрический многочлен, что, умножая его на всевозможные симметрические многочлены, мы получим все антисимметрические многочлены от трех переменных. Мы увидим, что ответ на этот вопрос утвердителен.

Покажем, что в этом случае искомым антисимметрическим многочленом является многочлен Иными словами верна следующая

Теорема: Любой антисимметрический многочлен от трех переменных имеет вид

(3.1)

где, - симметрический многочлен от .

Прежде чем доказывать эту теорему, мы установим следующую лемму.

Лемма: Если - антисимметрический многочлен, то

то есть если какие-нибудь два переменных совпадают, то антисимметрический многочлен обращается в нуль.

Тогда, в силу теоремы Безу, симметрический многочлен от трех переменных делится без остатка на выражения Но тогда он должен делиться и на произведение этих выражений, то есть на антисимметрический многочлен

Таким образом, каждый антисимметрический многочлен можно записать в виде где - некоторый многочлен.

Чтобы закончить теперь доказательство теоремы, нам осталось показать, что многочлен симметричен. Для этого поменяем в соотношении (3.1) местами и :

Такая замена допустима, поскольку соотношение (3.1) является тождеством, то есть справедливо при любых значениях переменных Так как по условию и так как , то отсюда вытекает, что

Сравнивая это соотношение с равенством (3.1), находим, что

,

и потому при справедливо равенство . При последнее равенство принимает вид и также, очевидно, справедливо. Итак, при любых имеет место равенство , то есть - симметрический многочлен. Теорема доказана.

Итак, для антисимметрических многочленов от трех переменных имеет место следующее утверждение.

Теорема: Любой антисимметрический многочлен от трех переменных является произведением многочлена

на некоторый симметрический многочлен от трех переменных

.

Дискриминант и его применение к исследованию корней уравнения.

Мы видели, что в теории антисимметрических многочленов важную роль играют простейшие антисимметрические многочлены, а именно, многочлен

для трех переменных. Квадрат простейшего антисимметрического многочлена называют дискриминантом. Таким образом он равен

(3.2)

Для сравнения приведем другой вывод формулы (3.2) с помощью метода частных значений. Дискриминант является однородным многочленом шестой степени. Поэтому в его выражение через , , могут входить (с некоторыми коэффициентами) лишь такие одночлены, для которых (так как - многочлен первой степени, - второй и - третьей). Уравнение имеет в целых неотрицательных числах семь решений, указанных в таблице 4.

Таблица 4

m	n	p	m	n	p	m	n	p
6 4	0 1	0 0	3 2 1	0 2 1	1 0 1	0 0	3 0	0 2

Иными словами, выражение дискриминанта через , , имеет вид

, (3.3)

Где - некоторые коэффициенты. Так как соотношение (3.3) представляет собой тождество, то мы можем подставлять в это соотношение любые значения .

Положим , ; в этом случае , и . Поэтому равенство (3.3) принимает вид . Итак, коэффициент найден.

Теперь положим ; в этом случае , , , , и соотношение (3.3) принимает вид , то есть .

При (то есть , ,) получаем из соотношения (3.3): , откуда находим .

Затем мы положим (то есть , ,) и, кроме того, (то есть , ,). Это даст нам (учитывая, что) следующие два соотношения:

Рассматривая эти соотношения как систему уравнений относительно неизвестных и , легко находим: .

Наконец, придадим величинам еще две системы значений: и . Мы получим тогда (учитывая, что коэффициенты нам уже известны) следующие соотношения:

откуда без труда находим .

Итак, все коэффициенты определены. Подставляя в соотношение (3.3) найденные значения этих коэффициентов, мы и получаем формулу (3.2).

Дискриминант играет важную роль в теории алгебраических уравнений. С его помощью можно узнать, совпадают ли их корни, исследовать число действительных корней и так далее

Рассмотрим квадратное уравнение. Пусть и - корни квадратного уравнения

с действительными коэффициентами и . По формулам Виета имеем: и .

Поэтому

. (3.4)

Мы ограничимся рассмотрением уравнений с действительными коэффициентами. В этом случае могут быть три возможности:

1) корни уравнения действительны и различны,
2) корни уравнения действительны и совпадают,
3) корни уравнения комплексно сопряжены.

Дискриминант позволяет ответить на вопрос, какой же из этих случаев имеет место. Проще всего выяснить, совпадают ли корни нашего уравнения.

Ведь если они совпадают, то есть если , то , и наоборот. Пользуясь формулой (3.4), получаем следующий ответ: корни квадратного уравнения совпадают тогда и только тогда, когда . Ясно, что если корни совпадают, то они действительны (поскольку). Пусть теперь и различны, то есть . Выясним, когда корни действительны, а когда они комплексно сопряжены. Если корни и действительны, то число тоже действительно, и потому - положительное число. Если же корни и комплексно сопряжены, то есть , , то , и потому является отрицательным числом. Вспоминая, что , мы получаем следующий результат:

Пусть - квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Тогда

1) если , то корни уравнения действительны и различны;

2) если , то корни уравнения действительны и совпадают;

3) если , то корни уравнения комплексно сопряжены.

Таким образом, в случае квадратного уравнения дискриминант позволяет полностью различить случаи, когда уравнение с действительными коэффициентами имеет действительные разные, действительные совпадающие комплексные корни. С этим связано и происхождение термина «дискриминант»: по латыни discriminatio означает различение.

Рассмотрим теперь кубическое уравнение

с действительными коэффициентами . Здесь могут встретиться такие случаи:

1) все три корня уравнения действительны и различны между собой;

2) все три корня уравнения действительны, причем два из них совпадают, а третий отличен от них;

3) все три корня уравнения совпадают (и действительны);

4) один корень уравнения действительный, а два других комплексно сопряжены.

Иных случаев быть не может.

Чтобы отличить эти случаи друг от друга, снова образуем дискриминант трех корней нашего уравнения, то есть выражение

. (3.5)

В силу формул Виета для кубического уравнения

( ) имеем:

и потому, согласно формуле (3.2),

.

Ясно, что если какие-нибудь два корня уравнения совпадают, то в выражении (3.5) одна скобка обращается в нуль, а тогда и дискриминант равен нулю. Если же все корни попарно различны (то есть среди них нет ни одной пары совпадающих), то все скобки в выражении (3.5) отличны от нуля, а потому и дискриминант отличен от нуля. Итак, для того чтобы среди корней уравнения

было хотя бы два совпадающих, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие .

Пусть теперь все корни кубического уравнения действительны и различны. Тогда является отличным от нуля действительным числом, а значит, - положительное число.

Наконец, пусть корень - действительный, а корни , и комплексно сопряжены. Тогда выражение принимает вид

Поэтому

<0.

Итак, мы доказали следующее утверждение.
Пусть

кубическое уравнение с действительными коэффициентами и

.

дискриминант этого уравнения. Тогда:

1) если , то все три корня действительны и различны;

2) если , то среди корней уравнения есть по крайней мере два совпадающих;

3) если , то один корень уравнения действительный, а два другие комплексно сопряжены.

Проведенное исследование не полно. Мы не научились еще отличать случай, когда два корня уравнения совпадают, а третий отличен от них, от случая, когда равны друг другу все три корня. Здесь уже дискриминант отказывается дать ответ и надо искать другой симметрический многочлен. Проще всего взять в этом случае в помощь дискриминанту симметрический многочлен

Ясно, что если корни действительны, то выражение лишь тогда обращается в нуль, когда все три корня совпадают.

Таким образом,

если дискриминант кубического уравнения обращается в нуль, то при два корня этого уравнения совпадают, а третий отличен от них, а при все три корня уравнения равны между собой.

Заметим в исключение, что если в произвольный кубический многочлен x^3+nx^2+px+q ввести новое неизвестное y по формуле , то этот кубический многочлен примет вид , то есть в нем исчезнет член, содержащий квадрат неизвестного. Таким образом, любое кубическое уравнение может быть указанной заменой приведено к виду

.

Если уравнение уже приведено к такому виду, то выражения для и значительно упрощаются:

.

3.1.2 Четные и нечетные перестановки.

Определение симметрических многочленов от трех переменных рассмотренное ранее, можно сформулировать в несколько иной форме. Рассмотрим произвольную перестановку переменных . Таких перестановок существует шесть: может перейти при перестановке в любое из трех переменных , затем в каждом из этих трех случаев у перейти в какое-либо из двух оставшихся переменных. Это и дает шесть возможностей для получения перестановок (при этом, если уже известно, во что переходят и , то для остается только одна возможность: оно должно перейти в третье, оставшееся переменное). Все эти шесть возможных перестановок переменных показаны на следующей диаграмме:

Первые три перестановки (верхняя строка) заключаются в том, что некоторые два переменных меняются местами, а третье переменное не меняется. Иными словами, верхняя строка дает нам всевозможные перестановки двух переменных. Первая перестановка в нижней строке является тождественной, то есть ни одно переменное не меняется. Две другие перестановки, указанные в нижней строке, называются циклическими. Название это объясняется тем, что переменные последовательно заменяются одно другим (например, во второй перестановке нижней строки переходит в , переходит в , а - в), то есть эти перестановки можно схематически изобразить в виде кольца или, как говорят математики, цикла:

Таким образом, при циклической перестановки каждое переменное переходит по кругу в следующее.

По определению, многочлен называется симметрическим, если он не меняется при перестановках, изображенных в верхней строке приведенной выше диаграммы. Разумеется симметрический многочлен (да и вообще любой многочлен) не меняется при тождественной перестановке, когда ни одно переменное не меняет своего значения.

Возникает вопрос, остается ли симметрический многочлен неизменным и при циклических перестановках? Оказывается, что остается. Дело в том, что каждая из циклических перестановок может быть получена, если выполнить одну за другой две перестановки, меняющие местами два переменных. Например, если сначала поменять местами и , а после этого поменять местами и , то в результате x перейдет в , в , а в , то есть получится циклическая перестановка. Но каждая перестановка двух переменных оставляет симметрический многочлен неизменным. Поэтому он не меняется, если два раза произвести перестановку двух переменных, а значит, не меняется и при циклических перестановках:

.

Итак, определение симметрического многочлена от трех переменных можно сформулировать следующим образом: многочлен от трех переменных называется симметрическим, если он не изменяется ни при какой перестановке переменных.

Перестановки, изображенные в верхней строке приведенной выше диаграммы, называются нечетными, а перестановки указанные в нижней строке - четными. Объясняются эти названия тем, что для получения перестановок нижней строки нужно произвести четное число раз перестановку двух переменных (для циклических перестановок - 2 раз, а для тождественной - 0 раз), а перестановки верхней строки получаются, если нечетное число раз (а именно, 1 раз) переставить местами два переменных.

Как же ведут себя при различных перестановках антисимметрические многочлены? По определению, они меняют знак при нечетных перестановках (то есть при перестановке двух каких-либо переменных - верхняя строка диаграммы). При четных же перестановках антисимметрические многочлены не меняются: ведь если мы четное число раз произведем перестановку двух переменных, то антисимметрический многочлен четное число раз изменит знак, то есть в результате он совсем не изменится.

Итак, и симметрические и антисимметрические многочлены не изменяются при четных перестановках переменных . (При этом симметрические многочлены не меняются также и при четных перестановках, а антисимметрические при таких перестановках меняют знак.)

3.1.3 Четно-симметрические многочлены

Естественно рассмотреть класс многочленов, объединяющий симметрические и антисимметрические многочлены. Именно, назовем многочлен четно-симметрическим, если он не изменяется ни при какой четной перестановке переменных , , . Как мы видели, к числу четно-симметрических многочленов относятся и симметрические и антисимметрические многочлены.

Возникает вопрос, насколько же широкий класс многочленов у нас получился? Оказывается, расширение не слишком велико:

Любой четно-симметрический многочлен является суммой симметрического и антисимметрического многочленов.

Для доказательства возьмем произвольный четно-симметрический многочлен и переставим в нем переменные и . При этом получится, вообще говоря, другой многочлен . Но если сделать перестановку любых двух переменных в многочлене , то по условию снова получится многочлен (ибо две выполненные одна за другой перестановки двух переменных равносильны четной перестановке переменных , а при четной перестановке многочлен не меняется). С другой стороны, при перестановке в многочлене любых других двух переменных получится тот же самый многочлен , что и при перестановке переменных и . Итак, любая перестановка двух переменных превращает многочлен в , а многочлен - в . Но тогда многочлен

не меняется ни при какой перестановке двух переменных (лишь меняются местами слагаемые). Поэтому он симметричен. Многочлен же

антисимметричен. Но ясно, что

.

Тем самым доказано, что любой четно-симметрический многочлен является суммой симметрического и антисимметрического многочленов.

Поскольку мы знаем строение и симметрических и антисимметрических многочленов, получаем следующий результат:

Любой четно-симметрический многочлен от трех переменных может быть представлен в виде некоторого многочлена от многочленов , , и . При этом многочлен входит в выражение не более чем в первой степени, так как многочлен является симметрическим и потому может быть выражен через , , .

3.2 Применение к элементарной алгебре 3

3.2.1 Разложение на множители

Доказанная ранее основная теорема об антисимметрических многочленах позволяет значительно упростить решение целого ряда задач элементарной алгебры. Так как любой антисимметрический многочлен от трех переменных

делится на многочлен

,

то мы сразу получаем возможность разложить любой антисимметрический

многочлен на множители:

, (3.6)

где - симметрический многочлен. В свою очередь, симметрический

многочлен также иногда может быть разложен на множители (его

можно выразить через , , и попытаться разложить на множители

получившийся многочлен от , , , если это удастся, то, подставляя

значения , , , мы получим разложение на

множители исходного многочлена). Заметим, что для отыскания частного

нецелесообразно производить деление («в столбик») антисимметрического

многочлена на кубический многочлен . Более удобным (когда

степень многочлена не слишком высока) является метод частных значений.

Именно, если антисимметрический многочлен имеет третью степень, то частное

(3.7)

является многочленом нулевой степени, то есть числом:

.

Это соотношение является тождеством, то есть справедливо при любых значениях . Поэтому для определения числа достаточно в последнем равенстве придать какие-либо (попарно различные) числовые значения; отсюда и определяется число .

Если антисимметрический многочлен является однородным многочленом четвертой степени, то частное (3.7) является однородным симметрическим многочленом первой степени, то есть имеет вид :

(3.8)

(- число). И здесь для определения неизвестного коэффициента достаточно придать какие-либо числовые значения.

Аналогично, если - однородный антисимметрический многочлен пятой степени, то частное (3.8) является однородным симметрическим многочленом второй степени, то есть имеет вид , где и - неизвестные коэффициенты:

.

Для нахождения двух неизвестных коэффициентов , мы должны дважды придать некоторые числовые значения.

Если - однородный антисимметрический многочлен шестой степени, то

,

и так далее

Рассмотрим примеры.

1. разложить на множители антисимметрический многочлен

это многочлен третьей степени, следовательно .

= .

Чтобы найти коэффициент , положим

Таким образом,

= =

2. Разложить на множители антисимметрический многочлен

это многочлен четвертой степени, следовательно .

.

Полагая x=0, y=1, z=2

$=$.

3.2.2 Упрощение алгебраических выражений

Приемы разложения на множители, рассмотренные в предыдущем пункте, удобно применять также и при решении некоторых других алгебраических задач. Например, эти приемы с успехом применяются для доказательства тождеств, в левой и правой части которых стоят антисимметрические многочлены. Точно так же, если в числителе и знаменателе дроби стоят антисимметрические многочлены от трех переменных,

то дробь заведомо может быть сокращена на . Рассмотрим примеры.

1. упростить выражение

Приведем к общему знаменателю, получим:

.

Числитель является антисимметрическим многочленом третьей степени и потому пропорционален

многочлену , то есть

$=$

чтобы найти положим . Мы получим, что , а потому

$=$

$=$ $=0.$

4 Понятие симметрического многочлена от нескольких переменных

Среди многочленов от нескольких переменных выделяются те, которые не меняются ни при какой перестановке неизвестных. В такие многочлены все неизвестные входят, следовательно, вполне симметричным образом, и поэтому эти многочлены называются симметрическими многочленами (или симметрическими функциями). Простейшими примерами будут: сумма всех неизвестных $x_1 + x_2 + ... + x_n$, сумма квадратов неизвестных $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$, произведение неизвестных $x_1 x_2 ... x_n$ и т. д. Ввиду представимости всякой подстановки n символов в виде произведения транспозиций, при доказательстве симметричности некоторого многочлена достаточно проверить, что он не меняется ни при какой транспозиции двух неизвестных.

Мы будем рассматривать дальше симметрические многочлены от n неизвестных с коэффициентами из некоторого поля P. Легко видеть, что сумма, разность и произведение двух симметрических многочленов сами будут симметрическими, т. е. симметрические многочлены составляют подкольцо в кольце $P[x_1, x_2, ..., x_n]$ всех многочленов от n неизвестных над полем P, называемое кольцом симметрических многочленов от n неизвестных над полем P. К этому кольцу принадлежит все элементы из P (т. е. все многочлены нулевой степени, а также нуль), так как они заведомо не меняются ни при какой перестановке неизвестных. Всякий другой симметрический многочлен непременно содержит все n неизвестных и даже имеет по ним одну и ту же степень: если симметрический многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ обладает членом, в которой неизвестное x_i входит с показателем k, то обладает и членом, получающимся из него транспозицией неизвестных x_i и x_j, т. е. содержащим неизвестное x_j в той же степени k.

Следующие n симметрических многочленов от n неизвестных называются элементарными симметрическими многочленами:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
&\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n, \\
&\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sigma_{n-1} = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_n + \ldots + x_2 x_3 \ldots x_n, \\
&\sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Эти многочлены, симметричность которых очевидна, играют в теории симметрических многочленов очень большую роль. Они подсказаны формулами Виета, и поэтому можно сказать, что коэффициенты многочлена от одного неизвестного, имеющего старшим коэффициентом единицу, будут, с точностью до знака, элементарными симметрическими многочленами от его корней. Эта связь элементарных симметрических многочленов с формулами Виета будет весьма существенна для тех применений симметрических многочленов к теории многочленов от одного неизвестного, ради которых мы сейчас их изучаем.

Так как симметрические многочлены от n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ над полем P составляют кольцо, то очевидны следующие утверждения: симметрическим многочленом будет всякая целая положительная степень любого из элементарных симметрических многочленов, а также произведение таких степеней, притом взятое с любым коэффициентом из P, и, наконец, всякая сумма указанных произведений. Иными словами, всякий многочлен от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ с коэффициентами из P, рассматриваемый как многочлен от неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, будет симметрическим. Так, положим $n = 3$ и возьмем многочлен $\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3$. Заменяя σ_1, σ_2 и σ_3 их выражениями, мы получим:

$$\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3 = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + 5x_1x_2x_3;$$

Справа стоит, очевидно, симметрический многочлен от x_1, x_2, x_3.

Обращением этого результата является следующая основная теорема о симметрических многочленах:

Всякий симметрический многочлен от неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ над полем P является многочленом от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ с коэффициентами, принадлежащими к полю P.

Пусть, в самом деле, дан симметрический многочлен

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

и пусть в его лексикографической записи высшим будет член

$$a_0 x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} ... x_n^{\kappa_n}. \tag{4.2}$$

Показатели при неизвестных в этом члене должны удовлетворять неравенствам

$$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq ... \geq \kappa_n. \tag{4.3}$$

Действительно, пусть при некотором i будет $\kappa_i < \kappa_{i+1}$. Многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, будучи симметрическим, должен содержать, однако, член

$$a_0 x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} ... x_i^{\kappa_{i+1}} x_{i+1}^{\kappa_i} ... x_n^{\kappa_n}, \tag{4.4}$$

получающийся из члена (4.2) транспозицией неизвестных x_i и x_{i+1}. Это приводит нас к противоречию, так как член (4.4) в смысле лексикографического расположения выше члена (4.2): показатели при $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ в обоих членах совпадают, но показатель при x_i в члене (4.4) больше, чем в члене (4.2).

Возьмем теперь следующее произведение элементарных симметрических многочленов (ввиду неравенств (4.3) все показатели будут неотрицательными):

$$\varphi_1 = a_0\sigma_1^{\kappa_1-\kappa_2}\sigma_2^{\kappa_2-\kappa_3}...\sigma_{n-1}^{\kappa_{n-1}-\kappa_n}\sigma_n^{\kappa_n}. \tag{4.5}$$

Это будет симметрический многочлен от неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, причем его высший член равен члену (4.2). Действительно, высшие члены многочленов $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ равны соответственно $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, x_1x_2...x_n$, а так как в конце предыдущего параграфа доказано, что высший член произведения равен произведению высших членов сомножителей, то высшим членом многочлена φ_1 будет

$$a_0x_1^{\kappa_1-\kappa_2}(x_1x_2)^{\kappa_2-\kappa_3}(x_1x_2x_3)^{\kappa_3-\kappa_4}...$$
$$...(x_1x_2...x_{n-1})^{\kappa_{n-1}-\kappa_n}(x_1x_2...x_n)^{\kappa_n} = a_0x_1^{\kappa_1}x_2^{\kappa_2}...x_n^{\kappa_n}.$$

Отсюда следует, что при вычитании φ_1 из f высшие члены этих многочленов взаимно уничтожатся, т. е. высший член симметрического многочлена $f - \varphi_1 = f_1$ будет ниже члена (4.2), высшего в многочлене f. Повторяя для многочлена f_1, коэффициенты которого принадлежат, очевидно, к полю P, этот же прием, мы придем к равенству

$$f_1 = \varphi_2 + f_2,$$

где φ_2 есть произведение степеней элементарных симметрических многочленов с некоторым коэффициентом из поля P, f_2 - симметрический многочлен, высший член которого ниже, чем высший член в f_1. Отсюда вытекает равенство

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + f_2.$$

Продолжая этот процесс, мы для некоторого s получим $f_s = 0$ и поэтому придем к выражению для f в виде многочлена от $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$
с коэффициентами из P:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{S}\varphi_i = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, ...\sigma_n). \tag{4.6}$$

В самом деле, если бы этот процесс был бесконечным , то мы получили бы бесконечную последовательность симметрических многочленов

$$f_1, f_2, ..., f_s, ...,$$

Следует учесть, что многочлен φ_s содержит, вообще говоря, и такие члены, каких нет в многочлене f_{s-1} и поэтому переход от f_{s-1} к $f_s = f_{s-1} - \varphi_s$ связан не только с уничтожением некоторых членов из f_{s-1}, но и с появлением новых членов. Здесь $s = 1,2,...$ причем высший член каждого из них был бы ниже, чем высшие члены предшествующих многочленов, и тем более ниже, чем (4.2). Однако, если

$$bx_1^{l_1} x_2^{l_2} ... x_n^{l_n} \tag{4.7}$$

есть высший член многочлена f_s, то из симметричности этого многочлена следуют неравенства

$$l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_n, \tag{4.8}$$

подобные неравенствам (4.3). С другой стороны, так как член (4.2) выше члена (4.7), то

$$\kappa_1 \geq l_1. \tag{4.9}$$

Легко видеть, однако, что системы целых неотрицательных чисел $l_1, l_2, ... l_n$ удовлетворяющих неравенствам (4.8) и (4.9), можно выбрать лишь конечным числом способов. Действительно, если даже отказаться от требования (4.8) и лишь предполагать, что все $l_i, i = 1,2,...,n,$ не больше κ_1 то все равно выбор чисел l_i будет возможен лишь $(\kappa_1 + 1)^n$ способами. Отсюда следует, что последовательность многочленов (4.6) со строго понижающимися высшими членами не может быть бесконечной.

Доказательство теоремы закончено.

Отмеченная выше связь элементарных симметрических многочленов с формулами Виета позволяет вывести такое важное следствие из основной теоремы о симметрических многочленах:

Пусть $f(x)$ есть многочлен от одного неизвестного над полем P, имеющий старшим коэффициентом единицу. Тогда всякий симметрический многочлен (с коэффициентами из P) от корней многочлена $f(x)$, принадлежащих к некоторому полю разложения многочлена $f(x)$ над P, будет многочленом (с коэффициентами из P) от коэффициентов многочлена $f(x)$ и поэтому будет элементом поля P.

Изложенное выше доказательство основной теоремы дает заодно и метод для практического разыскания выражений симметрических многочленов через элементарные. Предварительно введем следующее обозначение: если

$$ax_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} ... x_n^{\kappa_n} \tag{4.10}$$

есть некоторое произведение степеней неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ (причем среди показателей могут быть и равные нулю), то через

$$S(ax_1^{\kappa_1}x_2^{\kappa_2}...x_n^{\kappa_n}) \qquad (4.11)$$

будет обозначаться сумма всех членов, получающихся из (4.10) при всевозможных перестановках неизвестных. Очевидно, что это будет симметрический многочлен, притом однородный, и что всякий симметрический многочлен от n неизвестных, содержащий член (4.10), будет содержать и все остальные члены многочлена (4.11). Например, $S(x_1)=\sigma_1, S(x_1x_2)=\sigma_2, S(x_1^2)$ есть сумма квадратов всех неизвестных и т. Д.

Пример. Симметрический многочлен $f=S(x_1^2x_2)$ от n неизвестных выразить через элементарные симметрические многочлены.

Здесь высший член $x_1^2x_2$ и поэтому $\varphi_1=\sigma_1^{2-1}\sigma_2=\sigma_1\sigma_2$ т. Е.

$$\varphi_1=(x_1+x_2+...+x_n)(x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n)=$$
$$S(x_1^2x_2)+3S(x_1x_2x_3),$$

откуда

$$f_1=f-\varphi_1=-3S(x_1x_2x_3)=-3\sigma_3.$$

Поэтому $f=\varphi_1+f_1=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$.

В более сложных примерах целесообразнее предварительно установить, какие члены могут войти в выражение данного многочлена через элементарные, а затем найти коэффициенты этих членов методом неопределенных коэффициентов.

Примеры. 1. Найти выражение для симметрического многочлена

$$f=S(x_1^2x_2^2).$$

Мы знаем (см. доказательство основной теоремы), что члены искомого многочлена $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ определяются через высшие члены симметрических многочленов $f_1, f_2...$, причем эти высшие члены ниже высшего члена данного многочлена f, т. Е. ниже $x_1^2x_2^2$. Найдем все произведения $x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_n^{l_n}$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) они ниже члена $x_1^2x_2^2$, 2) они могут служить высшими членами симметрических многочленов, т. Е. удовлетворяют неравенствам $l_1\ge l_2\ge...\ge l_n$, 3) по совокупности неизвестных они имеют степень 4 (так как все многочлены $f_1, f_2,...$ имеют, как мы знаем, ту же степень, что и однородный многочлен f). Выписывая лишь соответствующие комбинации показателей и указывая рядом те произведения степеней σ, которые ими определяются, мы получаем следующую таблицу:

$$22000 \ldots \sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0} = \sigma_2^2,$$
$$21100 \ldots \sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0} = \sigma_1\sigma_3,$$
$$11110 \ldots \sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0} = \sigma_4,$$

Таким образом, многочлен f имеет вид:

$$f = \sigma_2^2\sigma + A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_4.$$

Коэффициент при σ_2 мы положили равным единице, так как этот член определен высшим членом многочлена f и имеет, как мы знаем из доказательства основной теоремы, такой же коэффициент. Коэффициенты A и B мы найдем следующим образом.

Положим $x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad x_4 = \ldots = x_n = 0$. Легко видеть, что при этих значениях неизвестных многочлен f получает значение 3, а многочлены $\sigma_1, \sigma_{2,} \sigma_3$ и σ_4 - соответственно значения 3, 3, 1 и 0. Поэтому

$$3 = 9 + A \cdot 3 \cdot 1 + B \cdot 0,$$

откуда $A = -2$. Положим теперь $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, \quad x_5 = \ldots = x_n = 0.$ Значения многочленов $f, \sigma_1, \sigma_{2,} \sigma_3$ и σ_4 будут равны соответственно 6, 4, 6, 4, 1. Поэтому

$$6 = 36 - 2 \cdot 4 \cdot 4 + B \cdot 1,$$

откуда $B = 2$. Таким образом, искомое выражение для f будет

$$f = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4.$$

2. Найти сумму кубов корней многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

Для решения этой задачи найдем выражение через элементарные симметрические многочлены для симметрического многочлена $S(x_1^3)$. Применяя тот же метод, как и в предыдущем примере, мы получим таблицу

$$3000 \ldots \sigma_1^3,$$
$$2100 \ldots \sigma_1\sigma_2,$$
$$1110 \ldots \sigma_3,$$

а поэтому

$$S(x_1^3) = \sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3. \tag{4.12}$$

Полагая сперва

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = \ldots = x_n = 0,$$

а затем $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = \ldots = x_n = 0$, мы получим $A = -3, B = 3,$ т. е.

Для нахождения суммы кубов корней данного нам многочлена $f(x)$ нужно, ввиду формул Виета, в найденном выше выражении заменить σ_1 через коэффициент при x^3 с обратным знаком, т. е. через —1, заменить σ_2 через коэффициент при x^2, т. е. через 2, и, наконец, заменить σ_3 через коэффициент при x с обратным знаком, т. е. через—1. Таким образом, интересующая нас сумма кубов корней равна

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 2$$

Читатель может проверить этот результат, если учтет, что $f(x)$ имеет корнями числа $i, -i, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Очевидно также, что формула (4.12) не зависит от заданного многочлена $f(x)$ и позволяет находить сумму кубов корней любого многочлена.

Метод для выражения симметрического многочлена f через элементарные, полученный при доказательстве основной теоремы, приводит к вполне определенному многочлену от $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Оказывается, что никаким способом нельзя получить для иного выражения через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Это показывает следующая теорема единственности:

Всякий симметрический многочлен обладает лишь единственным выражением в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

Докажем эту теорему. Если бы симметрический многочлен $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ на полем P обладал двумя различными выражениями через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

то разность

$$x(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) - \psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

была бы отличным от нуля многочленом от $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, т. е. не все его коэффициенты были бы равны нулю, в то время как замена в этом многочлене $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ их выражениями через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, приводила бы к нулю кольца $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Нам остается поэтому доказать, что если многочлен $x(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ отличен от нуля, т. е. обладает хотя бы одним отличным от нуля коэффициентом, то и многочлен $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полученный из x заменой $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ их выражениями через $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.13}$$

также отличен от нуля.

Если $a\sigma_1^{\kappa_1}\sigma_2^{\kappa_2}...\sigma_n^{\kappa_n}$ — один из членов многочлена x, причем $a \neq 0$, то после замены всех а их выражениями (4.1) мы получим многочлен от $x_1, x_2, ..., x_n$, высшим членом которого (в смысле лексикографического расположения) будет, как мы уже знаем из доказательства основной теоремы, член

$$ax_1^{\kappa_1}(x_1x_2)^{\kappa_2}...(x_1x_2...x_n)^{\kappa_n} = ax_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_n^{l_n},$$

Где

$$\begin{aligned} l_1 &= \kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_n, \\ l_2 &= \kappa_2 + ... + \kappa_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_n &= \kappa_n. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\kappa_i = l_i - l_{i+1}, \kappa_n = l_n, \quad i = 1,2,...,n-1,$$

т. е. по показателям $l_1, l_2, ..., l_n$ можно восстановить показатели $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n$ исходного члена многочлена x. Таким образом, различные члены многочлена x, рассматриваемые как многочлены от $x_1, x_2, ..., x_n$, обладают различными высшими членами.

Рассмотрим теперь все члены многочлена x; для каждого из них найдем высший член его представления в виде многочлена от $x_1, x_2, ..., x_n$ и отберем тот из этих высших членов, который будет наивысшим в смысле лексикографического расположения. Как сказано выше, этот член не имеет подобных среди высших членов, получающихся из других членов многочлена x, а так как он, по условию, выше каждого из этих высших членов, то тем более он выше других членов, получающихся при замене в членах многочлена x элементов $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ их выражениями (4.1). Мы нашли, следовательно, такой член, который при переходе от $x(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ к $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ появляется (с отличным от нуля коэффициентом) только один раз и поэтому ни с чем не может сократиться. Отсюда следует, что не все коэффициенты многочлена $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ равны нулю, т. е. этот многочлен не является нулем кольца $P(x_1, x_2, ..., x_n)$,что и требовалось доказать.

Доказанную теорему можно также, очевидно, сформулировать следующим образом:

Система элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ рассматриваемых как элементы кольца многочленов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, алгебраически независима над полем P.

4.1 Дополнительные замечания о симметрических многочленах

Замечания к основной теореме. Доказательство основной теоремы о симметрических многочленах, проведенное в предшествующем параграфе, позволяет сделать несколько существенных добавлений к формулировке теоремы, которыми мы ниже воспользуемся. Прежде всего, коэффициенты того многочлена $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m)$, который найден нами в качестве выражения для симметрического многочлена $f(x_1,x_2,...,x_m)$ через элементарные симметрические многочлены, не только принадлежат к полю P, но даже выражаются через коэффициенты многочлена f при помощи сложения и вычитания, т. е. принадлежат к кольцу L, порождаемому коэффициентами многочлена f внутри поля Р.

В самом деле, все коэффициенты многочлена φ_1 относительно неизвестных $x_1,x_2,...,x_n$ суть, как легко видеть, целые кратные от коэффициента a_0 при высшем члене многочлена f и поэтому принадлежат к кольцу L. Пусть уже доказано, что к L принадлежат все коэффициенты (относительно $x_1,x_2,...,x_m$) многочленов $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_i$. Тогда коэффициенты многочлена $f_i = f-\varphi_1-\varphi_2-...-\varphi_i$, также будут принадлежать к L, а поэтому в L лежат и все коэффициенты многочлена φ_{i+1} относительно $x_1,x_2,...,x_n$.

С другой стороны, степень многочлена $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ по совокупности $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m$ равна степени, которую имеет многочлен $f(x_1,x_2,...,x_n)$ по каждому из неизвестных x_i. В самом деле, так как (4.2) из предшествующего параграфа есть высший член многочлена f, то k_1 будет степенью f относительно неизвестного x_1, а поэтому, ввиду симметричности, и относительно любого другого из неизвестных x_i. Однако степень φ_1 по совокупности σ равна, по (4.5) из предшествующего параграфа, числу

$$(k_1-k_2)+(k_2-k_3)+...+(k_{n-1}-k_n)+k_n = k_1.$$

Далее, так как старший член многочлена f_1 ниже старшего члена многочлена f, то степень f_1 по каждому из x_i будет не выше чем степень f по каждому из этих неизвестных. Однако многочлен φ_2 играет для f_1 такую же роль, как φ_1 для f, поэтому степень φ_2 по совокупности σ равна степени f_1 по каждому из x_i т. е. она не больше чем k_1 и т. д. Таким образом, и степень $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ не выше чем k_1 Поскольку же никакое φ_1 с $i>1$ не может содержать все $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ в тех же степенях, что и φ_1, то степень $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ в точности равна k_1. Тем самым наше утверждение доказано.

Наконец, пусть $a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\cdots\sigma_n^{l_n}$ будет один из членов многочлена $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m)$. Назовем весом этого члена число

$$l_1+2l_2+...+nl_n,$$

т. е. сумму показателей, умноженных на индексы соответствующих σ_l. Это будет, иными словами, степень взятого нами члена по совокупности неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, как вытекает из доказанной теоремы о степени произведения многочленов. Тогда справедливо следующее утверждение:

Если однородный симметрический многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет по совокупности неизвестных степень s, то все члены его выражения $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ через σ будут одного и того же веса, равного s.

Действительно, если (4.2) из предшествующего параграфа есть высший член однородного многочлена f, то

$$s = k_1 + k_2 + \ldots + k_n .$$

Однако вес члена φ_1 равен, по (4.5) из предшествующего параграфа,

$$(k_1 - k_2) + 2(k_2 - k_3) + \ldots + (n-1)(k_{n-1} - k_n) + nk_n = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n ,$$

т. е. также равен s. Далее, многочлен $f_1 = f - \varphi_1$ как разность двух однородных многочленов степени а сам будет однородным степени s, а поэтому и член φ_2 многочлена φ будет веса s и т. д.

Симметрические рациональные дроби. Основная теорема о симметрических многочленах может быть распространена на случай рациональных дробей. Назовем рациональную дробь $\frac{f}{g}$ от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ симметрической, если она остается равной самой себе при любой перестановке неизвестных. Легко показать, что это определение не зависит от того, берем ли мы дробь $\frac{f}{g}$ или равную ей дробь $\frac{f_0}{g_0}$. Действительно, если ω есть некоторая перестановка наших неизвестных, а φ — произвольный многочлен от этих неизвестных, то условимся через φ^ω обозначать тот многочлен, в который переводится φ перестановкой ω. По предположению, при любом ω

$$\frac{f}{g} = \frac{f^\omega}{g^\omega},$$

т. е. $fg^\omega = gf^\omega$. С другой стороны, из

$$\frac{f}{g} = \frac{f_0}{g_0}$$

следует $fg_0 = gf_0$, откуда $f^\omega g_0^\omega = g^\omega f_0^\omega$. Умножая обе части последнего равенства на f, мы получаем:

$$ff^\omega g_0^\omega = fg^\omega f_0^\omega = gf^\omega f_0^\omega ,$$

откуда после сокращения на f^ω следует: $fg_0^\omega = gf_0^\omega$, т. е.

$$\frac{f_0^{\omega}}{g_0^{\omega}}=\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0}.$$

Справедлива следующая теорема:

Всякая симметрическая рациональная дробь от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из поля P представима в виде рациональной дроби от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ с коэффициентами, снова принадлежащими к P. Действительно, пусть дана симметрическая рациональная дробь

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Предполагая ее несократимой, можно было бы доказать, что и f и g будут симметрическими многочленами. Следующий путь будет, однако, более простым. Если многочлен g не является симметрическим, то умножаем числитель и знаменатель на произведение всех $n!-1$ многочленов, получающихся из g при всевозможных нетождественных подстановках неизвестных. Легко проверить, что знаменатель будет теперь симметрическим многочленом. Ввиду симметричности всей дроби отсюда следует, что числитель теперь также будет симметрическим, а поэтому для доказательства теоремы остается выразить числитель и знаменатель через элементарные симметрические многочлены.

Степенные суммы. В приложениях часто встречаются симметрические многочлены

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k, \ \ k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. суммы k-х степеней неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти многочлены, называемые степенными суммами, должны выражаться, по основной теореме, через элементарные симметрические многочлены. Разыскание этих выражений является, однако, при больших k весьма затруднительным, и поэтому представляет интерес та связь между многочленами $s_1, s_2, \ldots s_n$ и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ которая будет сейчас установлена.

Прежде всего $s_1 = \sigma_1$. Далее, если $\kappa \le n$, то легко проверить справедливость равенств

$$
\begin{aligned}
&s_{\kappa-1}\sigma_1 = s_\kappa + S(x_1^{\kappa-1}x_2)^1,),\\
&s_{\kappa-2}\sigma_2 = S(x_1^{\kappa-1}x_2) + S(x_1^{\kappa-2}x_2x_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_{\kappa-i}\sigma_i = S(x_1^{\kappa-i}x_2\ldots x_i) + S(x_1^{\kappa-i}x_2x_ix_{i+1}),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \le i \le \kappa-2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_1\sigma_{\kappa-1} = S(x_1^2x_2\ldots x_{\kappa-1}) + \kappa\sigma_\kappa.
\end{aligned}
\qquad (4.13)
$$

Беря альтернированную сумму этих равенств (т.е. сумму с чередующимися знаками), а затем, перенося все члены в одну часть равенства, мы получим следующую формулу:

$$
s_\kappa - s_{\kappa-1}\sigma_1 + s_{\kappa-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{\kappa-1}s_1\sigma_{\kappa-1} + (-1)^\kappa \kappa\sigma_\kappa = 0 \qquad (\kappa \le n).
$$

Если же $\kappa > n$, то система равенств (4.13) примет вид

$$
\begin{aligned}
&s_{\kappa-1}\sigma_1 = s_\kappa + S(x_1^{\kappa-1}x_2),\\
&s_{\kappa-2}\sigma_2 = S(x_1^{\kappa-1}x_2) + S(x_1^{\kappa-2}x_2x_3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_{\kappa-i}\sigma_i = S(x_1^{\kappa-i}x_2\ldots x_i) + S(x_1^{\kappa-i}x_2\ldots x_ix_{i+1}), \quad 2 \le i \le n-1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_{\kappa-n}\sigma_n = S(x_1^{\kappa-n+1}x_2\ldots x_n),
\end{aligned}
\qquad (4.14)
$$

откуда вытекает формула

$$
s_\kappa - s_{\kappa-1}\sigma_1 + s_{\kappa-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^n s_{\kappa-n}\sigma_n = 0 \qquad (4.15)
$$
$$(\kappa > n).$$

Формулы (4.14) и (4.15) называются формулами Ньютона. Они связывают степенные суммы с элементарными симметрическими многочленами и позволяют последовательно находить выражения для $s_1, s_2, s_3\ldots$ через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Так, мы знаем, что $s_1 = \sigma_1$, что вытекает и из формулы (4.14). Если, далее, $\kappa = 2 \le n$ то, по (4.14), $s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$, откуда

$$
s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.
$$

Далее, при $\kappa = 3 \le n$ будет $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$, откуда, используя найденные уже выражения для s_1 и s_2, получаем:

$$
s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,
$$

что нам уже известно.

Если же $\kappa = 3$, но $n = 2$, то, по (4.15), $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 = 0$, откуда $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$. Пользуясь формулами Ньютона, можно получить общую формулу, выражающую s_κ через $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$. Эта формула, впрочем, весьма громоздка и мы не будем ее приводить.

Если основное поле P имеет характеристику 0 и поэтому деление на любое натуральное число n имеет смысл, то формула (4.14) дает возможность последовательно выразить элементарные симметрические многочлены $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ через первые n степенных сумм $s_1, s_2, ..., s_n$. Так, $\sigma_1 = s_1$, а поэтому

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(s_1\sigma_1 - s_2) = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2),$$
$$\sigma_3 = \frac{1}{3}(s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2) = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3)$$

и т. д. Отсюда и из основной теоремы вытекает следующий результат: Всякий симметрический многочлен от n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ над полем P характеристики нуль представим в виде многочлена от степенных сумм $s_1, s_2, ..., s_n$ с коэффициентами, принадлежащими к полю P.

Пусть даны две системы неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_r$, причем их объединение

$$x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_r \tag{4.16}$$

алгебраически независимо над полем P. Многочлен над полем P $f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_r)$ называется симметрическим по двум системам неизвестных, если он не меняется при любых перестановках неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ между собой и неизвестных $y_1, y_2, ..., y_r$ между собой. Если для элементарных симметрических многочленов от $x_1, x_2, ..., x_n$ мы сохраним обозначения $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, а элементарные симметрические многочлены от $y_1, y_2, ..., y_r$ обозначим через $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_r$, то основная теорема обобщается следующим образом.

Всякий многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_r)$ над полем P, симметрический по системам неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_r$ представим в виде многочлена (с коэффициентами из P) от элементарных симметрических многочленов по этим двум системам неизвестных:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_r) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_r).$$

В поле характеристики p выражение $\frac{a}{p}$ не имеет смысла при $a \neq 0$, так как в этом поле при любом x будет $px = 0$.

В самом деле, многочлен f можно рассматривать как многочлен $f(y_1, y_2, ..., y_r)$ с коэффициентами, являющимися многочленами от $x_1, x_2, ..., x_n$. Так как f не меняется при перестановках неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, то коэффициенты многочлена f будут симметрическими многочленами от $x_1, x_2, ..., x_n$ и поэтому, по основной теореме, представимы в виде многочленов (с коэффициентами из P) от $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$. С другой стороны, многочлен $f(y_1, y_2, ..., y_r)$, рассматриваемый над полем $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, будет симметрическим относительно $y_1, y_2, ..., y_r$ и поэтому представим в виде многочлена $\varphi(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_r)$. Коэффициенты многочлена φ будут, как показано в начале настоящего параграфа, выражаться через коэффициенты многочлена f при помощи сложения и вычитания, а поэтому они также будут многочленами от $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ Это приводит, очевидно, к искомому выражению для f через $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_r$.

Пример. Многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1x_2x_3 - x_1x_2y_1 - x_1x_2y_2 - x_1x_3y_1 - x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1 - x_2x_3y_2 + \\ + x_1y_1y_2 + x_2y_1y_2 + x_3y_1y_2$$

симметричен как по неизвестным x_1, x_2, x_3, так и по неизвестным y_1, y_2 но не будет симметрическим по всей совокупности пяти неизвестных, как обнаруживается хотя бы при транспозиции неизвестных x_1 и y_1. Найдем выражение для f через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2$:

$$f = x_1x_2x_3 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)y_1 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)y_2 + (x_1 + x_2 + x_3)y_1y_2 = \\ = \sigma_3 - \sigma_2 y_1 - \sigma_2 y_2 + \sigma_1 y_1 y_2 = \sigma_3 - \sigma_2\tau_1 + \sigma_1\tau_2.$$

Доказанная сейчас теорема распространяется, понятно, также на случай трех и большего числа систем неизвестных.

Для многочленов, симметрических по двум системам неизвестных, справедлива также теорема единственности представления через элементарные симметрические многочлены. Иными словами, справедлива следующая теорема:

Объединенная система

$$\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_r$$

элементарных симметрических многочленов от заданных систем неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, и $y_1, y_2, ..., y_r$ алгебраически независима над полем P.

Пусть, в самом деле, существует многочлен

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_r)$$

над полем P, равный нулю, хотя не все его коэффициенты нули. Этот многочлен можно рассматривать как многочлен $\psi(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_r)$ с коэффициентами, являющимися многочленами от $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$.

Можно считать, следовательно, что ψ — многочлен от $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_r$ над полем рациональных дробей

$$Q = P(x_1, x_2, ..., x_n).$$

4.2 Результат. Исключение неизвестного. Дискриминант

Если дан многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ из кольца $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, то его решением называется такая система значений для неизвестных

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n,$$

Взятых в поле Р или в некотором расширении $\overline{P}$ этого поля, которая обращает многочлен f в нуль:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0.$$

Всякий многочлен f, степень которого больше нуля, обладает решениями: если неизвестное x_1 входит в запись этого многочлена, то в качестве $\alpha_2, ..., \alpha_n$ можно взять по существу произвольные элементы из поля P, лишь бы степень многочлена $f(x_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ Оставалась строго положительной, а затем, используя теорему о существовании корня , взять такое расширение поля $\overline{P}$, в котором многочлен $f(x_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ от одного неизвестного x_1 обладает корнем ах. Мы видим вместе с тем, что свойство многочлена степени n от одного неизвестного обладать во всяком поле не более чем n корнями для многочленов от нескольких неизвестных перестает быть справедливым.

Если дано несколько многочленов от n неизвестных, то можно поставить вопрос о разыскании решений, общих для всех этих многочленов, т. е. решений той системы уравнений, которая получается в результате приравнивания заданных многочленов нулю. Частный случай этой задачи, а именно случай систем линейных уравнений, уже был подвергнут во второй главе детальному рассмотрению. Однако для противоположного частного случая одного уравнения от одного неизвестного, но имеющего произвольную степень, мы не знаем о корнях ничего, кроме того, что они существуют в некотором расширении основного поля. Разыскание и изучение решений произвольной нелинейной системы уравнений от нескольких неизвестных является, понятно, еще более сложной задачей, выходящей, впрочем, за рамки нашего курса и составляющей предмет особой математической науки — алгебраической геометрии. Мы же здесь ограничимся лишь случаем системы двух уравнений произвольной степени от двух неизвестных и покажем, что этот случай может быть сведен к случаю одного уравнения от одного неизвестного.

Займемся сперва вопросом о существовании общих корней у двух многочленов от одного неизвестного. Пусть даны многочлены

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n,$$
$$g(x) = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + ... + b_{s-1} x + b_s$$

над полем P, причем $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0.$

Из результатов предшествующей главы без труда вытекает, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ тогда и только тогда обладают общим корнем в некотором расширении поля P, если они не являются взаимно простыми. Таким образом, вопрос о существовании общих корней у данных многочленов может быть решен применением к ним алгоритма Евклида.

Сейчас мы укажем другой метод для получения ответа на этот вопрос. Пусть P будет некоторое такое расширение поля $\overline{P}$, в котором $f(x)$ имеет n корней $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ а $g(x)$ имеет s корней $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$; в качестве $\overline{P}$ можно взять поле разложения для произведения $f(x)g(x)$. Элемент

$$R(f, g) = a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j) \tag{4.17}$$

поля $\overline{P}$ называется результантом многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Очевидно, что $f(x)$ и $g(x)$ тогда и только тогда обладают в $\overline{P}$ общим корнем, если $R(f, g) = 0$. Так как

$$g(x) = b_0 \prod_{j=1}^{s} (x - \beta_j) \tag{4.18}$$

и поэтому

$$g(\alpha_i) = b_0 \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j),$$

то результант $R(f,g)$ может быть записан также в виде

$$R(f,g) = a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) \tag{4.19}$$

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ используются в определении результанта не симметричным образом. Действительно,

$$R(g,f) = b_0^n a_0^s \prod_{j=1}^{s} \prod_{i=1}^{n} (\beta_j - \alpha_i) = (-1)^{ns} R(f,g). \tag{4.20}$$

В соответствии с (3) $R(g,f)$ можно записать в виде

$$R(g,f) = b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j) \tag{4.21}$$

Выражение (4.18) для результанта требует знания корней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и поэтому практически бесполезно для решения вопроса о существовании у этих двух многочленов общего корня. Оказывается, однако, что результант $R(f,g)$ может быть представлен в виде многочлена от коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_s$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Возможность такого представления легко вытекает из результатов предшествующего параграфа. В самом деле, формула (4.18) показывает, что результант $R(f,g)$ является симметрическим многочленом от двух систем неизвестных: системы $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ и системы $\beta_1, \beta_2, ... \beta_s$ Он представим поэтому, как доказано в конце предшествующего параграфа, виде многочлена от элементарных симметрических многочленов по этим двум системам неизвестных, т. е., ввиду формул Вьета, в виде многочлена от частных $\frac{a_j}{a_0}, i = 1,2,...,n,$ и $\frac{b_j}{b_0}, j = 1,2,...,s$; множитель a_0^s, b_0^n, включенный в (4.18), освобождает полученное выражение от a_0 и b_0 в знаменателях. Впрочем, было бы затруднительным разыскивать выражение результанта через коэффициенты при помощи методов, изложенных в предшествующих параграфах, и мы воспользуемся иным приемом.

Выражение для результанта многочленов (4.17), которое мы найдем, будет годно для любой пары таких многочленов. Мы будем считать, точнее говоря, что система корней

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_s \tag{4.22}$$

многочленов (4.17) является системой $n+s$ независимых неизвестных, т. е. системой $n+s$ элементов, алгебраически независимых над полем P.
Мы получим выражение для результанта, которое, рассматриваемое как многочлен от неизвестных (4.22) (после замены по формулам Вьета коэффициентов через корни), будет равно правой части равенства (4.18), также рассматриваемой как многочлен от неизвестных (4.22).

Понимая равенство именно в смысле такого тождественного равенства относительно системы неизвестных (4.22), мы докажем, что результант $R(f,g)$ многочленов (4.17) равен следующему определителю порядка $n+s$:

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & \\ . & . & . & . & . & . \\ & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_s & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_s & \\ . & . & . & . & . & . \\ & & b_0 & b_1 & \dots & b_s \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} s \quad строк \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \quad строк \end{matrix}$$

(на свободных местах стоят нули). Строение этого определителя достаточно ясно; мы отметим лишь, что на его главной диагонали стоит s раз коэффициент a_0 и затем n раз коэффициент b_s.

Для доказательства нашего утверждения мы двумя способам вычислим произведение $a_0^s b_0^n DM$, где M есть следующий вспомогательный определитель порядка $n+s$:

$$M = \begin{vmatrix} \beta_1^{n+s-1} & \beta_2^{n+s-1} & \dots & \beta_s^{n+s-1} & \alpha_1^{n+s-1} & \alpha_2^{n+s-1} & \dots & \alpha_n^{n+s-1} \\ \beta_1^{n+s-2} & \beta_2^{n+s-2} & \dots & \beta_s^{n+s-2} & \alpha_1^{n+s-2} & \alpha_2^{n+s-2} & \dots & \alpha_n^{n+s-2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \dots & \beta_s^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_s & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

M является определителем Вандермонда и поэтому равен, произведению разностей элементов его предпоследней строки, причем из всякого предшествующего элемента- вычитается любой следующий элемент. Таким образом,

$$M = \prod_{1 \le i < j \le s} (\beta_i - \beta_j) \cdot \prod_{j=1}^{s} \prod_{i=1}^{n} (\beta_j - \alpha_i) \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j) \tag{4.23}$$

и поэтому, ввиду (4.20),

$$a_n^s b_0^n DM = D \cdot \dot{R}(g, f) \cdot \prod_{1 \le i < f \le s} (\beta_i - \beta_f) \cdot \prod_{1 \le i < j \le s} (\alpha_i - \alpha_j). \tag{4.24}$$

Вычислим, с другой стороны, произведение DM на основании теоремы об определителе произведения матриц. Перемножая соответствующие матрицы и учитывая, что все α являются корнями для $f(x)$, а все β — корнями для $g(x)$, мы получим:

$$DM = \begin{vmatrix} \beta_1^{s-1} f(\beta_1) & \beta_2^{s-1} f(\beta_2) & \dots & \beta_s^{s-1} f(\beta_s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1^{s-2} f(\beta_1) & \beta_1^{s-2} f(\beta_2) & \dots & \beta_s^{s-1} f(\beta_s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \beta_1 f(\beta_1) & \beta_2 f(\beta_2) & \dots & \beta_s f(\beta_s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f(\beta_1) & f(\beta_2) & \dots & f(\beta_s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1^{n-1} g(\alpha_1) & \alpha_2^{n-1} g(\alpha_2) & \dots & \alpha_n^{n-1} g(\alpha_n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1^{n-2} g(\alpha_1) & \alpha_2^{n-2} g(\alpha_2) & \dots & \alpha_2^{n-2} g(\alpha_n) \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 g(\alpha_1) & \alpha_2 g(\alpha_2) & \dots & \alpha_n g(\alpha_n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g(\alpha_1) & g(\alpha_2) & \dots & g(\alpha_n) \end{vmatrix}.$$

Применяя теорему Лапласа, вынося затем общие множители из столбцов определителей и вычисляя остающиеся определители как определители Вандермонда, мы получим:

$$a_0^s b_0^n DM = a_0^s b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j) \cdot \prod_{1 \le i < j \le s} (\beta_i - \beta_j) \cdot \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) \cdot \prod_{1 \le i < j \le s} (\alpha_i - \alpha_j)$$

или, используя (3) и (5),

$$a_0^s b_0^n DM = R(f,g)R(g,f) \cdot \prod_{1 \le i < j \le s} (\beta_i - \beta_j) \cdot \prod_{1 \le i < j \le s} (\alpha_i - \alpha_j). \tag{4.25}$$

Мы получаем, что правые части равенств (4.24) и (4.25), рассматриваемые как многочлены от неизвестных (4.22), равны между собой. Обе части полученного равенства можно сократить на общие множители, не равные тождественно нулю. Общий множитель $R(g,f)$ не равен нулю: так как $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$ по условию, то достаточно подобрать для неизвестных (4.22) не равные друг другу значения (в основном поле или в некотором его расширении), чтобы из (4.20) получить отличное от нуля значение для многочлена $R(g,f)$. Так же доказывается, что и другие два общих множителя отличны от нуля. Сокращая на все эти общие множители, мы приходим к равенству

$$R(f,g) = D, \tag{4.26}$$

которое и требовалось доказать.

Откажемся теперь от требования, чтобы старшие коэффициенты многочленов (4.17) были отличны от нуля. Об истинных степенях этих многочленов, можно, следовательно, лишь утверждать, что они не больше их «формальных» степеней n и, соответственно, s. Выражение (4.18) для результанта не имеет теперь смысла, так как рассматриваемые многочлены имеют, возможно, меньше корней, чем n или s. С другой стороны, определитель (4.23) и теперь может быть написан, и так как уже доказано, что при $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ этот определитель равен результанту, то и в нашем общем случае назовем его результантом многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и обозначим через $R(f,g)$.

Теперь уже нельзя, однако, рассчитывать на то, что равенство результанта нулю равносильно существованию у наших многочленов общего корня. Действительно, если $a_0 = 0$ и $b_0 = 0$, то $R(f,g) = 0$ независимо от того, обладают ли многочлены f и g общими корнями или нет. Оказывается, однако, что этот случай будет единственным, когда из равенства результанта нулю нельзя вывести заключение о существовании у данных многочленов общих корней1). Именно, справедлива следующая теорема:

Если даны многочлены (4.17) с произвольными старшими коэффициентами, то результант (4.23) этих многочленов тогда и только тогда равен нулю, если эти многочлены обладают общим корнем или же если их старшие коэффициенты оба равны нулю.

Доказательство. Случай $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ уже рассматривался выше, а случай $a_0 = b_0 = 0$ предусмотрен в формулировке теоремы. Нам остается рассмотреть случай, когда один из старших коэффициентов многочленов (4.17), например a_0, отличен от нуля, а b_0 равно нулю.

Если $b_i = 0$ для всех $i, i = 0,1,...,s$, то $R(f,g) = 0$, так как определитель (4.23) содержит нулевые строки. В этом случае, однако, многочлен $g(x)$ равен нулю тождественно и поэтому имеет общие корни с $f(x)$. Если же $b_0 = b_1 = ... = b_{\kappa-1} = 0,$ но $b_\kappa \neq 0, \kappa \leq s,$ и если $\overline{g}(x) = b_\kappa x^{s-\kappa} + b_{\kappa+1} x^{s-\kappa-1} + ... + b_{s-1}x + b_s,$ то, заменяя в определителе (4.23) элементы $b_0, b_1, ..., b_{\kappa-1}$ нулями и применяя теорему Лапласа, мы придем, очевидно, к равенству

$$R(f,g) = a_0^\kappa R(f,\overline{g}). \tag{4.27}$$

Так как, однако, старшие коэффициенты обоих многочленов f и $\overline{g}$ отличны от нуля, то, по доказанному выше, равенство $R(f,\overline{g}) = 0$ необходимо и достаточно для существования общего корня у многочленов f и $\overline{g}$. С другой стороны, по (4.27), равенства $R(f,g) = 0$ и $R(f,g) = 0$ равносильны, а так как многочлены g и $\overline{g}$ имеют,

Определитель (4.23) равен нулю, конечно, и при $a_n = b_s = 0$. В этом случае, однако, многочлены (4.16) имеют общий корень 0. Понятно, одинаковые корни, то мы получаем, что и в рассматриваемом случае равенство нулю результанта

$R(f,g)$ равносильно существованию общего корня у многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Этим теорема доказана. Найдем результант двух квадратных многочленов

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2. \tag{4.28}$$

По (4.23)

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

или, вычисляя определитель разложением по первой и третьей строкам,

$$R(f,g) = (a_0b_2 - a_2b_0)^2 - (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1). \tag{4.29}$$

Так, если даны многочлены

$$f(x) = x^2 - 6x + 2, g(x) = x^2 + x + 5,$$

то, по (4.29), $R(f,g) = 233$, и потому эти многочлены не имеют общих корней. Если же даны многочлены

$$f(x) = x^2 - 4x - 5, g(x) = x^2 - 7x + 10,$$

то $R(f,g) = 0$, т. е. эти многочлены обладают общим корнем; этим корнем является число 5.

Исключение неизвестного из системы двух уравнений с двумя неизвестными. Пусть даны два многочлена f и g от двух неизвестных x и y с коэффициентами из некоторого поля P. Мы запишем эти многочлены по убывающим степеням неизвестного x:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a_0(y)x^\kappa + a_1(y)x^{\kappa-1} + \ldots + a_{\kappa-1}(y)x + a_\kappa(y), \\ g(x,y) &= b_0(y)x^l + b_1(y)x^{l-1} + \ldots + b_{l-1}(y)x + a_l(y); \end{aligned}$$

коэффициенты будут многочленами из кольца $P(y)$. Найдем результант многочленов f и g, рассматриваемых как многочлены от x, и обозначим его через $R_x(f,g)$; он будет, ввиду (4.23), многочленом от одного неизвестного у с коэффициентами из поля P:

$$R_x(f,g) = F(y). \tag{4.30}$$

Пусть система многочленов (4.29) обладает в некотором расширении поля P общим решением $x=\alpha, y=\beta$. Подставляя в (4.29) вместо y значение β, мы получим два многочлена $f(x,\beta)$ и $g(x,\beta)$ от одного неизвестного x. Эти многочлены обладают общим корнем а, а поэтому их результант, равный, ввиду (4.30), $F(\beta)$, должен быть равным нулю, т. е. Р должно быть корнем результанта $R_x(f,g)$. Обратно, если результант $R_x(f,g)$ многочленов (4.29) обладает корнем β, то результант многочленов $f(x,\beta)$ и $g(x,\beta)$ равен нулю, т. е. либо эти многочлены обладают общим корнем, либо же оба их старших коэффициента равны нулю,

$$a_0(\beta) = b_0(\beta) = 0.$$

Этим путем разыскание общих решений системы многочленов (4.29) сведено к разысканию корней одного многочлена (4.30) от одного неизвестного y, т. е., как принято говорить, неизвестное x исключено из системы многочленов (4.29).

Следующая теорема отвечает на вопрос о степени того многочлена, который мы получаем после исключения одного неизвестного из системы двух многочленов с двумя неизвестными:

Если многочлены $f(x,y)$ и $g(x,y)$ имеют по совокупности неизвестных соответственно степени n и s, то степень многочлена $R_x(f,g)$ по неизвестному y не больше произведения ns, если, конечно, этот многочлен не равен нулю тождественно.

Прежде всего, если мы рассматриваем два многочлена от одного неизвестного со старшими коэффициентами, равными единице, то, по (4.17), их результант $R(f,g)$ является однородным многочленом от $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$, степени ns. Отсюда следует, что если в выражение результанта через коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_s$ входит член

$$a_1^{\kappa_1} a_2^{\kappa_2} ... a_n^{\kappa_n} b_1^{l_1} b_s^{l_s}$$

и если весом этого члена будет названо число

$$\kappa_1 + 2\kappa_2 + ... + n\kappa_n + l_1 + 2l_2 + ... + sl_s,$$

то все члены выражения $R(f,g)$ через коэффициенты имеют один и тот же вес, равный ns. Это утверждение справедливо и в общем случае, для членов результанта (4.23), если весом члена $a_0^{\kappa_0} a_1^{\kappa_1} ... a_n^{\kappa_n} b_0^{l_0} b_s^{l_s}$ будет названо число

$$0 \cdot \kappa_0 + 1 \cdot \kappa_1 + ... + n\kappa_n + 0 \cdot l_0 + 1 \cdot l_1 + ... + sl_s. \tag{4.31}$$

Действительно, заменяя в членах определителя (4.23) множители a_0 и b_0 единицей, мы приходим к уже рассмотренному случаю, однако показатели при этих множителях входят в (4.31) с коэффициентами 0.

Запишем теперь многочлены f и g в следующем виде:

$$f(x,y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + ... + a_n(y),$$
$$g(x,y) = b_0(y)x^s + b_1(y)x^{s-1} + ... + b_s(y).$$

Так как n есть степень $f(x,y)$ по совокупности неизвестных, то степень коэффициента $a_r(y), r = 0,1,2,...,n$ не может превосходить его индекс r; это же верно и для $b_r(y)$. Отсюда следует, что степень каждого члена результанта $R_x(f,g)$ не больше веса этого члена, т. е. она не больше числа ns, что и требовалось доказать.

Примеры.

1. Найти общие решения системы многочленов

$$f(x,y)=x^2y+3xy+2y+3,$$
$$g(x,y)=2xy-2x+2y+3.$$

Исключим из этой системы неизвестное x, для чего перепишем ее в виде

$$\left.\begin{aligned} f(x,y)&=y\cdot x^2+(3y)\cdot x+(2y+3),\\ g(x,y)&=(2y-2)x+(2y+3); \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

тогда

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix} y & 3y & 2y+3 \\ 2y-2 & 2y+3 & 0 \\ 0 & 2y-2 & 2y+3 \end{vmatrix}=2y^2+11y+12.$$

Корнями результанта будут числа $\beta_1=-4, \beta_2=-\frac{3}{2}$ неизвестного y старшие коэффициенты многочленов (4.32) не обращаются в нуль, поэтому каждое из них вместе с некоторым значением для x составляет решение заданной системы многочленов. Многочлены

$$f(x,-4)=-4x^2-12x-5,$$
$$g(x,-4)=-10x-5$$

обладают общим корнем $\alpha_1=-\frac{1}{2}$. Многочлены

$$f(x,-\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x,$$
$$g(x,-\frac{3}{2})=-5x$$

имеют общий корень $\alpha_2=0$. Таким образом, заданная система многочленов имеет два решения:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \beta_1 = -4 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 0, \beta_2 = -\frac{3}{2}.$$

2. Исключить одно неизвестное из системы многочленов

$$f(x, y) = 2x^3 y - xy^2 + x + 5,$$
$$g(x, y) = x^2 y^2 + 2xy^2 - 5y + 1.$$

Так как оба многочлена имеют по неизвестному y степень 2, тогда как у одного из них по неизвестному x степень 3, то целесообразно исключить y. Перепишем систему в виде

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= (-x)\cdot y^2 + (2x^3)\cdot y + (x+5), \\ g(x,y) &= (x^2+2x)y^2 - 5y + 1 \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

и найдем ее результант, применяя формулу (4.28):

$$R_y(f,g) = ((-x)\cdot 1 - (x+5)(x^2+2x))^2 -$$
$$-((-x)(-5) - 2x^3(x^2+2x))(2x^3\cdot 1 - (x+5)(-5)) =$$
$$= 4x^8 + 8x^7 + 11x^6 + 84x^5 + 161x^4 + 154x^3 + 96x^2 - 125x.$$

Одним из корней результанта является 0. Однако при этом значении неизвестного x оба старших коэффициента многочленов (4.33) обращаются в нуль, причем, как легко видеть, многочлены $f(0, y)$ и $g(0, y)$ не имеют общих корней. У нас нет способа найти другие корни результанта. Можно утверждать лишь, что если бы мы их нашли (например, в поле разложения для $R_y(f, g)$, то ни один из них не обращал бы в нуль оба старших коэффициента многочленов (4.33) и поэтому каждый из этих корней вместе с некоторым значением для y (одним или даже несколькими) составлял бы решение заданной системе многочленов.

Существуют методы, позволяющие последовательно исключать неизвестные и из систем с произвольным числом многочленов и неизвестных. Эти методы, однако, слишком громоздки и поэтому не могут быть включены в наш курс.

Дискриминант. По аналогии с вопросом, который привел нас к понятию результанта, можно поставить вопрос об условиях, при которых многочлен $f(x)$ степени n из кольца $P(x)$ обладает кратными корнями. Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0,$$

и пусть в некотором расширении поля P этот многочлен имеет корни $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Очевидно, что среди этих корней тогда и только тогда будут равные, если равно нулю произведение

$$\begin{aligned}
&\Delta = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_1)... \times \\
&\times(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)...(\alpha_n - \alpha_2) \times \\
&.. \\
&\times(\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (\alpha_i - \alpha_j)
\end{aligned}$$

или, что то же, если равно нулю произведение

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{n \geq i > j \geq 1} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

называемое дискриминантом многочлена $f(x)$.

В отличие от произведения Δ, могущего менять знак при перестановке корней, дискриминант D симметричен относительно $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, и поэтому может быть выражен через коэффициенты многочлена $f(x)$. Для разыскания этого выражения в предположении, что поле P имеет характеристику нуль, можно воспользоваться связью, существующей между дискриминантом многочлена $f(x)$ и результантом этого многочлена и его производной. Наличие такой связи естественно ожидать: мы знаем, что многочлен тогда и только тогда обладает кратными корнями, если у него есть общие корни с производной $f'(x)$, а поэтому тогда и только тогда $D = 0$, если

$$R(f, f') = 0$$
.

По формуле (3) настоящего параграфа

$$R(f,f')=a_0^{n-1}\prod_{i=1}^{n}f'(\alpha_i)$$

.

Дифференцируя равенство

$$f(x)=a_0\prod_{\kappa=1}^{n}(x-\alpha_\kappa),$$

мы получаем:

$$f'(x)=a_0\sum_{\kappa=1}^{n}\prod_{j\neq\kappa}(x-\alpha_j).$$

После подстановки сюда α_i вместо x все слагаемые, кроме $i-$го, обращаются в нуль и поэтому

$$f'(\alpha_i)=a_0\prod_{j\neq}(\alpha_i-\alpha_j),$$

откуда

$$R(f,f')=a_0^{n-1}\cdot a_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j).$$

В это произведение для любых i и j, $i>j$, входят два множителя: $\alpha_i-\alpha_j$ и $\alpha_j-\alpha_i$. Их произведение равно $(-1)\cdot(\alpha_i-\alpha_j)^2$, а так как существует $\dfrac{n(n-1)}{2}$ пар индексов i,j, удовлетворяющих неравенствам $n\geq i>j\geq 1$, то

$$R(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-1}\prod_{n\geq i>j\geq 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0D.$$

Пример. Найдем дискриминант квадратного трехчлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Так как $f'(x) = 2ax + b,$ то

$$R(f, f') = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = a(-b^2 + 4ac).$$

В нашем случае $\frac{n(n-1)}{2} = 1$ и поэтому

$$D = -a^{-1}R(f, f') = b^2 - 4ac.$$

Это совпадает с тем, что в школьной алгебре называют обычно дискриминантом квадратного уравнения.

Другой способ разыскания дискриминанта состоит в следующем. Составим определитель Вандермонда из степеней корней $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & ... & \alpha_n^2 \\ . & . & . & . \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & ... & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (\alpha_i - \alpha_j) = \Delta,$$

а поэтому дискриминант равен квадрату этого определителя, умноженному на a_0^{2n-2}. Умножая этот определитель на его транспонированный по правилу умножения матриц и вспоминая определенные в предыдущем параграфе степенные суммы, мы получим:

$$D = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & ... & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & ... & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & ... & s_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & ... & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad (4.34)$$

где s_k есть сумма k - х степеней корней $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Пример. Найдем дискриминант кубичного многочлена | $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. По (4.34)

$$D = \begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}.$$

Как мы знаем из предыдущего параграфа,

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 = -a, \\ s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2 - 2b, \\ s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -a^3 + 3ab - 3c. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Ньютона, мы найдем также, ввиду $\sigma_4 = 0$, что

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 = a^4 - 4a^2b + 4ac - 2b^2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} D &= 3s_2s_4 + 2s_1s_0s_3 - s_2^3 - s_1^2s_4 - 3s_3^2 = \\ &= a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c + 18abc - 27c^2. \end{aligned}$$

В частности, при $a = 0$, т. е. для неполного кубичного многочлена, мы получаем

$$D = -4b^3 - 27c^2$$

4.3 Второе доказательство основной теоремы алгебры комплексных чисел

Доказательство основной теоремы, было совершенно неалгебраическим. Мы хотим изложить сейчас другое доказательство, использующее большой алгебраический аппарат - так, в нем существенно используется основная теорема о симметрических многочленах, а также теорема о существовании поля разложения для всякого многочлена, - в то время как неалгебраическая часть этого доказательства является минимальной и сведена к одному весьма простому утверждению.

Заметим сначала, о модуле старшего члена многочлена. Считая коэффициенты многочлена $f(x)$ действительными и полагая $\kappa = 1$, мы получаем из этой леммы такое следствие:

При действительных значениях x, достаточно больших по абсолютной величине, знак многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами совпадает со знаком его старшего члена.

Отсюда вытекает следующий результат:

Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

В самом деле, пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

причем все коэффициенты действительны. Ввиду нечетности n старший член a_0x^n

имеет при положительных и отрицательных значениях л: разные знаки, а потому, как доказано выше, при положительных и отрицательных значениях x, достаточно больших по абсолютной величине, многочлен $f(x)$ также будет иметь разные знаки. Существуют, следовательно, такие действительные значения x, например a и b, что

$$f(a) < 0, f(b) > 0.$$

Из курса анализа известно, однако, что многочлен (т. е. целая рациональная функция) $f(x)$ является функцией непрерывной, а поэтому, ввиду одного из основных свойств непрерывных функций, при некоторых действительных значениях x, заключенных между a и b, $f(x)$ принимает любое заданное значение, промежуточное между $f(a)$ и $f(b)$. Существует, в частности, такое α лежащее между a и b, что $f(\alpha) = 0$.

Опираясь на этот результат, мы докажем теперь следующее утверждение: всякий многочлен произвольной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.

Пусть, в самом деле, дан многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами, имеющий степень $n = 2^{\kappa} q$, где q — нечетное число. Так как случай $\kappa = 0$ уже рассмотрен выше, мы будем полагать $\kappa > 0$, т. е. считать п четным числом, и будем вести доказательство индукцией по κ, предполагая, что наше утверждение уже доказано для всех многочленов с действительными коэффициентами, степень которых делится на $2^{\kappa-1}$, но не делится на $2^{\kappa 1}$).

Пусть P будет полем разложения для многочлена $f(x)$ над полем комплексных чисел и пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ будут корни $f(x)$, содержащиеся в поле P. Выберем произвольное действительное число с и возьмем элементы поля P, имеющие вид

$$\beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j), i < j. \tag{4.35}$$

Эта степень может, следовательно, быть даже больше n.

Число элементов β_{if} .у равно, очевидно,

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^{\kappa} q(2^{\kappa} q - 1)}{2} = 2^{\kappa-1} q(2^{\kappa} q - 1) = 2^{\kappa-1} q' \tag{4.36}$$

где q' есть нечетное число.

Построим теперь многочлен $g(x)$ из кольца $P(x)$, имеющий своими корнями все эти элементы β_{if} и только их:

$$g(x) = \prod_{l,j,i<f} (x - \beta_{if}). \tag{4.37}$$

Коэффициенты этого многочлена являются элементарными симметрическими многочленами от β_{if}. Они будут, следовательно, ввиду (4.35), многочленами от $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$,, с действительными коэффициентами (так как число c действительное), причем даже симметрическими многочленами. В самом деле, транспозиция любых двух α, например α_κ и влечет за собой лишь перестановку в системе всех β_{if} всякое $\beta_{\kappa f}$ где f отлично от κ и от l, превращается в β_{ij} и обратно, в то время как $\beta_{\kappa l}$ и все β_{ij} при i и j, отличных от κ и l, остаются на месте. Однако коэффициенты многочлена $g(x)$ не меняются при перестановке его корней.

Отсюда следует, ввиду основной теоремы о симметрических многочленах, что коэффициенты многочлена $g(x)$ будут многочленами (с действительными коэффициентами) от коэффициентов заданного многочлена $f(x)$ и поэтому сами будут действительными числами. Степень этого многочлена, равная числу корней β_{if}, делится, по (4.36), на $2^{\kappa-1}$, но не делится на 2^{κ}. Поэтому, по предположению индукции, хотя бы один из корней β_{if} многочлена $g(x)$ должен быть комплексным числом.

Таким образом, при всяком выборе действительного числа с можно указать такую пару индексов i, j, где $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$,что элемент $\alpha_i \alpha_f + c(\alpha_i + \alpha_f)$ является комплексным числом - напомним, что поле P содержит поле комплексных чисел в качестве подполя. Понятно, что при другом выборе числа c ему будет соответствовать в указанном смысле, вообще говоря, другая пара индексов. Однако существует бесконечно много различных действительных чисел c, в то время как в нашем распоряжении находится лишь конечное число различных пар i, j. Отсюда следует, что можно выбрать такие два различных действительных числа c_1 и c_2, $c_1 \ne c_2$, что им соответствует одна и та же пара индексов i, f, для которых

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + c_1(\alpha_i + \alpha_j) = a, \\ \alpha_i \alpha_j + c_2(\alpha_i + \alpha_j) = b \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

являются комплексными числами.

Из равенств (3) вытекает:

$$(c_1 - c_2)(\alpha_i + \alpha_j) = a - b,$$

откуда следует:

$$\alpha_i + \alpha_j = \frac{a-b}{c_1 - c_2},$$

т. е. эта сумма оказывается комплексным числом. Отсюда и хотя бы из первого из равенств (4.38) следует, что произведение $\alpha_i\alpha_j$ также будет комплексным числом. Таким образом, элементы α_i и α_j оказываются корнями квадратного уравнения $x^2 - (\alpha_i + \alpha_j)x + \alpha_i\alpha_j = 0$ с комплексными коэффициентами и поэтому, как вытекает из формулы для решения квадратного уравнения с комплексными коэффициентами, они сами должны быть комплексными числами. Мы нашли, следовательно, среди корней многочлена $f(x)$ даже два комплексных корня и этим доказали наше утверждение.

Для полного доказательства основной теоремы остается рассмотреть случай многочлена с произвольными комплексными коэффициентами. Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$$

будет такой многочлен. Возьмем многочлен

$$\bar{f}(x) = \bar{a}_0x^n + \bar{a}_1x^{n-1} + ... + \bar{a}_n,$$

полученный из $f(x)$ заменой всех коэффициентов сопряженными комплексными числами, и рассмотрим произведение

$$F(x) = f(x)\bar{f}(x) = b_0x^{2n} + b_1x^{2n-1} + ... + b_\kappa x^{2n-\kappa} + ... + b_{2n},$$

где, очевидно,

$$b_\kappa = \sum_{i+j=\kappa} a_i\bar{a}_j, \kappa = 0,1,2,...,2n.$$

Опираясь на известные нам свойства сопряженных комплексных чисел, мы получаем, что

$$\bar{b}_\kappa = \sum_{i+j=\kappa} \bar{a}_i a_j = b_\kappa,$$

т. е. все коэффициенты многочлена $F(x)$ оказываются действительными.

Отсюда, как доказано выше, следует, что многочлен $F(x)$ обладает хотя бы одним комплексным корнем β,

$$F(\beta) = f(\beta)\bar{f}(\beta) = 0,$$

т. е. или $f(\beta)=0$, или же $\bar{f}(\beta)=0$. В первом случае теорема доказана. Если же имеет место второй случай, т. е.

$$\bar{a}_0\beta^n + \bar{a}_1\beta^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n = 0,$$

то, заменяя все входящие сюда комплексные числа им сопряженными (что, как мы знаем, не нарушает равенства), мы получим:

$$f(\overline{\beta}) = a_0\overline{\beta}^n + \alpha_1\overline{\beta}^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

т. е. $f(x)$ имеет своим корнем комплексное число $\overline{\beta}$. Доказательство основной теоремы закончено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение нестандартных заданий, задач повышенной сложности позволяет развивать логику мышления, а также повышает шансы учащегося на успешную сдачу экзамена по математике и более легкое обучение в ВУЗе. Одним из методов решения таких задач является метод применения симметрических многочленов. В данной диссертации были изучены основные понятия и факты теории симметрических многочленов от двух, трех и нескольких переменных и применение их в решении уравнений, неравенств, доказательстве тождеств и систем уравнений.

Во введении дается обоснование актуальности темы исследований и обзор основных результатов по вопросам, рассматриваемым в диссертации. Кроме того, во введении сформулированы цели диссертации и описана ее структура.

В первой части основного раздела рассмотрено понятие симметрического многочлена от двух переменных, а также применение теории симметрических многочленов от двух переменных к решению задач повышенной сложности.

Во второй части работы рассмотрено понятие симметрического многочлена от трех переменных, а также применение теории симметрических многочленов от трех переменных к решению задач повышенной сложности.

В третьей части рассмотрено понятие антисимметрического многочлена от трех переменных, а также применение теории антисимметрических многочленов от трех переменных к решению задач повышенной сложности.

В четвертой части рассмотрено понятие симметрического многочлена от нескольких переменных, а также применение теории симметрических многочленов от нескольких переменных к решению задач повышенной сложности.

Рассмотрен метод, основанный на свойствах симметрических многочленов. Рассмотрены задачи, предлагаемые на олимпиадах для учителей математики. Решение систем алгебраических уравнений 3-ей и высших степеней. Выражена связь некоторого функционального уравнения с тригонометрическими функциями;

Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области аналитической теории чисел и могут найти применение в различных разделах теории чисел и математического анализа.

Исследована теория симметрических многочленов от трех переменных. Определена по аналогии, симметрическая функция от нескольких переменных, которая не изменяет своего значения при произвольных перестановках своих аргументов. Изучен алгоритм нахождения формулы Виета. Получены обобщения и выводы теоремы Ньютона.

Показана полная красота закономерности симметрических многочленов.

Так как математики издавна стремились к красоте математических формул и справедливо считали, что красивая формула отличается от некрасивой тем, что в красоте больше симметрии.

Данная работа посвящена изучению возможностей применения для решения различных алгебраических задач метода, основанного на свойствах симметрических многочленов. Применение для решения олимпиадных задач повышенной трудности.

Рассмотрены методы, основанные на свойствах симметрических многочленов. Рассмотрены задачи, предлагаемые на олимпиадах для учителей математики. Решение систем алгебраических уравнений 3-ей и высших степеней. Выражена связь некоторого функционального уравнения с тригонометрическими функциями;

К сожалению, такой раздел алгебры как теория симметрических многочленов выходит за рамки школьной программы, хотя минимальные знания по этой теме могут быть весьма полезны при решении целого ряда задач. Например, решение алгебраических уравнений высших степеней и их систем, разложение многочленов на множители, доказательство тождеств и др.

При решении систем алгебраических уравнений в школьном курсе, как правило, предлагается использовать наиболее универсальный метод исключения переменных. Однако при решении систем уравнений высших степеней этим методом могут возникнуть ситуации, приводящие к решению общих уравнений 3-й и более степени, что само по себе является непростой задачей. Метод, основанный на свойствах симметрических многочленов, не является столь универсальным при решении систем как первый метод, но при выполнении определенных условий приводит к решению уравнений, степени которых ниже исходных. Кроме того, данный метод позволяет решать и другие алгебраические задачи.

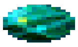
Таким образом, основная задача моей диссертации – изучение основных понятий и фактов теории симметрических многочленов от трех переменных и применение их в решении уравнений, неравенств, доказательстве тождеств и систем уравнений достигнута.

Приложение А

Уравнения высших степеней (возвратные)

Задача: Решить уравнение  .

Решение: Это уравнение имеет в левой части возвратный многочлен, т.е. является возвратным и имеет четную степень 4. Преобразуем его левую часть:

Так как  не является корнем исходного уравнения, то мы приходим к квадратному уравнению относительно : .

Решим его.

Таким образом, для нахождения корней первоначального уравнения мы

получаем две системы:

Решая их, получаем четыре корня исходного уравнения:

Ответ: 2; .

Задача 2: Решить уравнение

Решение: Это возвратное уравнение нечетной степени 11.

Согласно теореме разделим его левую часть на :

Таким образом, мы получили два уравнения(т.е. систему уравнений):

Первое имеет корень . Второе - представляет собой возвратное уравнение, левую часть которого мы преобразуем:

Так как не является корнем исходного уравнения, то мы приходим к следующему уравнению:

Вынесем σ за скобки:

или

Решим биквадратное уравнение, заменяя

,

Итак, мы получили пять корней:

Следовательно, мы имеем пять уравнений:

Решая их и учитывая корень , получим одиннадцать корней исходного уравнения:

Ответ:

Неравенства и тождества

Задача : Доказать, что для любых положительных чисел справедливо неравенство .

Доказательство:

Так как числа положительны, то . Поэтому неравенства , можно перемножить.

Мы получили . Сокращая на положительную величину ,

мы и получаем требуемое неравенство . Равенство ,достигается лишь в том случае, если .

Решение систем уравнений с тремя неизвестными

3. Решить систему уравнений

Решение:

Это – симметрическая система уравнений. Положим ,

, . Поскольку , то

, и, следовательно, заданная система имеет следующий вид:

Отсюда мы получаем , , . Эта система полностью эквивалентна исходной системе. Для ее решения необходимо найти корни кубического уравнения :

,

Вынесем за скобки. Получим: , или ,

Получили три корня, а решения первоначальной системы получаются путем перестановок этих корней.

Ответ: (0;1;1), (1;1;0), (1;0;1).

Здесь приведены задачи краткая схема решения задач напечатанных 1 января 2014 г. № 1 (214) в ҮСТАЗДАР ГАЗЕТІ, стр.4.

1. Найти вещественные корни уравнения:
2.

(1)

Решение. Положим , тогда из (1) следует, что

(2)

Следовательно, вещественные (рациональные) корни этого многочлена будем искать среди делителей числа 9, т.е. среди чисел . Отсюда следует, что число -1 будет корнем многочлена (2).

После деления на обе части (2), получим

Второй множитель для чисел отличен от ноля. (проверьте!) Следовательно, рациональным корнем уравнения (2) окажется - единственный вещественный корень уравнения (1), т.е.

.

2. Докажите, что дробь несократима при любом

Решение. Если - несократима, то и дробь также несократима. Следовательно, после элементарных преобразований получим

.

3. Найдите все двузначные числа,каждое из которых равно сумме квадрата числа его десятков и куба его единиц.

Решение. Имеем . Легко видеть, что . Для нет решения уравнения . (т.к.). Для единственный возможный случай . Тем самым имеем два решения задачи: ; .

4. Решите систему уравнений

(1)

Решение. Добавим к обеим сторонам каждого уравнения по 1 и получим систему

(2)

Умножая все три равенства, получим

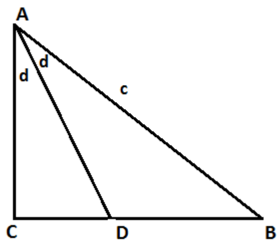
.

Теперь разделим поочередно полученное равенство на каждое из уравнений (2). Имеем , , и

.

5. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна , а

биссектриса одного из острых углов равна .



Решение. Дано: , , , - биссектриса

Пусть . Из треугольника следует, что . Из треугольника

(т.к.).

Сравнивая левые и правые части, получим

с учетом формулы получим квадратное уравнение

.

Решая квадратное уравнение относительно , получим

; ; .

Заметим, что , тогда , поэтому . Следовательно, второе решение не подходит. Следовательно, . Тогда ,

, ибо . Таким образом, из (1) . ,

, отсюда следует, что .

Замечание. Мы фактически решили систему трех нелинейных алгебраических уравнений:

(по условию)

6. Вычислите определенный интеграл при .
Решение.
Выполним замену

.

Следовательно,

.

Замена .

Поэтому .

Отсюда .

Замечание. - площадь круга с центром в точке с радиусом .

7. Решите уравнение: в вещественных числах

Решение. Положим (при очевидно). Тогда

.

Отсюда . Итак, решениями нашего равенства будут:

. В частности,

8. Для каких верно равенство:

Решение. Решение этой задачи напечатано 1 января 2014 г. № 1 (214) в ҮСТАЗДАР ГАЗЕТІ, стр.4. Здесь приведём краткую схему решения задачи. Пусть тройка чисел удовлетворяют нашему равенству. При этом, очевидно, что и согласно известной формулы , получим равенство . Отсюда следует, что решением нашей задачи являются тройка чисел, удовлетворяющих равенству:

. В частности, при получим формулу для любого треугольника. В других случаях наша формула выражает алгебраические выражения,
и их можно связать с геометрическими фигурами (многоугольниками).

9. Докажите, что для всех натуральных чисел ,

Решение. На основании неравенство о «среднем» имеем следующие неравенства:

Перемножая все неравенства, получим решение нашей задачи. Заметьте, что здесь неравенство строгое, так как одновременно наши неравенства не обращаются в равенства.

10. Докажите, что для любого натурального верно равенство

Решение. Прежде всего, докажем что имеет место равенство

(1)

для любого вещественного числа , где целая часть числа , и . Покажем равенство (1). 1) Пусть тогда пологая имеем равенства:

а)

б)

в)

В этом случае равенство (1) получено. 2) Пусть Тогда произведём замену получим . Следовательно, получим

а)

б)

в)

Из этих равенств получим (1). Решение нашей задачи следует из следующих цепочки равенств: для

.

Просуммируем обе части по всем и получим решение задачи.

Задачи и решения предложены профессором ИнЕУ Исмоиловым Д. И.

На правах рукописи

Ахметов Руслан Сергеевич

Симметрические многочлены от трех переменных и приложения к задачам повышенной сложности

6М060100 - Математика

Реферат
диссертации на соискание академической
степени магистра естественных наук

Республика Казахстан
Павлодар, 2014

Работа выполнена в Инновационном Евразийском университете

Научный руководитель:	доктор ф.-м. наук, профессор Исмоилов Д.И.
Официальный оппонент:	кандидат ф.-м.н, доцент ПГУ Павлюк И.И.

Защита состоится «____» __________ 20___ г. в «____» ч. на заседании Государственной Аттестационной Комиссии по защите магистерских диссертаций на соискание академической степени магистра в Инновационном Евразийском университете по адресу г.Павлодар, ул. М.Горького, 102/4

Секретарь государственной
аттестационной комиссии
магистр информатики С.К.Асылбекова

Аңдатпа

Үш айнымалысы бар симметриялық көпмүшелер

Мақалада симметриялық көпмүшенің шешімінің әдісі екі айнымалыға қарастырылады. Осы үлгінің бірнеше есептері осы мақалада көрсетіледі. Арасында математикалық олимпиадаларда ұсынылған есептерде бар.

Түйін сөздер: симметриялық көпмүше, маңғаз сомалар, Кошиның теңсіздкінің, ауқымның көпмүшесінің келтірімсіздкі, математикалық индукция.

Resume

The paper presents a method of solving symmetric polynomials in two variables. Several of these types of problems will be dealt with in this article. Among these tasks, there is a very hard, which were offered for Mathematical Olympiads.

Key words: symmetric polynomial, sedate sums, inequality of Cauchy, unled of circular polynomials, mathematical induction, Viet them

Актуальность темы

Данная работа посвящена изучению возможностей применения для решения различных алгебраических задач метода, основанного на теории о симметрических многочленов. Сама теория очень проста и она позволяет решать не только многие системы алгебраических уравнений, но и различные другие алгебраические задачи (решение иррациональных уравнений, доказательство тождеств и неравенств, разложение на множители и т.д.). Несколько задач этих типов будет разобраны в этой диссертации. Среди этих задач есть и весьма трудные, которые предлагались на математических олимпиадах. С помощью теории симметрических многочленов решение этих задач заметно упрощается и, что самое главное, проводится стандартным приёмом.

Цели и задачи исследования

Цель:

•исследовать теорию симметрических многочленов от двух переменных;

•Определить по аналогии, симметрическую функцию от нескольких переменных, которая не изменяет своего значения при произвольных перестановках своих аргументов;

• изучить нахождение формулы Виета;

• получить обобщения и выводы формулы Ньютона.

Научная новизна

Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

В результате исследования, автором самостоятельно

1) Рассмотрен метод, основанный на свойствах симметрических многочленов
2) Рассмотрены задачи, предлагаемые на олимпиадах для учителей математики. Решение систем алгебраических уравнений 3-ей и высших степеней*;*
3) Выражена связь некоторого функционального уравнения с тригонометрическими функциями;

Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области аналитической теории чисел и могут найти применение в различных разделах теории чисел и математического анализа.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Объем диссертации составляет 94 страницы.

Во введении дается обоснование актуальности темы исследований и обзор основных результатов по вопросам, рассматриваемым в диссертации.

Кроме того, во введении сформулированы цели диссертации и описана ее структура.

В первой части основного раздела рассмотрено понятие симметрического многочлена от двух переменных, а также применение теории симметрических многочленов от двух переменных к решению задач повышенной сложности.

Во второй части работы рассмотрено понятие симметрического многочлена от трех переменных, а также применение теории симметрических многочленов от трех переменных к решению задач повышенной сложности.

В третьей части рассмотрено понятие антисимметрического многочлена от трех переменных, а также применение теории антисимметрических многочленов от трех переменных к решению задач повышенной сложности.

В четвертой части рассмотрено понятие симметрического многочлена от нескольких переменных, а также применение теории симметрических многочленов от нескольких переменных к решению задач повышенной сложности.

Ключевые слова: *Ключевые слова: Симметрический многочлен, трехчлен, неравенство Коши, математическая индукция, теорема Виета, формулы Ньютона.*

Публикации по теме диссертации:

1. Ахметов Р.С.Геометрия превращения квадрата. Мұғалім.kz. Математика. Информатика. №2 (25)-2013

2. Ахметов Р.С., под редакцией проф. Исмоилова Д.И. Математический практикум 1 ч. "Ұстаздар газеті". Вып. . № 1 (214) от 1 января 2014 г.

3. Ахметов Р.С., под редакцией проф. Исмоилова Д.И. Математический практикум 1 ч. "Ұстаздар газеті". Вып. №1(214) от 27 марта 2014 г

4 Ахметов Р.С. Симметрические многочлены от двух переменных. Вестник ИнЕУ. Естественные науки. .Вып. №4