

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЖУМИРОВА ЖАМИЛЯ ЖУМАЕВНА

**НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К
РЕШЕНИЯМ ЗАДАЧ**

6М060100 Математика

Диссертация на соискание академической степени _____

**Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Исмоилов Додожон Исмоилович**

г.Павлодар, 2013 год

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Из истории квадратных трехчленов	
1.1 Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне, Древней Греции, Индии, в Европе 13- 17 вв.....	6
1.2 От видов квадратных уравнений в Средней Азии до современной записи.....	9
2. Квадратные уравнения и его корни. Квадратный трехчлен.	
2.1 Неполные квадратные уравнения: определения, общий вид, примеры	11
2.2 Формулы корней квадратного уравнения, их преобразования и краткая запись.....	13
2.3 Обычное использование теоремы Виета при решении квадратных уравнений.....	16
2.4 Квадратный трехчлен и его корни.....	19
2.5 Разложение квадратного трехчлена на множители.....	20
3. Классическое представление квадратичного трехчлена, их функции и графики.....	21
4. Нетрадиционный подход к изучению квадратных трехчленов	
4.1 Основные теоремы, следствия и утверждения нетрадиционного подхода к изучению квадратичных трехчленов.....	26
4.2 Применение к квадратным функциям от двух переменных формул поворота вокруг оси координат для упрощения.....	36
5. База задач по квадратным трехчленам решенных неординарным способом	
5.1 Тривиальные примеры решения квадратных трехчленов нетрадиционным методом.....	38
5.2 Использование нетрадиционного подхода к задачам на теорему Виета.....	44
5.3 Применение нетрадиционного метода решения квадратичного трехчлена к Героновым треугольникам.....	49
5.4 Применение нетрадиционного метода к многочленам.....	52
5.5 Некоторые задачи повышенной сложности. Тождество Исмоилова.....	56
5.6 Словесные задачи по квадратным трехчленам решенные нетрадиционным методом.....	60
Заключение.....	62
Список использованных источников.....	64
Приложение А. Историческая справка. Символика Виета.....	65
Приложение Б. Алгоритм разложения на квадратные уравнения уравнений второго порядка.....	66
Приложение В Пример на применение к квадратным функциям от двух переменных формул поворота вокруг оси координат для упрощения.....	67

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

Государственный общеобразовательный стандарт образования Республики Казахстан. Среднее общее образование. Основные положения. Издание официальное.

Настоящий стандарт разработан на основании нижеследующих нормативных правовых и концептуальных документов:

- Закон Республики Казахстан «Об образовании»;
- Закон Республики Казахстан «О языках в Республике Казахстан»;
- Государственная программа развития образования в Республике Казахстан на 2005-2010 годы;
- постановление Правительства Республики Казахстан от 02.09.1999 года № 1290 «О порядке разработки, утверждения и сроках действия государственных общеобразовательных стандартов».

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящей диссертации применяют следующие термины с соответствующими определениями:

Многочлен – это сумма одночленов.

Теорема Виета – сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение – свободному члену.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ называется квадратным уравнением.

Дискриминант – выражение вида $b^2 - 4ac$, где a, b, c коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

В уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ наибольшая степень переменной x – квадрат. Отсюда и название: квадратное уравнение.

Числа a, b, c – коэффициенты квадратного уравнения.

Неполные квадратные уравнения бывают трех видов: $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$; $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$; $ax^2 = 0$.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ – приведенное квадратное уравнение;

Квадратичным трехчленом от одного неизвестного $x \in R$ называют выражение вида: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, где $(a \neq 0)$

Уравнением Герона называется диофантовое уравнение вида $16S^2 = (a - b + c)(a + b - c)(b - a + c)(a + b + c)$.

Треугольником называют совокупность трех неколлинеарных точек, не лежащих по две на одной изотропной прямой, и трех попарно их соединяющих отрезков.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\forall$ - любой, который

$\exists$ - существует

$\Rightarrow$ - следует

∞ - бесконечно

$\sum$ - сумма

$\{$ - знак системы

$\rightarrow$ если..., то

R - множество действительных чисел

$\langle a, b, c, S \rangle$ - любой героновский треугольник.

$\cup$ - объединение

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕФЕРАТ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЯМ ЗАДАЧ

ЖУМИРОВОЙ ЖАМИЛИ ЖУМАЕВНЫ

г.Павлодар, 2013 год

Реферат

Объем диссертационной работы 68 страниц, работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, использованной литературы и приложения. Количество иллюстрации – 13, таблица 1, 26 использованных литературных источников.

В введении раскрыты цель, задачи, актуальность, гипотеза, предмет и объект диссертационной работы, а также новизна данной работы. Рассмотрена оценка современного состояния решаемой проблемы, обладающая научным характером. Даны основание и исходные данные диссертационной работы.

В первом разделе рассматривается история развития квадратных уравнений начиная с древних времен до средневековья, а именно квадратные уравнения в Древнем Вавилоне, Греции, Индии и т.д.

Во втором, рассмотрены квадратные уравнения и его корни, а также общий вид, формулы корней квадратного уравнения. Одним из пунктов данного раздела посвящен методам использования теоремы Виета при решении квадратных уравнений.

В третьем разделе дано классическое представление квадратичного трехчлена, а именно: определения, функции, графики, анализ поведения графиков.

Четвертый раздел рассматривает нетрадиционный подход к изучению квадратных трехчленов, а именно основные теоремы, следствия, утверждения с соответствующими доказательствами. Раздел дополнен графиками иллюстрирующие вид параболы при различных случаях дискриминанта и коэффициентов. В раздел также включен подробный пункт с применением к квадратным функциям от двух переменных формул поворота вокруг оси координат.

И в пятом разделе приведены примеры решения квадратных трехчленов, многочленов, задача Герона, и т.д. неординарным способом, представленных в виде различных примеров от тривиального типа до задач повышенной трудности, а также отдельным пунктом данного раздела является база из словесных задач решенные нетрадиционным методом.

В заключении подведены итоги данной работы, основанные на решении поставленных задач и цели. Дается полный анализ диссертационной работы и формируются выводы относительно проведенной работы.

Приложения представлены в виде некоторых таблиц связанных с темой диссертационной работы, а также дана некоторая небольшая историческая справка.

Перечень ключевых слов: уравнения, квадратные, многочлены, теоремы, утверждения, свойства, разложение, корни, дискриминант, коэффициенты, переменные, график, функции, кривая, касание.

Актуальность исследования: если рассмотреть квадратичный трехчлен как функцию, то можно сделать немало выводов не прибегая к комплексным числам, которые не всегда входят в школьную программу обучения математике. При исследовании квадратичного уравнения, мы сталкиваемся с квадратичным трехчленом, поведение которого следует изучить.

Цель исследования – исследовать квадратичный многочлен, а именно трехчлен как функцию, на основе использования знака дискриминанта и коэффициента. Вывести общую формулу. Рассмотреть применение результатов исследования к различным задачам на многочлены. Составить базу задач различных типов решенных данным методом.

Объектом диссертационной работы выступает процесс исследования учащихся старших классов квадратичным многочленам, их исследования в качестве функции и решение задач по данной теме.

Методы исследования: анализирование, систематизирование, синтезирование.

Этапы, процедура исследования: исследование учебно-математического материала, создание теоретической части, практические этапы, заключительная этап.

Полученные результаты, их новизна, научная и практическая значимость. В ходе диссертационной работы были решены следующие задачи: изучен научно – методический материал о квадратичных трехчленах,

изучен научно – методический материал о квадратных уравнениях, разобраны примеры, изучена программа школьного курса преподавания математики в старших классах, изучена история квадратных трехчленов и теорема Виета, дан полный анализ классического представления квадратичного трехчлена, их функции и графики, анализировано большое количество научно – методической литературы, содержащая методы построения графиков квадратичного трехчлена относительно его данных, рассмотрена теорема Виета при решении квадратных уравнений, рассмотрен нетрадиционный подход к изучению квадратных трехчленов, дан вывод общей теоремы и рассмотрены следствия, построены графики функции на основе рассмотренных следствий, сформулированы утверждения и рассмотрены некоторые примеры подтверждающие данные утверждения, решены примеры квадратных трехчленов неординарным способом, построены графики функции на основе рассмотренных следствий, а также дан им полный анализ. Создан методический аспект в виде систематизированной базы задач решенных нетрадиционным методом, а так же дан анализ достигнутых целей и постановка следующей задачи в ходе выполнения работы были достигнуты.

Поставленная проблема исследования, в ходе диссертационной работы, заключающаяся в разработке научных основ содержания обучения квадратных многочленов посредством создания методических материалов, считаем вполне раскрытой.

Цель работы - исследование квадратичного многочлена, а именно трехчлена как функцию, на основе использования знака дискриминанта и коэффициента не прибегая к комплексным числам достигнутой. Рассмотрение применений результатов исследования к различным задачам примененной. Составление базы задач различных типов решенных данным методом раскрытой.

Гипотеза исследования, состоящая в том, что изучение содержания квадратичных трехчленов в качестве функции и представленная в трех видах открывает новые возможности для изучения не только квадратичных

многочленов и многочленов при больших степенях, открывает широкие возможности для построения индивидуальных образовательных траекторий у учащихся, основанное на изучении многочленов, доказана.

Сведения о публикациях: «Вестник инновационного Евразийского университета» №1(45), 2012г, «Вестник инновационного Евразийского университета» №3 (47), 2012г, «Achievement of school - 2012», том 23.

Реферат

Диссертациялық жұмысты мөлшері 68 бет, жұмыс кіріспеден, бес бөлімден, әдебиет және қосымша пайдаланылған қорытындыдан тұрады. Көркемдеудің мөлшері - 13, кесте - 1, 26 пайдаланылған әдебиеттерден.

Ашық мақсат, есеп, диссертациялық жұмысты өзектілік, болжам, зат және объект жүргізуде, осы жұмыстың жаңалығы сонымен бірге алынған. Ғылыми мінезге ие болатын мәселені қазіргі күйдің сарабы қарастырылған. Негіздеу және диссертациялық жұмыстың бастапқы мәліметтері берілді.

Бірінші бөлімде квадрат теңдеулерінің даму тарихы, ежелгі замандардан орта ғасырға дейін қаралады. Ежелгі Вавилонда квадрат теңдеулері табылғаны, Грецияда, Индийда және тағы басқаларда.

Екінші бөлімде, квадраттық теңдеулер, тұтас көрініс, квадрат теңдеудің түбірлерінің формуласы сонымен бірге алынған. Осы бөлім пунктінің бірі Виет теоремасының пайдалануының әдістеріне, квадрат теңдеулерінің шешімдеріне арналған.

Квадраттық үшмүшенің классикалық ұсынысы үшінші бөлімде берілген: анықтама, функция, графиктер, графиктердің мінез-құлығының талдауы.

Үшінші бөлімде квадрат үш мүшелерінің зерттеуіндегі дәстүрлі емес тәсілдемені қарастырады, негізгі теоремалар, лайық дәлелдемелермен салдар, бекітулер. Параболаның суретпен көркемдейтін түрлері толықтырылған графиктермен бөлім дискриминанттың әр түрлі жағдайлары және еселіктері. Координаталар ось бұрылыстың формулаларының екі айнымалыларынан квадрат функциясына қолдануы бар толық тармақ қосылған сонымен бірге.

Және бесінші бөлімде квадраттық үш мүшелері, көпмүшеліктердің шешімінің мысалдары, Геронның есебі келтірілген, және зор қиындықтағы белгілі түріндегіден есептерге дейін әр түрлі мысалдардың түрлері көрсетілген. Осы бөлімдердің жеке пункттері сонымен бірге ерекше тәсілдер, және тағы басқа сөздік есептерінен дәстүрлі емес әдістермен шешімдері табылады.

Қойылған есептердің шешімі және мақсат негіздеген осы жұмыстан қорытындысын шығарған. Диссертациялық жұмыс толық талдауды береді және жұмыстың жасалғаны тұжырым арқылы қалыптасады.

Қосымша диссертациялық жұмыс кейбір кестелерінің түрінде тақырыпқа катысты ұсынылады, кейбір шағын тарихи анықтама берілген, сонымен бірге табылған.

Маңызды сөздердің тізімі: теңдеу, квадрат, көпмүшеліктер, теорема, бекіту, қасиет, жіктеу, түбірлер, дискриминант, еселіктер, айнымалылар, график, функция, қисық, жанасу.

Зерттеудің өзектілігі: егер квадратты үш мүшені қарастырса, бұл функция болса, онда тұжырым: математикаға тәлімнің мектеп бағдарламаларына әрқашан енген комплексті сандарды қолданбай жасауға болады. Квадратты теңдеудің зерттеуінде, біз мінез-құлығы зерттеу керек болатын квадраттық үшмүшеге түйісіп қаламыз.

Зерттеудің мақсаты - квадратты көпмүшелікті зерттелуі, үшмүшенің өзі де бұл функцияны, дискриминанттың белгісінің пайдалануы және еселікті негізде. Сонымен бірге бүкіл көпмүшеліктерге әр түрлі есептерге зерттеу нәтижелерді қолдануды қарастырылады. Әдістің бел байлаған мәліметтерінің әр түрлі түрлерінің есептерінің тұптабаны құралады.

Диссертациялық жұмысының объекті квадратты көпмүшеліктер, олардың зерттелуі үлкен сыныптарда оқитындармен, сыныптарды зерттеудің процесі функция ретінде шығып тұрады және осы тақырып бойымен есептердің шешімі.

Зерттеудің әдістері: талдау, жүйелеу, синтез жасау.

Зерттеудің кезең, процедурасы: математикалық материалды зерттелуі, теориялық бөліктің жасалуы, жаттығу кезеңдері, қорытынды кезеңдер.

Алынған нәтижелер, олардың жаңалығы, ғылыми және практикалық маңыздылығы. Диссертациялық жұмысының кезеңінде келесі есептер бел байланған: зерттелген ғылыми - квадратты үшмүшелер туралы әдістемелік материал, зерттелген ғылыми - квадрат теңдеулер туралы әдістемелік материал, квадратты үшмүшенің классикалық ұсынысы, олардың функциясы және график толық талдау квадрат үш мүшелерінің тарихы және Виеттің теоремасыю Бас сыныптардағы математиканың сабақ беруін мектеп

курсiнiң бағдарламасы берiлген, мысалдар зерттелген, бөлшектенген, үлкен мөлшерде ғылыми материалдар тексерiлген - оның мәлiметтерi әдiстемелiк әдебиет, квадратты үш мүшенiң графиктерiн құрылыста болатын әдiстерi қатысты, Виеттiң теоремасы квадрат теңдеулердi шешiмде қарастырған, ортақ теореманың тұжырымы квадрат үш мүшелерiнiң зерттеуiне дәстүрлi емес тәсiлдеме, берiлгендер қарастырылған және салдар қарастырылған, қарастырылған салдарды негiзде функцияның графиктерi құрастырылған, бекiту сипатталған және бекiтудi растайтын мәлiметтердегi кейбiр мысалдар қарастырылған, ерекше тәсiлдiң квадрат үш мүшелерiнiң мысалдары бел байлаған, қарастырған салдарды негiзде функцияның графиктерi құрастырылған, олардың толық талдауы берiлген, сонымен бiрге алынған. Есептерiнiң жүйеленген түптабаны түрiнде әдiстемелiк аспектiсi дәстүрлi емес әдiспен бел байлаған құрған, болған iс жеткiзiлген жұмысы қол жеткiзген мақсаттардың талдауы және келесi есептiң қойылымы Берiлгендер дәл осылай орындау барысында.

Зерттеудiң проблемасын қойдық, ғылыми негiздердiң әзiрлеуiнде әдiстемелiк материалдарды жасауы арқылы квадрат көпмүшелiктерi тәлiмнiң мазмұнына қорытушы диссертациялық жұмысты жүрiсте есепке әбден ашықпыз.

Жұмыстың мақсаты - квадратты көпмүшелiктiң зерттелуi, функцияны, дискриминанттың белгiсiнiң пайдалануы және еселiктi негiзде сияқты үш мүшенiң өзi ал, комплекстi сандарға қол жеткiзген қолданбай. Әр түрлi есептерiне зерттеу нәтижелерiнiң қолдануларын қарастыруға қолданылған. Әдiсiн бел байлаған мәлiметтерiнiң әр түрлi түрлерiнiң есептерiнiң түптабанын құрастыру ашық.

Квадратты үш мүшелердiң үш түрлердегi квадратты көпмүшелiктер және көпмүшелiк ғана емес зерделеу үшiннiң жаңа мүмкiндiктерi үлкен дәрежелерде ашуға көрсетiлген мазмұндары зерттеу функция ретiнде қасында дәлелденген дәлелденген көпмүшелiктердiң зерттеу негiздеген оқуы дара бiлiм беретiн

траекторияларының құрылысы үшін кең мүмкіндіктерін ашқан құралатын зерттеудің болжамы.

Жариялаулар туралы мағлұмат: «(45) №1, 2012-ші инновациялық Еуразиялық университеттің хабаршысы, (47) №3, 2012 «Инновациялық Еуразиялық университеттің хабаршысы», «Achievement of school - 2012», сол 23.

Abstract

The volume of dissertation work of 68 pages, work consists of the introduction, five sections, the conclusion, the used literature and the appendix. Quantity of an illustration – 13, table 1, 26 of the used references.

In maintaining the purpose, tasks, relevance, a hypothesis, a subject and object of dissertation work, and also novelty of this work are opened. The assessment of a current state of the solved problem, possessing scientific character is considered. The grounds and basic data of dissertation work are given.

In the first section the history of development of quadratics since ancient times before the Middle Ages, namely quadratics in Ancient Babylon, Greece, India, etc. is considered.

In the second, quadratics and its roots, and also a general view, formulas of roots of a quadratic are considered. By one of пунктов this section it is devoted to methods of use of the theorem of Viete at the solution of quadratics.

In the third section classical representation of a square trinomial is given, namely: definitions, functions, schedules, analysis of behavior of schedules.

The fourth section considers nonconventional approach to studying of square trinomials, namely the main theorems, consequences, statements with the corresponding proofs. The section is added with schedules parabolas illustrating a look at various cases of a discriminant and coefficients. The detailed point is also included in the section with application to square fuktion from two variable formulas of turn round an axis of coordinates.

And in the fifth section examples of the solution of square trinomials, polynomials, Heron's task, etc. in the extraordinary way, presented in the form of various examples from trivial type to problems of the increased difficulty are given, and also pukty this section the base from verbal tasks solved by a nonconventional method is separate.

In the conclusion are summed up this work, based on the solution of objectives and the purpose. The full analysis of dissertation work is given and conclusions of rather carried out work are formed.

Appendices are submitted in the form of some tables connected with a subject of dissertation work, and also some small historical information is given.

List of keywords: equations, square, polynomials, theorems, statements, properties, decomposition, roots, discriminant, coefficients, variables, schedule, functions, curve, contact.

Relevance of research: if to consider a square trinomial as function, it is possible to draw many conclusions without resorting to complex numbers which are included not always into the school program of training in mathematics. At research of the square equation, we faces the square trinomial which behavior should be studied.

Research objective – to investigate a square polynomial, namely a trinomial as function, on the basis of use of a sign of a discriminant and coefficient. And also to consider application of results of research to various tasks on polynomials. To make base of problems of various types solved by this method.

As object of dissertation work process of research of studying senior classes to square polynomials, their researches acts as an AND function problem solving on this subject.

Research techniques: analysis, systematization, synthesizing.

Stages, research procedure: research of an educational and mathematical material, creation of theoretical part, practical stages, closing stage.

The received results, their novelty, scientific and practical significance. During dissertation work the following tasks were solved: it is studied scientifically – a methodical material about square trinomials, it is studied scientifically – a methodical material about quadratic equations, examples are sorted, the program of a school course of teaching of mathematics in the senior classes is studied, the history of square trinomials and the theorem of Vieta is studied, the integrated analysis of classical representation of a square trinomial, their AND function of graphics, analyzed great many scientifically – the methodical literature, containing methods of creation of schedules of a square trinomial concerning its data is given, the theorem of Vieta is considered at the solution of quadratic equations, nonconventional

approach to studying of square trinomials is considered, the conclusion of the common theorem is given and corollaries are considered, function schedules on the basis of the considered corollaries are constructed, statements and are reviewed some examples confirming these statements are formulated, are solved examples of square trinomials in the extraordinary way, are constructed function schedules on the basis of the considered corollaries, and also the integrated analysis is given them. The methodical aspect in the form of the systematized base of tasks solved by a nonconventional method and as the analysis of the reached goals and statement of the following task is given during realization of work is created were reached.

The put problem of research, during the dissertation work, consisting in development of scientific bases of the content of tutoring of square polynomials by means of creation of methodical materials, we consider quite opened.

The work purpose - research of a square polynomial, namely a trinomial as function, on the basis of use of a sign of a discriminant and coefficient without resorting to imaginaries of the reached. Consideration of applications of results of research to various problems of the applied. Drawing up base of problems of various types solved by this method of the opened.

The research hypothesis, consisting that studying of the maintenance of square trinomials as an AND function presented in three types opens new opportunities for studying not only square polynomials and polynomials at larger degrees, opens ample opportunities for creation of individual educational trajectories at the pupils, based on studying of polynomials, is proved.

Data of publications: "The messenger of innovative Euroasian university" g No. 1(45), 2012, "The messenger of innovative Euroasian university" g No. 3 (47), 2012, "Achievement of school - 2012", volume 23.

ВВЕДЕНИЕ

Современная система образования характеризуется кардинальными изменениями, связанными с переходом к новой образовательной парадигме, основными приоритетами которой являются как интересы личности, так и качество образования. Важнейшими целями обучения математике в основной школе является расширение знаний учащихся по математике, формирование устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие способностей, социальному и культурному самоопределению в целом. В концепции модернизации казахстанского образования среди условий, необходимых для повышения качества общего образования, особо выделяется необходимость обучению детей различным методам решения задач, предполагающая широкие и гибкие возможности построения индивидуальных образовательных траекторий.

Если остановиться на школьной программе изучения квадратичных многочленов, а именно трехчленов, то можно заметить неполный анализ исследования данной темы. В случае, когда дискриминант отрицателен, уравнение не имеет корней. Но если рассмотреть квадратичный трехчлен как функцию, то можно сделать немало выводов не прибегая к комплексным числам, которые не всегда входят в школьную программу обучения математике. При исследовании квадратичного уравнения, мы сталкиваемся с квадратичным трехчленом, поведение которого следует изучить. Предлагаем нетрадиционный подход изучения квадратного трехчлена, как функцию от переменного x .

Цель диссертационной работы: исследовать квадратичный многочлен, а именно трехчлен как функцию на основе использования знака дискриминанта и коэффициента. Вывести общую формулу. Рассмотреть применение результатов исследования к различным задачам на многочлены. Составить базу задач различных типов решенных данным методом.

Объектом диссертационной работы выступает процесс исследования учащихся старших классов квадратичным многочленам, их исследования в качестве функции и решение задач по данной теме.

Предметом диссертационной работы является обучение учащихся вырабатывать практические навыки применения результатов исследования, формирование пространственного воображения, развитие навыков логического мышления, воображения и творческого мышления.

Гипотеза – квадратичный трехчлен может быть представлен только в трех видах:

- в виде суммы двух положительных квадратов ($a > 0$ и $D < 0$);
- в виде разности двух положительных квадратов ($a > 0$ и $D > 0$);
- в виде полного квадрата ($a > 0$ и $D = 0$), остальные три случая при $a < 0$ точно такие же. Если мы исследуем и анализируем полученный результат, то оно внесет существенный вклад в изучение квадратичных трехчленов.

Новизна: исследование квадратного трехчлена как функцию и вывод общей теоремы, формулы. Степень самостоятельности прослеживается в ходе исследования квадратичного трехчлена при различных старших коэффициентах

и дискриминантах, а также составление базы задач различной степени сложности.

Для достижения цели диссертационной работы и доказательства данной гипотезы, поставлены следующие **задачи**:

- изучить научно – методический материал о квадратичных трехчленах и их графики;
- изучить научно – методический материал о квадратных уравнениях, разобрать примеры;
- изучить программы школьного курса преподавания математики в старших классах;
- изучить историю развития квадратных трехчленов, историю возникновения теоремы Виета;
- изучить некоторые задачи повышенной трудности, основанные на данных темах;
- дать полный анализ классического представления квадратичного трехчлена, их функции и графики;
- проанализировать научно – методической литературы, содержащие методы построения графиков квадратичного трехчлена относительно его данных;
- рассмотреть теорему Виета при решении квадратных уравнений, в качестве дополнительного анализа данной проблемы;
- рассмотреть нетрадиционный подход к изучению квадратных трехчленов;
- вывести общую теорему и рассмотреть все следствия данной теоремы, дать полный анализ;
- формулировать утверждения и рассмотреть некоторые примеры, основанные на них;
- на примерах доказать эффективность использования теорем и утверждений;
- построить графики функции на основе рассмотренных следствий, а также дать им полный анализ;
- решить некоторые примеры квадратных трехчленов неординарным способом;
- создать методический аспект в виде систематизированной базы задач решенных нетрадиционным методом.

Методы исследования. Для решения поставленных в исследовании задач использовались следующие методы: анализ математической, психолого-педагогической, учебно-методической литературы и выполненных ранее диссертационных работ по проблеме исследования; анализ действующих школьных учебников и учебных пособий по математике, педагогическое наблюдение.

Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, использованной литературы и приложения.

В введении раскрыты цель, задачи, актуальность, гипотеза, предмет и объект диссертационной работы, а также новизна данной работы. Рассмотрена

оценка современного состояния решаемой проблемы, обладающая научным характером. Даны основание и исходные данные диссертационной работы.

В первом разделе рассматривается история развития квадратных уравнений начиная с древних времен до средневековья, а именно квадратные уравнения в Древнем Вавилоне, Греции, Индии и т.д.

Во втором, рассмотрены квадратные уравнения и его корни, а также общий вид, формулы корней квадратного уравнения. Одним из пунктов данного раздела посвящен методам использования теоремы Виета при решении квадратных уравнений.

В третьем разделе дано классическое представление квадратичного трехчлена, а именно: определения, функции, графики, анализ поведения графиков.

Четвертый раздел рассматривает нетрадиционный подход к изучению квадратных трехчленов, а именно основные теоремы, следствия, утверждения с соответствующими доказательствами и формулы. Раздел дополнен графиками иллюстрирующие вид параболы при различных случаях дискриминанта и коэффициентов. В раздел также включен подробный пункт с применением к квадратным функциям от двух переменных формул поворота вокруг оси координат.

И в пятом разделе приведены примеры решения квадратных трехчленов неординарным способом, представленных в виде различных примеров от тривиального типа до задач повышенной трудности, а также отдельным пунктом данного раздела является база из словесных задач решенные нетрадиционным методом.

В заключении подведены итоги данной работы, основанные на решении поставленных задач и цели. Дается полный анализ диссертационной работы и формируются выводы относительно проведенной работы.

Приложения представлены в виде некоторых таблиц связанных с темой диссертационной работы, а также дана некоторая небольшая историческая справка.

1 ИЗ ИСТОРИИ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ

1.1 Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне, Древней Греции, Индии, в Европе 13- 17 вв.

Квадратные уравнения и способы их решения были известны с древнейших времен. Необходимость решения уравнений второй степени, в том числе и квадратных, в древности была вызвана потребностью решать проблемы связанные с разделением земли, нахождением ее площади, земельными работами военного характера, а также с развитием таких наук, как математика и астрономия.

Квадратные уравнения умели решать вавилоняне около 2000 лет до н.э. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются кроме неполных и такие, например полные квадратные уравнения:

$$x^2 + x = \frac{3}{4} ;$$

$$x^2 - x = 14,5 .$$

Среди клинописных текстов были найдены примеры решения неполных, а также частичных случаев полных квадратных уравнений. Известно, что их методы решения почти совпадают с современными, однако неизвестно, каким образом вавилоняне пришли к этим методам: почти на всех найденных до сих пор клинописных текстах сохранились лишь указания к нахождению корней уравнений, но не указано, как они были выведены [1].

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадают с современным, однако неизвестно, каким образом дошли они до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в 499 г. В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Часто они были в стихотворной форме. Вот одна из задач знаменитого индийского математика 12 века Бхаскары:

Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А 12 по лианам....

Стали прыгать повисая.
Сколько было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?

Решение Бхаскары свидетельствует о том, что он знал о двузначности корней квадратных уравнений.

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x.$$

Решая уравнения такого вида Бхаскара не только получал корни, но и делал немало выводов, которыми впоследствии воспользуются ученые Европы.

В древней Греции (Пифагор, Евклид и др.) решали квадратные уравнения геометрическим способом. Это было возможно благодаря наличию отрезков, длины которых не выражались рациональными числами. Методы, которые не связывались с геометрией, впервые приводит Диофант Александрийский в III в. н.э. В своих книгах «Арифметика» он приводит примеры решения неполных квадратных уравнений. Его книги с описанием способов решения полных квадратных уравнений до нашего времени не сохранились.

Формулы решения квадратных уравнений в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 году итальянским математиком Леонардом Фибоначчи. Эта книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из этой книги переходили почти во все европейские учебники 14-17 веков. Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду:

$$x^2 + bx = c \quad (1.1)$$

было сформировано в Европе лишь в 1544 году Штифелем. Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики 16 века. Учитывают помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в 17 веке благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других Ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

Спустя примерно 350 лет после смерти аль-Хорезми результаты арабских алгебраистов изложил в своей «Книге абака» сын купца Боначчи из Пизы, известный в истории математики как Леонардо Пизанский, или Фибоначчи. Его сочинение во многом способствовало усилению интереса европейцев к алгебре и появлению других алгебраических работ. Европейская алгебра (как, впрочем, и арабская) вплоть до XV века не использовала символы, поэтому уравнения записывались в словесной форме. Например, запись уравнения: выглядела так:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

«*census et radices aequantur numeris*» («*квадрат и корни равны числам*»).

Символическая алгебра впервые появилась в «Сумме» (1494) Луки Пачоли. В своей «Сумме» Лука Пачоли рассматривал правила решения уравнений первой и второй степени, а также некоторых частных видов уравнений четвертой степени. В соответствии с традицией, идущей от аль-Хорезми, он указывал для квадратных уравнений два корня, но отрицательный опускал. Не рассматривались им также корни, равные нулю. Что касается уравнений третьей степени, то Пачоли отрицал возможность их решения. «Сумма» как бы подводила итог результатам, полученным в алгебре до XV века. На это сочинение опирались в своем творчестве выдающиеся итальянские алгебраисты XVI века – дель Ферро, Тарталья [2].

Дальнейшие труды по квадратным уравнениям и их корням исследовал замечательный французский математик - Франсуа Виет, положивший начало алгебре как науке о преобразовании выражений, о решении уравнений в общем виде, создатель буквенного исчисления.

Виет первым стал обозначать буквами не только неизвестные, но и данные величины. Тем самым ему удалось внедрить в науку великую мысль о возможности выполнять алгебраические преобразования над символами, т. е. ввести понятие математической формулы. Этим он внес решающий вклад в создание буквенной алгебры, чем завершил развитие математики эпохи Возрождения и подготовил почву для появления результатов Ферма, Декарта, Ньютона.

1.2 От видов квадратных уравнений в Средней Азии до современной записи

Знаменитый математик из Средней Азии Аль-Хорезми решал квадратные уравнения и алгебраическими и геометрическими способами. В те времена не была выведена общая формула решения квадратных уравнений, поэтому приводили следующие 6 видов решения уравнения:

Таблица 1 - Записи квадратных уравнений в Средней Азии

	Запись Хорезми	Современная запись
1)	Квадраты равны корням	$x^2 = bx$
2)	Квадраты равны числу	$x^2 = c$
3)	Квадраты и число равны корням	$x^2 + c = bx$
4)	Корни равны числу	$bx = c$
5)	Квадрат и корни равны числу	$x^2 + bx = c$
6)	Корни и число равны квадратам	$bx + c = x^2$

Во времена, когда жил Хорезми, числа и переменные не обозначали через буквы, не было и знаков действий, поэтому он писал словами и условие задачи, и ее решение. Решение Хорезми, написанные словами, соответствуют решениям, найденным в настоящее время по формуле.

Современную запись способа нахождения корня уравнения

$$ax^2 + bx = c,$$

предложенного индийским математиком Бхасхара в XII веке, использовали при выводе формулы корня квадратного уравнения. Бхасхара выводил так:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac,$$

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac},$$

отсюда:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \quad (1.2)$$

Он не стал записывать отрицательный корень уравнения, вероятно, из-за не распространенности в те времена отрицательных чисел.

Запись общей формулы [3]:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad (1.3)$$

подходящей для решения всех типов, стала возможна после введения в алгебру букв, использования знаков действий, расширения понятия числа до множества

действительных чисел. Это еще раз показывает, что развитие понятия числа способствует совершенствованию математики как вычислительного средства.

В действительности, формулой (1.2) можно пользоваться при решении уравнений:

$$ax^2 = 0,$$

$$ax^2 + bx = 0,$$

$$ax^2 + c = 0$$

и полных квадратных уравнений, если $D \geq 0$: для этого их приводят к виду полного квадратного уравнения и затем используют формулу.

Общее правило решения квадратных уравнений было сформировано немецким математиком М. Штифелем (1487 - 1567). Выводом формулы общего решения квадратных уравнений занимался Виет. Он же и вывел формулы зависимости корней уравнения от коэффициентов в 1591 году. После трудов нидерландского математика А. Жирара (1595 - 1632), а также Декарта и Ньютона способ решения квадратных уравнений приобрел современный вид.

2 КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЕГО КОРНИ. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

2.1 Неполные квадратные уравнения: определения, общий вид, примеры

Каждое из уравнений:

$$-x^2 + 6x + 1,4 = 0$$

$$8x^2 - 7x = 0$$

$$x^2 - \frac{4}{9} = 0$$

имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$,

где x — переменная, a, b, c — числа. Такие уравнения называют квадратными уравнениями.

Определение. Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2.1)$$

где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$ [4].

Числа a, b, c — коэффициенты квадратного уравнения. Число a называют первым коэффициентом, число b — вторым коэффициентом и число c — свободным членом.

В каждом из уравнений вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a \neq 0$, наибольшая степень переменной x — квадрат. Отсюда и название: квадратное уравнение.

Заметим, что квадратное уравнение называют еще уравнением второй степени, так как его левая часть есть многочлен второй степени.

Квадратное уравнение, в котором коэффициент при x^2 равен 1, называют приведенным квадратным уравнением. Например, приведенными квадратными уравнениями являются уравнения:

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

Если в квадратном уравнении

$$ax^2 + bx + c = 0$$

хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют неполным квадратным уравнением. Так, уравнения:

$$-2x^2 + 7 = 0$$

$$3x^2 - 10x = 0$$

$$-4x^2 = 0$$

являются неполными квадратными уравнениями. В первом из них $b = 0$, во втором $c = 0$, в третьем $b = 0$ и $c = 0$.

Неполные квадратные уравнения бывают трех видов [5]:

а) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$;

б) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$;

в) $ax^2 = 0$.

Неполное квадратное уравнение вида:

$$ax^2 = 0 -$$

равносильно уравнению

$$x^2 = 0$$

и поэтому имеет единственный корень 0.

2.2 Формула корней квадратного уравнения, их преобразования и краткая запись

Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена часто приводит к громоздким преобразованиям. Поэтому поступают иначе. Решают

уравнение в общем виде и в результате получают формулу корней. Затем эту формулу применяют при решении любого квадратного уравнения.

Решим квадратное уравнение (2.1).

Разделив обе его части на a , получим равносильное ему приведенное квадратное уравнение:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Преобразуем это уравнение, используя преобразования, аналогичные тем, которые применялись в рассмотренном примере [6]:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) равносильно уравнению (2.1). Число его корней зависит от знака дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Так как $a \neq 0$, то $4a^2$ — положительное число, поэтому знак этой дроби определяется знаком ее числителя, т. е. выражения $b^2 - 4ac$. Это выражение называют дискриминантом квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(«дискриминант» по-латыни — различитель). Его обозначают буквой D , т.е

$$D = b^2 - 4ac.$$

Запишем уравнение (2.2) в виде:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Рассмотрим теперь различные возможные случаи в зависимости от значения D .

1) Если $D > 0$, то

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Таким образом, в этом случае уравнение (2.1) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Принята следующая краткая запись:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{где } D = b^2 - 4ac, \quad (2.3)$$

которую называют формулой корней квадратного уравнения.

2) Если $D = 0$, то уравнение (2.2) примет вид:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Отсюда

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

В этом случае уравнение (2.1) имеет один корень $-\frac{b}{2a}$.

Формулой корней квадратного уравнения можно пользоваться и в этом случае. Действительно, при $D = 0$ формула (2.3) принимает вид

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a},$$

откуда

$$x = -\frac{b}{2a}$$

3) Если $D < 0$, то значение дроби $\frac{D}{4a^2}$ отрицательно и поэтому уравнение

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2},$$

а следовательно, и уравнение (2.1) не имеют корней.

Таким образом, в зависимости от значения дискриминанта квадратное уравнение может иметь два корня (при $D > 0$), один корень (при $D = 0$) или не иметь корней (при $D < 0$).

При решении квадратного уравнения по формуле (2.3) целесообразно поступать следующим образом:

- 1) вычислить дискриминант и сравнить его с нулем;
- 2) если дискриминант положителен или равен нулю, то воспользоваться формулой корней, если дискриминант отрицателен, то записать, что корней нет [7].

Из формулы (2.3) можно получить другую формулу, которой удобно пользоваться при решении квадратных уравнений с четным вторым коэффициентом.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + 2kx + c = 0$$

Найдем его дискриминант:

$D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$. Очевидно, что число корней уравнения зависит от знака выражения $k^2 - ac$. Обозначим это выражение через D_1 .

Если $D_1 \geq 0$, то по формуле корней квадратного уравнения получим

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

Значит, если квадратное уравнение имеет вид

$$ax^2 + 2kx + c = 0,$$

то при $D_1 \geq 0$ его корни могут быть найдены по формуле

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac \quad (2.4)$$

Если, $D_1 < 0$ то уравнение корней не имеет.

2.3 Обычное использование теоремы Виета при решении квадратных уравнений

Франсуа Виет (1540-1603) - юрист по образованию. Интерес к астрономии побудил к занятиям алгеброй и тригонометрией. Он одним из первых стал обозначать буквами не только переменные, но и данные величины, т.е. коэффициенты при переменных в уравнении. Благодаря его трудам алгебра превратилась в общую научную дисциплину, основанную на алгебраической символике. Появилась возможность записывать общие свойства уравнения и его корней с помощью формулы. Алгебраические выражения превратились в объекты, над которыми можно осуществлять действия. Труды Виета сыграли

существенную роль в развитии и достижении математикой современного высокого уровня. Поэтому европейцы называют его «отцом алгебры».

Общие идеи и основные принципы новой алгебры Виет изложил во «Введении в аналитическое искусство» (1591), которое должно было составить начало большого всеобъемлющего алгебраического трактата. Целью Виета было преобразование прежней алгебры в мощное математическое исчисление.

«Искусство, которое я излагаю, – писал он, – ново, или, по крайней мере, настолько испорчено временем и искажено влиянием варваров, что я счел нужным придать ему совершенно новый вид... Все математики знали, что под их алгеброй были скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти; задачи, которые они считали наиболее трудными, совершенно легко решаются десятками (*людей*) с помощью нашего искусства, представляющего, поэтому самый верный путь для математических изысканий» [8].

При этом новую алгебру Виет делил на две части: одну, имеющую дело с общими величинами, и другую, опирающуюся на первую и имеющую дело с числами.

Может показаться, что Виет ввел в символику алгебры совсем немного. Буквами для обозначения величин пользовались еще Евклид, Архимед и Диофант, их успешно применяли Леонардо Пизанский, Иордан Неморарий, Николь Орем, Лука Пачоли, Джироламо Кардано, Рафаэль Бомбелли и многие другие математики. Но сделал существенный шаг вперед Виет. Его символика позволила решать не только конкретные задачи, но и находить общие закономерности и полностью обосновывать их. Это, в свою очередь, способствовало выделению алгебры в самостоятельную ветвь математики, не зависящую от геометрии.

Рассмотрим следующие уравнения с помощью теоремы Виета.

Приведем значения корней, суммы и произведения корней нескольких приведенных уравнений:

$$x^2 - 7x + 10 = 0; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5; \quad x_1 + x_2 = 7; \quad x_1 \cdot x_2 = 10$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0; \quad x_1 = -5, \quad x_2 = 3; \quad x_1 + x_2 = -2; \quad x_1 \cdot x_2 = -15$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0; \quad x_1 = -6, \quad x_2 = -4; \quad x_1 + x_2 = -10; \quad x_1 \cdot x_2 = 24.$$

Из примеров видно, что сумма корней приведенных квадратных уравнений равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Теперь проверим, обладает ли этим свойством уравнение

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{при} \quad D = p^2 - q > 0$$

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2},$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D} + p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-p - \sqrt{D}) \cdot (-p + \sqrt{D})}{2 \cdot 2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = q$$

Тогда можно сформулировать следующую теорему.

Теорема: Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену [9]:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Для уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0: x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a}$$

т.к впервые эту теорему доказал французский математик Ф. Виет ее называют теоремой Виета.

Найдем сумму и произведение корней квадратного уравнения

$$2x^2 + 5x + 2 = 0: D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 > 0. \text{ Тогда,}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{5}{2};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1.$$

При решении некоторых задач используется теорема, обратная теореме Виета.

Теорема (обратная теорема): Если для чисел p, q, x_1, x_2 выполняются условия $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Если вместо p и q в левой части уравнения подставим выражения $(x_1 + x_2)$ и $x_1 \cdot x_2$, то получим

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = \\ &= x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = \end{aligned}$$

$$= x_1 x_2 (x - x_2) = 0$$

Отсюда $x - x_1 = 0$ или $x - x_2 = 0$, т.е. $x = x_1$ и $x = x_2$.

В общем, если между числами p, q, x_1, x_2 выполняются вышеприведенные соотношения, то

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2), \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 - корни уравнений

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{и} \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

Теорема Виета позволяет найти, не решая уравнения, сумму и произведение корней и если известны корни, то составить уравнение.

2.4 Квадратный трехчлен и его корни

Каждое из выражений

$$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x + 2,$$

$$2y^4 - y^3 + 5y^2 - 3y + 24,$$

$$7z^6 - 6z^2 - 7z + 3$$

являясь многочленом с одной переменной.

Значение переменной, при котором многочлен обращается в нуль, называют корнем многочлена.

Найдем, например, корни многочлена $x^3 - x$. Для этого решим уравнение

$$x^3 - x = 0.$$

Разложив левую часть уравнения на множители, получим $x(x-1)(x+1) = 0$ отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Таким образом, числа 0, 1, -1 — корни многочлена $x^3 - x$.

Многочлен второй степени с одной переменной называют квадратным трехчленом.

Примерами квадратных трехчленов являются многочлены $3x^2 - 2x - 5$, $x^2 + 7x - 8$. В первом из них $a = 3$, $b = -2$, $c = -5$, во втором $a = 1$, $b = 7$, $c = -8$. К квадратным трехчленам относятся также и такие многочлены второй степени, у которых один из коэффициентов b либо c или даже оба равны нулю. Так, многочлен $7x^2 - x$ считают квадратным трехчленом. У него $a = 7$, $b = 1$, $c = 0$.

Для того чтобы найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Так как квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет те же корни, что и квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, то он может, как и квадратное уравнение, иметь два корня, один корень или не иметь корней. Это зависит от значения дискриминанта квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$, который называют также дискриминантом квадратного трехчлена. Если $D > 0$, то квадратный трехчлен имеет два корня; если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет один корень; если $D < 0$, то квадратный трехчлен не имеет корней.

При решении задач иногда бывает удобно представить квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ в виде $a(x-m)^2 + n$, где m и n — некоторые числа. Такое преобразование называется выделением квадрата двучлена из квадратного трехчлена [10].

2.5 Разложение квадратного трехчлена на множители

Пусть требуется разложить на множители квадратный трехчлен $3x^2 - 21x + 30$. Вынесем сначала за скобки старший коэффициент 3. Получим

$$3x^2 - 21x + 30 = 3(x^2 - 7x + 10).$$

Для того чтобы разложить на множители трехчлен $x^2 - 7x + 10$, представим $-7x$ в виде суммы одночленов $-2x$ и $-5x$ и применим способ группировки:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 &= x^2 - 2x - 5x + 10 = \\ &= x(x-2) - 5(x-2) = (x-2)(x-5) \end{aligned}$$

Значит,

$$3x^2 - 21x + 30 = 3(x - 2)(x - 5).$$

При $x = 2$ и $x = 5$ произведение $3(x - 2)(x - 5)$, а следовательно, и трехчлен $3x^2 - 21x + 30$ обращаются в нуль. Значит, числа 2 и 5 являются его корнями.

Итак, мы представили квадратный трехчлен

$$3x^2 - 21x + 30$$

в виде произведения числа 3, т. е. старшего коэффициента, и двух линейных множителей. Первый из них представляет собой разность между переменной x и одним корнем трехчлена, а второй — разность между переменной x и другим корнем.

Такое разложение можно получить для любого квадратного трехчлена, имеющего корни. При этом считают, что если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то этот трехчлен имеет два равных корня [11].

3 КЛАССИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНОГО ТРЕХЧЛЕНА, ИХ ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Квадратичным трехчленом от одного неизвестного $x \in R$ называют выражение вида:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (3.1)$$

где a, b, c - заданные вещественные числа, а x - неизвестная или независимая переменная, $y = f(x)$ - функция от x , заданная равенством (3.1).

Проанализируем график нашей функции относительно прямоугольной системы координат xOy .

Имеют место нижеследующие случаи:

1) $a > 0, c > 0$ тогда

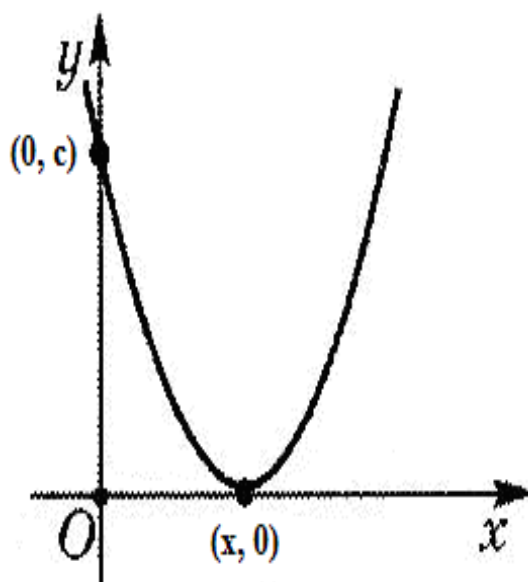


Рисунок 3.1

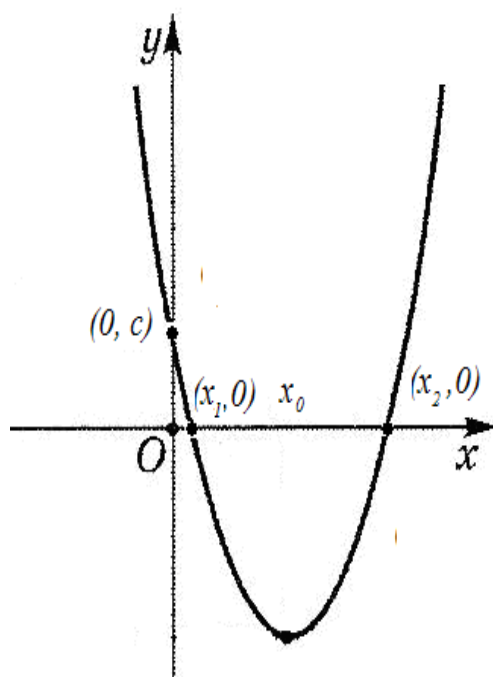
В соответствии с рисунком 3.1 ясно, что если $a > 0$ и кривая «касается» оси Ox (это возможно в любой точке Ox), то ветви параболы

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

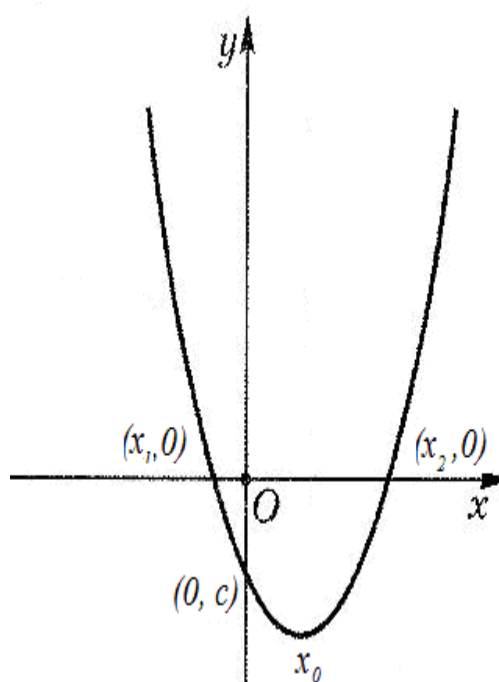
направлены вверх, при этом $y_0 = y(x) = y_{\min} = 0$;

Далее при $a > 0$ возможны и следующие два варианта:

$$\begin{aligned} a &> 0 \\ c &> 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a &> 0 \\ c &< 0 \end{aligned}$$



$$y_0 = y_{\min}$$

Рисунок 3.2

Как видно из рисунка 3.2, кривая $y = f(x)$ может пересекать ось Ox в двух различных точках: $\{(x,0); (x_2,0)\}$; $x_1 \neq x_2$, при этом $a > 0$ и $c > 0$ в первом графике и $a > 0$; $c > 0$ во втором графике.

Следовательно, мы замечаем, что в обоих случаях графики трехчлена направлены вверх, а наименьшее значение функции достигается в точках (x_0, y_0) ; где $y_0 = y(x_0) = y_{\min}$, при этом x_0 - может иметь любой знак, а $y_0 \leq 0$.

Наконец, случай когда $a > 0$ и график функции $y = f(x)$ не пересекает ось Ox :

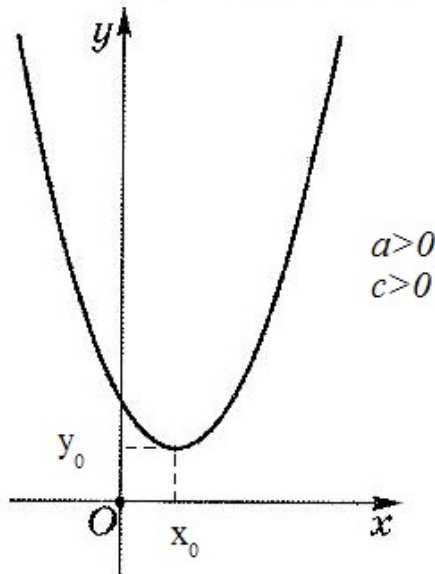


Рисунок 3.3

Здесь ветви параболы направлены «вверх» и кривая не пересекает ось Ox , при этом $y_{\min} = y(x_0) > 0$.

Итого из нометрического анализа при $a > 0$ следует, что наша функция

$$y = ax^2 + bx + c$$

является возрастающей и y обращается в нуль лишь в одной точке, либо в двух различных точках, или всегда $y(x) > 0$.

Аналогично исследуются случаи, когда $a < 0$.

При $a < 0$ все возможные случаи графика:

$$y_{\max} = y_0 = y(x_0) = 0$$

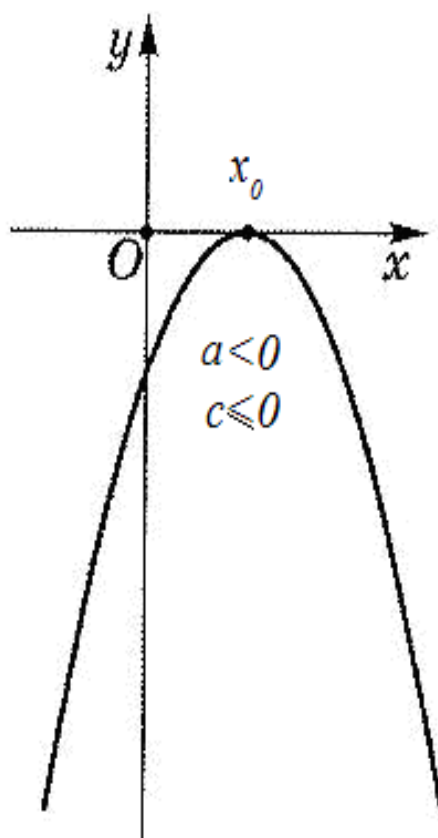


Рисунок 3. 4

т.е. в этом случае происходит «касание» графика в точке x_0 , где $y_{\max} = y_0 = 0$ и ветви графика направлены «вниз». Заметим также, что на рисунке 3.4 наглядно показан лишь график при $c \leq 0$.

В этом случае ($a < 0$) число c может быть: $c \geq 0$ или $c \leq 0$, а ($y_{\max}(x_0) = y_0$ достигается в точке x_0 и всегда $y_0 > 0$; и y обращается в нуль при $x = x_1$; $x = x_2$ при этом $x_1 \neq x_2$, т.е. обращается в нуль в двух различных точках. Точнее, функция

$$y = ax^2 + bx + c$$

при $a < 0$ может принимать нулевые значения (график пересекается с осью Ox) в двух различных точках. Этот случай характеризуется условиями: $a < 0$; $y_{\max} > 0$.

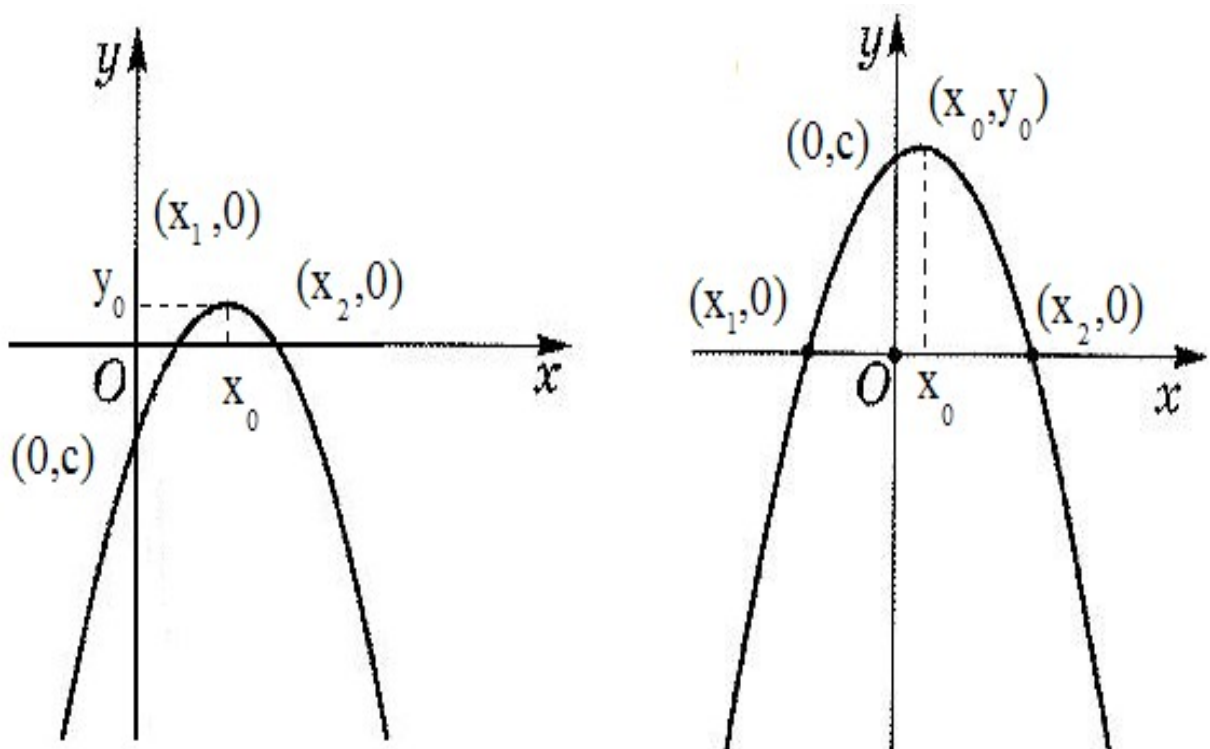


Рисунок 3.5

И наконец, $a < 0$ и график функции $f(x)$ пересекается с осью Ox .

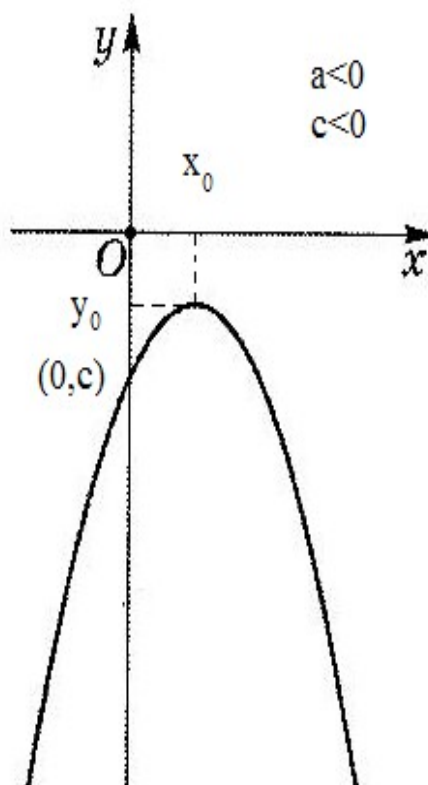


Рисунок 3.6

В это случае ($a < 0$) число $c < 0$ всегда и функция

$$y = ax^2 + bx + c$$

имеет только максимальное значение и оно $y_{\max} = y(x_0) = y_0 < 0$.

В данной главе рассмотрены все тривиальные случаи поведения квадратного трехчлена в качестве функции в декартовой системе координат в зависимости от его коэффициентов и дискриминанта, а также все случаи представлены наглядным образом [12].

В дальнейшем исследуем алгебраический способ всех этих случаев, в частности нетрадиционный подход к решению квадратных трехчленов относительно $a > 0$ или $a < 0$, когда $y = 0$, а также при отрицательном дискриминанте т.е. будем исследовать алгебраическим методом корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

4 НЕТРАДИЦИОННЫЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ

4.1 Основные теоремы, следствия и утверждения нетрадиционного подхода к изучению квадратичных трехчленов

При исследовании квадратичного уравнения, мы сталкиваемся с квадратичным трехчленом, поведение которого следует изучить. В предыдущей главе поведение квадратичного трехчлена изучали относительно прямоугольной системе координат из которой выводятся все основные свойства. Предлагаем нетрадиционный подход изучения квадратного трехчлена, как функцию от переменного x .

Определение. Пусть ε некоторый знак. Рассмотрим по следующим трем случаям:

$$\text{I. } \varepsilon_a = \text{sign}(a) = \begin{cases} +1; & a > 0 \\ 0; & a = 0 \\ -1; & a < 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$|a| = \begin{cases} \alpha; & a > 0 \\ 0; & a = 0 \\ -\alpha; & a < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

а) $|\alpha| \geq 0$;

б) $a = \varepsilon_a |\alpha|$;

в) $\varepsilon_a = -\varepsilon_{(-a)}$

г) $\varepsilon_a^2 = \varepsilon_{(-a)}^2 = 1$.

Утверждение: любое число α можно представить в таком виде $a = \varepsilon_a |\alpha|$.

II. Пусть данная функция

$$y_a(x) = ax^2 + bx + c;$$

с дискриминантом $D = b^2 - 4ac$, тогда с учетом $a \neq 0$ мы можем представить функцию в следующем виде:

$$y_a(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right] \quad (4.1).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] = \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right]
\end{aligned}$$

Так как $a = \varepsilon_a |a|$ (а также $|a| = \varepsilon_a a$) и с учетом $\varepsilon_{-D} = -\varepsilon_D$, $-D = -\varepsilon_D |D| = \varepsilon_{(-D)} |D|$ получим:

$$y_a(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \varepsilon_{(-D)} \frac{|D|}{4a^2} \quad (4.2)$$

Далее, второе слагаемое $\varepsilon_{-D} \frac{|D|}{4\varepsilon_a |a|}$ так как $a = \varepsilon_a |a|$ приведем к виду

$$\varepsilon_{-D} \frac{|D|}{4a} = \frac{\varepsilon_{(-D)} |D|}{4\varepsilon_a |a|};$$

Поэтому из (4.1) и (4.2) получим:

$$y_a(x) = \varepsilon_a |a| \left(x + \frac{b}{2\varepsilon_a |a|} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{(-D)}}{\varepsilon_a} \cdot \frac{|D|}{4|a|} \quad (4.3)$$

$$\text{Но } \frac{|D|}{4|a|} = \left(\frac{\pm \sqrt{|D|}}{\pm 2\sqrt{|a|}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{|a|}} \right)^2;$$

Поэтому,

$$y_a(x) = \varepsilon_a |a| \left(x + \frac{b}{2\varepsilon_a |a|} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{(-D)}}{\varepsilon_a} \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{|a|}} \right)^2 \quad (4.4)$$

Таким образом мы получим теорему:

Теорема 4.1. Пусть $a, b, c \in R$; $D = b^2 - 4ac$, тогда

$$y_a(x) = \varepsilon_a \left(\left(\sqrt{|a|} \cdot x + \frac{b}{2\varepsilon_a (\sqrt{|a|})} \right)^2 + \varepsilon_{(-D)} \cdot \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{|a|}} \right)^2 \right) \quad (4.5)$$

Следствие 1. Пусть $a > 0$, тогда $\varepsilon_a = +1$, $\sqrt{|a|} = \sqrt{a}$ и имеет место равенство:

$$y_+(x) = + \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + \varepsilon_{(-D)} \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{a}} \right)^2 \quad (4.6)$$

Доказательство этого равенства непосредственно выводится из равенства (4.5) и из положительности числа a .

Следствие 2. Пусть $a < 0$, тогда $\varepsilon_a = -1$, $|a| = -a$; так же в этом случае нужно выбрать равенство ($a = -a_1$; $a_1 > 0$); $|a| = a_1 > 0$; $|a| = -\sqrt{|a|}$;

$$y_-(x) = -\left(\sqrt{|a|} \cdot x - \frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2 + \varepsilon_{(-D)} \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{|a|}}\right)^2 \quad (4.7).$$

Рассмотрим данную функцию относительно дискриминанта. В обеих наших случаях величина D произвольное.

I. Далее, рассмотрим первый случай когда $D = 0$ и $a > 0$ и $a < 0$, тогда (в силу того, что $\varepsilon_a = +1$ и второе слагаемое равно нулю) из (4.7) получим две формулы:

$$y_+(x) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 \text{ и}$$

$$y_-(x) = -\left(\sqrt{|a|}x - \frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2$$

т.е. при любых значениях x $y_+(x) \geq 0$, т.е. график функции $y_+(x)$ направлен вверх и в единственной точке x_0 обращается в нуль и происходит «касание» графика функции в одной точке x_0 с осью Ox ($x_{1/2} = x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$).

$$\text{т. к. } y_-(x) = -\left(\sqrt{|a|}x - \frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2 \leq 0,$$

$$\text{то } \left(\sqrt{|a|}x - \frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right) = 0 \text{ дважды } x = \frac{b}{2|a|} = \frac{b}{2\varepsilon_a \cdot a} = -\frac{b}{2a}.$$

В первом случае функция положительная а во втором случае отрицательная. $y_a(x_0) = y_{\min}$ при $a > 0$, $y_a(x_0) = y_{\max}$ при $a < 0$. А при $y_-(x) \leq 0$ и график функции $y_-(x)$ направлен вниз и в единственной точке x_0 обращается в нуль и происходит «касание» графика функции в одной точке x_0 с осью. Найдем эту точку:

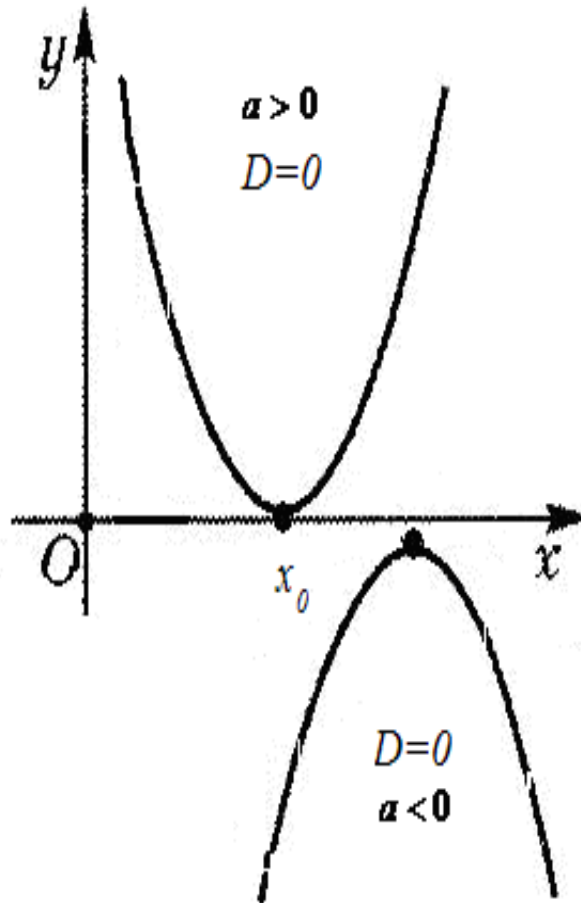


Рисунок 4.1

Имеем: с учетом того, что при $a > 0$ $|a| = a$

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right) \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right) = 0$$

Отсюда получим два одинаковых равенства:

$$\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = 0 \Rightarrow ;$$

$$\sqrt{a}x = -\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} .$$

Следовательно при $a > 0$ и $D = 0$, $y_+(x) \geq 0$ и $y_+(x_0) = y_{\min}(x_0)$ и при $a < 0$ и $D = 0$, $y_-(x) \leq 0$ и $y_-(x_0) = y_{\max}(x_0)$.

II. Пусть $a > 0$, $D > 0$, тогда $\varepsilon_a = 1$, $|a| = a$ и $\varepsilon_D = -1$ на основании (4. 7)

$$y_+(x) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{a}} \right)^2 =$$

(с учетом равенства $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$) получим:

$$= \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{D}{2\sqrt{a}} \right) \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{a}} \right) \quad (4.8).$$

И видим, что график функции $y_a(x)$ в этом случае будет направлен вверх и пересекает ось Ox в точках:

$$\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{a}} = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{a}x_{1,2} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{a}} = 0$$

или $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$

Следовательно, мы получим

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{D}}{2a};$$

$$x_2 = -\frac{b - \sqrt{D}}{2a};$$

$$-\infty < x \leq x_1, \quad y_+(x) > 0, \quad y_+(x_1) = y_+(x_2) = 0 \quad \text{и}$$

$$y_+(x) < 0, \quad x_1 < x < x_2, \quad y_+(x) > 0, \quad (x_2 + \infty).$$

График квадратного трехчлена $y_+(x)$ в этих случаях ($a > 0; D > 0$) будет иметь вид:

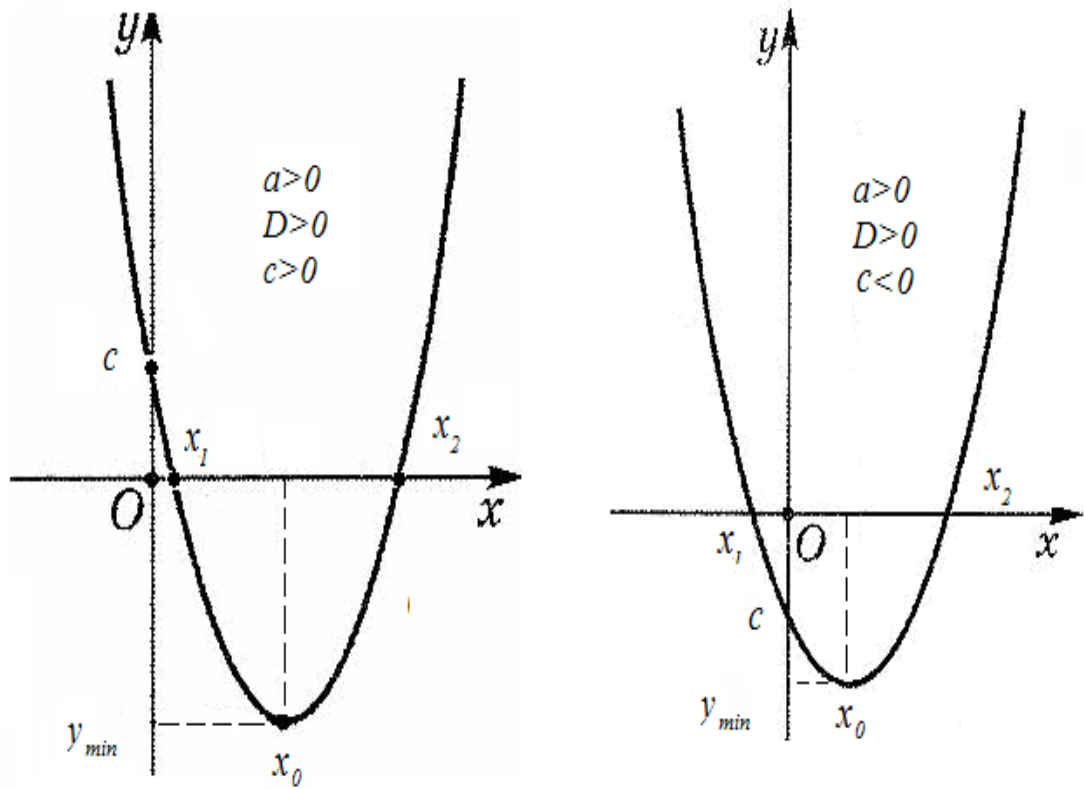


Рисунок 4.2

Найдем наименьшее значение $y_+(x)$ и $y_{\min}(x_0) < 0$, оно достигается в точке $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ - среднее арифметическое значение корней. Заметим, что при $D \rightarrow 0$ это так же охватывает I случай

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

т.к. $x_1, x_2 \rightarrow x_0$.

III. Пусть $a < 0$, $D > 0$, то

$$\begin{aligned} & -\left(\sqrt{|a|}x + \frac{b}{2\epsilon_a\sqrt{|a|}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{|a|}}\right)^2 = \\ & = -\left(\sqrt{|a|} \cdot x + \frac{b}{2\epsilon_a\sqrt{|a|}} - \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{|a|}}\right) \cdot \left(\sqrt{|a|} \cdot x + \frac{b}{2\epsilon_a\sqrt{|a|}} + \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{|a|}}\right) \\ & \text{или} -\left(\sqrt{|a|}x + \frac{b}{2\epsilon_a\sqrt{|a|}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{|a|}}\right)^2 = \\ & = -\left(\sqrt{|a|} \cdot x + \frac{b}{2\epsilon_a\sqrt{|a|}} - \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{|a|}}\right) \cdot \left(\sqrt{|a|} \cdot x + \frac{b}{2\epsilon_a\sqrt{|a|}} + \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{|a|}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{и } x_{1,2} = \frac{b}{2|a|} \pm \frac{\sqrt{D}}{2|a|} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2|a|} = \frac{b \mp \sqrt{D}}{2a},$$

т.к. $|a| = \varepsilon_a a = -a$.

Вывод: При $a < 0$ график функции симметрично отображается в нижнюю полуплоскость и $x_2 \leftrightarrow x_1$

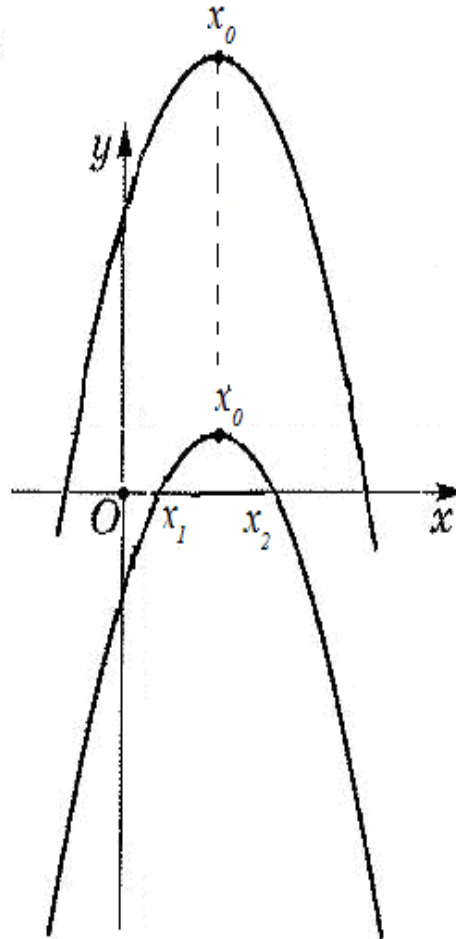


Рисунок 4.3

$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. При $y_-(x_0) = y_{\max} > 0$ $(-\infty; +\infty)$, при $y_-(x) < 0$ $[x_2, x_1]$ $y \geq 0$; $(x_1, +\infty)$ $y_-(x) < 0$.

VI. Случай: Пусть $D < 0$; $-D > 0$ $\varepsilon_{(-D)} > 0$ $\varepsilon_{(-D)} > 0$

$$y_a(x) = \varepsilon_a \left(\left(\sqrt{|a|} \cdot x + \frac{b}{2\varepsilon_a(\sqrt{|a|})} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{|a|}} \right)^2 \right).$$

$$y_a(x) = \varepsilon_a \left(\left(\sqrt{|a|} \cdot x + \frac{b}{2\varepsilon_a(\sqrt{|a|})} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{|a|}} \right)^2 \right)$$

a ($a > 0$; $y_a(x) > 0$) и $a < 0$, $y_-(x) < 0$

$$y_a(x) = \varepsilon_a \left(\left(\sqrt{|a|} \cdot x + \frac{b}{2\varepsilon_a \sqrt{|a|}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{|a|}} \right)^2 \right) \quad (4.9).$$

Это значит, что при всех $-\infty < x < +\infty$, $y(x) > 0$; т.е. график функции не пересекает ось Ox и обе ветви направлены вверх, например:

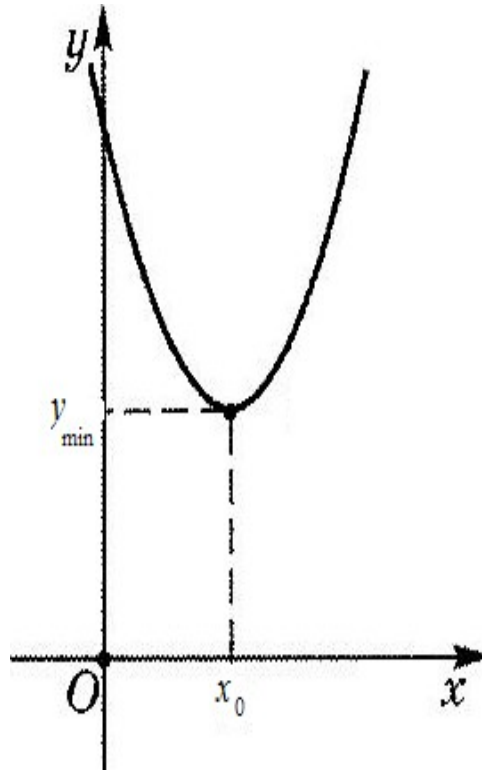


Рисунок 4.4

и точки $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Это прямо следует из равенства (7), т.е. отбрасываем

положительную величину $\left(\sqrt{\frac{|D|}{4a}} \right)^2$.

$$y_+(x) > \left[\sqrt{a^2} x + \frac{b}{2a} \right]^2, \text{отсюда}$$

$$\left[\sqrt{a} x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right]^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{a} x = -\frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad x = -\frac{b}{2a}$$

$$y_{\min} = y_+(x_0) = -\frac{D}{4a} < 0 \quad \text{т.к. } D > 0, a > 0.$$

Наконец найдем для $y_+(x)$, когда $D < 0$ минимум:

$$y_+(x) = ax^2 + bx + c = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right) + c =$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a} > 0$$

т.к. $-D > 0$; $D < 0$.

Теперь собирая все полученные выводы мы сформулируем нашу теорему:

Теорема. Пусть задан трехчлен

$$y(x) = ax^2 + bx + c,$$

тогда имеют место следующие выводы:

$$ax^2 + bx + c = \pm \left[\left(\sqrt{|a|}x + \frac{b}{2\sqrt{|a|}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{|a|}} \right)^2 \right]$$

$$\text{I. } y_+(x) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2, \quad a > 0, \quad D = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a}; \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a};$$

$$y(x_0) = y_{\min} = 0.$$

$$\text{II. } y_+(x) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{a}} \right)^2; \quad a > 0, \quad D > 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad x_0 = -\frac{b}{2a};$$

$$y(x_0) = y_{\min} = -\frac{D}{4a} < 0.$$

$$\text{III. } y_+(x) = ax^2 + bx + c = \left[\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{|D|}{4a}} \right)^2 \right] \quad a > 0, \quad D < 0 \quad \text{и} \quad x_0 = -\frac{b}{2a};$$

$$y_+(x_0) = y_{\min} = -\frac{D}{4a} > 0; \quad -D > 0.$$

Точно так же исследуется случай $a < 0$.

Согласно (4.7) следует что,

$$y = - \left[\left(\sqrt{|a|}x + \frac{b}{2\sqrt{|a|}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{|D|}{4|a|}} \right)^2 \right].$$

Итак, в данной главе рассмотрены все случаи с различными коэффициентами и знаками при дискриминанте.

В следующей главе приведены примеры решения квадратных трехчленов неординарным способом, представленных в виде различных примеров от тривиального типа до задач повышенной трудности, а также отдельным пунктом данного последующего раздела является база из словесных задач решенные нетрадиционным методом.

Данная глава завершается еще одними небольшим пунктом связанный с некоторыми свойствами многочленов.

4.2 Применение к квадратным функциям от двух переменных формул поворота вокруг оси координат для упрощения

Если многочлен второго порядка задан уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

то, применив преобразование поворота вокруг осей координат с использованием формул [14]:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \quad \text{и} \quad (4.10)$$

$$y = x' \sin \alpha - y' \cos \alpha ,$$

следует при надлежащем выборе α освободиться в уравнении от члена с произведением координат.

Случай распада кривой второго порядка на две прямые может быть легко установлен по исходному уравнению следующим образом: рассматривая уравнение как квадратное относительно y (предполагая, что коэффициент при y^2 отличен от нуля), разрешают его относительно y ; если при этом под корнем окажется точный квадрат некоторого двучлена $ax + b$, то корень извлечется, и для y получатся два значения:

$$y_1 = k_1 x + b_1 ;$$

$$y_2 = k_2 x + b_2 .$$

Это и покажет, что кривая распадается на две прямые.

Данное уравнение может быть решено и относительно x .

Если в общем уравнении кривой второго порядка $A = C = 0$, то указанное уравнение определяет пару прямых тогда и только тогда, когда

$$\frac{B}{D} = \frac{2E}{F} .$$

В этом случае левая часть уравнения разлагается на линейные множители. Дальше каждое линейное уравнение можно рассматривать по трем пунктам: когда $D = 0$, $D > 0$, $D < 0$. Выше изложенное представлено в виде схемы в приложении Б.

Рассмотрим пример: показать, что уравнение

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 25 = 0$$

представляется в двух уравнений с одной переменной и определяет совокупность двух прямых.

Решение: перепишем уравнение в виде:

$$(3x + 4y)^2 - 25 = 0 .$$

Разложив левую часть на множители получаем

$$(3x + 4y + 5)(3x + 4y - 5) = 0$$

Таким образом, заданное уравнение определяет прямые

$$(3x + 4y - 5) = 0$$

$$(3x + 4y + 5) = 0$$

Каждую из которых можно решить нетрадиционным методом через дискриминант и коэффициенты выразив одну переменную через другую.

Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F, \text{ тогда}$$

используя формулы (4.10) мы можем представить функцию в виде кривых второго порядка, а именно эллипсом, гиперболой и параболой в зависимости от дискриминанта. Несколько примеров рассмотрено в приложении В [15].

5 БАЗА ЗАДАЧ ПО КВАДРАТНЫМ ТРЕХЧЛЕНАМ РЕШЕННЫХ НЕОРДИНАРНЫМ СПОСОБОМ

5.1 Тривиальные примеры решения квадратных трехчленов неординарным способом

1. Рассмотрим пример:

$$f(x) = x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 58x^3 + 102x^2 - 96x + 72.$$

Доказать, что функция всюду больше нуля [16].

Решение:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 58x^3 + 102x^2 - 96x + 72 = \\ &= x^6 - 5x^5 - x^5 + 18x^4 + 5x^4 + 2x^4 - 30x^3 - 18x^3 - \\ &\quad - 10x^3 + 36x^2 + 30x^2 + 36x^2 - 36x - 60x + 72 = \\ &= (x^4 - 5x^3 + 18x^2 - 30x + 36)x^2 - (x^4 - 5x^3 + 18x^2 - 30x + 36)x + \\ &\quad + (x^4 - 5x^3 + 18x^2 - 30x + 36)2 = \\ &= (x^2 - x + 2)(x^4 - 3x^3 - 2x^3 + 6x^2 + 6x^2 + 6x^2 - 12x - 18x + 36) = \\ &= (x^2 - x + 2)(x^2 - 3x + 6)(x^2 - 2x + 6) = 0 \end{aligned}$$

1) $x^2 - x + 2 = 0$: $D = 1 - 8 = -7 < 0$

2) $x^2 - 3x + 6 = 0$: $D = 9 - 24 = -15 < 0$

3) $x^2 - 2x + 6 = 0$: $D = 4 - 24 = -20 < 0$.

Следовательно, все $D < 0$ по III случаю нашей теоремы они все являются положительными.

2. Составьте уравнение с заданными корнями: $x_1 = -7$ и $x_2 = -2$

$$-p = x_1 + x_2 = -7 - 2 = -9$$

$$p = 9$$

$$q = -7 \cdot (-2) = 14$$

$$x^2 + 9x + 14 = 0$$

3. Дано уравнение

$$ax^2 + bx + c = 23,$$

a, b, c – натуральные числа. Доказать[17]: $D \neq 23$.

Доказательство: По определению $D = b^2 - 4ac$.

Отсюда при любых целых a и c , $4ac$ кратно 4;

Поэтому все будет зависеть от b ;

$b = 2k$ – четное число, тогда $b^2 = 4k^2$;

Следовательно,

$$D = b^2 - 4ac = 4(k^2 - ac) = 4Q \text{ т.е. в этом случае}$$

$$D \equiv 0 \pmod{4}$$

$$b = 2k + 1. \text{ Тогда } b^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4L + 1$$

$$\text{Поэтому } D = b^2 - 4ac = 4L + 1 - 4ac = 4(L - ac) + 1$$

Следовательно $D \equiv 1 \pmod{4}$ даем доказательство нашего утверждения.

Объединение этих двух случаев вместе, дает доказательство нашего утверждения.

$23 = 4 \cdot 5 + 3$, это противоречит следствию.

Общий вывод: При натуральных коэффициентах и целых корнях D нельзя представить в виде $4u + 2$ и $4u + 3$.

4. При нечетных p, q трехчлен

$$x^2 + 2px + 2q$$

не имеет рациональных корней т.е. D не является квадратом [18].

Пусть $p = 2n + 1$, $q = 2m + 1$, тогда

$$D = b^2 - 4ac = (2p)^2 - 4 \cdot 2q =$$

$$= 4(2n + 1)^2 - 4 \cdot 2(2m + 1) =$$

$$= 4(4n^2 + 4n + 1 - 4m - 2) =$$

$$= 4(4n^2 + 4n - 4m - 1) =$$

$$= 4 \cdot (4(n^2 + n - 1) + 3)$$

так как 4 – квадрат, то

$$4 \cdot (4(n^2 + n - 1) + 3)$$

тоже должен быть квадратом

$$4(n^2 + n - 1) + 3 \equiv 3 \pmod{4}$$

квадраты числа при делении на 4 дают в остатке 0 или 1 т. е. Возникает противоречие.

5. Примеры при $a > 0$, $D > 0$

а) $x^2 - x - 2 = 0$

$$a = 1 > 0, \quad b = -1, \quad c = -2$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 3}{2} = -1$$

$$x_2 = 2$$

б) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

$$D = (-3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9 \cdot 2 - 16 = 18 - 16 = 2$$

$$x_1 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

в) $(3x - 2)(x - 3) = 0$

$$3x^2 - 11x - 13 = 0$$

$$D = 121 + 156 = 277$$

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{277}}{2} = 5,5 - \sqrt{69,25}$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{277}}{2} = 5,5 + \sqrt{69,25}$$

г) $4x^2 - 3x - 22 = 0$

$$D = 19^2$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 2,75$$

6. Примеры при $a < 0$, $D > 0$

а) $-2x^2 + 3x + 5 = 0$

$$D = 49$$

$$x_{1/2} = 2,5; -1$$

б) $3(5x + 3)(4x^2 - 1) = 8(4x^2 - 1)^2$

$$3(5x + 3)(4x^2 - 1) - 8(4x^2 - 1)^2 = 0$$

$$(4x^2 - 1)(15x + 9 - 32x^2 + 8) = 0$$

$$(2x + 1)(2x - 1)(-32x^2 + 15x + 17) = 0$$

$$x_{1/2} = 0,5; -0,5$$

$$-32x^2 + 15x + 17 = 0$$

$$D = 225 + 2176 = 2401 = 49^2$$

$$x_1 = \frac{-15 - 49}{-64} = 1$$

$$x_2 = \frac{-15 + 49}{-64} = -\frac{17}{32}$$

в) $-9x^2 + 4x + 2 = 0$

$$D = 16 + 72 = 88 = 2\sqrt{22}$$

$$x_{1/2} = \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{22}}{9}; \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{22}}{9}$$

г) Вычислите с точностью 0,01 приближенные значения корней уравнения:

$$-x^2 + x + 7 = 0$$

$$D = 1 + 28 = 29$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{-2} = 0,5 + \sqrt{7,25} \approx 3,19$$

$$x_2 = 0,5 - \sqrt{7,25} \approx -2,19$$

6. Примеры при $a > 0$, $D = 0$

а) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

$$D = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{2}{3}$$

б)

$$a^4x^2 + 4ax^2 + 4x^2 + 2a^2 + 4a + a^2h$$

$$= x^2(a^4 + 4a + 4) + 2x(a + 2)a + a^2 =$$

$$= x^2(a + 2)^2 + x \cdot 2(a + 2)a + a^2 = 0$$

$$D = (a^2 + 4a + 4) \cdot 2^2 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2(a^2 + 4a + 4) = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2a^2 - 4a}{2a^2 + 8a + 8} = \frac{-2a}{a + 2}$$

7. Примеры при $a < 0$, $D = 0$

а) $-x^2 + 2x - 1 = 0$

$$D = 0$$

$$x_{1/2} = 1$$

б) $(2b + 1)^2 x^2 + 2(2b + 1)x + 1 = 0$

$$D = 4(2b + 1)^2 - 4(2b + 1)^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4b - 2}{2(2b + 1)^2} = \frac{-2(2b + 1)}{2(2b + 1)^2} = -\frac{1}{2b + 1}$$

Примеры при $a > 0, a < 0$, $D < 0$

а) $8x^2 - 2x + 3 = 0$

$$D = 4 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = -92 < 0$$

Случай третий, при $D < 0$. При рассмотрении графика функции мы можем определить, что функция расположена в первой четверти координатной плоскости и пересекает ось Oy .

5.2 Использование нетрадиционного подхода к задачам на теорему Виета

1. На теорему Виета. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения

$$2x^2 - 7x - 3 = 0.$$

Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) x_1, x_2^2 и x_1^2, x_2

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

$$2x^2 - 7x - 3 = 0$$

$$x^2 - 3,5x - 1,5 = 0$$

$$p_1 = -3,5 \quad q = -1,5$$

$$x_1 x_2 (x_1 + x_2) = q_1 \cdot (-p_1) = -5,25 = -p_2$$

$$p_2 = 5,25$$

$$q_2 = x_1 x_2^2 \cdot x_2 x_1^2 = (x_1 x_2)^3 = q_1^3 = (-1,5)^3 = -3,375$$

Ответ:

$$x^2 + 5,25x - 3,375 = 0;$$

$$8x^2 + 42x - 27 = 0$$

б) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$

$$-p_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-p_1}{q} = 3 \frac{1}{2} : \left(-1 \frac{1}{2}\right) = \frac{-7 \cdot 2}{2 \cdot 3} = -2 \frac{1}{3}$$

$$p_2 = 2 \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{q_1} = -\frac{2}{3}$$

$$x^2 + 2 \frac{1}{3} x - \frac{2}{3} = 0$$

$$3x^2 + 7x - 2 = 0$$

в) дается квадратное уравнение:

$$x^2 + px + 1 = 0$$

$$x^2 + qx + 1 = 0$$

α, β - корни первого уравнения

γ, δ - корни второго уравнения. Доказать что,

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2$$

По теореме Виета:

$$\alpha + \beta = -p, \quad \gamma + \delta = -q, \quad \alpha \cdot \beta = 1, \quad \gamma \cdot \delta = 1$$

Поэтому раскрывая левую часть равенства, получим:

$$\begin{aligned}
& (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = \\
& = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\beta\delta - \alpha\gamma) = 2\beta\delta^2 - \beta\gamma\delta - \alpha^2\gamma\delta + 2\beta\gamma^2 = \alpha\beta(\delta^2 + \gamma^2) - \gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2) = \delta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = \\
& = (\delta + \gamma)^2 - (\alpha + \beta)^2 = q^2 - p^2 \\
& = (\delta + \gamma)^2 - (\alpha + \beta)^2 = q^2 - p^2
\end{aligned}$$

г) Пусть $q > 3$ (простое), то $q^2 - 1 \vdots 24$
 $q > p > 3$, тогда $q^2 - p^2 \vdots 24$

$$|(\delta + \gamma)^2 + 1| - |(\alpha + \beta)^2 + 1| \vdots 24$$

$$p^2 + (\delta + \gamma)^2 = q^2 + (\alpha + \beta)^2 \text{ : всегда.}$$

2. При каком значении a уравнение имеет 1 корень?

$$(a+2)x^2 + 2(a+2)x + 2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

$$x^2 + 2x + \frac{2}{a+2} = 0$$

$$-p = -2 = x_1 + x_2 = 2x_1$$

$$x_1 = -1$$

$$\frac{2}{a+2} = -1 \cdot (-1)$$

$$2 = a + 2$$

$$a = 0$$

3. Решить уравнение:

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$x^2 - 2\frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3} = 0$$

$$-p = 2\frac{2}{3} = x_1 + x_2$$

$$q = -1\frac{2}{3} = x_1 \cdot x_2$$

Тут методом подбора можно найти:

$$x_1 = 1\frac{2}{3} \text{ и } x_2 = 1$$

Проверка:

$$x_1 + x_2 = 1 + 1\frac{2}{3} = 2\frac{2}{3} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 1\frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$$

4. При любых $\alpha \cdot \beta \neq 0$ для корней многочлена

$$P_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta,$$

если $P_{\alpha,\beta}(x) = 0$, то $(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = -1$

1) Доказательство: По теореме Виета для многочлена

$$x^3 - x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\beta}{\alpha}$$

имеет место разложение $(x_1, x_2, x_3 - \text{корни})$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = P_{\alpha,\beta}$$

Отсюда по теореме Виета:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{\beta}{\alpha}$$

Следовательно:

$$(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3}{x_1 x_2 x_3} \right) = \\
&= 1 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-1} = -1
\end{aligned}$$

2) $P_{-\alpha, \beta}(x) = -\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$, при

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{\beta}{\alpha}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3}{x_1 x_2 x_3} \right) = \\
&= -1 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-1} = 1
\end{aligned}$$

3) $P_{\alpha, -\beta}(x) = \alpha x^3 - \alpha x^2 - \beta x - \beta$, при

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{\beta}{\alpha} \text{ тогда,}$$

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3}{x_1 x_2 x_3} \right) = \\
&= 1 \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-1} = -1
\end{aligned}$$

Одсюда можно сформулировать общую теорему:

Если $x^3 + ax^2 + bx + c$ — многочлен третьей степени, $c \neq 0$, x_1, x_2, x_3 — корни, то

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \\
&= \frac{(-a)b}{-c} = \frac{ab}{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \frac{(-a)b}{-c} = \frac{ab}{c} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c \end{cases}$$

Следствие: Пусть $a = b = c = 1$, тогда для корней кругового многочлена $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Справедливо равенство: $(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 1$

$$(x-1)(x+1)(x-1)(x+1) = x^4 - 1$$

$$P(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1} = (x+1)(x-i)(x+i)$$

$$i^2 = -1$$

$$(-1+i-i) \left(\frac{-1}{i} + \frac{1}{i} + \frac{1}{-i} \right) = 1$$

5.3 Применение нетрадиционного метода решения квадратичного трехчлена к Героновым треугольникам

Пусть a, b, c - произвольные ненулевые вещественные числа. Рассмотрим квадратный трехчлен [19]:

$$f(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2) \cdot x + c^2.$$

Сформулируем задачу.

1) доказать, что если a, b, c любые положительные числа, то функция $f(x)$ положительно – определенная всюду;

2) если a, b, c - натуральные числа, то докажем, что имеются треугольники площади которых также является натуральным числом и имеет место равенство:

$$16S^2 = -D,$$

где S - площадь треугольника.

Первое утверждение легко проверяется для любых положительных чисел a, b, c .

Для второго же случая кратко остановимся на одном диофантовом уравнении - «О задаче Герона».

Постановка задачи: уравнением Герона называется диофантовое уравнение

$$16S^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b-a+c)(a+b+c), \quad (5.1)$$

$$a, b, c, S \in \mathbb{Z}_+; \quad a < b+c; \quad b < c+a; \quad c < a+b. \quad (5.2)$$

Требуется найти решение уравнения (5.1) с условиями (5.2) в положительных целых числах. задачу геометрически можно трактовать в виде: пусть задан треугольник со сторонами a, b, c и площадью S . Тогда в задаче Герона (ЗГ) условие (5.1) непосредственно выполняется, поэтому в дальнейшем

будем говорить о героновых треугольниках (ГТ) и обозначим $\Gamma = \langle a, b, c, S \rangle$, а

множество пифагоровых треугольников (ПТ) обозначим через $\Pi = \langle a, b, c \rangle$. В

этом случае $a^2 + b^2 = c^2$. Эта тема достаточно широкая и имеются множества разных результатов. Для полноты картины приведем один из общих решений «Пифагоровских троек»: $a = m^2 - n^2$; $b = 2mn$; $c = m^2 + n^2$, $m > n$; m, n - натуральные числа. Если стороны треугольника являются натуральными числами, а так же и **площадь треугольника окажется натуральным числом**, то это будет выражать «Задачу Герона». Тем самым ЗГ является прямым обобщением задачи Пифагора (ЗП), выражающая: о нахождении всех *прямоугольных треугольников* для которых стороны являются натуральными числами, т.е. найти все решения диофантового уравнения $a^2 + b^2 = c^2$ в натуральных числах. Задача Герона обобщает ЗП тем, что условие «*прямоугольности треугольников*» заменяется требованием целочисленности площади рассматриваемого треугольника. Напомним, что равенство (5.1) напрямую связана с формулой Герона, где площадь треугольника определяется равенством

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$p = \frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр сторон треугольника. Заметим, что в случае ЗП равенство (5.1) превращается в следующее равенство

$$16S^2 = 4a^2b^2 \rightarrow S = \frac{a \cdot b}{2},$$

при этом известно, что a и b - числа разной четности.

Равенство $S = \frac{a \cdot b}{2}$

возможно лишь для прямоугольных треугольников. Тем самым мы показали, что каждый пифагоровский треугольник является героновым треугольником, то есть $\Pi \subset \Gamma$. А вот обратное неверно. Здесь мы ограничимся примерами:

$$\langle 13, 14, 15; 84 \rangle \in \Gamma,$$

$$\langle 13, 14, 15 \rangle \notin \Pi,$$

$$\langle 7, 15, 20, 42 \rangle,$$

$\langle 9, 10, 17, 36 \rangle$, а следующая тройка чисел: $\langle 5, 5, 6, 12 \rangle$ - равнобедренный или более общий случай:

$$\langle 13 \cdot k, 14 \cdot k, 15 \cdot k; 84k^2 \rangle \in \Gamma,$$

$$\langle 13 \cdot k, 14 \cdot k, 15 \cdot k \rangle \notin \Pi,$$

при любом натуральном числе k . Следует заметить, что в классификации пифагоровских и героновских треугольников различают случаи, когда стороны треугольника являются взаимно простыми, т.е. $((a, b, c) = 1)$. Также заметим, что в героновых треугольниках случай с равносторонними сторонами исключается. Более подробно об этом и многих других свойствах ПТ и ГТ и интересных задачах связанными с ними можно прочитать например, в монографии.

Вернемся к нашему многочлену, согласно формуле Герона с учетом значения параметра P имеем [20]:

$$S^2 = -\frac{((a+b)^2 - c^2)((a-b)^2 - c^2)}{16}, \quad (5.3)$$

$$\text{или } 16S^2 = -((a+b)^2 - c^2)((a-b)^2 - c^2),$$

с одной стороны. С другой стороны найдем дискриминант нашего многочлена.

$$\begin{aligned} D &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = ((a+b)^2 - c^2)((a-b)^2 - c^2) = \\ &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Следовательно, из равенств (5.1) – (5.4) следует доказательство $16S^2 = -D$, при этом $D < 0$. Далее если a, b, c - выражают пифагоровы треугольники, то из равенства (5.1) непосредственно получаем, что $D = -(2ab)^2 < 0$.

В завершении для полноты картины сформулируем одно из известных утверждений относительно ГТ.

Теорема 2. Пусть $\langle a, b, c, S \rangle$ - любой геронов треугольник. Тогда существуют натуральные числа m, n, k такие, что имеют место равенства [21]:

$$a = m + n; \quad b = n + k; \quad c = k + m; \quad (5.5)$$

$$S^2 = mnk \cdot (m + n + k); \quad p = m + n + k, \quad (5.6)$$

где P - полупериметр геронов треугольника $\langle a, b, c, S \rangle$.

Таким образом, наш квадратный трехчлен представляется согласно теореме 1. в виде суммы квадратов.

$$f(x) = \left(bx + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{S^2}{b^2}} \right)^2$$

Если же $\langle a, b, c, S \rangle \in \Gamma$, то это же равенство верно для героновых треугольников. Если же $\langle a, b, c \rangle \in \Pi$, то верна формула:

$$f(x) = b^2(x+1)^2 + a^2,$$

что очень важно для целочисленных аргументов. Далее найдем точку $x_0, y_{\min}$. Имеем

$$x_0 = -\frac{-b^2 + c^2 - a^2}{2b^2},$$

$$\text{тогда } y_{\min} = \frac{4S^2}{b^2}.$$

В частном случае когда $a, b, c \in P$, тогда $x_0 = -1$ и $y(-1) = a^2$.

5. 4 Применение нетрадиционного метода к многочленам

1. Доказать что для всех натуральных x , многочлен

$$f_5(x) = (x+1)^5 + x^4$$

делится на круговой многочлен $x^2 + x + 1$ [22].

Произведем преобразование в правой части

$$f_5(x) = (x+1)^5 + x^4.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} (x+1)^2(x+1)^3 + x^4 &= (x^2 + 2x + 1)(x+1)^3 + x^4 = \\ &= (x^2 + x + 1)(x+1)^3 + x \cdot (x+1)^3 + x^4 = \\ &= (x^2 + x + 1)(x+1)^3 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + x^4 = \\ &= (x^2 + x + 1)(x+1)^3 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x = \\ &= (x^2 + x + 1)(x+1)^3 + 3x^2(x^2 + x + 1) - x^4 + x = \\ &= (x^2 + x + 1)((x+1)^3 + 3x^2) - x(x^3 - 1) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x^2) - x(x-1)(x^2 + x + 1) = \end{aligned}$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x^2 - x^2 + x) =$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^3 + 5x^2 + 4x + 1).$$

Следовательно,

$$(x^2 + x + 1)(x^3 + 5x^2 + 4x + 1) : (x^2 + x + 1).$$

2. Дан многочлен $f(x) = x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 58x^3 + 102x^2 - 96x + 72$.

Доказать, что функция всюду больше нуля.

Решение: прежде всего представим многочлен в виде произведения трех квадратных многочленов.

$$f(x) = x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 58x^3 + 102x^2 - 96x + 72 =$$

$$= x^6 - 5x^5 - x^5 + 18x^4 + 5x^4 + 2x^4 - 30x^3 - 18x^3 -$$

$$f(x) = x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 58x^3 + 102x^2 - 96x + 72 =$$

$$= x^6 - 5x^5 - x^5 + 18x^4 + 5x^4 + 2x^4 - 30x^3 - 18x^3 -$$

$$- 10x^3 + 36x^2 + 30x^2 + 36x^2 - 36x - 60x + 72 =$$

$$= (x^4 - 5x^3 + 18x^2 - 30x + 36)x^2 - (x^4 - 5x^3 + 18x^2 -$$

$$- 30x + 36)x + (x^4 - 5x^3 + 18x^2 - 30x + 36)2 =$$

$$= (x^2 - x + 2)(x^4 - 3x^3 - 2x^3 + 6x^2 + 6x^2 + 6x^2 - 12x$$

$$-$$

$$- 18x + 36) = (x^2 - x + 2)(x^2 - 3x + 6)(x^2 - 2x + 6).$$

Следовательно, исходный наш многочлен представлен в виде: $f(x) = y_1(x) \cdot y_2(x) \cdot y_3(x)$.

Теперь каждый многочлен можно исследовать согласно нашим рассмотрениям. Здесь следует заметить, что всюду число $a = 1 > 0$. Остается произвести анализ по дискриминантам каждого из трех квадратных сомножителей. Покажем первый из них.

$$y_1(x) = x^2 - x + 2 = 0: D_1 = 1 - 8 = -7 < 0 \rightarrow (x - 0,5)^2 + (3,5)^2$$

$$y_2(x) = x^2 - 3x + 6 = 0: D_2 = 9 - 24 = -15 < 0$$

$$y_3(x) = x^2 - 2x + 6 = 0: D_3 = 4 - 24 = -20 < 0.$$

Следовательно, во всех случаях дискриминанты отрицательны, т.е. $D_j < 0$, $j = 1, 2, 3$. Каждый многочлен представляется в виде суммы двух квадратов. Тем самым исходный наш многочлен всюду положительно определенный.

Очевидно, что можно также записать два остальных многочлена в виде суммы двух квадратов и находить их минимумы во всех трех случаях. Тем самым определится минимум исходного многочлена [23].

Для полноты картины рассмотрим еще одну задачу:

3. Доказать что многочлен

$$f_7(x) = (x+1)^7 + x^5$$

делится на круговой многочлен $x^2 + x + 1$.

Произведем преобразование:

$$\begin{aligned} (x+1)^7 + x^5 &= (x+1)^2(x+1)^5 + x^5 = \\ &= (x^2 + 2x + 1)(x+1)^5 + x^5 = \\ &= (x^2 + x + 1)(x+1)^5 + x(x+1)^5 + x^5 = \\ &= (x^2 + x + 1)(x+1)^5 + x(x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1) + x^5 = \\ &= (x^2 + x + 1)(x+1)^5 + x^6 + 5x^5 + 10x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x + x^5 = \\ &= (x^2 + x + 1)(x+1)^5 + x^6 + 5x^3(x^2 + x + 1) + 5x^2(x^2 + x + 1) + x + x^5 = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 - 5x^3 - 5x^2) + x^6 + 5x^5 + x^4 - x^4 + x = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 1) + x^4(x^2 + x + 1) - x(x^3 - 1) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 1 + x^4) - x(x-1)(x^2 + x + 1) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x + 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(x^2 + x + 1)(x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x + 1) : (x^2 + x + 1).$$

Нами показано, что при $n = 0; 1$ эти многочлены делятся на $(x^2 + x + 1)$. Покажем, что они делятся на любой натуральный n .

Предполагая решение для частных случаев, применяем его для решения общего случая [24].

Общий случай. Доказать, что для любого значения при $n \in Z_+$ многочлен

$$f_{2n+1}(x) = (x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$$

делится на круговой многочлен $(x^2 + x + 1)$.

Доказательство общего случая приведем методом математической индукции.

1) Проверяем данное утверждение при $n = 0$.

В этом случае $(x + 1)^{2n+1} + x^{n+2} = x^2 + x + 1$.

2) Предполагаем, что утверждение верно и при n от 0 до k .

То есть, $(x + 1)^{2k+1} + x^{k+2} = x^2 + x + 1$.

3) Доказываем, что $n = k + 1$

$$\begin{aligned}(x + 1)^{2(k+1)+1} + x^{k+2+1} &= (x + 1)^{2k+3} + x^{k+3} = (x + 1)^{2k+1} \cdot (x + 1)^2 + x \cdot x^{k+2} = \\&= (x^2 + 2x + 1)(x + 1)^{2k+1} + x \cdot x^{k+2} = \\&= (x^2 + x + 1)(x + 1)^{2k+1} + x(x + 1)^{2k+1} + x \cdot x^{k+2} = \\&= (x^2 + x + 1)(x + 1)^{2k+1} + x((x + 1)^{2k+1} + x^{k+2}).\end{aligned}$$

То есть,

$$(x^2 + x + 1)(x + 1)^{2k+1} + x((x + 1)^{2k+1} + x^{k+2})$$

делится на $(x^2 + x + 1)$.

Что и требовалось доказать.

5.5 Некоторые задачи повышенной сложности. Тождество Исмоилова

1. Решить уравнение:

$$x^4 + px + q = 0$$

Решение: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – корни произведения

$$\beta = \alpha + d ;$$

$$\gamma = \beta + d = \alpha + 2d ;$$

$$\delta = \gamma + d = \beta + 2d = \alpha + 3d .$$

Тогда,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d =$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$\begin{cases} -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_2 + x_3 + x_4) = a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_4 = b \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_3x_2x_4 = c \\ x_1x_2x_3x_4 = d \end{cases}$$

2. Если $c = a + b$, то доказать

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2 \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \right)^2 \quad (\text{тождество Исмоилова})$$

Доказательство. Подставим в выражение значение c , тогда

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 + (a+b)^2}{2} \right)^2 &= 2 \left(\frac{2a^2 + 2ab + 2b^2}{2} \right)^2 \\ &= 2(a^2 + ab + b^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 3a^2b^2) = \\ &= 2a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4 = \\ &= a^4 + b^4 + (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) = \\ &= a^4 + b^4 + (a+b)^4 = a^4 + b^4 + c^4 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Приложение. Пусть x_1, x_2 корни квадратного уравнения, т.е.
 $x^2 + px + q = 0$

или равносильное

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}.$$

Справедливо равенство:

$$(x_1^4 + x_2^4 + p^4) = 2 \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + p^2}{2} \right)^2.$$

Доказательство следует из тождества Исмоилова.

$$C_x^n + C_y^n = C_z^n \quad \text{при } \forall n. \quad (5.7)$$

Существуют $x, y, z \in N$, такие что имеет место (5.7).

Ответ: $x = y = 2n - 1; z = 2n$. Следствие:

$$(C_{2n-1}^n)^4 + (C_{2n-1}^n)^4 + (C_{2n}^n)^4 = 2 \left(\frac{(C_{2n-1}^n)^2 + (C_{2n-1}^n)^2 + (C_{2n}^n)^2}{2} \right)^2$$

3. При каких a и всех $-\infty < x < +\infty$ исполнимы следующие выражения:

$$(a-2)x^2 + 2(2a-3)x + (5a-6) < 0$$

$$(a-2)x^2 + 2(2a-3)x + (5a-6) > 0$$

$$(a-2)x^2 + 2(2a-3)x + (5a-6) = 0 ?$$

Решение: Имеем

$$\begin{aligned} D &= [2(2a-3)]^2 - 4(a-2)(5a-6) = 4[(4a^2 - 12a + 9) - (5a^2 - 6a - 12)] = \\ &= 4(-a^2 + 4a - 3) \end{aligned}$$

- дискриминант нашего квадратного трехчлена. Тогда трехчлен по отношению к x (и параметра a) принимает вид:

$$y_a(x) = (a-2)x^2 + 2(2a-3)x + (5a-6).$$

При каких a , $y_a(x) = y$ всегда < 0 , где $-\infty < x < +\infty$.

Рассмотрим случай когда

$$(a-2) = 0, (a-2) > 0, (a-2) < 0.$$

1) $(a-2) = 0$, $a = 2$, тогда

$$y_2(x) = 2x + 4 = x(x+2).$$

Это выражение при $x < -2$ - отрицателен, а при $x = -2$ $y_2(-2) = 0$ и при $x > 2$ положителен, т.е. отсюда следует, что $y_a(x) < 0$ только при $x < -2$. Этот случай нам не подходит.

2) $a > 2$, тогда (при обозначении $a-2 = A$) $A > 0$.

$$y_A(x) = Ax^2 + 2(2A+1)x + (6a - a - 12 + 6) =$$

$$Ax^2 + 2(2A+1)x + (6A - (A+2) + 6) =$$

$$= Ax^2 + 2(2A+1)x + (5A+4).$$

$A > 0$, т.е. при всех $a-2=A > 0$ характеризуется этот многочлен $y_A(x) > 0$ т.к.

$$D_A = 4(2A+1)^2 - 4(5A+4) \cdot A = 4(4A^2 + 4A + 1)$$

Т.е. $y_A(x) = 0$ как минимум в двух точках - это корни уравнения:

$$Ax^2 + 2(2A+1)x + 5A+4 = 0.$$

Также нам не подходит.

3) Пусть теперь $a-2=b < 0$, т.е. $a < 2$, тогда

$$y_b(x) = bx^2 + 2(2b+1)x + 5b+4 = 0, \quad b < 0,$$

тогда $D_b = -4(b^2 - 1) < 0$ при $b^2 - 1 > 0$, т.е. $b^2 > 1$.

Отсюда следует что $y_b(x) = 0$ и график направлен вниз.

При этом из $D_b = -4(b^2 - 1)$ видно, что при $D_b < 0$ уравнение $y_b(x)$ при всех $-\infty < x < +\infty$ не имеет корней, т.е. не пересекает ось Ox . Тем самым все сводится к неравенству [25].

$b^2 - 1 > 0$ (т.е. $D_b = -4(b^2 - 1) < 0$, если $b^2 - 1 > 0$).

Отсюда следует:

$$(a-2)^2 - 1 > 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 > 0 \Rightarrow a < 1$$

и $a_{1/2} = 2 \pm 1$. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.

Ответ: при всех a для которых $(-\infty, 1)$ $y_a(x) < 0$.

5.6 Словесные задачи по квадратным трехчленам решенные нетрадиционным методом

1. Найдите отношение двух чисел, если известно, что разность первого числа и 10% второго числа составляют 50% суммы второго и 50% первого [26].

x_1 – первое число, x_2 – второе число

$$x_1 - 0,1x_2 = \frac{x_1 + 0,5x_2}{2}$$

$$2x_1 - 0,2x_2 = x_1 + 0,5x_2$$

$$x_1 = 0,7x_2$$

$$\frac{x_1}{x_2} = 0,7$$

Второй пример несколько отличается от предыдущих многочленов.

2. Доказать, что при любых значениях $n \in N$ и $\alpha \in R$, удовлетворяющих условиям $n > 1$ и $\sin \alpha \neq 0$, многочлен

$$f_n(x, \alpha) = x^n \sin \alpha - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

делится на многочлен $Q(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1$.

Замечание. Здесь «делимость» понимается в широком смысле этого слова, то есть, $(x^2 + x + 1)$ содержится в составе $f_n(x, \alpha)$.

Другими словами $f_n(x, \alpha) : Q(x)$ относительно поля R - действительных чисел.

Многочлен $Q(x)$ представим в виде суммы двух квадратов. Имеет место рассмотренная в прошлой нашей статье.

Следовательно, многочлен

$$Q(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1$$

представим в виде

$$Q(x) = (x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha.$$

Действительно,

$$Q(x) = (x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = x^2 - 2x \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = x^2 - 2x \cos \alpha + 1.$$

Обозначим $x_\varepsilon = \cos \varepsilon \alpha + i \varepsilon \sin \alpha$, где $\varepsilon \in \{-1; 1\}$.

Если возведем это выражение в n -ную степень, то получим формулу Муавра.

$$x_\varepsilon^n = (\cos \varepsilon \alpha + i \varepsilon \sin \alpha)^n = \cos n \alpha + i \sin n \alpha = \cos n \alpha + i \varepsilon \sin n \alpha.$$

Тогда многочлен

$$f_n(x, \alpha) = x^n \sin \alpha - x \sin n \alpha + \sin(n-1)\alpha$$

представится в виде:

$$\begin{aligned} f_n(x, \alpha) &= (\cos n \alpha + \varepsilon i \sin n \alpha)^n \sin \alpha - (\cos \alpha + \varepsilon i \sin \alpha) \sin n \alpha + \sin(n-1)\alpha = \\ &= \cos n \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin n \alpha + \sin(n-1)\alpha = \sin(1-n)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что согласно теореме Безу многочлен $f_n(x, \alpha)$ делится на

$$Q(x) = (x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha.$$

Рассмотрим частный случай: Пусть $\alpha = 120^\circ$, а $n = 2$.

Тогда
$$f_n(x, \alpha) = x^2 \sin \alpha - x \sin 2\alpha + \sin(2-1)\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} = x^2 - x + 1,$$

$$\text{а } Q(x) = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + 1 = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Легко видеть, что $f_n(x, \alpha)$ делится на $Q(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении можно добавить, что рассмотренная наша диссертационная работа посвященная квадратичным многочленам и достаточно актуальна в нашем современном мире и вполне естественна. Многие практические задачи основаны на квадратичных многочленах. Многочлены в школьном курсе алгебры занимают ведущее место. На их изучение отводится времени больше, чем на любую другую тему школьного курса математики. Сила многочленов, а именно трехчленов в том, что она не только имеет теоретическое значение для познания естественных законов, но и служит конкретным практическим целям. Большинство задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов многочленов. Овладевая способами их решения, люди находят ответы на различные вопросы из науки и техники (транспорт, сельское хозяйство, промышленность, связь и т.д.). Так же для формирования умения решать многочлены большое значение имеет самостоятельная работа и углубленное изучение. Поэтому с помощью данного диссертационного проекта можно по новому взглянуть на изучение квадратичных трехчленов, сделать немало выводов.

В ходе диссертационной работы были решены следующие задачи: изучен научно – методический материал о квадратичных трехчленах, изучен научно – методический материал о квадратных уравнениях, разобраны примеры, изучена программа школьного курса преподавания математики в старших классах, изучена история квадратных трехчленов и теорема Виета, дан полный анализ классического представления квадратичного трехчлена, их функции и графики, анализировано большое количество научно – методической литературы, содержащая методы построения графиков квадратичного трехчлена относительно его данных, рассмотрена теорема Виета при решении квадратных уравнений, рассмотрен нетрадиционный подход к изучению квадратных трехчленов, дан вывод общей теоремы и рассмотрены следствия, построены графики функции на основе рассмотренных следствий, сформулированы утверждения и рассмотрены некоторые примеры подтверждающие данные утверждения, решены примеры квадратных трехчленов неординарным

способом, построены графики функции на основе рассмотренных следствий, а также дан им полный анализ. Создан методический аспект в виде систематизированной базы задач решенных нетрадиционным методом, а так же дан анализ достигнутых целей и постановка следующей задачи в ходе выполнения работы были достигнуты.

Поставленная проблема исследования, в ходе диссертационной работы, заключающаяся в разработке научных основ содержания обучения квадратных многочленов посредством создания методических материалов, считаем вполне раскрытой.

Цель работы - исследование квадратичного многочлена, а именно трехчлена как функцию, на основе использования знака дискриминанта и коэффициента не прибегая к комплексным числам достигнутой. Рассмотрение применений результатов исследования к различным задачам примененной. Составление базы задач различных типов решенных данным методом раскрытой.

Гипотеза исследования, состоящая в том, что изучение содержания квадратичных трехчленов в качестве функции и представленная в трех видах открывает новые возможности для изучения не только квадратичных многочленов и многочленов при больших степенях, открывает широкие возможности для построения индивидуальных образовательных траекторий у учащихся, основанное на изучении многочленов, доказана.

Так как математический мир, богат и разнообразен, можно сказать, что на этом аспекте диссертационной работы нельзя поставить заключительную точку. Данная работа может быть продолжена, как с научно – теоретической точки зрения, так и в психолого-педагогическом и методическом плане.

В итоге, можно считать, что цель научного проекта достигнута, но это лишь малая часть. Данную диссертационную работу, естественно, можно и нужно продолжить, т. к. это очень интересный и познавательный процесс. Область применения квадратичных трехчленов очень обширна, поэтому данную работу можно продолжить в виде примеров на решение трехчленов третьей, четвертой и т.д. степенях нетрадиционным методом и создание методического аспекта в виде систематизированной базы задач.

Хотелось бы надеяться, что данный диссертационный проект внесет небольшой вклад в практику работы учителей школ и других учебных заведений, а также будет интересен любознательным школьникам и найдет свое отражение в школьных учебных пособиях по математике.

Также хотим выразить огромную благодарность, нашему научному руководителю - доктору физико-математических наук, профессору Исмоилову Додожону Исмоиловичу, за бесценные консультации и неутомимый энтузиазм в ходе создания данного проекта.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Чистяков Н.Н. Московское просвещение, вып.№3, статья: «Замечания к отделу о квадратных уравнениях». Москва, 1935, 54 с.
2. Бончковского Р. Н. Московское просвещение, вып.№ 4, Москва,1936 , 112 с.
3. «Задача Эйлера об уравнении» Московское просвещение, вып.№ 5, Москва,1937, 98-111 с.
4. Московское просвещение выпуск №7, Москва, 1936 г, 211 с.
5. <http://cadzone.ru> .
6. Вейль А. Занимательная математика. — М.: Мир, 1972 . 78 -96 с.
7. <http://www.computerbooks.ru>.
8. www.dubovskoy.net.
9. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Математический кружок. Первый год. – С.-Петербург, 1992, 45 с.
10. Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л. Внеклассная работа по математике в 6–8 классах. – М., Просвещение, 1997, 65-74 с.
11. Под ред. Шварцбурда С. И. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах. М., «Просвещение», 1977, 16с.
12. Под ред. Шварцбурда С.И. Внеклассная работа по математике в 9-11 классах. М., «Просвещение», 1977, 48-61с.
13. Лебедев В.И., Агошков В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. АН СССР, Инст. Выч. Мат., 1983, 56-88с.
14. www.wikipedia.org.ru.
15. Галицкий М. Л. Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре. 8-9 классы: пособие для учащихся общеобразоват. Учреждений—16-е изд.—М.: Просвещение, 2011, 23-33с.
16. Титчмарш Е. В. Теория функций 1980, 66-78с.
17. Бокаев М. С., Исмоилов Д., Сарбасова Н.Д. Основы линейной алгебры и линейного программирования. Учебное пособие.-Павлодар: Инновац. Евраз. Ун-т, 2011, 248с.
18. М.Н. Ильясов Олимпиады школьников по математике XXI. Павлодар. 2010, 179 с.

19. Ажгалиев О. Н., Отеш А. Д. Задачи математических олимпиад. 2001, 111-112 с.
20. Васильев Н. Ж., Молчанов С. Р., Розенталь Б. Н., Савин К. Д. Математические соревнования (геометрия), С-П, 1987г, 45-48 с.
21. Курош А. Г. Общая алгебра. М. 2007, 56-98с.
22. Самарский А. А. Введение в численные методы. 2007, 65-66с.
23. Бахвалов, Жидков, Кобельков Численные методы. 2003, 71-86с.
24. Кассел Дж., Фрелих А. Алгебраическая теория чисел 1969, 98-122с.
25. Дорофеев Г. В. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., 1968, 451-461с.
26. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач, 10 класс. М., 1982, 56-77с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Историческая справка. Символика Виета

Общую алгебру Виет называл «*logistica speciosa*», т.е. «*видовой логистикой*» (термин «логистика» у древних греков обозначал совокупность арифметических приемов вычислений, а термин «*вид*» имел здесь тот же смысл, что и «*символ*», так как латинское слово «*species*» среди прочих значений имеет также «*вид*» и «*образ*»). Предмет видовой логистики является система математических объектов, частью геометрических, частью псевдогеометрических, связанных между собой отношениями, аналогичными арифметическим.

Эти объекты образуют шкалу, лестницу величин, суть которых *сторона* (или *корень*), *квадрат*, *куб*, *квадрато-квадрат*, *квадрато-куб* и еще бесконечное множество других *скаляров* («*scalares*»), принадлежащих к различным реальным или фиктивным размерностям – длине или ширине, площади, объему, площади-площади, площади-объему и т.д. Сложение, вычитание и приравнивание скаляров подчинены, как и в древней математике, «*закону однородности*» (правилу, по которому производить перечисленные действия можно только с величинами одинаковой размерности).

Когда величины выражены числами, они и отношения между ними образуют предмет «*logistica numerosa*», т.е. «*числовая логистика*».

Между обеими частями алгебры существует тесная связь, и многие управляющие ими законы находятся в прямом соответствии. Так, умножению чисел соответствует «*проведение*» («*ductio*») одного скаляра по другому, а именно, образование нового скаляра, размерность которого равна сумме размерностей данных величин, аналогично. Аналогично делению соответствует «*приложение*» («*applicatio*») скаляров. Благодаря такому соответствию результаты видовой логистики можно применять к задачам числовой логистики. Однако эти две алгебры не тождественны, и, в частности, система скаляров не обладает ни свойствами поля, ни свойствами кольца.

Видовой логистике Виет придал требуемую общность, создав символика, в которой впервые появились знаки не только неизвестных, но и произвольных, т.е. переменных данных величин. В качестве знаков скаляров он принял прописные

буквы алфавита: гласные для неизвестных и согласные для известных. Виет отмечал, что необходимы наглядные и всегда одинаковые символы, позволяющие отличать данные величины от неизвестных, например, тем, что «искомые величины будут обозначены буквой *A* или другой гласной *E, I, O, U, Y*, а данные – буквами *B, C, D* или другими согласными». Это нововведение и особенно применение буквенных коэффициентов положило начало коренному перелому в развитии алгебры: только теперь стало возможным алгебраическое исчисление как система формул, как оперативный алгоритм.

Само слово «коэффициент» восходит к Виету, который употреблял его, правда, в несколько специальном смысле в «Первых замечаниях к видовой логистике» (изданных в 1631 году), где вслед за «Введением» приводятся различные преобразования алгебраических формул.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Алгоритм разложения на квадратные уравнения уравнений второго порядка

Если дан многочлен вида:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + c + cy^2 + dy + e,$$

то данную функцию можно представить в виде двух квадратных уравнений, с соответствующими дискриминантами:

$$D_1 = b^2 - 4ac \text{ и } D_2 = d^2 - 4ce,$$

и решать согласно нашему методу.

Если же функция представлена в виде:

$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

то данное уравнение раскладывается по формулам поворота вокруг оси координат для упрощения (4.10). В таких случаях графиками функции могут быть кривые второго порядка.

Итак, функция

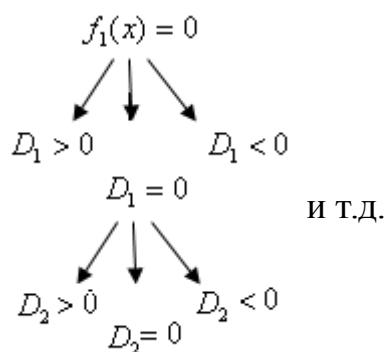
$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

разлагается на две функции: $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$.

Далее, применяем следующую схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = 0 \\ f_2(y) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_n) = 0 \end{array} \right.$$

Затем каждая функция рассматривается в трех случаях:



ПРИЛОЖЕНИЕ В

Пример на применение к квадратным функциям от двух переменных формул поворота вокруг оси координат для упрощения

Привести к каноническому виду уравнение

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$$

Преобразуем это уравнение, воспользовавшись формулами поворота осей координат. Имеем

$$\begin{aligned} & 5(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 4(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + \\ & + 8(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + \\ & + 8(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 14(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + 5 = 0 \end{aligned}$$

Или,

$$\begin{aligned} & (5 \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha + 8 \sin^2 \alpha) x'^2 + (5 \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha + 8 \cos^2 \alpha) y'^2 + \\ & + [6 \sin \alpha \cos \alpha + 4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) x' y' + (8 \cos \alpha + 14 \sin \alpha) x' + \\ & + (14 \cos \alpha - 8 \sin \alpha) y' + 5 = 0 \end{aligned}$$

Найдем α из условия $4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 6\sin\alpha \cos\alpha = 0$, т.е. приравняем нулю коэффициент при $x'y'$. Получаем уравнение $2\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha_1 = 2$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = -1/2$.

Заметим, что эти значения $\operatorname{tg}\alpha$ соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям. Поэтому, взяв $\operatorname{tg}\alpha = 2$ вместо $\operatorname{tg}\alpha = -1/2$, мы только меняем ролями оси x' и y' .

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = 2$, тогда $\sin\alpha = \pm 2/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$; возьмем положительные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Тогда уравнение принимает вид

$$9x'^2 + 4y'^2 + \frac{36}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0$$

Или

$$9\left(x'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right) + 4\left(y'^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right) = -5$$

Выражение в скобках дополним до полных квадратов:

$$9\left(x' + \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{5}}y'\right)^2 = \frac{35}{5} + \frac{1}{20} - 5$$

Или

$$9\left(x' + \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{5}}y'\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Приняв за новое начало точку $O'(-2/\sqrt{5}; 1/(4\sqrt{5}))$, применив формулы преобразования координат $x' = x'' - 2/\sqrt{5}$, $y' = y'' + 1/(4\sqrt{5})$; получим

$$9x''^2 + 4y''^2 = \frac{9}{4} \text{ или}$$

$$\frac{x''^2}{1/4} + \frac{y''^2}{9/16} = 1 (\text{уравнение эллипса.})$$