

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЖУМИРОВ БЕКСУЛТАН АМАНБЕКОВИЧ

**НЕСТАНДАРТНЫЕ ПОДХОДЫ К СУММИРОВАНИЮ СТЕПЕННЫХ
ЧИСЕЛ**

6М060100 Математика

Диссертация на соискание академической степени _____

**Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Исмоилов Додожон Исмоилович**

г.Павлодар, 2013 год

СОДЕРЖАНИЕ:

Введение.....	3
1. Определение степенных чисел	
1.1 Ознакомление со степенными числами.....	6
1.2 Некоторые задачи с применением Формулы Фаульхабера.....	9
2. Степенные числа в числах Фибоначчи	
2.1 О числах Фибоначчи.....	15
2.2 Степенные ряды в числах Фибоначчи.....	19
2.3 Задачи со степенными числами в числах Фибоначчи.....	21
3. Степенные числа в биномиальных коэффициентах	
3.1 Основные теоремы и свойства биномиальных коэффициентов.....	24
3.2 Задачи со степенными числами в биномиальных коэффициентах.....	26
4. Сумма обратных степенных чисел	
4.1 Сумма обратных квадратов.....	29
4.2 Тождество Эйлера в дзета-функции Эйлера.....	33
5. Суммирование степенных чисел в теории чисел	
5.1 Основные теоремы и формулы.....	37
5.2 Задачи на делимость суммы степенных чисел.....	38
5.3 Оригинальная задача с применением теоремы Виета.....	41
6. Теория рекурсии в решении некоторых задач с суммированием степенных чисел	
6.1 Теоремы и формулы.....	44
6.2 Суммирование разностей.....	48
6.3 Нестандартные решение задач со степенными числами.....	50
7. Задачи со степенными числами разного характера	
7.1 Задачи с суммированием степенных чисел которые не вошли в конкретную классификацию.....	53
7.2 Дополнительные задачи для самостоятельного решения.....	56
Заключение.....	58
Список использованных источников.....	60
Приложения.....	61

Определения:

Великая теорема Ферма: Для любого [натурального числа](#) $n > 2$ уравнение

$$a^n + b^n = c^n$$

не имеет натуральных решений a , b и c .

Формула Фаульхабера:

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}, \text{ где } B_1 = \frac{-1}{2}.$$

и где B_k - числа Бернулли

Числа Бернулли:

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^{k+1} B_{n-k} \text{ где } n \in \mathbb{N} \text{ и где } B_0 = 1.$$

Числах Фибоначчи:

Числа Фибоначчи — элементы числовой последовательности

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Формула Бине[4].

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Дзета-функция Римана — функция $\zeta(s)$, определяемая с помощью ряда Дирихле:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots,$$

где $s \in \mathbb{C}$.

Конечные разности — одно из базовых средств численного анализа.

Первая разность, или разность первого порядка функции f , обозначаемая Δf , определена следующим образом

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Факториальные множители:

$$x^{(n)} = \begin{cases} x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1), & \text{если } n > 0; \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases}$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

- $\forall$
- любой, который
- $\exists$
- существует
- $\Rightarrow$
- следует
- ∞
- бесконечно
- Σ
- сумма
- $\{$
- знак системы
- $\rightarrow$
если..., то
- R
- множество действительных чисел
- $\langle a, b, c, S \rangle$
- любой героновы́й треугольник.
- $\cup$
- объединение

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕФЕРАТ

**НЕСТАНДАРТНЫЕ ПОДХОДЫ К
СУММИРОВАНИЮ СТЕПЕННЫХ ЧИСЕЛ**

г.Павлодар, 2013 год

Реферат

Объем диссертационной работы 60 страниц, работа состоит из введения, семи разделов, заключения, использованной литературы и приложения. Количество иллюстрации – 1, таблица 1, 22 использованных литературных источников.

В введении раскрыты цель, задачи, актуальность, гипотеза, предмет и объект диссертационной работы, а также новизна данной работы. Рассмотрена оценка современного состояния решаемой проблемы, обладающая научным характером. Даны основание и исходные данные диссертационной работы.

В первом разделе рассматривается понятие степенных чисел и формула Фаульхабера, а также задачи решенные через эту формулу.

Во втором, рассмотрены свойства чисел Фибоначчи и нахождение суммы квадратов, степеней последовательных чисел Фибоначчи.

В третьем разделе рассмотрены основные свойства биномиальных коэффициентов и вычисление суммы их первой, второй степени.

Четвертый раздел рассматривает задачи с обратными степенными числами. Решение часто встречающихся задач. Рассматривается дзета-функция Римана.

В пятом разделе приведены задачи на делимости из теории чисел, и их подробные решения.

В шестом разделе приведено суммирование разностей чтобы решить задачи с суммированием степеней.

В седьмом разделе приведены некоторые задачи со степенными числами, которые не вошли в конкретную классификацию, и задачи для самостоятельного решения для интересующихся.

В заключении подведены итоги данной работы, основанные на решении поставленных задач и цели. Дается полный анализ диссертационной работы и формируются выводы относительно проведенной работы.

Приложения представлены в виде материала связанных с темой диссертационной работы.

Перечень ключевых слов: степенные числа, числа Фибоначчи, степенные ряды, теоремы, утверждения, свойства, формулы, биномиальные коэффициенты, дзета-функций, обратные числа, рекурсия, разности, факториал, суммирование.

Актуальность исследования: в школьных и в университетских курсах очень мало уделяется внимание степенным числам, а на самом деле знание о суммировании степенных чисел было бы очень полезным.

Цель исследования – изучить понятие степенных чисел. Рассмотреть виды задач в котором присутствуют суммирование степенных чисел, для определенного вида использовать нужную формулу. Исследовать, а также рассмотреть применение результатов исследования к различным задачам. Составить базу задач различных типов с решениями.

Объектом диссертационной работы выступает процесс исследования студентов суммирования степенных чисел и решение задач по данной теме.

Методы исследования: для решения поставленных в исследовании задач использовались следующие методы: анализ математической, психолого-педагогической, учебно-методической литературы и выполненных ранее диссертационных работ по проблеме исследования; анализ действующих школьных олимпиадных учебников и учебных пособий по математике, педагогическое наблюдение.

Этапы, процедура исследования: исследование учебно-математического материала, создание теоретической части, практические этапы, заключительная этап.

Полученные результаты, их новизна, научная и практическая значимость. Изучен научно – методический материал о суммировании степенных чисел, изучен научно – методический материал о свойствах и теоремах, разобраны примеры, изучена программа олимпиадного курса математики в старших классах, изучена основная формула для решения суммирования степенных чисел, дан полный анализ классического представления степенных чисел, их функции и теоремы, анализировано большое количество научно – методической литературы, содержащая методы решения задач в котором включены суммирование степенных чисел, рассмотрена формула Фаульхабера для решения суммы чисел с n -ыми степенями, рассмотрен нетрадиционный подход к решениям суммировании степенных чисел, дан вывод общей теоремы и рассмотрены следствия, испробованы важные формулы на основе рассмотренных следствий, сформулированы утверждения и рассмотрены некоторые примеры подтверждающие данные утверждения, решены примеры суммировании степенных чисел неординарным способом (сумма разностей например), рассмотрены много типов разных задач на одну и ту же задачу на основе рассмотренных следствий, а также дан им полный анализ. Создан методический аспект в виде систематизированной базы задач решенных нетрадиционным методом, а так же дан анализ достигнутых целей и постановка следующей задачи в ходе выполнения работы были достигнуты.

Поставленная проблема исследования, в ходе диссертационной работы, заключающаяся в разработке научных основ содержания обучения степенных чисел посредством создания методических материалов, считаем вполне раскрытой.

Цель работы - изучить понятие степенных чисел. Рассмотреть виды задач в котором присутствуют суммирование степенных чисел, для

определенного вида использовать нужную формулу. Исследовать, а также рассмотреть применение результатов исследования к различным задачам. Составить базу задач различных типов с решениями.

Гипотеза исследования, если мы изучим и дадим анализ по степенным числам и их рядам, то мы найдем эффективные методы решения задач повышенной сложности.

Сведения о публикациях: «Вестник инновационного Евразийского университета» №3 (47), 2012г, «Achievement of school - 2012», том 23.

Реферат

Диссертациялық жұмысының көлемі 60 бет, жұмыс кіріспеден, жеті тараудан, тұжырымнан, пайдаланылған - әдебиеттен және аддендумнен құралады. Суреттердің саны - 1, кесте саны - 1, пайдаланылған - әдеби бастаулардың саны - 22.

Кіріспеде мақсат, амалдар, өзектілігі, жорамал, пән және диссертациялық жұмыстың нысаны, және де айтылмыш жұмыстың жаңалығы анықталған. Ғылыми бағаға ие болып, мәселенің қазіргі күйінің сарапшылығы қарастырылған. Түп және диссертациялық жұмыстың бастапқы деректерлері айтылмыш.

Бірінші тарауда дәрежелік сандалдың ұғымы және Фаульхабер формуласының, және де есептер осы формула арқылы қарастырылады.

Екіншісінде, фибоначчи сандарының әрекеттері және квадраттардың сомасының табылуы, жалғасатын дәрежелі Фибоначчи сандарының квадраттарының қосындыс қарастырылған.

Үшінші тарауда биномиалды еселіктің негізгі қасиеттері және оның бірінші, екінші дәрежесінің сомасының есептелімі қарастырылған.

Төртінші тарауда қарама-қарсы дәрежелік сандары қолданылған есептер қарастырылады. Және көп кездесетін есептердің шешімі. Риманның дзета-функциясы қарастырылады.

Бесінші тарауда есептер бөлінгіштікте санның қағидасынан келтірілген, әрі олардың толық шешімдері.

Алтыншы тарауда айырымдардың қосындысы қарастырылған. Соларды қолданып дәрежелі сандардың қосындысы есептелген.

Жетінші тарауда кейбір дәрежелі есептердің қосындысы қарастырылған, сол есептер ешбір қатарға кірмеген. Және де өзіндік жұмысқа арналған есептер қарастырылған.

Сайып келгенде жиынтықта айтылмыш жұмыс, негізде бас шешім құрулы мақсаттар шешілген. Диссертациялық жұмыстың толық анализы беріледі және тұжырымдар біргелік жасалған жұмыстар белгілі нысанға келеді.

Берілген аддендумдерінің түрінде материалдың диссертациялық жұмыстың тақырыбымен қатынасты.

Маңызды сөздердің тізбесі: дәрежелік сандар, сандар, теоремалар, бекітулер, қасиеттер, формулалар, биномиалды еселіктер, дзета-функциялар, қарама-қарсы сандар, рекурсия, айырымдар, факториал, қосынды, фибоначчи, дәрежелік қатарлар.

Зерттеудің өзектілігі: мектептерде және университеттік курстарда дәрежелік сандар өте аз қарастырылады, ал расында дәрежелік сандардың білулеріміз өте үлкен пайда әкелуші еді.

Зерттеудің мақсаты - дәрежелік сандардың ұғымын зерттеу. Мақсаттың көріністерінің нешіншіде дәрежелік санның жинақтары қатысқанын зерттеу, тағайынды көрініс үшін пайдаланылуы керек формуланы. Зерттеулер, және қарастырылған зерттеулер нәтижесінің қолданысын түрлі мақсаттарға келтіру. Келтірілген түрлі үлгінің мақсатының базасын тынымдармен есептеу.

Диссертациялық жұмыстың нысанымен дәрежелік санның жинақтағы студенттердің зерттеу үдерісі және мақсаттың шешімініңде айтылмыш тақырыпты оқушы алдында қарастыру.

Зерттеу әдістерінен: құрастырылған есептің шешімі үшін зерттеу келесі әдістермен: психологиялық-педагогикалық әдебиеттің анализы математикалық, оқу-методикалық пайдаланылуы және ертерек диссертациялық жұмыстардың

орында- ша зерттеу мәселесінің; анализ қолданыстағы мектептің олимпиадалық оқулығы және оқу құралдарымныңдағы математикада, педагогикалық қадағалау.

Кезең, зерттеу рәсімі: оқулық-математикалық материалдың зерттелуі, қағидалы бөліктің жаралғаны, практикалық кезеңдер, ақырғы кезең.

Алынған нәтижелер, оның жаңалығы, ғылыми және практикалық әсері. танысқан ғылыми - әдістемелік материал туралы жинақта- дәрежелік сандар, танысқанымыз ғылыми - әдістемелік материал туралы қасиеттері және теорема, тексерілген мысалдар, танысқан бағдарлама олимпиадалық курс математикалық сыныпта, танысқанымыз негізгі формула үшін шешім жинақталған дәрежелік сандар, тамаша сан атқаратын қызметіндегі теорема және соңы, дәрежелік айтылмыш толық анализ классикалық, анализбен үлкен сан ғылыми - әдістемелік әдебиет, есептелген әдіспен есептер шешімі ара нешінші ішіне алынған жинақталған дәрежелік сандар, қарастырылған формула Фаульхабер үшін шешім n - дік дәреже мен қосынды сан, қарастырылған емес дәстүрлі тіл табу тыным жинақталған дәрежелік сандар, айтылмыш тұжырым теорема ортақ және қарастырылған сандар, қолданылған маңызды формула басты негіз қарастырылған салдар, тұжырымдағы бекітулері және қарастырылып біреу мысал растайтын айтылмыш бекітуде, жолға қойылған мысал жинақталған дәрежелік сандар қосындысы қарастырылған бөлек-бөлек мақсаттың көп үлгісі бас негізі қарастырылып салдардың бір және баяғы мақсатқа оларға толық анализ етуімен, және де берілген. Әдістемелік аспект түрінде мақсаттың қисындары базасының жолға қойылып емес дәстүрлі әдіспен жасалған, ал олай ғой кемел мақсаттың анализы және келесі мақсаттың қойылымы ара жүріс жұмыстың орындалуының кемел айтылмыш болуы.

Зерттелген құрулы мәселесі, ара жүріс диссертациялық жұмыстың, арқылы әдістемелік материалдың жаралғанының ара маңғаз санның тәлім-тәрбиесінің мазмұнының ғылыми негізінің зерттемесінде қамаламын, толығымен ашық есептейміз.

Жұмыстың мақсаты - танысқан дәрежелік санның ұғымы. Қарастырылған мақсаттың көріністерінің нешіншісінде дәрежелік санның жинақтары қатысады, тағайынды көрініс үшін пайдаланылуы керек формуланы. Зерттелгені, және де қарастырылған зерттеулер нәтижесінің қолданысын түрлі мақсаттарға келтіру. Келтірілген түрлі үлгінің мақсатының базасын тынымдармен.

Зерттеулік жорамалының, біз таныссақ және алып береміз анализді де маңғаз сандарға, сол біз табамыз көтеріңкі күрделіліктің мақсатының шешімінің тиімді әдістерін және оның қатарының.

Ақпараттар туралы жарияланымдары: «Вестник инновационного Евразийского университета» №3 (47), 2012г, «Achievement of school - 2012», том 23.

Abstract

The volume of dissertation work is 60 pages, work consists of the introduction, seven sections, the conclusion, the used literature and the appendix. Quantity of an illustration – 1, table 1, 22 of the used references.

In maintaining the purpose, tasks, relevance, a hypothesis, a subject and object of dissertation work, and also novelty of this work are opened. The assessment of the current state of the solved problem, possessing scientific character is considered. The grounds and input datas of dissertation work are given.

In the first section the concept of degree numbers and Faulkhaber's formula, and also tasks solved through this formula is considered.

In the second, properties of numbers of Fibonacci and finding of the sum of squares, degrees of serial numbers of Fibonacci are considered.

In the third section the main properties of binomial coefficients and calculation of the sum of their first, second degree are considered.

The fourth section considers tasks with inverse degree numbers. The solution of often meeting tasks. The zeta function of Riemann is considered.

In the fifth section tasks are given in fissility from a number theory, and their detailed decisions.

Toting of differences is given in the sixth section to solve problems with toting of degrees.

Some tasks are given in the seventh section with degree numbers which did not enter into concrete classification, and tasks for the self-contained decision for интересующихся.

In the conclusion are summed up this work, based on the solution of objectives and the purpose. The integrated analysis of dissertation work is given and conclusions of rather carried out work are formed.

Appendices are submitted in the form of a material bound to a subject of dissertation work.

List of keywords: degree numbers, numbers of Fibonacci, ascending power series, theorems, statements, properties, formulas, binomial coefficients, zeta-fuyektsy, inverse numbers, recursion, differences, factorial, toting.

Relevance of research: in school and in university courses the attention is very little paid to degree numbers, and actually the knowledge of toting of degree numbers would be very much the useful.

Research objective – to study concept of degree numbers. To consider types of tasks at which are present toting of degree numbers, for a particular look to use the necessary formula. To investigate, and also to consider application of results of research to various tasks. To make base of problems of various types with decisions.

As object of dissertation work process of research of students of toting of degree numbers and problem solving on this subject acts.

Research techniques: for the solution of the tasks set in research the following methods were used: the analysis of mathematical, psikhologo-pedagogical, educational and methodical literature and performed earlier dissertation works on a research problem; the analysis of operating school Olympiad textbooks and manuals on mathematics, pedagogical supervision.

Stages, research procedure: research of an educational and mathematical material, creation of theoretical part, practical stages, closing stage.

The received results, their novelty, scientific and practical significance. It is studied scientifically – a methodical material about toting of degree numbers, it is studied scientifically – a methodical material about properties and theorems, examples are sorted, the program of an Olympiad course of mathematics in the senior classes is studied, the basic formula for the solution of toting of degree numbers is studied, the integrated analysis of classical representation of degree numbers is given, to their

AND function of the theorem, analyzed great many scientifically – the methodical literature, containing methods of solution of tasks in which are included totaling of degree numbers, Faulkhaber's formula for the decision of the sum of numbers with n -degree numbers is considered, nonconventional approach to decisions totaling of degree numbers is considered, the conclusion of the common theorem is given and corollaries are considered, important formulas on the basis of the considered corollaries are tried, are formulated statements and are reviewed some examples confirming these statements, are solved examples totaling of degree numbers by extraordinary way (the sum of differences for example), many types of different tasks on the same task on the basis of the considered corollaries are considered, and also the integrated analysis is given them. The methodical aspect in the form of the systematized base of tasks solved by a nonconventional method and as the analysis of the reached goals and statement of the following task is given during realization of work is created were reached.

The put problem of research, during the dissertation work, consisting in development of scientific bases of the content of tutoring of degree numbers by means of creation of methodical materials, we consider quite opened.

The work purpose - to study concept of degree numbers. To consider types of tasks at which are present totaling of degree numbers, for a particular look to use the necessary formula. To investigate, and also to consider application of results of research to various tasks. To make base of problems of various types with decisions.

Research hypothesis if we study and we will give the analysis on degree numbers and their ranks, we will find efficient methods of solution of problems of the increased complexity.

Data on publications: "The messenger of innovative Euroasian university" g No. 3 (47), 2012, "Achievement of school - 2012", volume 23.

Список публикаций:

1. «Некоторые задачи на делимости и равенства многочленов», Вестник инновационного Евразийского университета №3 (47), 2012г;
2. «Числа Фибоначчи и их обобщение», Вестник инновационного Евразийского университета №3 (47), 2012г;
3. «Числа Каталана в теории вероятности», Achievement of school - 2012, том 23.

Список публикаций:

1. «Об одном нетрадиционном способе исследования квадратных трехчленов», Вестник инновационного Евразийского университета №1 (45), 2012г;
2. «Некоторые задачи на делимости и равенства многочленов», Вестник инновационного Евразийского университета №3 (47), 2012г;
3. «Числа Каталана в теории вероятности», Achievement of school - 2012, том 23.

ВВЕДЕНИЕ

Математика дает людям мощные методы изучения и понимания окружающего мира, методы исследования как теоретических, так и чисто практических проблем.

Переводя экономическую, транспортную, управленческую или любую другую задачу на математический язык, современный специалист получает возможность использовать для ее решения все разнообразие и богатство средств математики. Результаты, полученные с помощью математических методов физико-математического анализа, позволяют подтвердить или опровергнуть выдвинутую гипотезу, построить прогноз, составить оптимальный план функционирования практически действующего объекта.

Математика предлагает весьма общие и достаточно четкие логические задачи для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых задач других наук. Если математическая задача верно отражает суть данного явления, то она позволяет находить и ранее обнаруженные ранее закономерности, давать математический анализ условий, при которых возможно решение теоретических или практических задач, возникающих при исследовании этого явления. Такие модели формулируются на особом языке - языке чисел.

Если остановиться на всем математическом курсе изучения степенных чисел, то можно заметить неполный анализ исследования данной темы. Литературная база по данной теме весьма малозначительна. Для вычисления суммы чисел с последовательно возрастающей степенью, помимо решения через свойства геометрической последовательности есть еще несколько методов решения. Но есть и такие типы задач, например, вычисление суммы последовательности натуральных чисел, где n -ой элемент является число n в k -ой степени которые не всегда входят в школьную программу и в университетскую программу обучения математике, хотя применение таких задач довольно широкое. При исследовании и изучении суммировании степенных чисел мы придем к разным методам их решения и попробуем выбрать эффективный из них. Данный диссертационный проект предлагаем для изучения суммирования степенных чисел.

Цель диссертационной работы: изучить понятие степенных чисел. Рассмотреть виды задач в котором присутствуют суммирование степенных чисел, для определенного вида использовать нужную формулу. Исследовать, а также рассмотреть применение результатов исследования к различным задачам. Составить базу задач различных типов с решениями.

Объектом диссертационной работы выступает процесс исследования студентов суммирования степенных чисел и решение задач по данной теме.

Предметом диссертационной работы является обучение учащихся вырабатывать практические навыки применения результатов исследования, развитие навыков логического мышления, воображения и творческого

мышления, основанных на изучении функции с суммированными степенными числами.

Гипотеза – если мы изучим и дадим анализ по степенным числам и их рядам, то мы найдем эффективные методы решения задач повышенной сложности.

Новизна: исследование степенных чисел и их поведение в разных типах задач, вывод метода решения для каждого вида задач. Степень самостоятельности прослеживается в ходе исследования суммирования разных степенных чисел в нескольких типах задач, а также составление базы задач различной степени сложности.

Для достижения цели диссертационной работы и доказательства данной гипотезы, поставлены следующие **задачи**:

- изучить научно – методический материал с задачами о суммировании степенных чисел;
- изучить научно – методический материал имеющие понятие суммирования степенных чисел, разобрать примеры;
- рассмотреть формулу Фаульхабера для решения некоторых типов задач с суммированием степенных чисел;
- изучить поведение суммирования степенных чисел Фибоначчи и степеней биномиальных коэффициентов;
- рассмотреть задачу с суммированием обратных степенных чисел;
- проанализировать научно – методическую литературу, содержащую различные методы суммирования степенных чисел относительно его данных и проявления;
- рассмотреть теорему Виета при решении задачи из теории чисел, в качестве дополнительного анализа данной проблемы;
- рассмотреть задачи с суммированием степенных чисел в теории чисел, а именно на делимость;
- рассмотреть некоторые типы задач с суммированием степенных чисел, которые не входят в конкретную классификацию;
- рассмотреть задачи с суммированием степенных чисел через теорию рекурсии, суммировании разностей.
- формулировать утверждения и рассмотреть некоторые примеры, основанные на них;
- на примерах доказать эффективность использования некоторых теорем и свойств;
- решить некоторые примеры задач с суммированием степенных чисел разными способами;
- сравнить способы для выявления самого оптимального из них;
- создать методический аспект в виде систематизированной базы задач решенных наиболее эффективным методом.

Методы исследования. Для решения поставленных в исследовании задач использовались следующие методы: анализ математической, психолого-педагогической, учебно-методической литературы и выполненных ранее

диссертационных работ по проблеме исследования; анализ действующих школьных олимпиадных учебников и учебных пособий по математике, педагогическое наблюдение.

Работа состоит из введения, семи разделов, заключения, использованной литературы и приложения.

В введении раскрыты цель, задачи, актуальность, гипотеза, предмет и объект диссертационной работы, а также новизна данной работы. Рассмотрена оценка современного состояния решаемой проблемы, обладающая научным характером. Даны основание и исходные данные диссертационной работы.

В первом разделе рассматривается понятие степенных чисел и формула Фаульхабера, а также задачи решенные через эту формулу.

Во втором, рассмотрены свойства чисел Фибоначчи и нахождение суммы квадратов, степеней последовательных чисел Фибоначчи.

В третьем разделе рассмотрены основные свойства биномиальных коэффициентов и вычисление суммы их первой, второй степени.

Четвертый раздел рассматривает задачи с обратными степенными числами. Решение часто встречающихся задач. Рассматривается дзета-функция Римана.

В пятом разделе приведены задачи на делимости из теории чисел, и их подробные решения.

В шестом разделе приведено суммирование разностей чтобы решить задачи с суммированием степеней.

В седьмом разделе приведены некоторые задачи со степенными числами, которые не вошли в конкретную классификацию, и задачи для самостоятельного решения для интересующихся.

В заключении подведены итоги данной работы, основанные на решении поставленных задач и цели. Дается полный анализ диссертационной работы и формируются выводы относительно проведенной работы.

Приложения представлены в виде некоторых таблиц связанных с темой диссертационной работы, а также дана некоторая небольшая историческая справка.

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕННЫХ ЧИСЕЛ

1.1 Ознакомление со степенными числами

Степенные числа – это числа которые являются степенью другого натурального числа. Степенные числа – тема которая мало рассматривается, хотя изучение таких математических понятий как степенные числа и суммирование степенных чисел очень полезны в теории чисел. Много великих теорем используют степенные числа, такие теоремы как теорема Безу, великая теорема Ферма, формула Фаульхабера и т.д.

Задачи со степенными числами в зависимости от их проявления может быть вычислена несколькими методами. Вот возможные проявления степенных чисел:

- в виде суммирования n -ой степени последовательных натуральных чисел;
- в виде суммы последовательных возрастающих степеней некоторого натурального числа n ;
- в виде суммы обратных степенных чисел;
- в виде суммы квадратов и кубов таких специальных чисел, как числа Фибоначчи и биномиальные коэффициенты;
- проявление степенных чисел в теории чисел;

Методы решений в соответствии с видом задач:

- решение их самым стандартным способом (например сумма первых n геометрических прогрессии) для суммы возрастающих степеней числа n ;
- решение суммы n -ой степени последовательных чисел через формулу Фаульхабера;
- решение суммы обратных степенных чисел через тождество Эйлера в дзета-функции Римана.;
- в теории чисел их решение через малую теорему ферма, или же через показательную теорему Эйлера.
- и напоследок, использование суммирования разностей для решение очень многих типов задач с суммированием степенных чисел.

Великая теорема Ферма[1]:

Для любого [натурального числа](#) $n > 2$ уравнение

$$a^n + b^n = c^n$$

не имеет натуральных решений a, b и c . (1.1)

Для случая $n = 3$ эту теорему в X веке пытался доказать ал-Ходжанди, но его доказательство не сохранилось.

В общем виде теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 году на полях «Арифметики» Диофанта. Дело в том, что Ферма делал свои пометки на полях читаемых математических трактатов и там же формулировал пришедшие на ум задачи и теоремы. Теорему, о которой ведётся речь, он записал с припиской, что найденное им остроумное доказательство этой теоремы слишком длинно, чтобы его можно было поместить на полях книги:

«Наоборот, невозможно разложить куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я нашел этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него».

Несколько позже сам Ферма опубликовал доказательство частного случая для $n = 4$, что добавляет сомнений в том, что у него было доказательство общего случая.

Эйлер в 1770 году доказал теорему для случая $n=3$, Дирихле и Лежандр в 1825 – для $n=5$, Ламе – для $n=7$. Куммер показал, что теорема верна для всех простых n , меньших 100, за возможным исключением т. н. иррегулярных простых 37, 59, 67.

Над полным доказательством Великой теоремы работало немало выдающихся математиков и множество дилетантов-любителей; считается, что теорема стоит на первом месте по количеству некорректных «доказательств». Тем не менее, эти усилия привели к получению многих важных результатов современной теории чисел. [Давид Гильберт](#), в своём докладе «Математические проблемы» на II Международном конгрессе математиков (1900) так отозвался об этой проблеме: «*проблема доказательства этой неразрешимости* являет разительный пример того, какое побуждающее влияние на науку может оказать специальная и на первый взгляд малозначительная проблема». В 1908 году немецкий любитель математики Вольфскель завещал 100 000 немецких марок тому, кто докажет теорему Ферма. Однако после Первой мировой войны премия обесценилась.

В 1980-х годах появился новый подход к решению проблемы. Из гипотезы Морделла, доказанной Фальтингсом в 1983 году, следует, что уравнение $a^n + b^n = c^n$ при $n > 3$ может иметь лишь конечное число взаимно простых решений.

Последний, но самый важный, шаг в доказательстве теоремы был сделан Уайлсом в сентябре 1994 года. Его 130-страничное доказательство было опубликовано в журнале «Annals of Mathematics». Доказательство основано на предположении немецкого математика Герхарда Фрая о том, что Великая теорема Ферма является следствием гипотезы Таниямы — Симуры (это предположение было доказано Кеном Рибетом при участии Ж.-П.Серра).

Первый вариант своего доказательства Уайлс опубликовал в 1993 году (после 7 лет напряжённой работы), но в нём вскоре был обнаружен серьёзный пробел, который с помощью Ричарда Лоуренса Тейлора удалось достаточно быстро устранить. В 1995 году был опубликован завершающий вариант.

Формула Фаульхабера[2]. В математике, формула Фаульхабера, названная в честь Иоганна Фаульхабера, выражает сумму:

$$\sum_{k=1}^n k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

где (p) - степень полиномиальной функции от n. (1.2)

Формула следующая:

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}, \text{ где } B_1 = \frac{-1}{2}.$$

и где B_k - числа Бернулли[1]. (1.3)

Числа Бернулли – последовательность рациональных чисел $B_1, B_2, \dots, B_n$

найденная Яковом Бернулли в связи с вычислениями суммы одинаковых степеней последовательных натуральных чисел начинаясь с единицы. И для чисел Бернулли существует следующая рекуррентная формула:

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^{k+1} B_{n-k} \text{ где } n \in \mathbb{N} \text{ и где } B_0 = 1. (1.4)$$

Используя эти формулы можно вычислять сумму степеней натуральных последовательных чисел. Рассмотрим далее несколько примеров.

1.2 Некоторые задачи с применением формулы Фаульхабера

Пример 1. Попробуем найти, чему равна сумма последовательных натуральных чисел, начиная с единицы используя формулу Фаульхабера:

$$1 \nabla 1+2+3+\dots+n$$

Конечно, знающий на школьном уровне алгебру сам уже поймет, что сумма n элементов арифметической прогрессии, где первый элемент равен 1 и разность 1 равняется $\frac{n(n+1)}{2}$. Но мы попробуем решить данную задачу пользуясь формулой Фаульхабера, чтобы наглядно продемонстрировать формулу. Формула Фаульхабера:

$$\sum_{k=1}^n k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

Нам следует найти:

$$\sum_{k=1}^n k^1 = 1+2+3+\dots+n$$

Подставим значение 1 в p в формуле (1.3):

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}, \text{ где } B_1 = \frac{-1}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \binom{2}{j} B_j n^{2-j}, \text{ где } B_1 = \frac{-1}{2}.$$

Далее:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \binom{2}{j} B_j n^{2-j} = \frac{1}{2} \left(\binom{2}{0} B_0 n^2 - \binom{2}{1} B_1 n^1 \right)$$

Подставив за место $B_0=1$ и $B_1=\frac{-1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \left(n^2 - 2 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) n^1 \right) = \frac{1}{2} (n^2 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Что и требовалось доказать. Эти же числа называются треугольными числами, то есть числа S_n , где:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

являются треугольными числами. (1.5)

Пример 2. Теперь попробуем решить более сложные задачи. Какова формула суммы квадратов последовательных натуральных чисел начиная с единицы:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Для решения этой задачи попробуем решить использовать формулу Фaulхабера.

Чтобы найти значение суммы, требуется подставить 2 за место p в формуле (1.3):

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 (-1)^j \binom{3}{j} B_j n^{3-j}$$

$$\frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 (-1)^j \binom{3}{j} B_j n^{3-j} = \frac{1}{3} \left(\binom{3}{0} B_0 n^3 - \binom{3}{1} B_1 n^2 + \binom{3}{2} B_2 n^1 \right) =$$

$$\frac{1}{3} (1 \cdot B_0 n^3 - 3 \cdot B_1 n^2 + 3 \cdot B_2 n^1)$$

B_0 и B_1 нам известно, но нам еще надо найти B_2 . Найдем искомую используя рекуррентную формулу (1.4):

$$B_2 = \frac{-1}{2+1} \sum_{k=1}^2 C_{2+1}^{k+1} B_{2-k} = \frac{-1}{3} (C_3^2 \cdot B_1 + C_3^3 \cdot B_0) = \frac{-1}{3} \left(3 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) + 1 \cdot 1 \right) =$$

$$-\frac{1}{3} \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{1}{6} \quad (1.6)$$

Теперь, вычислив B_2 , подставив в (1.6) за место $B_0=1$, $B_1=\frac{-1}{2}$, и

$B_2=\frac{1}{6}$ получим:

$$\frac{1}{3} \left(1 \cdot 1 \cdot n^3 - 3 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot n^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^1 \right) =$$

$$\frac{1}{3} \left(n^3 + \frac{3}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n^1 \right) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Следовательно, сумма квадратов последовательных натуральных чисел, начиная с единицы, дают в сумме:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1.7)$$

Знание суммы квадратов очень пригождается в решении многих задач. Доказать же формулу можно, используя математическую индукцию.

Пусть доказательство будет самостоятельной работой для интересующегося.

Пример 3. Попробуем решить третью и последнюю задачу с использованием формулы Фаульхабера: найти краткую формулу для суммы кубов последовательных натуральных чисел начиная с единицы:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

понятно, что вначале нам надо найти B_3 . Используя рекуррентную формулу (1.4), получаем:

$$B_3 = \frac{-1}{3+1} \sum_{k=1}^3 C_{3+1}^{k+1} B_{3-k} = \frac{-1}{4} (C_4^2 B_2 + C_4^3 B_1 + C_4^4 B_0) = 0$$

$$0 - \frac{1}{4} \left(6 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) + 1 \cdot 1 \right) = \frac{-1}{4} \cdot 0 = 0$$

Теперь, после того как мы вычислили значение B_3 , находим через формулу Фаульхабера (1.3):

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{3+1} \sum_{j=0}^3 (-1)^j \binom{3+1}{j} B_j n^{3+1-j} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (-1)^j \binom{4}{j} B_j n^{4-j} = 0$$

$$0 - \frac{1}{4} \left(\binom{4}{0} \cdot B_0 \cdot n^4 - \binom{4}{1} \cdot B_1 \cdot n^3 + \binom{4}{2} \cdot B_2 \cdot n^2 - \binom{4}{3} \cdot B_3 \cdot n^1 \right) = 0$$

$$0 - \frac{1}{4} \left(1 \cdot 1 \cdot n^4 - 4 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot n^3 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^2 - 4 \cdot 0 \cdot n \right) = 0$$

$$0 - \frac{1}{4} (n^4 + 2n^3 + n^2) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad (1.8)$$

Формула для суммы кубов последовательных натуральных чисел, начиная с единицы найдена. Доказывается элементарно с использованием математической индукций. И можно проследить очень интересный факт: сумма кубов n последовательных натуральных чисел с единицы равен сумме n последовательных натуральных чисел с единицы.

Как заметили, формула Фаульхабера очень полезна, и с помощью него можно вычислить следующие очень полезные формулы:

$$1^4+2^4+3^4+\dots+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30} \quad (1.9)$$

$$1^5+2^5+3^5+\dots+n^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12} \quad (1.10)$$

$$1^6+2^6+3^6+\dots+n^6=\frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42} \quad (1.11)$$

и так далее.

Дополнительные задачи с использованием степенных чисел:

1) Вычислить формулу:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k m$$

Если расписать формулу, то у нас получится:

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+m)$$

Из (1.5) следует:

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 5}{2} + \dots + \frac{m \cdot (m+1)}{2} = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} \frac{1}{2} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + m \cdot (m+1))$$

Значит, мы находим сумму треугольных чисел. Далее расписываем:

$$k \cdot (k+1) = k^2 + k$$

и следовательно:

$$1 \cdot 2 = 1^2 + 1$$

$$2 \cdot 3 = 2^2 + 2$$

.....

$$m \cdot (m+1) = m^2 + m$$

Далее, получаем:

$$\frac{1}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + m \cdot (m+1)) =$$

$$\frac{1}{2}(1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + \dots + m^2 + m) =$$

$$\left(\frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + m) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m(m+1)(2m+4)}{6} \right) = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

получаются тетраэдрические числа. Сумма m треугольных чисел равна m -ному тетраэдрическому числу.

После решения этой задачи возникает вопрос, правильной ли будет следующая формула:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}{k!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k+1)}{k!} + \dots + \frac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!} =$$

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)}{(k+1)!} \quad (1.12)$$

Хотя задача кажется на первый взгляд тяжелым, эта гипотеза на самом деле очень легко доказывается с помощью математической индукции.

Доказательство: для начала решим с помощью математической индукцией через n . Можно взять и по k но в этом случае задача усложниться.

Для начала сократим тождество, перемножив обе части на $k!$.

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k + \dots + n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1) = i$$

$$i \frac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)}{(k+1)} \quad (1.13)$$

Если будет правильная эта формула, то будет верной и формула (1.12). Так что докажем формулу (1.13) с помощью математической индукции:

База: Для $n=1$:

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k+1)}{(k+1)}$$

Утверждение верно.

Предположение. Пусть свойство верно для $n=m$:

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k + \dots + m \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (m+k-1) = i$$

$$i \frac{m \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (m+k)}{(k+1)}$$

Докажем истинность для $n=m+1$:

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k + \dots + m \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (m+k-1) + (m+1) \cdot \dots \cdot (m+k) = i$$

$$i \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+k+1)}{(k+1)}$$

Шаг.

$$[1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k + \dots + m \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (m+k-1)] + (m+1) \cdot \dots \cdot (m+k) = i$$

$$i \frac{m \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (m+k)}{(k+1)} + (m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+k) = i$$

$$i \frac{m \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (m+k)}{(k+1)} + \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+k) \cdot (k+1)}{(k+1)} = i$$

$$i \frac{[(m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+k)] \cdot (m+k+1)}{(k+1)}$$

Что и требовалось доказать.

2 Степенные числа в числах Фибоначчи.

2.1 О числах Фибоначчи[3]:

Числа Фибоначчи — элементы [числовой последовательности](#):

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ...

в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Название по имени средневекового математика Леонардо Пизанского (известного как Фибоначчи).

Более формально, последовательность чисел Фибоначчи $\{f_n\}$ задается линейным рекуррентным соотношением:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

или же

$$f_{n-2} = f_n - f_{n-1}.$$

Несколько важных свойств чисел Фибоначчи.

В дальнейшем нам пригодится следующая формула:

$$f_{n+1}^2 = f_{n+2}f_n + (-1)^{n+1} \quad (2.1)$$

Докажем ее индукцией по n .

База. Для $n=0$:

$$f_1^2 = f_2f_0 + (-1)^1$$

$$1^2 = 2 \cdot 1 + (-1)^1$$

утверждение верно.

Предположение. Пусть свойство верно для $n=k$:

$$f_{k+1}^2 = f_{k+2}f_k + (-1)^{k+1}$$

Докажем истинность для $n=k+1$:

$$f_{k+2}^2 = f_{k+3} f_{k+1} + (-1)^{k+2}$$

Шаг. Прибавим к обеим частям (1234) по $f_{k+1} f_{k+2}$ получим:

$$f_{k+1}^2 + f_{k+1} f_{k+2} = f_{k+2} f_k + f_{k+1} f_{k+2} + (-1)^{k+1}$$

$$\begin{aligned} & f_{k+1} (f_{k+1} + f_{k+2}) = f_{k+2} f_k + (-1)^{k+1} \\ & f_{k+1} (f_{k+1} + f_{k+2}) = f_{k+2} f_{k+3} \end{aligned}$$

$$f_{k+1} f_{k+3} = f_{k+2} f_{k+2} + (-1)^{k+1}$$

$$f_{k+1} f_{k+3} + (-1)^{k+2} = f_{k+2}^2$$

Следовательно, если верно для $n=k$, то и верно для $n=k+1$.

Вывод. Свойство верно для всех натуральных n .

Формула Бине[4].

Формула типа:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (2.2)$$

называется формулой Бине и используется для нахождения n -го элемента в последовательности чисел Фибоначчи. Находится формула через рекуррентное соотношение. А доказать можно через математическую индукцию.

Доказательство:

База. Для $n=1$

$$f_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Для $n=2$

$$f_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Утверждение верно.

Предположение. Если формула соответствует:

$$f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$$

и

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

то доказывается то, что

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

является n-ым членом последовательности чисел Фибоначчи.

Шаг.

Известно следующее

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Аналогично:

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Далее, приступим к доказательству формулы:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} = i$$

$$i \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} = i$$

$$i \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = i$$

$$i \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

Подставив(*) получим:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = i$$

$$i \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = i$$

$$i \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

Что и требовалось доказать.

Вывод. Выражение:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

является n-ым членом последовательности чисел Фибоначчи.

2.2 Степенные ряды в числах Фибоначчи[5]

Рассмотрим еще один класс последовательностей, основанных на числах Фибоначчи. Пусть x — произвольное число. Вычислим сумму:

$$s_n(x) = f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots + f_n x^n$$

для этого воспользуемся, прежде всего, формулой Бине (2.2). Сначала возьмем:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \beta$$

Следовательно, получаем:

$$\alpha \cdot \beta = -1 \alpha + \beta = 1 \alpha - \beta = \sqrt{5} \quad (2.3)$$

Далее:

$$s_n(x) = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}} x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}} x^2 + \dots + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} x^n =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \dots + \alpha^n x^n) -$$

$$\frac{-1}{\sqrt{5}} (\beta x + \beta^2 x^2 + \beta^3 x^3 + \dots + \beta^n x^n)$$

Здесь в скобках написаны суммы двух геометрических прогрессий со знаменателями αx и βx . Известная формула, выражающая сумму геометрической прогрессии, справедлива в том случае, когда знаменатель прогрессии отличен от единицы. Если же он равен единице, то все члены прогрессии равны друг другу, и их сумма вычисляется совсем просто.

В соответствии со сказанным рассмотрим сначала случай, когда

$$\alpha x \neq 1 \text{ и } \beta x \neq 1 \text{ т.е. когда } x \neq \frac{1}{\alpha} = -\beta \text{ и } x \neq \frac{1}{\beta} = -\alpha$$

В этих случаях, суммируя в геометрических прогрессиях получаем:

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\alpha^{n+1} x^{n+1} - \alpha x}{\alpha x - 1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\beta^{n+1} x^{n+1} - \beta x}{\beta x - 1}$$

далее, выполняя естественные преобразования:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\beta} \\ & (\alpha^{n+1} x^{n+1} - \alpha x)(\beta x - 1) - \frac{(\alpha^{n+1} x^{n+1} - \beta x)(\alpha x - 1)}{(\alpha x - 1)(\beta x - 1)} \\ & s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^{n+1} \beta x^{n+2} - \alpha^{n+1} x^{n+1} + \alpha x}{\alpha \beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1} - \frac{\alpha \beta^{n+1} x^{n+2} - \beta^{n+1} x^{n+1} + \beta x}{\alpha \beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1} \right)$$

подставив с (2.3) получим:

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{x\sqrt{5} - (\alpha^n - \beta^n)x^{n+2} - (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})x^{n+1}}{1 - x - x^2}$$

и окончательно:

$$s_n(x) = \frac{x - f_n x^{n+2} - f_{n+1} x^{n+1}}{1 - x - x^2}$$

Посмотрим, как ведет себя сумма $s_n(x)$ при фиксированном x и неограниченно возрастающем n . Его же формулу можно получить иным способом.

Напишем:

$$s(x) = f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots + f_n x^n + \dots$$

и умножив это равенство почленно на x и x^2 получим:

$$xs(x) = f_1 x^2 + f_2 x^3 + f_3 x^4 + \dots + f_n x^{n+1} + \dots$$

$$x^2 s(x) = f_1 x^3 + f_2 x^4 + f_3 x^5 + \dots + f_n x^{n+2} + \dots$$

вычитая из первого равенства второе и третье, получаем:

$$\begin{aligned} s(x) - xs(x) - x^2 s(x) &= x f_1 + x^2 (f_2 - f_1) + x^3 (f_3 - f_2 - f_1) + \\ &+ x^4 (f_4 - f_3 - f_2) + \dots + x^n (f_n - f_{n-1} - f_{n-2}) + \dots \end{aligned}$$

все заключенные в скобках выражения в левой части равенства, кроме первого, очевидно, равны нулю, и это равенство превращается в

$$x = (1 - x - x^2) s(x),$$

следовательно:

$$s(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad (2.4)$$

Что и требовалось найти.

2.3 Задачи со степенными числами в числах Фибоначчи

1) Сумма квадратов чисел Фибоначчи [6]

Дано следующее свойство чисел Фибоначчи:

$$f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1} \quad (2.5)$$

Доказывается легко через индукцию:

База. Для $n=0$:

$$1^2 = 1 \cdot 1$$

утверждение верное.

Предположение. Пусть свойство верно для $n=k$:

$$f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_k^2 = f_k f_{k+1}$$

Докажем для $n=k+1$:

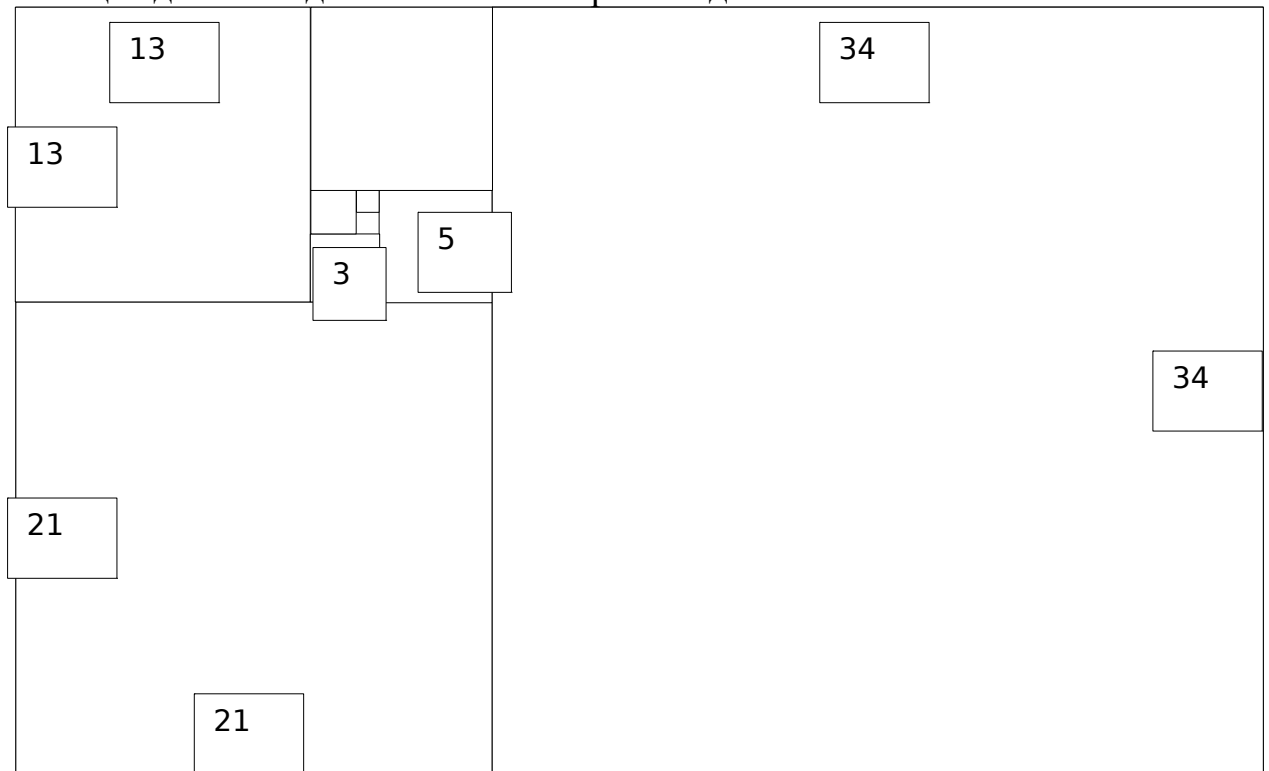
$$f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_{k+1}^2 = f_{k+1} f_{k+2}$$

Шаг.

$$(f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_k^2) + f_{k+1}^2 = f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 = f_{k+1} (f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} f_{k+2}$$

Вывод. Свойство верно 8 я всех натуральных n .

Есть еще одно наглядное и очень интересное доказательство:



Посмотрев на рисунок можно легко определить, что сумма площадей квадратов со сторонами последовательных чисел Фибоначчи начиная с первого дает площадь прямоугольника, стороны которого равны последнему элементу и

следующему элементу числа Фибоначчи. Соответственно, на рисунке доказывается формула(12).

2) Сумма кубов чисел Фибоначчи[7]:

Дано следующее свойство чисел Фибоначчи:

$$f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 + f_3^3 + \dots + f_n^3 = \frac{f_n f_{n+1}^2 + (-1)^n f_{n-1} + 1}{2} \quad (2.6)$$

где $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

Свойство тоже несложно доказывается через индукцию:

База. Для $n=1$:

$$f_0^3 + f_1^3 = \frac{f_1 f_2^2 + (-1)^1 f_0 + 1}{2}$$

$$1^3 + 1^3 = \frac{1 \cdot 2^2 + (-1)^1 f_0 + 1}{2}$$

$$2 = \frac{4 - 1 + 1}{2}$$

утверждение верно.

Предположение. Пусть свойство верно для $n=k$:

$$f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 + f_3^3 + \dots + f_k^3 = \frac{f_k f_{k+1}^2 + (-1)^k f_{k-1} + 1}{2}$$

Докажем для $n=k+1$:

$$f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 + f_3^3 + \dots + f_{k+1}^3 = \frac{f_{k+1} f_{k+2}^2 + (-1)^{k+1} f_k + 1}{2}$$

Шаг.

$$(f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 + f_3^3 + \dots + f_k^3) + f_{k+1}^3 = \frac{f_k f_{k+1}^2 + (-1)^k f_{k-1} + 1}{2} + f_{k+1}^3 =$$

$$\frac{f_{k+1} f_{k+2}^2 + (-1)^{k+1} f_k + 1}{2}$$

Следовательно.

$$f_{k+1}^3 = \frac{f_{k+1}f_{k+2}^2 + (-1)^{k+1}f_k + 1}{2} - \frac{f_k f_{k+1}^2 + (-1)^k f_{k-1} + 1}{2}$$

$$f_{k+1}^3 = \frac{f_{k+1}f_{k+2}^2 - f_k f_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}f_k - (-1)^k f_{k-1}}{2}$$

$$f_{k+1}^3 = \frac{f_{k+1}f_{k+2}^2 - f_k f_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}(f_k + f_{k-1})}{2}$$

$$f_{k+1}^3 = \frac{f_{k+1}f_{k+2}^2 - f_k f_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}(f_{k+1})}{2}$$

Разделив обе части на f_{k+1} , получим тождество:

$$f_{k+1}^2 = \frac{f_{k+2}^2 - f_k f_{k+1} + (-1)^{k+1}}{2}$$

Далее:

$$2 \cdot f_{k+1}^2 = f_{k+2}^2 - f_k f_{k+1} + (-1)^{k+1}$$

$$f_{k+1}^2 = f_{k+2}^2 - f_k f_{k+1} - f_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$$

$$f_{k+1}^2 = f_{k+2}^2 - f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) + (-1)^{k+1}$$

$$f_{k+1}^2 = f_{k+2}^2 - f_{k+1}(f_{k+2}) + (-1)^{k+1}$$

$$f_{k+2}(\overset{f}{\textcolor{red}{i}}\textcolor{red}{i}k + 2^{\square} - f_{k+1}) + (-1)^{k+1}$$

$$f_{k+1}^2 = \textcolor{red}{i}$$

$$f_{k+1}^2 = f_{k+2}f_k + (-1)^{k+1}$$

Что соответствует свойству (2.1).

Вывод. Для всех натуральных n выполняется следующее рекуррентное свойство чисел Фибоначчи:

$$f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 + f_3^3 + \dots + f_n^3 = \frac{f_n f_{n+1}^2 + (-1)^n f_{n-1} + 1}{2}$$

где $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

3 Степенные числа в биномиальных коэффициентах [8]

3.1 Основные теоремы и свойства биномиальных коэффициентов

В математике **биномиальные коэффициенты** — это коэффициенты в разложении бинома Ньютона $(x + y)^n$ по степеням x . Коэффициент при $x^{(n-k)} y^k$ обозначается $\binom{n}{k}$ или C_n^k и читается «биномиальный коэффициент из n по k » (или «це из n по k »):

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{(n-1)} y + \binom{n}{2} x^{(n-2)} y^2 + \dots + \binom{n}{n} y^n = i$$

$$i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{(n-k)} y^k \quad (3.1)$$

В комбинаторике биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ интерпретируется как количество сочетаний из n по k , то есть количество всех подмножеств (выборок) размера k в n -элементном множестве.

Биномиальные коэффициенты часто возникают в задачах комбинаторики и теории вероятностей. Обобщением биномиальных коэффициентов являются мультиномиальные коэффициенты.

Значение биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$ определено для всех целых чисел n и k . Явные формулы для вычисления биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \text{ для } 0 \leq k \leq n;$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ для } k < 0 \text{ или } 0 \leq n < k;$$

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n+k-1}{k} \text{ для } n < 0 \leq k;$$

где $m!$ обозначает факториал числа m .

Производящие функции

Для фиксированного значения n производящей функцией

последовательности биномиальных коэффициентов $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots$ является:

$$\sum_k \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n \quad (3.2)$$

Для фиксированного значения k производящей функцией

последовательности биномиальных коэффициентов $\binom{0}{k}, \binom{1}{k}, \binom{2}{k}, \dots$ является:

$$\sum_k \binom{n}{k} y^k = \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}$$

Основные тождества

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (\text{правило суммы})$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ (правило симметрии).}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{n-k} \text{ (вынесение за скобки).}$$

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} \text{ (замена индексов).}$$

Бином Ньютона и следствия

$$1 \text{ } \color{red}{\hookrightarrow} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$2 \text{ } \color{red}{\hookrightarrow} \sum_{i+j=m} \binom{n}{j} \binom{n}{i} (-1)^j = \begin{cases} (-1)^{m/2} \text{ if } m \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0 \text{ if } m \not\equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

$$3 \text{ } \color{red}{\hookrightarrow} \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (-1)^j = (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \text{ для } 1 < k < n+1$$

$$4 \text{ } \color{red}{\hookrightarrow} \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

Это тождество можно усилить

$$5 \text{ } \color{red}{\hookrightarrow} \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2^{n-1}$$

3.2 Задачи со степенными числами в биномиальных коэффициентах. Сумма биномиальных коэффициентов первой степени [9]

Попробуем решить задачу с суммой биномиальных коэффициентов:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

Так как биномиальные коэффициенты C_n^k являются коэффициентом x^k в разложении $(1+x)^n$, разложение $(1+x)^n$ будет выглядеть следующим образом:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

И если подставить за место $x=2$, мы получим:

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 1^1 + C_n^2 1^2 + \dots + C_n^n 1^n$$

Следовательно:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

Что и требовалось доказать.

Сумма квадратов биномиальных коэффициентов[10].

Предыдущая задача была очень легкой, теперь попробуем доказать следующее свойство биномиальных коэффициентов которая связана со степенными числами:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

Как и при доказательстве основного свойства, используем равенство

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

Умножим обе части этого равенства на $(1+x)^n$:

$$(1+x)^{2n} = (C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) \cdot (C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n)$$

Выражение в левой части равенства снова разложим по формуле бинома Ньютона. Рассмотрим коэффициент при x^n . Слева он будет равен C_{2n}^n . В правой части член, содержащий x^n , появится n раз: при умножении $C_n^n \cdot x^n$ на C_n^0 , при

умножении $C_n^{n-1} \cdot x^{n-1}$ на $C_n^1 \cdot x$, и так далее. Используем свойство симметричности биномиальных коэффициентов, $C_n^k = C_n^{n-k}$ получим коэффициент при x^n в правой части равенства:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

Так как слева и справа стоит один и тот же многочлен, то коэффициенты при x^n слева и справа должны быть одинаковыми. Поэтому

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Что и требовалось доказать.

Несколько задач с применением к теме[11]:

Задача 1)

Доказать, что суммы:

$$\frac{n}{1} - \frac{n(n-1)}{2!2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!3} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!4} + \dots$$

И

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

равны между собой при любом целом n

(3.3)

Решение:

Для начала из формулы бинома Ньютона следует

$$\frac{m+1}{1} - \frac{(m+1)m}{2!} + \frac{(m+1)m(m-1)}{3!} - \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{4!} + \dots = 1$$

откуда, разделив обе части на $m+1$, имеем:

$$\frac{1}{1} - \frac{m}{2!} + \frac{m(m-1)}{3!} - \frac{m(m-1)(m-2)}{4!} + \dots = \frac{1}{m+1} \quad (3.4)$$

Далее, используем математическую индукцию чтобы доказать (3.3):

База. Для $n=1$:

$$\frac{1}{1}=1$$

утверждение верно.

Предположение. Пусть свойство верно для $n=k$:

$$\frac{k}{1} - \frac{k(k-1)}{2!2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!3} - \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!4} + \dots = i$$

$$i \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{k} \right) \quad (3.5)$$

Докажем для $n=k+1$:

$$\frac{k+1}{1} - \frac{(k+1)k}{2!2} + \frac{(k+1)k(k-1)}{3!3} - \frac{(k+1)k(k-1)(k-2)}{4!4} + \dots = i$$

$$i \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{k+1} \right)$$

Шаг.

Пользуясь тождеством (3.4) и (3.5) получаем:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k+1} = i$$

$$i \left(\frac{k}{1} - \frac{k(k-1)}{2!2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!3} - \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!4} + \dots \right) + i$$

$$+ \left(\frac{1}{1} - \frac{k}{2!} + \frac{k(k-1)}{3!} - \frac{k(k-1)(k-2)}{4!} + \dots \right)$$

Раскрыв скобки и группируя слагаемые относительно, получаем:

$$\left(\frac{k}{1} + \frac{1}{1} \right) - \left(\frac{k(k-1)}{2!2} + \frac{k}{2!} \right) - \left(\frac{k(k-1)(k-2)}{3!3} + \frac{k(k-1)}{3!} \right) + \dots = i$$

$$\left(\frac{k+1}{1}\right) - \left(\frac{(k+1)k}{2!2}\right) - \left(\frac{(k+1)k(k-1)}{3!3}\right) + \dots$$

Что и требовалось доказать.

Вывод. Суммы верны между собой.

4 Сумма обратных степенных чисел

4.1 Сумма обратных квадратов[12]

В этой заметке мы рассказываем о том, как можно найти значение суммы:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots (4.1)$$

Вот рассуждение, принадлежащее Эйлеру. Рассмотрим формулу Тейлора для функции $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (4.2)$$

Выражение в правой части (ряд) представляет собой «многочлен бесконечной степени». Естественно, что раз степень этого «многочлена» бесконечна, то у него должно быть бесконечно много корней. Это замечание прекрасно соответствует нашим знаниям о функции $\sin x$: действительно эта функция имеет бесконечно много корней, а именно, все точки вида πn , $\pi \in \mathbb{Z}$ (кстати, других комплексных корней нет). Попробуем разложить эту функцию на множители.

Здесь нужно действовать аккуратно: например, разложение

$$\sin x = x(x - \pi)(x + \pi)(x - 2\pi)(x + 2\pi) \dots$$

вряд ли может быть верным, сомножители при фиксированном x стремятся к бесконечности, да и все коэффициенты при раскрытии скобок получаются целочисленными кратными π , что не соответствует формуле (2). Для того чтобы получить более «правильное» разложение, давайте перенормируем скобки: вместо скобки $(x - k\pi)$ обращаемой в нуль при $x = k\pi$, возьмем

$\left(1 - \frac{x}{k\pi}\right)$. Кроме того сгруппируем вместе скобки, соответствующие корням $\pm k\pi$. Получим:

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots (4.3)$$

Это разложение уже более правдоподобно: произведение в правой части сходится при любом вещественном (и даже комплексном) x . Да и коэффициент при младшем члене (т. е. при x) такой, как надо: если раскрыть все скобки в правой части, то, ясное дело, коэффициент при x будет равен единице.

Тогда вычислим коэффициент при x^3 в формуле (4.3). В левой части коэффициент при x^3 равен $-1/6$, это мы знаем из формулы (4.2). А в правой части коэффициент равен:

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right)$$

и следовательно:

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right) = \frac{-1}{6}$$

И мы приходим к замечательному равенству

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} (4.4)$$

Далее, мы уже очень легко можем найти сумму обратных квадратов нечетных чисел:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots$$

Пользуясь:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Получим:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots - \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^2}{8} \quad (4.5)$$

Задача 2[13].

Пользуясь выше известным рядом(4.5)[13]:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Доказать, что:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p^2}{p^2-1} \cdot \dots$$

где числители - квадраты последовательных простых чисел.

Решение:

Из данного ряда

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \dots = A$$

Вычтем все те его члены, знаменатели которых делятся на 3:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{21^2} + \dots = \frac{1}{3^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \dots \right) = \frac{1}{3^2} A$$

Получим:

$$1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \dots = A - \frac{1}{3^2} A = A \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) = B$$

Теперь, из полученного ряда вычтем все те числа, знаменатели которого делятся на 5:

$$\frac{1}{5^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{55^2} + \frac{1}{65^2} + \dots = \frac{1}{5^2} \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \dots \right) = \frac{1}{5^2} B$$

Как заметили, числа со знаменателями делящиеся на 3 нет, т. к. они были отсеяны, когда мы вычитывали числа, знаменатели которого делятся на 3. Далее, вычитывая, получим:

$$1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \dots = B - \frac{1}{5^2} B = B \left(1 - \frac{1}{5^2} \right) = C$$

Аналогично, получим:

$$C \left(1 - \frac{1}{7^2} \right) = 1 + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \dots$$

Продолжая данный процесс вычитания бесконечно, мы освободимся от знаменателей кратных 3, 5, 7, 11.. В результате у нас останется 1.

После подстановок значений А, В, С,... получим:

$$A \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{5^2} \right) \left(1 - \frac{1}{7^2} \right) \dots = 1$$

или

$$A = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{5^2} \right) \left(1 - \frac{1}{7^2} \right) \dots} = \frac{1}{\left(\frac{3^2-1}{3^2} \right) \left(\frac{5^2-1}{5^2} \right) \left(\frac{7^2-1}{7^2} \right) \dots} = \textcolor{red}{\zeta}$$

$$i \left(\frac{3^2}{3^2-1} \right) \left(\frac{5^2}{5^2-1} \right) \left(\frac{7^2}{7^2-1} \right) \left(\frac{11^2}{11^2-1} \right) \dots$$

Так как $A = \frac{\pi^2}{8}$, то:

$$\frac{\pi^2}{8} = \left(\frac{3^2}{3^2-1} \right) \left(\frac{5^2}{5^2-1} \right) \left(\frac{7^2}{7^2-1} \right) \left(\frac{11^2}{11^2-1} \right) \dots$$

Доказано.

Решение предыдущей задачи на самом деле является частным случаем тождества Эйлера применяемая в дзета-функций Римана. Наглядно покажем тождество Эйлера в дзета-функции Римана.

4.2 Тождество Эйлера в дзета-функций Римана:

Дзета-функция Римана — функция $\zeta(s)$, определяемая с помощью ряда Дирихле:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots,$$

где $s \in \mathbb{C}$.

В области $\{s \mid \operatorname{Re} s > 1\}$, этот ряд сходится, является аналитической функцией и допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость без единицы.

Тождество Эйлера [14]:

В исходной области также верно представление в виде бесконечного произведения (**тождество Эйлера**):

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

где произведение берётся по всем простым числам p . Это равенство представляет собой одно из основных свойств дзета-функции.

Доказательства этого свойства точно аналогично предыдущей формуле(4.4).

Доказательство. Надо доказать следующее свойство:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Возьмем для начала:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = A$$

И поступаем точно так же, как в предыдущей задаче:

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \right) - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \right) = \textcolor{red}{\zeta}$$

$$\textcolor{red}{\zeta} \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots - \frac{1}{2^s} \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \right) = A - \frac{1}{2^s} A = A \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) = \textcolor{red}{\zeta}$$

$$\textcolor{red}{\zeta} A \left(\frac{2^s - 1}{2^s} \right) = B$$

Можно легко убедиться, что:

$$A = B \left(\frac{2^s}{2^s - 1} \right)$$

Далее:

$$B = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

Вычтем все числа, знаменатели которого делятся на 3:

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots - \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \dots \right) = \zeta$$

$$\zeta \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots - \frac{1}{3^s} \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots \right) = B - \frac{1}{3^s} B = B \left(1 - \frac{1}{3^s} \right) = \zeta$$

$$\zeta B \left(\frac{3^s - 1}{3^s} \right) = C$$

$$B = C \left(\frac{3^s}{3^s - 1} \right)$$

Проведя аналогичную операцию, будем получать:

$$C = D \left(\frac{5^s}{5^s - 1} \right)$$

$$D = E \left(\frac{7^s}{7^s - 1} \right)$$

$$E = F \left(\frac{11^s}{11^s - 1} \right)$$

Смотря на эти тождества, легко далее определить:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = A = B \left(\frac{2^s}{2^s - 1} \right) = C \left(\frac{3^s}{3^s - 1} \right) \left(\frac{2^s}{2^s - 1} \right) = \zeta$$

$$\zeta D \left(\frac{5^s}{5^s - 1} \right) \left(\frac{3^s}{3^s - 1} \right) \left(\frac{2^s}{2^s - 1} \right) = E \left(\frac{7^s}{7^s - 1} \right) \left(\frac{5^s}{5^s - 1} \right) \left(\frac{3^s}{3^s - 1} \right) \left(\frac{2^s}{2^s - 1} \right) = \zeta$$

$$\zeta F \left(\frac{11^s}{11^s - 1} \right) \left(\frac{7^s}{7^s - 1} \right) \left(\frac{5^s}{5^s - 1} \right) \left(\frac{3^s}{3^s - 1} \right) \left(\frac{2^s}{2^s - 1} \right)$$

И так далее. Смотря на тождество сверху, очень легко понять, что:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = A = \left(\frac{2^s}{2^s - 1} \right) \left(\frac{3^s}{3^s - 1} \right) \left(\frac{5^s}{5^s - 1} \right) \dots \left(\frac{p^s}{p^s - 1} \right) \dots$$

где включены все простые числа.

Следовательно:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \prod_p \frac{p^s}{p^s - 1}$$

$$\prod_p \frac{p^s}{p^s - 1} = \prod_p \frac{1}{\frac{p^s - 1}{p^s}} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Что и требовалось доказать.

Свойства дзета-функции Римана:

Существуют явные формулы для значений дзета-функции в чётных целых точках:

$$2\zeta(2m) = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m}$$

где B_{2m} — число Бернулли.

В частности:

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945}$$

Про значения дзета-функции в нечётных целых точках известно мало: предполагается, что они являются иррациональными и даже трансцендентными, но пока доказана только лишь

иррациональность числа $\zeta(3)$ (Роже Апері, 1978). Также доказано, что среди значений $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ есть хотя бы одно иррациональное.

Постоянная Апері [15]

Постоянная Апері (англ. *Apéry's constant*) в математике — это вещественное число, обозначаемое $\zeta(3)$ (иногда ζ_3), которое равно сумме обратных к кубам целых положительных чисел и, следовательно, является частным значением дзета-функции Римана:

$$\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Численное значение постоянной Апері выражается бесконечной непериодической десятичной дробью

$$\zeta(3) = 1,202\,056\,903\,159\,594\,285\,399\,738\,161\,511\,449\,990\,764\,986\,292\,\dots$$

Она была названа в честь математика греческо-французского происхождения Роже Апері (*Roger Apéry*, 1916—1994), который в 1978 году доказал, что $\zeta(3)$ является иррациональным числом — результат, известный как теорема Апері. Неизвестно, является ли постоянная Апері трансцендентным числом.

Эта постоянная давно привлекала интерес математиков — ещё в 1735 году Леонард Эйлер вычислил её с точностью до 16 значащих цифр (1,202056903159594).

5 Суммирование степенных чисел в теории чисел.

5.1 Основные теоремы и формулы. [16]

Сравнение по модулю. Операций.

Два натуральных числа a и b , разность которых кратна натуральному числу m , называются сравнимыми по модулю m :

$$n \equiv 0 \pmod{m}.$$

Свойства сравнений по модулю вытекают из свойств арифметических операций.

Так, $3 \equiv 1 \pmod{2}$, $7 \equiv 1 \pmod{3}$. Два числа сравнимы по модулю 2, если они оба четны, либо если они оба нечетны. По модулю 1 все целые числа сравнимы между собой.

В том случае, если число n делится на m , то оно сравнимо с нулем по модулю m :

$$n \equiv 0 \pmod{m}.$$

Свойства сравнений по модулю вытекают из свойств арифметических операций.

Свойства сравнений по модулю.

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$.

$$\text{Тогда:} \quad a + c \equiv b + d \pmod{m}, \quad (5.1)$$

$$a - c \equiv b - d \pmod{m},$$

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Пусть $ab \equiv 0 \pmod{m}$, и числа a и m взаимно просты.

Тогда $b \equiv 0 \pmod{m}$.

Малая теорема Ферма

Малая теорема Ферма — классическая теорема теории чисел, которая утверждает, что:

Если p — простое число, и a не делится на p , то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Другими словами, a^{p-1} при делении нацело на p даёт в остатке 1.

Равносильная формулировка:

Для любого простого p и целого a :

$$a^p \equiv a \pmod{p} \quad (5.2)$$

Эту теорему называют *малой* в отличие от большой теоремы Ферма о невозможности решения в целых положительных числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ при целом $n > 2$. Малая теорема Ферма уже давно стала одной из главных теорем для исследований не только в теории целых чисел, но и в более широких областях арифметики и алгебры.

5.2 Задачи на делимость суммы степенных чисел:

Задача 1:

Доказать, что для каждого натурального числа n , число [17]

$$3 \cdot (1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5)$$

делится на число

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Решение:

Как известно из формулы Фаульхабера и из (1.10), для натуральных n имеет место формула:

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} \frac{n^2 \cdot (n^2 + 1) \cdot (2n^2 + 2n - 1)}{12}$$

и из (1.8):

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Из этих формул следует, что

$$3 \cdot (1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5) = \frac{n^2 \cdot (n^2 + 1) \cdot (2n^2 + 2n - 1)}{4} = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1) = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \cdot (2n^2 + 2n - 1)$$

откуда непосредственно вытекает свойство, о котором идет речь.

Задача 2:

Найти все натуральные числа $n > 1$, для которых число

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + (n-1)^n$$

делится на n .

Решение:

Искомые числа – все нечетные числа >1 . Действительно, если n – нечетное >1 , то $\frac{n-1}{2}$ есть натуральное число и для $k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$, как легко заметить $n \nmid k^n + (n-k)^n$ (так как $(-k)^n = -k^n$). И так как при n – нечетном, количество слагаемых четное. И если разложив по парам, получим:

$$n \nmid 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (n-1)^n.$$

Пусть теперь n – четное число и пусть 2^s – высшая степень двойки, делящая n (число s натуральное). Так как $s < 2^s$, то для четных k , очевидно, $2^s \mid k^n$, для нечетных же k (число которых в последовательности $1, 2, 3, \dots, n-1$ равно $\frac{n}{2}$) на основании теоремы Эйлера имеем $2^{k^{s-1}} \equiv 1 \pmod{2^s}$ так что и $k^n \equiv 1 \pmod{2^s}$ (ибо $2^{s-1} \nmid n$), откуда

$$1^n + 3^n + 5^n + \dots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}.$$

Поэтому, учитывая, что

$$2^n + 4^n + 6^n + \dots + (n-2)^n \equiv 0 \pmod{2^s},$$

имеем

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}.$$

Если теперь предположить, что

$$n \nmid 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (n-1)^n.$$

То, так как $2^s \mid n$, мы получим сравнение $0 \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$, из которого следует

$$2^s \nmid \frac{n}{2} \text{ и } 2^{s+1} \nmid n, \text{ что противоречит определению числа } s. \text{ Итак, если четное,}$$

то

$$n \mid 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (n-1)^n$$

Задача 3:

Доказать, что для всех простых $p \geq 3$, число:

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + p^p$$

Делиться на число p .

Решение:

Пользуясь малой теоремы Ферма(5.2), можно легко определить:

$$1^p \equiv 1 \pmod{p}$$

$$2^p \equiv 2 \pmod{p}$$

$$3^p \equiv 3 \pmod{p}$$

.....

$$(p-1)^p \equiv (p-1) \pmod{p}$$

и можно добавить в ряд:

$$p^p \equiv p \pmod{p}$$

Исходя из свойств сравнений по модулю:

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + p^p \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + p \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p}$$

Зная, что простое число $p \geq 3$ будет нечетным, число $\frac{(p+1)}{2}$ дает целое

значение. Возьмем $\frac{(p+1)}{2} = n$. Получим:

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + p^p \equiv pn \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p}$$

Что обозначает то, что число

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + p^p$$

Делиться на p , что и требовалось доказать.

5.3 Оригинальная задача с применением теоремы Виета[18]

Попробуем решить следующую оригинальную задачу.

Перед приведением следующей задачи которую мне показал преподаватель, профессор, доктор ф. м. наук Дододжон Исмоилов. Следующая задача решается с использованием теоремы Виета. Напомним о теореме Виета для квадратного уравнения.

Теорема Виета: Сумма корней приведенного квадратного трехчлена $x^2 + px + q = 0$ равна его второму коэффициенту p с противоположным знаком, а произведение – свободному члену q , т.е. $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$. (5.3)

Теорема Виета замечательна тем, что, не зная корней квадратного трехчлена, мы легко можем вычислить их сумму и произведение, то есть простейшие симметричные выражения $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$. Так, еще не зная, как вычислить корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, мы, тем не менее, можем сказать, что их сумма должна быть равна 1, а произведение должно равняться -1 .

Теорема Виета позволяет угадывать целые корни квадратного трехчлена. Так, находя корни квадратного уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, можно начать с того, чтобы попытаться разложить свободный член (число 6) на два множителя так,

чтобы их сумма равнялась бы числу 5. Это разложение очевидно: $6 = 2 * 3, 2 + 3 = 5$. Отсюда должно следовать, что числа 2 и 3 являются искомыми корнями.

Задача 4.

Пусть a и b положительные целые числа, такие что число:

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

является тоже целым. Докажите что $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ является полным квадратом.

(Полный квадрат – число которое является квадратом целого числа.)

Решение:

Пусть число:

$$k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

является полным квадратом. Мы берем во внимание то, что разные значения a и b могут дать одинаковый результат k .

Пусть теперь для определенного k , (A, B) является минимальными решениями уравнения по $A+B$, и пусть $A \geq B$. Приступим к тождеству.

$$k = \frac{A^2+B^2}{AB+1}$$

Перемножив, получим:

$$A^2 - kAB + B^2 - k = 0$$

Получаем квадратное уравнение с переменным A . A в квадратном уравнении имеет 2 корня. Если A является одним корнем, определим второй корень через x . Заранее определим для этого корня некоторые условия. Если x является положительным, то оно должно быть больше чем корень A , в противном, это противоречит условию () и наоборот. Так как мы вначале определили корень A наименьший возможным. Поставив за место A другой корень x , получим:

$$x^2 - kBx + B^2 - k = 0$$

Далее, применив теорему Виета для квадратного уравнения (5.3) и зная, что $x_1=A$ и $x_2=x$, получаем:

$$x+A=kB \text{ и } x \cdot A=B^2-k \quad (5.4)$$

$$B \cdot x \leq A \cdot x = B^2 - k < B^2$$

Следовательно:

$$B \cdot x < B^2 \rightarrow x < B \leq A$$

Так как мы заранее определили, что при положительным x , он должен быть больше A и наоборот. Но мы определили что $x < A$, следовательно, x либо отрицательное, либо равна нулю. Еще, пользуясь тождеством:

$$x+A=kB \rightarrow x=kB-A$$

Отсюда же определяем, что x – целое число, так как при $x=kB-A$, A, B, k являются целыми. Вдобавок:

$$(A+1)(x+1)=Ax+A+x+1=B^2-k+kB+1=$$

$$B^2+kB-k+1=B^2+k(B-1)+1 \geq 1$$

$$(A+1)(x+1) \geq 1$$

Так как $A+1$ итак положительное, $x+1$ тоже должно быть положительным, и следовательно $x > -1$. Зная, что x целое и не положительное, корень x может быть равна только нулю.

Далее, исходя из (5.4):

$$x \cdot A = B^2 - k$$

$$B^2 - k = 0$$

$$k = B^2.$$

Что и требовалось доказать.

Этот метод решения, в зарубежье называется “Vieta jumping”.

6 Теория рекурсии в решении некоторых задач с суммированием степенных чисел.

6.1 Теоремы и формулы[19]

Конечные разности – одно из базовых средств численного анализа.

Первая разность, или разность первого порядка функции f , обозначаемая Δf , определена следующим образом

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \quad (6.1)$$

Вторая разность, или разность второго порядка функции f , обозначаемая $\Delta^2 f$, определена следующим образом

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)).$$

Поэтому,

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(f(x+1) - f(x)) =$$

$$(f(x+2) - f(x+1)) - (f(x+1) - f(x)) =$$

$$f(x+2) - 2f(x+1) + f(x).$$

В общем случае n -ая разность функции f , обозначаемая $\Delta^n f$, индуктивно определена выражением

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)). \quad (6.2)$$

Далее приводится формула, выражающая $\Delta^n f(x)$ через $f(x)$.

Таблица 1. Иллюстрирует разностную функцию.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
1	1	7	12	6	0
2	8	19	18	6	0
3	27	37	24	6	
4	64	61	30		
5	125	91			
6	216				

Заметим, что в данном случае $f(x) = x^3$ и $\Delta^4 f(x) = 0$ для всех значений x .

Оператором называется функция, которая отображает функции в функции. Следовательно, Δ является оператором. Определим также другой оператор E согласно выражению $E(f(x)) = f(x+1)$. Таким образом,

$$\Delta f(x) = E(f(x)) - f(x) = (E - I)(f(x)).$$

Где использовано обозначение $(F+G)(u) = F(u) + G(u)$. Оператор I представляет собой тождественный оператор. Поэтому

$$\Delta = E - I \text{ и } E = I + \Delta.$$

Используя запись $\Delta = E - I$ и полагая $E^0 = I$, получаем

$$\Delta^n(f(x)) = (E - I)^n(f(x)) = \Delta^n f(x) = E^n(f(x)) - n \cdot E^{n-1}(f(x)) + \dots$$

$$\dots + (-1)^k \binom{n}{k} (E)^{n-k}(f(x)) + \dots + (-1)^n E^0(f(x)) = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} f(x+n) - n \cdot f(x+n-1) + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} (f(x+n-k)) + \dots + (-1)^n f(x).$$

Некоторые свойства рекурсии:

Для функции f и g

$$\Delta(fg) = f \cdot \Delta(g) + E(g) \cdot \Delta(f) \quad (6.3)$$

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \Delta(f) + f \cdot (\Delta(g))}{g \cdot (E(g))}.$$

Доказательство теоремы:

$$\Delta(fg(x)) = \Delta(f(x) \cdot g(x)) = f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} (f(x+1) - f(x)) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot (g(x+1) - g(x)) = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} \Delta f(x) \cdot E(g(x)) + f(x) \cdot \Delta g(x) = f(x) \cdot \Delta g(x) + E g(x) \cdot \Delta f(x) = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} (f \cdot \Delta g + E g \cdot \Delta f)(x).$$

$$\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left(\frac{f(x+1)}{g(x+1)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(x+1) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+1)}{g(x) \cdot g(x+1)} = \textcolor{red}{i}$$

$$\dot{\frac{f(x+1) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+1)}{g(x) \cdot g(x+1)}} = \dot{\quad}$$

$$\dot{\frac{\Delta f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{g(x) \cdot E(g(x))}}$$

Факториальные множители[20]:

Ранее была возможность убедиться в том, что нахождение конечных разностей функции x^n довольно запутанно. Это – неблагоприятный момент, поскольку полиномиальные функции весьма распространены. Для решения данной проблемы рассмотрим факториальную задачу. Пусть при $x \geq n \geq 0$

$$x^{(n)} = \begin{cases} x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1), & \text{если } n > 0; \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

К счастью,

$$\Delta(x^{(n)}) = (x+1)(x)(x-1)\dots(x-n+2) - x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) = \dot{\quad}$$

$$\dot{\quad} (x)(x-1)\dots(x-n+2)((x+1) - (x-n+1)) = \dot{\quad}$$

$$\dot{\quad} (x)(x-1)\dots(x-n+2)(n) = n(x)(x-1)\dots(x-(n-1)+1) = n x^{(n-1)},$$

Так что теперь имеется функция с очень хорошими разностями. И заметим также, что $x^{(1)} = x$. Таким образом, если

$$f(x) = 5x^{(4)} + 6x^{(3)} - 3x^{(2)} + 2x^{(1)} + 7$$

То

$$\Delta f(x) = (5 \cdot 4)x^{(3)} + (6 \cdot 3)x^{(2)} - (3 \cdot 2)x^{(1)} + 2 = 20x^{(3)} + 18x^{(2)} - 6x^{(1)} + 2$$

Вдобавок, пользуясь полученной формулой, мы можем находить функции $f(x)$ первая разность которого равна x^n . Получим его следующим образом. Сначала рассмотрим:

$$\Delta(x^{(n)}) = n x^{(n-1)}$$

Следовательно:

$$\Delta \left(\frac{x^{(n+1)}}{n+1} \right) = x^n. (6.5)$$

Очень удобно, и чем то (6.5) похожа на производную и интегралов. Так как и конечные разности и производные находятся с использованием разностей.

Степени же переменных можно показать через факториальные множители. Наглядно разьясим далее:

$$x = x^{(1)} \text{ это очевидно } .$$

Попробуем теперь показать x^2 в факториальных множителях. Легко понять, что из факториальных множителей мы применим $x^{(2)}$ и $x^{(1)}$. Рассматриваем далее:

$$x^{(2)} = x(x-1) = x^2 - x$$

$$x^2 = x^{(2)} + x = x^{(2)} + x^{(1)}$$

Напоследок, попробуем найти x^3 в факториальных множителях.

$$x^{(3)} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$\begin{aligned} x^3 &= (x^3 - 3x^2 + 2x) + 3x^2 - 2x + x \\ &= x^{(3)} + 3x^{(2)} - x^{(1)} \end{aligned}$$

Аналогично можно показывать любые значения x^n в факториальных множителях.

6.2 Суммирование разностей

В этом разделе мы используем несколько иной подход. Определим $\sum$ как оператор, обратный разностному. То есть, желательно, чтобы из $\Delta F(x) = f(x)$ следовало $\sum f(x) = F(x)$. Мы установим, однако, что на самом деле, если $\Delta F(x) = f(x)$, то $\sum f(x) = F(X) + c$, где c — константа, так как $(F(x) + c) = \Delta F(x) + \Delta(c) = \Delta F(x)$. Те, кто знаком с математическим анализом, без труда узнают в этом аналог первообразной функции или неопределенного интеграла.

Используя разностные формулы предыдущего раздела, находим, что если

$$f(x) = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}, \text{ то}$$

$$\frac{\Delta x^{(n+1)}}{n+1} = \Delta x^{(n)}$$

$$\Delta \frac{1}{n+1} x^{(n+1)} = \text{по теореме ()}$$

$$\frac{1}{n+1} \Delta (n+1) x^{(n)} = \text{поскольку } \Delta x^{(n)} = n x^{(n-1)}$$

$$\Delta x^{(n)},$$

Так что

$$\sum x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + c \quad (6.6)$$

Далее, мы видим, что если

$$f(x) = \left(\frac{a^x}{a-1} \right), \text{ то}$$

$$\Delta f(x) = \Delta \left(\frac{a^x}{a-1} \right) = \left(\frac{a^{x+1}}{a-1} \right) - \left(\frac{a^x}{a-1} \right) = \left(\frac{a^{x+1} - a^x}{a-1} \right) = a^x$$

Так что:

$$\sum (a^x) = \left(\frac{a^x}{a-1} \right) + c \quad (6.7)$$

Также пусть

$$f(x) = \binom{x}{n+1}, \text{ тогда } \Delta f(x) = \binom{x}{n}$$

Так что

$$\sum \binom{x}{n} = \binom{x}{n+1} + c. \quad (6.8)$$

Итак, мы рассмотрели все основные теоремы которые нам могут понадобиться при решении задач с суммированием степенных чисел.

Суммирование по частям.

Теорема:

$$\sum f(x) \Delta g(x) = f(x)g(x) - \sum E(g(x)) \Delta f(x) + c \quad (6.9)$$

Доказательство несложное. Приведем же его через (6.3):

$$\Delta(fg) = f \cdot \Delta(g) + E(g) \cdot \Delta(f)$$

$$\sum \Delta(fg) = \sum f \cdot \Delta(g) + \sum E(g) \cdot \Delta(f)$$

$$\sum f \cdot \Delta(g) = (fg) - \sum E(g) \cdot \Delta(f)$$

Рассмотрим теперь суммы, которые являются аналогом определенных интегралов в математическом анализе. Пусть

$$f(x) = \Delta F(x) = F(x+1) - F(x)$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{x=1}^n (F(x+1) - F(x)) = F(n+1) - F(1)$$

$$\sum_{x=1}^n$$

Обозначим $F(n+1) - F(1)$ через $F(x) \Big|_1^{n+1}$

Все нужные теоремы и свойства рассмотрены. Теперь же приступим к решениям задач. Для начала легких. И в конце приступим к сложнее задачам.

6.3 Нестандартные решение задач со степенными числами

Задача 1.

Вывести общую формулу для:

$$1 + r^1 + r^2 + \dots + r^n$$

Решение:

Пользуясь свойством (6.7), получаем:

$$\sum_{x=0}^{n+1} r^x = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Очень удобно, не так ли.

Задача 2.

Вывести формулу для суммы натуральных чисел от 1 до n:

Решение через (6.6):

$$\sum_{x=1}^{n+1} x = \frac{x^{(2)}}{2}$$

Что и требовалось.

Задача 3.

Найти сумму:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Решение через (6.6):

$$\sum_{x=1}^{n+1} x^2 = \frac{x^{(3)}}{3} + \frac{x^{(2)}}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{x=1}^n$$

$$\frac{1}{6} (2x^3 + 3x^2) \Big|_1^{n+1} = \frac{1}{6} (2x^3 - 3x^2 + x)$$

$$\frac{1}{6} (2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1)) - (2 - 3 + 1) =$$

$$\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Задача 4.

Найти сумму:

$$\sum_{x=1}^n x 3^x$$

Решение:

Пользуясь (6.9):

$$\sum_{x=1}^n x 3^x = \sum_{x=1}^n x \Delta \frac{3^x}{2} = \frac{x 3^x}{2} \Big|_1^{n+1} - \sum_{x=1}^n \frac{3^{x+1}}{2} \cdot \Delta x = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} \frac{(n+1)3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2} - \left(\frac{3^{x+1}}{4} \right) \Big|_1^{n+1} = \frac{(n+1)3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2} - \left(\left(\frac{3^{n+2}}{4} \right) - \frac{9}{4} \right) = \textcolor{red}{i}$$

$$\textcolor{red}{i} \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$$

Как можно заметить, этим способом множество задач решается намного быстрее и легче чем стандартным способом.

Перейдем к сложным задачам, решить которых сложно без суммирования разностей.

Задача 5 [22].

Вычислить формулу для:

$$\sum_{x=1}^n x^2 2^x$$

Решение:

Пользуясь (6.9):

$$x^2 \Delta 2^x = \textcolor{red}{i} x^2 2^x \Big|_1^{n+1} - \sum_{x=1}^n E(2^x) \Delta (x^2) = \textcolor{red}{i}$$

$$\sum_{x=1}^n x^2 2^x = \sum_{x=1}^n \textcolor{red}{i}$$

$$n+1 \textcolor{red}{i}^2 2^{n+1} - 2 - \sum_{x=1}^n 2^{x+1} (2x+1) \textcolor{red}{i} \textcolor{red}{i} \quad (6.10)$$

Попробуем отдельно решить:

$$(2x+1) \Delta 2^{x+1} = \textcolor{red}{i}$$

$$\sum_{x=1}^n 2^{x+1} (2x+1) = \sum_{x=1}^n \textcolor{red}{i}$$

$$\begin{aligned}
E(2^{x+1}) \Delta(2x+1) &= i \\
i 2^{x+1} (2x+1) \Big|_1^{n+1} - \sum_{x=1}^n i \\
2^{x+3} &= i \\
2^{x+2} \cdot 2 &= i 2^{n+2} (2n+3) - 12 - \sum_{x=1}^n i \\
i 2^{n+2} (2n+3) - 12 - \sum_{x=1}^n i \\
i 2^{n+2} (2n+3) - 12 - 2^{x+3} \Big|_1^{n+1} &= 2^{n+2} (2n+3) + 4 - 2^{n+4}
\end{aligned}$$

Подставив в (6.10), получим:

$$\begin{aligned}
n+1 \cdot i^2 \cdot 2^{n+1} - 2 - 2^{n+2} (2n+3) - 4 + 2^{n+4} &= i \\
\sum_{x=1}^n x^2 2^x &= i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n+1 \cdot i^2 - 2(2n+3) + 8 \\
(i) - 6 = 2^{n+1} (n^2 - 2n + 3) - 6 \\
i 2^{n+1} i
\end{aligned}$$

Очень красивое решение.

7 Задачи со степенными числами разного характера

7.1 Задачи с суммированием степенных чисел которые не вошли в конкретную классификацию [22]:

Задача 1.

Найти общую формулу для:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot p^k$$

Решение:

Для начала распишем формулу:

$$n \cdot p^n = 1 \cdot p + 2 \cdot p^2 + \dots + n \cdot p^n = \sum_{k=1}^n k$$

$$1 \cdot (p + p^2 + \dots + p^n) + (p^2 + p^3 + \dots + p^n) + \dots + (p^{n-1} + p^n) + p^n =$$

$$1 \cdot p \cdot (1 + p + \dots + p^{n-1}) + p^2 \cdot (1 + p + \dots + p^{n-2}) + \dots + p^{n-1} \cdot (1 + p) + p^n$$

Рассмотрим следующую сумму:

$$1 + p + \dots + p^k$$

Умножив и разделив на $(1 - p)$ получим:

$$\frac{(1-p) \cdot (1+p+\dots+p^k)}{(1-p)} = \frac{1-p+p-p^2+p^2-p^3+\dots+p^k-p^{k+1}}{1-p} =$$

$$1 - \frac{p^{k+1}}{1-p} \quad (7.1)$$

Используя (7.1), мы получим:

$$p \cdot (1 + p + \dots + p^{n-1}) + p^2 \cdot (1 + p + \dots + p^{n-2}) + \dots + p^{n-1} \cdot (1 + p) + p^n =$$

$$i \cdot p \cdot \left(\frac{1-p^n}{1-p} \right) + p^2 \cdot \left(\frac{1-p^{n-1}}{1-p} \right) + p^3 \cdot \left(\frac{1-p^{n-2}}{1-p} \right) + \dots + p^n \cdot \left(\frac{1-p}{1-p} \right) = i$$

$$i \cdot \frac{p \cdot (1-p^n) + p^2 \cdot (1-p^{n-1}) + \dots + p^n \cdot (1-p)}{1-p} = i$$

$$i \cdot \frac{p + p^2 + p^3 + \dots + p^n - n \cdot p^{n+1}}{1-p} = \frac{p \cdot (1 + p^2 + p^3 + \dots + p^{n-1}) - n \cdot p^{n+1}}{1-p} = i$$

$$i \cdot \frac{p \cdot \left(\frac{1-p^n}{1-p} \right) - n \cdot p^{n+1}}{1-p} = \frac{p^{n+1}(np - n - 1) - p}{(p-1)^2}$$

В итоге мы нашли общую формулу для:

$$\sum_{k=1}^n n \cdot p^k = \frac{p^{n+1}(np - n - 1) + p}{(p-1)^2}$$

Рассмотрим теперь несколько частных случаев с использованием предыдущей формулы.

Вычислить чему равна следующая сумма:

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 100 \cdot 2^{100}$$

Если же подставим в предыдущую формулу, получим:

$$\frac{p^{n+1}(np - n - 1) - p}{(p-1)^2} = \frac{2^{101}(100 \cdot 2 - 100 - 1) - 2}{(2-1)^2} = 99 \cdot 2^{101} - 2$$

Что и требовалось доказать.

Задача 2.

Доказать что для натуральных а и b, и для простого $p > 2$, число:

$$(a+b)^p - a^p - b^p$$

Делиться на p и на (a+b).

Решение.

Решение этой задачи приводиться очень легко. Для начала докажем делимость на p.

Пользуясь малой теоремой Ферма (5.2), можно определить, что :

$$a^p \equiv a \pmod{p} \text{ и } b^p \equiv b \pmod{p}$$

$$(a+b)^p \equiv a+b \pmod{p}$$

Следовательно:

$$(a+b)^p - a^p - b^p \equiv a+b - a - b \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p}$$

Что обозначает то, что $(a+b)^p - a^p - b^p$ делиться на p .

Для доказательства делимости на $(a+b)$ сперва проиллюстрируем вам теорему Безу:

Теорема Безу утверждает, что остаток при делении $P(x)$ на $(x - a)$ дает в остатке значение $P(a)$ (7.2).

В нашей задаче:

$$(a+b)^p - a^p - b^p = (a+b)^p - (a^p + b^p)$$

$(a+b)^p$ итак делится на $(a+b)$. Теперь если же $a^p + b^p$ тоже будет делиться на $(a+b)$. То задача будет решена.

Возьмем:

$$P(a) = a^p + b^p.$$

Исходя из (7.2) $P(a)$ при делении на $(a+b)$, конкретнее на $(a - (-b))$, дает в остатке $P(-b)$, а это у нас равно:

$$P(-b) = (-b)^p + b^p$$

И так как p по условию нечетное:

$$(-b)^p + b^p = -b^p + b^p = 0$$

Следовательно, остаток при делении на $(a+b)$ равен нулю, и это значит, что:

$$(a+b)^p - (a^p + b^p) \equiv 0 - 0 \equiv 0 \pmod{(a+b)}$$

Что и требовалось доказать.

Задача 3.

Доказать тождество:

7.2 Дополнительные задачи для самостоятельного решения

1. Сократить:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

2. Сократить:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot (n+1)!$$

3. Вычислить:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2$$

4. Вычислить:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 99^3$$

5. Вычислить:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

6. Вычислить:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

7. Определить общую формулу:

$$\sum_{x=1}^n x^3 3^x$$

8. Доказать тождество:

$$x^5 = \sum_{x=1}^n 120 C_{n+3}^6 + 30 C_{n+2}^4 + C_{n+1}^2$$

Где n – натуральные числа больше 2.

9. Определить общую формулу:

$$\sum_{x=1}^n (2x-1)(2x+1)(2x+3)$$

10. Определить общую формулу:

$$\sum_{x=1}^n \underbrace{99999 \dots 9}_{n \text{ раз}}$$

11. Определить общую формулу:

$$\sum_{x=1}^n f_{2x}$$

Где f_i – i -тый элемент последовательности чисел Фибоначчи.

12. Определить общую формулу:

$$\sum_{x=1}^n f_{2x}^2$$

Где f_i – i -тый элемент последовательности чисел Фибоначчи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении можно добавить, что рассмотренная наша диссертационная работа посвященная степенным числам и достаточно актуальна в нашем современном мире и вполне естественна. Многие практические задачи основаны на суммировании степенных чисел. Степенные числа в школьном олимпиадном курсе и в университетах занимают ведущее место. На их изучение хоть не отводится времени больше, чем на любую другую тему университетского курса математики, применение его очень обширно. Сила степенных чисел, а именно суммирования, что она не только имеет теоретическое значение для познания естественных законов, но и служит конкретным практическим целям. Большинство задач о экономике, информатике, пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов суммирования. Овладевая способами их решения, люди находят ответы на различные вопросы из науки и техники (экономика, сельское хозяйство, промышленность, связь и т.д.). Так же для формирования умения решать суммирования большое значение имеет самостоятельная работа и углубленное изучение. Поэтому с помощью данного диссертационного проекта можно по новому взглянуть на изучение суммирования степенных чисел, сделать немало выводов.

В ходе диссертационной работы были решены следующие задачи: изучен научно – методический материал о суммировании степенных чисел, изучен научно – методический материал о свойствах и теоремах, разобраны примеры, изучена программа олимпиадного курса математики в старших классах, изучена основная формула для решения суммирования степенных чисел, дан полный анализ классического представления степенных чисел, их функции и теоремы, анализировано большое количество научно – методической литературы, содержащая методы решения задач в котором включены суммирование степенных чисел, рассмотрена формула Фаульхабера для решения суммы чисел с n -ыми степенями, рассмотрен нетрадиционный подход к решениям

суммировании степенных чисел, дан вывод общей теоремы и рассмотрены следствия, испробованы важные формулы на основе рассмотренных следствий, сформулированы утверждения и рассмотрены некоторые примеры подтверждающие данные утверждения, решены примеры суммировании степенных чисел неординарным способом (сумма разностей например), рассмотрены много типов разных задач на одну и ту же задачу на основе рассмотренных следствий, а также дан им полный анализ. Создан методический аспект в виде систематизированной базы задач решенных нетрадиционным методом, а так же дан анализ достигнутых целей и постановка следующей задачи в ходе выполнения работы были достигнуты.

Поставленная проблема исследования, в ходе диссертационной работы, заключающаяся в разработке научных основ содержания обучения решению задач с суммированием степенных чисел посредством создания методических материалов, считаем вполне раскрытой.

Цель работы - исследование некоторых методов решения суммирования степенных чисел, а именно использование таких методов, как формула Фаульхабера и суммирование разностей, на основе сложных задач в котором включены суммирование степенных чисел, а также рассмотрение применений результатов исследования к различным задачам считаем достигнутой. Составление базы задач различных типов решенных данным методом раскрытой.

Гипотеза исследования, состоящая в том, что решение задач со степенными числами в зависимости их проявления может быть вычислена несколькими методами и открывает широкие возможности для построения индивидуальных образовательных траекторий у учащихся, основанные на изучении суммы степенных чисел, доказана.

Так как математический мир, богат и разнообразен, можно сказать, что на этом аспекте диссертационной работы нельзя поставить заключительную точку. Данная работа может быть продолжена, как с научно – теоретической точки зрения, так и в психолого-педагогическом и методическом плане.

В итоге, можно считать, что цель научного проекта достигнута, но это лишь малая часть. Данную диссертационную работу, естественно, можно и нужно продолжить, т. к. это очень интересный и познавательный процесс. Область применения суммирования степенных чисел очень обширна, поэтому данную работу можно продолжить в виде примеров на решение суммы чисел третьей, четвертой и т.д. степенях нетрадиционным методом и создание методического аспекта в виде систематизированной базы задач.

Хотелось бы надеяться, что данный диссертационный проект внесет небольшой вклад в практику работы учителей школ и других учебных заведений, а также будет интересен любознательным школьникам и найдет свое отражение в школьных учебных пособиях по математике.

Также хотим выразить огромную благодарность, нашему научному руководителю - доктору физико-математических наук, профессору Исмоилову Додожону Исмоиловичу, за бесценные консультации и неутомимый энтузиазм в ходе создания данного проекта.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. www.ru.wikipedia.org .
2. www.oldscola.narod.ru
3. Воробьев Н. Н., «Числа Фибоначчи», 1978, 10-16 с.
4. Воробьев Н. Н., «Числа Фибоначчи», 1978, 25-26 с.
5. Воробьев Н. Н., «Числа Фибоначчи», 1978, 30-35 с.
6. Воробьев Н. Н., «Числа Фибоначчи», 1978, 12 с .
7. Benjamin A. T., Carnes A. T. «Recounting the sum of cubes of Fibonacci numbers», 2005.
8. www.e-maxx.ru
9. www.iclass.home-edu.ru
10. www.dxdy.ru
11. «Математическое просвещение» выпуск 13, Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1938г, стр. 136
12. Кохась К. П., «Сумма обратных квадратов», Матем. просв., сер. 3, **8**, Изд-во МЦНМО, М., 2004, 142–163
13. «Математическое просвещение» выпуск 13, Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1938г, стр. 137
14. www.wikipedia.org.ru.
15. www.encyklopedia.sk
16. Титчмарш Е. В. Теория функций 1980, 66-78с.
17. Серпинский В. Ф. «250 задач по элементарной теории чисел» Издательство «Просвещение», 1968, стр. 16.
18. www.mathlinks.ro
19. Андерсон Д.А. «Discrete Mathematics with Combinatorics», 2004, стр. 468.
20. Андерсон Д.А. «Discrete Mathematics with Combinatorics», 2004, стр. 475.
21. www.artofproblemsolving.com
22. Алфутова Н.Б. Устинов А.В. «Алгебра и теория чисел», 2002, стр 56.

Приложение А

Арифметическая прогрессия.

Арифметическая прогрессия — числовая последовательность вида

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n - 1)d, \dots,$$

то есть последовательность чисел (членов прогрессии), каждое из которых, начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему постоянного числа d (шага или разности прогрессии):

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Любой (n -й) член прогрессии может быть вычислен по формуле общего члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Арифметическая прогрессия является монотонной последовательностью. При $d > 0$ она является возрастающей, а при $d < 0$ — убывающей. Если $d = 0$, то последовательность будет стационарной. Эти утверждения следуют из соотношения $a_{n+1} - a_n = d$ для членов арифметической прогрессии.

Общий член арифметической прогрессии

Член арифметической прогрессии с номером n может быть найден по формуле

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \text{ где } a_1 \text{ — первый член прогрессии, } d \text{ — её разность.}$$

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots$ есть арифметическая прогрессия $\Leftrightarrow$ для ее элементов выполняется условие

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \geq 2.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Сумма первых n членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ может быть найдена по формулам

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

где a_1 — первый член прогрессии, a_n — член с номером n , n — количество суммируемых членов.

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n,$$

где a_1 — первый член прогрессии, d — разность прогрессии, n — количество суммируемых членов.

Приложение В

Геометрическая прогрессия:

Геометри́ческая прогрессия́ — последовательность натуральных чисел $b_1, b_2, b_3, \dots$ (членов прогрессии), в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число q (знаменатель прогрессии), где $b_1 \neq 0, q \neq 0$
 $b_1, b_2 = b_1q, b_3 = b_2q, \dots, b_n = b_{n-1}q$.

Любой член геометрической прогрессии может быть вычислен по формуле:

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Если $b_1 > 0$ и $q > 1$, прогрессия является *возрастающей* последовательностью, если $0 < q < 1$, — *убывающей* последовательностью, а при $q < 0$ — *знакопередающей*^[2].

Свое название прогрессия получила по своему **характеристическому свойству**:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-k} b_{n+k}},$$

то есть каждый член равен среднему геометрическому равноудаленных от него членов.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^n b_i = \frac{b_1 q^n - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, & \text{if } q \neq 1 \\ nb_1, & \text{if } q = 1 \end{cases}$$