МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАГИСТРАТУРА

Кафедра «Математики и информатики»

САРБАСОВА НУРБАНУ ДАУКЕНОВНА

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

6М060100 «Математика»

Диссертация на соискание академической степени
магистра естественных наук
по специальности 6М060100 «Математика»»

Научный руководитель

д.ф-м.н., профессор ______ Д. И. Исмоилов

Павлодар, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Δ -определитель n-го порядка $n = 1,\ 2,\ ,\ \ldots$

A_{ij} -алгебраические дополнения элементов $a_{ij}\ ;\ j = 1,\ 2,\ \ldots, n$

$\prod$ - произведение

δ_n - циклический определитель n -го порядка,

$P \cdot X = (P, X)$ - скалярное произведение векторов P и X.

C_n^k - сочетаний из n по k

ЗЛП- задача линейного программирования
ЦФ- целевая функция
СМ-симплексный метод
СЛУ- система линейных уравнений
СЛН-система линейных неравенств
ТЗ- траспортная задача

$\max\limits_{x_1;x_2}$ -максимум

$\min\limits_{x_1;x_2}$ -минимум

$P,\ X,$ n-мерные вектора

b - m - мерный вектор-столбец

$A = (a_{ij})_{mxn}$ – матрица размерности $m \times n$

$D_j(n) = D_j(n, \ldots)$ – регуляторы

$L[y]$ -линейный дифференциальный оператор

A^{-1} – обратная матрица
E – единичная матрица

A' – траспонированная матрица

ВВЕДЕНИЕ

Линейная алгебра как одна из основных направлений математической науки имеет первостепенное значение, потому что большинство практических задач решаются с помощью теории систем линейных уравнений, линейных неравенств и методов математического программирования.

Работа посвящена применению линейной алгебры в задачах оптимизации. Под оптимизацией понимают процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных. В процессе решения задачи оптимизации необходимо найти оптимальные значения некоторых параметров, определяющих данную задачу.

При решение этих задач используется теория матриц (как обобщение теории многомерных векторов), которую обычно называют «арифметикой высшей математики». Теория матриц является относительно молодой ветвью математики. Понятие матрицы впервые было введено в середине XIX века в исследованиях известного ирландского математика и астронома Гамильтона (1805-1869гг.) и английских математиков Дж. Сильвестера (1814-1897гг.) и А. Келли (1821-1895гг.). Во второй половине XIX века немецкими математиками Вейерштрассом (1815-1897гг.) и Фробениусом (1849-1917гг.) была положена теоретическая основа теории матриц. В XX веке теория матриц развивалась бурно в исследованиях учёных советского периода - П.С. Александрова, А.С. Понтрягина, Д.К. Фаддеева, И.М. Гелфанда, А.Г. Куроша, А.И. Мальцева, А.И. Кострикина и других учёных. В настоящее время теория матриц продолжает постоянно развиваться, и находит многочисленные приложения в различных разделах современных наук. В особенности, методы линейной алгебры и теории матриц находят приложения в теории математического моделирования экономических процессов. Исследование различных экономических процессов начинается с их моделирования, т.е. отражения реального процесса через математическое соотношения. При этом составляются уравнения или неравенства, которые связывают различные показатели (переменные) исследуемого процесса, образуя систему ограничений. В 40-е годы XX века для решения оптимизационных (преимущественно экономических) задач появилось новое направление науки математики – линейное программирование. Развитию этой отрасли существенно способствовали работы советского академика Л.В. Канторовича (1912-1986гг.) и за цикл работ в области экономики он был удостоен Нобелевской премии в 1975г.

В настоящее время множество задач планирования и управления в отраслях народного хозяйства, а также большой объём частных прикладных задач решаются методами математического программирования. Наиболее развитыми в области решения оптимизационных задач являются методы линейного программирования. Эти методы позволяют описать с достаточной точностью широкого круга задач коммерческой деятельности, таких, как планирование товарооборота; размещение розничной торговой сети города; планирование товароснабжения города, района; прикрепление торговых предприятий к поставщикам; организация рациональных перевозок товаров; распределение работников торговли должностям; организация рациональных закупок продуктов питания; распределение ресурсов; планирование капиталовложений; оптимизация межотраслевых связей; замена торгового оборудования; определение оптимального ассортимента товаров в условиях ограниченной площади; установление рационального режима работы.

Линейное программирование – это направление математического программирование изучающая методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейной целевой функцией. Для решения задач линейного программирования составляется математическая модель задачи и выбирается метод решения[7, 10, 38, 39].

Постановка задачи может быть представлена в виде математической модели линейного программирования, если целевая функция может быть представлена в виде линейной формы, а связь с ограниченными ресурсами описать посредством линейных уравнений или неравенств. Кроме того, вводится дополнительное ограничение – значения переменных должны быть неотрицательны, поскольку они представляют такие величины, как товарооборот, время работы, затраты и другие экономические показатели.

Геометрическая интерпретация экономических задач даёт возможность наглядно представить, их структуру, выявить особенности и открывает пути исследования более сложных свойств. Задача линейного программирования с двумя переменными всегда можно решить графически. Однако уже в трёхмерном пространстве такое решение усложняется, а в пространствах, размерность которых более трёх, графическое решение, вообще говоря, невозможно. Случай двух переменных не имеет особого практического значения, однако его рассмотрение проясняет свойства задач линейного программирования, приводит к идее её решения, делает геометрически наглядными способы решения и пути их практической реализации.

Типовыми задачами линейного программирования являются: транспортная задача, задача использования и планирования производственных мощностей, задача составления смесей, задача распределения и планирования обеспечивающих ресурсов, задача составления плана производства, задача раскроя тканей, задача планирования смен и расписаний, задача покрытий и некоторые другие задачи [3, 20, 29, 37, 38,39].

Все эти задачи в конечном итоге оказываются той или иной модификацией транспортной задачи и решаются с использованием симплекс-метода; различия состоят в смысловой интерпретации и в конкретной форме целевых функций и ограничений.

Задачи оптимизации и классификации играют в приложениях важную роль и со временем актульность этих задач только возрастает.

В связи с вышеизложенным, разработка новых подходов решения оптимиционых задач, используя теорию алгебры актуальна.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций подтверждаются: использованием фундаментальных положений теоретических основ математики: алгебры, математического анализа, аналитической геометрии, линейного программирования. Достоверность полученных результатов и выводов подтверждена выведенными теоремами и леммами.

На защиту выносятся:

- алгебраический метод решения задач оптимизации с применением теории определителей с последующим использованием свойства корней *n*-ой степени из единицы;

- результаты теоретических исследований в теории линейного программирования;

- результаты теоретических исследований в теории «последовательностей наследия».

Научная новизна работы заключается в том, что разработаны:

- алгебраический метод решения задач оптимизации с применением теории определителей с последующим использованием свойства корней *n*-ой степени из единицы;

- свойства специального линейного оператора действующего во множестве вектор функции «наследия» порядка *n*.

Практическая ценность работы:

- выведены,сформулированы и доказаны теоремы и леммы, применяемые в теории оптимизации;

- опубликованно учебное пособие «Основы линейной алгебры и линейного программирования».

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на II Международной научно-практической конференции ««Наука и образование в XXI веке: динамика развития в евразийском пространстве», Павлодар, 2011 г.; на научных семенарах кафедры «Математика и информатика» в 2011-2012 г.г.

1 АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В ТЕОРИИ АЛГЕБРЫ

1.1 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ПРИМЕНЯЕМЫЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Теория определителей имеет важное значение в алгебре , поэтому одним из основных понятий линейной алгебры является понятие определителя или детерминанта (determinant)[9,13,16,32,43].

Определение. Выражение следующего вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \qquad (1.1.1)$$

называется определителем *n*-го порядка; $n = 1,\ 2,\ ,\ \dots\ ;$ A_{ij} - алгебраические дополнения элементов $a_{ij}\ ;\ j = 1,\ 2,\ \dots,n$ и определяются из следующих равенств

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} M'_{1j}\ , \qquad (1.1.2)$$

где M'_{1j} - дополнительные миноры $(n-1)$ - го порядка элементов a_{1j}, которые являются определителями $(n-1)$ порядка и получаются после вычеркивания первого j-го столбца из не вычеркнутых элементов определителя Δ.

В дальнейшим для краткости обозначим $\Delta = |a_{ij}|$.

Равенство (1.1.1) для случаев $n = 2\ ;\ 3$ повторяет определение определителей второго и третьего порядков, а для $n \geq 4$ выражает их обобщение.

Теорема 1. (Формула вычисления определителя) Для любого определителя n -го порядка справедливы следующие равенства

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \Delta, & если \quad k = i \\ 0, & если \quad k \neq i \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

$$a_{1j}A_{1r} + a_{2j}A_{2r} + \dots + a_{nj}A_{nr} = \begin{cases} \Delta, & если \quad j = r \\ 0, & если \quad j \neq r \end{cases} \qquad (1.1.4)$$

В равенствах (1.1.3) и (1.1.4) соответственно A_{kj} и A_{ir} являются алгебраическими дополнениями элементов a_{kj} и a_{ir} .

Это утверждение доказывается непосредственно на основании равенства (1.1.1) и свойств определителей произвольного порядка.

Рассмотрим применение теории (общее правило Крамера) определителей n-го порядка к системе n линейных уравнений с n неизвестными.

Система n линейных уравнений с n неизвестными в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_n + ... + a_{nn}x_{nn} = b_n \end{cases}, \qquad (1.1.5)$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ - неизвестные,

a_{ij} - коэффициенты при неизвестном x_j в i - ом уравнении;

$b_1, b_2, ..., b_n$ - являются свободными членами уравнения.

Рассмотрим общее правило Крамера для случаев $n \geq 4$. С помощью $\Delta; \Delta_1; \Delta_2, ..., \Delta_n$ соответственно обозначим определители *n*- го порядка, соответствующие системе (1.1.5), то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где Δ называется основным определителем системы и Δ_j - ые $(j = 1, 2, ... n)$ - дополнительные определители системы, которые получены в результате замены элементов j -го столбца в определителе Δ соответственно свободными членами системы (1.1.1). Сформулируем правило Крамера.

Теорема 2. Если основной определитель системы (1.1.5) $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, и оно определяется равенствами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \; ..., \; x_3 = \frac{\Delta_n}{\Delta}; \qquad (1.1.6)$$

Доказательство теоремы 2 непосредственно выводиться на основании равенств (1.1.3) и (1.1.4) и определения 1.

Рассмотрим способы вычисления определителей и их свойства.

Если все элементы определителя, расположенные по одному сторону от главной диагонали, равны нулю, то этот определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Для определителя второго порядка это утверждение следует непосредственно из определения. В общем случае доказывается это равенство с помощью математической индукции (разлагая по первому столбцу, получим такой же определитель, но порядок, которого на единицу меньше, и т.д.)..

Определителем Вандермонда называется определитель вида

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ - произвольные числа [42,45].

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Справедлива вычислительная формула

$$\Delta_n = \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

Доказательство.

Теорему докажем с помощью математической индукции.

Пусть $n=2$, имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

Пусть утверждение доказано для определителей Вандермонда ($n-1$)-го порядка. В определителе Δ из последней (n-ой) строки вычитаем ($n-1$)-ю, умноженную на a_1, затем из ($n-1$)-й вычитаем ($n-2$)–ю умноженную на a_1, и т.д., наконец, из второй строки вычитаем первую , умноженную на a_1.

Получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 \cdot a_2 & a_3^2 - a_1 \cdot a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 \cdot a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 \cdot a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 \cdot a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Разложим этот определитель по первому столбцу, и придем к определителю ($n-1$) -го $(n \geq 2)$ порядка; после вынесения из всех столбцов общих множителей за знак определителя он примет вид:

$$\Delta_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & & \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}..$$

Последний множитель является определителем Вандермонда ($n-1$)-го $(n \geq 2)$ порядка, т. е., по предположению, равен произведению всех разностей $a_i - a_j$ для $2 \leq j < i \leq n$. Можно написать, следовательно, употребляя символ $\prod$ для обозначения произведения, что

$$\Delta_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_n - a_1).\prod_{2 \leq j < i \leq n}(a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n}(a_i - a_j)$$

Таким же методом может быть доказано, что определитель

$$\Delta_n^{'} = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

равно произведению всевозможных разностей $a_i - a_j$, где $1 \leq i < j \leq n$, т.е.

$$\Delta_n^{'} = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i).$$

Пусть $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ - произвольные числа.
Определитель

$$\delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

называется циклическим определителем n-го порядка, и называется кососциклическим , если имеет вид

$$\delta'_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & a_1 \cdots & a_{n-2} \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & a_0 \ldots & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \ldots & a_0 \end{vmatrix}$$

Отметим, что

1. для определителя Вандермонда Δ_n, при

$$a_{k+1} = \varepsilon_k = Cos\frac{2k\pi}{n} + i\,Sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\cdots, n-1;$$

выполняется равенство

$$\Delta_n = n^{\frac{n}{2}} \cdot i^{-\frac{(n-1)\cdot(n+2)}{2}} .$$

2. $$\delta_k = \prod_{k=0}^{n-1}(a_0 + a_1\cdot\varepsilon_k + a_2\cdot\varepsilon_k^2 + \cdots + a_{n-1}\cdot\varepsilon_k^{n-1}),$$

где ε_k -корни n -ой степени из единицы
$\varepsilon_k = Cos\frac{2k\pi}{n} + i\,Sin\frac{2k\pi}{n}$: $k = 0,\ 1,\ 2,\cdots, n-1$.

3. $$\delta'_k = \prod_{k=0}^{n-1}(a_0 + a_1\cdot\omega_k + a_2\cdot\omega_k^2 + \cdots + a_{n-1}\cdot\omega_k^{n-1}),$$

где $\omega_k = Cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\,Sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$.

Обобщая полученные выше разложения определителя по строке или столбцу, далее рассмотрим теорему, указывающую на разложении определителя по нескольким строкам или столбцам (т.е. теорема Лапласа). Для определения определителей высших порядков в классических учебниках пользуются теорией перестановок и подстановок, относящиеся к конечным множествам [13,16,30].

Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.1.11)$$

обозначение определителя *n*-го порядка**.** Рассмотрим всевозможные произведения по *n* элементов этого определителя, расположенных в разных строках и разных столбцах, т. е. произведения вида

$$a_{1\alpha_1} \cdot a_{1\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{1\alpha_n}\,, \qquad (1.1.12)$$

где 2-е индексы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ составляют некоторую перестановку из чисел $1, 2, \dots n$, а первые индексы расположены естественном порядке. Число таких произведений равно числу различных перестановок из *n* символов, т. е. равно *n*!. Будем считать, что все эти произведения, будут являться членами значения определителя *n* –го порядка, соответствующего выражению (1.1.11). Для определения знака каждого слагаемого в виде произведения (1.1.12), которые входит в состав определителя, составляем подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad (1.1.13)$$

где ι переходит в α_ι, если в состав произведения (1.1.12) входит элемент, стоящий в ι - й строке и α_ι в столбце правой части равенства (1.1.11).

Определение определителем n-го порядка, соответствующий равенству (1.1.11), называется алгебраическая сумма n! членов, составленная из всевозможных произведений n элементов определителя n-го порядка, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, причём слагаемое $a_{1\alpha_1} \cdot a_{1\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{1\alpha_n}$ берётся со знаком плюс, если его индексы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

составляют чётную подстановку, и со знаком минус – нечётную подстановку. Выше приведённое определение выразим в виде следующей формулы

$$\Delta = \sum_{\{\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n\}\in P_n} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\cdot a_{1\alpha_2}\cdots a_{1\alpha_n}, \qquad (1.1.14)$$

где суммирование ведётся по всем перестановкам $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in P_n$, $N(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ - число инверсий в перестановке

Назовём транспонированием определителя (1.1.11), такое преобразование этого определителя, при котором его строки заменяются столбцами с тем же самым номером, т. е. переход от определителя (1.1.11) к определителю следующего вида

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойства определителей *n*-го порядка:

1) Равносильность строк и столбцов (транспонирование). Значение определителя не меняется при транспонировании.

2) От перестановки двух соседних строк (или столбцов) определителя, значение определителя меняет лишь знак.

3) Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбцы), равен нулю.

4) Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя имеют общий множитель, (в том числе, когда состоит из нулей), то этот множитель можно вынести за знак определителя.

5) Если в определителе имеются две пропорциональные строки (столбцы), то такой определитель равен нулю.

6) Если в определителе все элементы какой-либо строки (столбца) представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij},\quad j = 1,2,\cdots,n;$ то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки кроме i -й строки (j -го столбца) такие же как в заданном определителе, а i -я строка в одном из слагаемых состоит из элементов слагаемых a'_{ij}, а в другом- из a''_{ij}.

7) Определитель не меняется, если к элементам одной из его строки (столбца) прибавляются соответственные элементы другой строки (столбца), предварительно умноженное на одно и то же число (такие действия называются элементарными преобразованиями для определителей).

8) Если одна из строк (столбец) определителя есть линейная комбинация его

других строк (столбец), то определитель равен нулю.

Рассмотрим метод вычисления определителей, основанные на том, что определитель порядка n может быть выражен через суммы произведения определителей низких порядков.

С этой целью введём понятие миноров k-го порядка и алгебраические дополнения.

Следует заметить, что было бы затруднительно вычислять определители n-го порядка, применяя непосредственно по определению, т. е. каждый раз выписывать все $n!$ членов по формуле (1.1.14). Существуют более простые методы, основанные на обобщении понятия минора и алгебраического дополнения Пусть дан определитель Δ порядка n. Берём целое число k, удовлетворяющее условиям $1 \le k \le n-1$, и в определителе Δ выбираем произвольные k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении этих выбранных строк и столбцов, составляем определитель k - го порядка, *называемый минором k - го порядка* определителя Δ. Можно также сказать, что минор k-го порядка есть определитель, получающийся после вычёркивания в определителе Δ n-k строк и n-k столбцов. В частности, после вычёркивания в определителе одной строки и одного столбца мы получаем минор (n-1) - го порядка ; с другой стороны минорами 1-го порядка будет каждый отдельный элемент определителя Δ.

Пусть в определителе n-го порядка взят минор k-го порядка. Если мы вычеркнем те строки и столбцы, на пересечении которых стоит этот минор, то из не вычеркнутых элементов определителя можно составить минор (n-k)-го порядка, который называется дополнительным минором к минору k-го порядка. Если вычеркнуть, наоборот, те строки и столбцы, в которых расположены элементы минора (n-k)-го порядка, то останется минор k-го порядка. Таким образом, можно говорить о паре взаимно дополнительных миноров определителя. В частности, элемент a_{ij} и минор (n-1) – го порядка, получающийся вычёркиванием в определителе i-ой строки и j-го столбца, будут составлять пару взаимно дополнительных миноров.

Если минор k -го порядка расположен в строках $i_1, i_2, \cdots, i_k$ и в столбцах с номерами $j_1, j_2, \cdots, j_k$, то назовём алгебраическим дополнением выбранного минора его дополнительный минор (n-k)-го порядка, взятый со знаком плюс или минус в зависимости от чётности или нечётности числа

$$S_M = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + j_2 + \cdots + j_k$$

- сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор k-го порядка.

Сформулируем одно утверждение без доказательства относительно суммы произведения минора и его соответствующего алгебраического дополнения.

Теорема 1. Произведение любого минора k - го порядка на его алгебраическое дополнение в определителе является алгебраической суммой, слагаемые которой, получающиеся от умножения членов минора на взятые со знаком $(-1)^{S_M}$ члены дополнительного минора, будут некоторыми членами определителя. При этом их знаки в этой сумме совпадают с теми знаками, с какими они входят в состав определителя.

Доказательство этого утверждения можно посмотреть в книге [30]. В заключение сформулируем теорему, с помощью которой вычисляются определители высшего порядка путём разложения их по нескольким строкам или столбцам.

Теорема 2 (Теорема Лапласа). Пусть в определителе порядка n произвольно выбраны k строк (k столбцов), $1 \le k \le n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k – го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна значению определителя.

Доказательство. Так как согласно определению определителей данного порядка, любой минор *k*–го порядка состоит из *k!* слагаемых, а его алгебраическое дополнение, отличаясь возможно лишь знаком от дополнительного минора порядка *n-k,* содержит *(n-k)!* слагаемых, то произведение любого минора *k* – го порядка , расположенного в выбранных строках (столбцах), на его алгебраическое дополнение состоит из *k!(n-k)!* слагаемых. С другой стороны, количество миноров *k*–го порядка, содержащихся в выбранных нами строках (или столбцах), равно числу сочетаний из *n* по *k,* равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Перемножая их, мы убеждаемся в том, что сумма произведений всех миноров *k*-го порядка из выбранных строк (столбцов) на их алгебраические дополнения состоит из *n!* слагаемых. Поскольку каждое произведение выбранных миноров *k*-го на их алгебраическое дополнение даёт ровно *k!(n-k)!* членов определителя с теми же знаками с какими они входят в состав определителя, этим самым теорема полностью доказана.

Теорема Лапласа позволяет сводить вычисления определителя *n*-го порядка к вычислению суммы произведения нескольких определителей порядков *k* и *n-k*. Этих новых определителей, вообще говоря, окажется достаточно много, и поэтому применять теорему Лапласа целесообразно лишь в том случае, если в определителе можно так выбрать *k* строк (столбцов) ,что многие из миноров *k*-го порядка, расположенных в этих строках будут равны 0.

1.2 ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ К ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Рассмотрим следующую задачу практическую задачу на базе теории системы линейных алгебраических уравнений на предмет оптимизации транспортировки товара к месту назначения (к потребителю).

Из двух хранилищ А и В готовой продукции, где имеются одинаковые виды продукции (запасы продукции в каждом хранилище соответственно равны 350 т. И 150 т.), нужно доставлять товар к двум хозяйствам $\mathrm{I}\ и\ \mathrm{II}$ (их потребности соответственно равны 200 т. И 300 т.)

Расходы на доставку (стоимость доставки 1 тонны товара учитывается в некой условной единице), груза каждому хозяйству $\mathrm{I}\ и\ \mathrm{II}$ задаётся следующим образом

$$A \Rightarrow \mathrm{I}\ \ (15\ у.е.); \quad A \Rightarrow \mathrm{II}\ (20\,у.е.)$$
$$B \Rightarrow \mathrm{I}\ \ (8\ у.е.)\ ; \quad B \Rightarrow \mathrm{II}\ (25\ у.е.)$$

Для минимального расхода на доставку товара предусмотрено всего 7950 у.е. .

Найти оптимальный способ доставки товара.

Решение: С помощью x_{ij} - обозначим количество всей продукции, взаимной из i-го (i=1,2) хранилища в j-й (j=1,2) пункты потребления. Тогда, математическая модель задачи выражается следующей системой СЛУ

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12} = 350 \\ x_{21}+x_{22} = 150 \\ x_{11}+ x_{21} = 200 \\ x_{12}+ x_{22} = 300 \\ 15x_{11}+20x_{12}+8x_{21}25x_{22} = 7950 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Составим расширенную ступенчатую матрицу систему.

Сначала в расширенной матрице поменяем местами 2-ю и 4-ю строки. Затем из 3-го и 5-го уравнения исключим неизвестное x_{11} , из 3-го, 4-го и 5-го уравнения исключим x_{12} и т.д.

Это действие в матричном виде представляется следующим образом:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&350\\0&1&0&1&150\\1&0&1&0&200\\0&1&1&0&300\\15&20&8&25&7950\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0&350\\0&1&0&1&300\\0&1&-1&0&150\\0&0&1&1&150\\0&5&8&25&2700\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0&350\\0&1&0&1&300\\0&1&-1&0&150\\0&0&1&1&150\\0&5&8&25&2700\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0&350\\0&1&0&1&300\\0&0&1&1&150\\0&0&1&1&150\\0&0&8&20&1200\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0&350\\0&1&0&1&300\\0&0&1&1&150\\0&0&0&0&0\\0&0&0&12&0\end{bmatrix}$$

В последнем столбце выписаны свободные члены полученной системы.

Таким образом, мы получим ступенчатую систему, эквивалентную к заданной системе.

Отбрасывая равенство 0=0, приходим к системе четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными, которая имеет треугольный вид.

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12} & =350\\ x_{12}+\qquad x_{22} & =300\\ x_{21}+x_{22} & =150\\ 12x_{22} & =0\end{cases}$$

Отсюда видно, что $x_{22}=0$.

Из третьего уравнения следует, что $x_{21}=150$; из второго следует $x_{12}=300$; и, наконец, из первого уравнения следует, что $x_{11}=50$.

Тем самым имеет единственное решение $\{50;300;150;0\}$, поэтому производственная задача имеет единственное оптимальное решение.

Далее, рассмотрим следующую задачу банковской системы (задача об оптимальном распределении вклада, в форме депозита):

В банке имеется три пункта вкладывания депозита, которые организовывают свою работу по правилу, указанному в таблице 1.2.1.

Таблица 1.2.1

Начало года				В конце года	Годовой процент начисления
	I	**II**	**III**		

6000	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	α	7250	p_1
6000	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	β	7200	p_2
6000	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	γ	7250	p_3

Найдём годовые проценты вознаграждения p_1, p_2, p_3 - начисления каждого пункта. Кратко остановимся, как решается задача.

Решение задачи**:** Сначала найдём численные значения величины $\alpha=\frac{1}{6}$, $\beta=\frac{1}{6}$, $\gamma=\frac{1}{3}$. Согласно таблицы раскладки. Затем, составим систему линейных уравнений, а после исследования полученной системы методом Крамера. Тогда определится единственное решение системы. В конце найдём проценты годового вклада в каждом пункте.

p_1 =25%, p_2 =20%, p_3 =15%

Эту же задачу можно рассмотреть и для любого количества пунктов вкладывания депозита, работа которых организуется по вышеуказанному принципу.

1.3 ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ К ОПТИМИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Постановка задачи

Пусть

$$V_n = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n \qquad (1.3.1)$$

выражает объём n-мерного параллелепипеда, где x_i удовлетворяют следующим условиям

$$x_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,n$$

и равенству

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ , \qquad (1.3.2)$$

где a - фиксированное число, a_i - заданные положительные вещественные числа.

Требуется определить максимальное значение объёма n-мерного параллелепипеда, т.е. (гиперпараллелепипеда)

$$V_{max} = max(V(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \qquad (1.3.3)$$

В работе предлагается алгебраический метод решения задачи с применением теории определителей с последующим использованием свойства корней n-ой степени из единицы.

Рассмотрим задачу для частного случая

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1,$$

тогда приходим к следующей задаче

$$V_n = V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n \qquad (1.3.1')$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a \ , \qquad (1.3.2')$$

$$x_i > 0,\ \forall a \in R_+$$

Требуется найти максимальное значение величины n-мерного объёма параллелепипеда. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. При $n \geq 2$ имеет место формула

$$V_{\max} = \frac{a^n}{n^n} \quad .$$

Доказательство: из условия $(2')$ находим x_n (все переменные равноправные)

$$x_n = a - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \qquad (1.3.2'')$$

и подставляем в равенство $(1')$, в результате получим формулу вычисления объема через $(n-1)$ неизвестных

$$V_n = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(a - \sum_{i=1}^{n-1} x_i) \qquad (1.3.4)$$

Или

$$V_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i V_{n-1} = aV_{n-1}. \qquad (1.3.4'')$$

Используя, необходимое условие существования экстремума функций многих переменных вычисляем первые частные производные от функции V_n по переменным x_i, $i = 1,2,\ldots,n-1$:

$$\frac{\partial V_n}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n-1. \qquad (1.3.5)$$

В результате получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = a \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + x_{n-1} = a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + 2x_{n-1} = a \end{cases} . \qquad (1.3.6)$$

К решению системы (1.3.6) применим правило Крамера. Для этой цели с начало покажем, что определитель системы отличен от нуля, т. е. убедимся, что система имеет единственное решение. Предварительно докажем лемму.

Лемма 1[45]. (О вычислении циркулянтов).

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – любые вещественные или комплексные числа и δ_m -

обозначает циркулянт m-го порядка, составленный из элементов $b_1, b_2, \dots, b_m$, т.е.

$$\delta_m = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ b_m & b_1 & \dots & b_{m-1} \\ b_{m-1} & b_m & \dots & b_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & b_3 & \dots & b_1 \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m}, \quad k = \overline{0, m-1};$$

корни m-ой степени из единицы.

Тогда справедлива вычислительная формула

$$\delta_m = \prod_{k=0}^{m-1}\left(b_1 + b_2\varepsilon_k + b_3\varepsilon_k^2 + \dots + b_m\varepsilon_k^{m-1}\right) = \prod_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{m} b_j\varepsilon_k^j, \tag{1.3.7}$$

где $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_k^j = \cos\frac{2\pi kj}{m} + i\sin\frac{2\pi kj}{m}$.

Доказательство.

Умножим справа к матрице, составленной из δ_m, матрицу, образованной из корней m-ой степени из единицы

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_{m-1} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_1^{m-1} & \dots & \varepsilon_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix};$$

Затем воспользуемся равенством $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$

Тогда будем иметь

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ b_m & b_1 & \dots & b_{m-1} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & b_3 & \dots & b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_{m-1} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_1^{m-1} & \dots & \varepsilon_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(b_1 + b_2 + \dots + b_m\right) \cdot \left(b_1 + b_2\varepsilon_1 + b_3\varepsilon_1^2 + \dots + b_m\varepsilon_1^{m-1}\right) \cdots \left(b_1 + b_2\varepsilon_m + b_3\varepsilon_m^2 + \dots + b_m\varepsilon_m^{m-1}\right) \cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_{m-1} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_1^{m-1} & \dots & \varepsilon_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Из последнего равенства следует доказательство формулы (1.3.7).

Продолжим доказательство теоремы 1. Для основного определителя системы (1.3.6); Δ_{n-1} будет иметь равенство $(n \geq 2)$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, Δ_{n-1} является циркулянтом порядка $n-1\,; n \geq 2$. Вычислим по формуле (1.3.7). При этом воспользуемся формулой суммой геометрической прогрессии, составленной из корней m-ой степени из единицы.

$$\eta_m = \sum_{k=1}^{m} e^{\frac{2\pi i k}{m}} = \begin{cases} m & , \quad \text{если} \quad k = m \\ 0 & , \quad \text{если} \quad 1 \leq k \leq m-1 \end{cases}$$

Таким образом, вычисляется основной определитель нашей системы

$$\Delta_{n-1} = n. \tag{1.3.8}$$

Используя свойства определителей, вычисляем все дополнительные определители системы (1.3.6) и, следовательно, будем иметь для всех x_j ($j = 1,2,\dots,n-1$) равенства:

$$\Delta_j = a\,. \tag{1.3.9}$$

По правилу Крамера вычисляем

$$x_1 = \frac{a}{n}; \qquad x_2 = \frac{a}{n}; \;\dots\dots\dots; x_{n-1} = \frac{a}{n}, \tag{1.3.10}$$

и, подставляя найденные значения, x_j ($j = 1,2,\dots,n-1$) в равенство для выражения (1.3.2$''$) получим

$$x_n = a - \frac{(n-1)a}{n} = \frac{a}{n},$$

поэтому следует утверждение теоремы

$$V_{\max} = \frac{a^n}{n^n} .$$

Теорема доказана.

Теорема 2. (обобщение) Пусть a-фиксированное положительное число; $a_1, a_2, \dots, a_n$-положительные вещественные числа, удовлетворяющие условию (1.3.2)

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k .$$

Тогда

$$V_{\max} = \max_{x_i} V(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{a^n}{n^n a_1 \dots a_n}; \tag{1.3.11}$$

Доказательство.

Обозначим

$$V\ (y_1, y_2, \dots, y_n) = V(x_1, x_2, ..., x_n);$$

$$y_j = \frac{a x_j}{a_j}, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Тогда из утверждения теоремы 1 следует доказательство формулы (1.3.11).

Указанный метод позволяет также исследовать более общие аналогичные задачи.

Пусть $V_{m,n}(\cdot)$ многомерный гипперкуб, т.е.

$$V_{m,n}(\cdot) = \max V_{m,n} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \max V_{j,n}(x_1, \dots, x_n),$$

причём $\lambda_j \geq 0$, а $\max V_{j,n}(\dots)$ исследуется согласно теоремам 1 и 2.

Сформулируем ещё одно утверждение.

Теорема 3. Пусть *x, y* - положительные числа, $\alpha, \beta \geq 1$-произвольные неотрицательные числа; $p = [\alpha]$; $q = [\beta]$;

где $[\beta]$ - обозначает целую часть числа β.

Тогда при

$$\frac{x}{y} = \frac{[\alpha]}{[\beta]} \Leftrightarrow x \div y = p \div q,$$

Произведение

$$V(x, y, \alpha, \beta) = x^{[\alpha]} \cdot y^{[\beta]} \qquad (1.3.12)$$

достигает своё наибольшее значение, если $x + y = a$.

Доказательство.

Так как $y = x - a$, тогда выражение (12) достигает наибольшей своей величины, когда $V(\cdot)$ достигает своего максимального значения

$$\frac{1}{[\alpha]^{[\alpha]}} \cdot \frac{1}{[\beta]^{[\beta]}} V(x, y, \alpha, \beta) = \frac{x^p}{p} \cdot \frac{(a-x)^q}{q^q} = \widetilde{V}(\cdot) \qquad (1.3.3)$$

Представим полученное выражение (1.3.13) в виде (оптимизируем выражение (1.3.13))

$$\widetilde{V}(\cdot) = \underbrace{\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdots \frac{x}{p}}_{p-раз} \cdot \underbrace{\frac{(a-x)}{q} \cdot \frac{(a-x)}{q} \cdots \frac{(a-q)}{q}}_{q-раз} \qquad (1.3.14)$$

В равенстве (1.3.14) сумма всех множителей

$$\frac{x}{p} + \frac{x}{p} + \cdots + \frac{x}{p} + \frac{(a-x)}{q} + \frac{(a-x)}{q} + \cdots \frac{(a-x)}{q} = \frac{px}{p} + \frac{q(a-x)}{q} = a,$$

т.е. левая часть является постоянным числом. На основании теоремы 1, заключаем, что искомое выражение достигает максимум при равенстве (с учётом $y = x - a$)

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{p}{q}.$$

Утверждение доказано.

Обобщение теоремы 3 также можно получить, если условие $x + y = a$ заменить на условие

$$a_1 x + a_2 y = a. \qquad (1.3.15)$$

Таким образом можно также доказать, что произведение

$$x_1^{[\alpha_1]} x_2^{[\alpha_2]} \cdots x_n^{[\alpha_n]} \qquad n > 2\,,$$

при постоянстве суммы (целевой функции)

$$a_1 x + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = a \tag{1.3.16}$$

Достигает своего наибольшего значения, когда

$$\frac{x_i}{y_j} = \frac{[\alpha_i]}{[\beta_j]} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \qquad (i \neq j)\,.$$

2 НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗЛП)

Задача линейного программирования, как направление науки, заключается в изучении методов (способов) отыскания набольшего или наименьшего значений линейной функции, называемой целевой функцией (ЦФ) при наличии линейных ограничений. В математике такие задачи называются задачами линейного программирования (ЗЛП). Множество значений переменных ЗЛП, при которых достигается наибольшее или наименьшее значение ЦФ, определяет так называемый оптимальный план, а всякое же другое множество значений, удовлетворяющее заданным ограничениям, определяет допустимый план (решение).

Линейная алгебра, в том числе теория систем линейных уравнений занимает особое место в составлении математических моделей большинства практических задач и их решений. Такими задачами являются технологические процессы производства, социологические исследования, управленческие процессы, задачи медицины, экономики (задачи использования ресурсов, организации общественного питания, банковского дела, транспорта, оптимального распределения ресурсов и другие). Почти 80 процентов экономических задач решаются с помощью систем линейных уравнений, а многие экстремальные экономические задачи - с помощью методов линейной алгебры.

Введем некоторые определения из алгебры.

Определение. Системой m линейных неравенств с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}, \qquad (2.1.1)$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Матрица A называется матрицей системы (2.1.1), X – неизвестный вектор-столбец и b – вектор–столбец правой части.

Решением СЛН (2.1.1) называется любой набор значений неизвестных

$$x_1=\alpha_2; x_2=\alpha_2; \cdots; x_n=\alpha_n,$$

если они удовлетворяют одновременно всем неравенствам (2.1.1).

Обычно СЛН имеет бесконечно много решений, и эти решения как правило образуют некоторую область n – мерного пространства R^n.

Используя правило умножения матриц, систему (2.1.1) перепишем в матричной форме

$$AX \le b. \tag{2.1.2}$$

Для обозначения СЛН (2.1.1) также удобно использование записи в векторной форме.

Пусть

$$A_1=(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}), \cdots, A_n=(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn}), \tag{2.1.3}$$

n вектора строк, каждый из которых является m - мерным вектором, тогда СЛН (2.1.1) перепишется в виде

$$A_1X_1 + A_2X_2 + \cdots + A_nX_n \le b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot X_i \le b. \tag{2.1.4}$$

Условие неотрицательности неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ в матричной форме записывают

$$X \ge \theta\ ;$$

где θ это n - мерный нулевой вектор-столбец. Если в решении системы

(2.1.1) все $\alpha_i \geq 0$, тогда числа $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$- называются неотрицательным решением СЛН.

В общем случае, если СЛН имеет хотя бы одно решение, то эта система называется совместной (разрешимой), в противном случае, система называется несовместной (неразрешимой).

Две системы СЛН с равным числом неизвестных называются равносильными (эквивалентными), если каждое решение одной системы является решением другой системы и наоборот, т е. множество их решений совпадают. Между СЛУ и СЛН с одинаковым числом неизвестных существует следующая связь: пользуясь СЛН (2.1.1), искусственным способом построим систему mлинейных уравнений с $m+n$ неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \tag{2.1.1'}$$

Имеет место, следующее общее утверждение.

Теорема 1. Если вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathrm{n}, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+m})$ является каким-либо решением СЛУ $(2.1.1')$ и дополнительно известно, что $\alpha_{n+1} \geq 0, \ldots, \alpha_{n+m} \geq 0$, тогда вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathrm{n})$ будет решением СЛН (2.1.1), причём каждое решение СЛН (2.1.1) можно вычислить путём решения вновь полученной СЛУ.

Доказательство.

1) Если вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathrm{n}, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+m})$ - любое решение СЛН, т.е., выполняется равенство

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n + \alpha_{n+i} = b_i; \quad \alpha_{n+i} \geq 0; i = 1,2,\ldots,m,$$

тогда непосредственно получим

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n \leq b_i; \; i = 1,\, 2, \ldots,\, m;$$

2) Пусть $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ решение СЛН (2.1.1), т.е.

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n \leq b_i; \; i = 1, \; 2, \cdots, m,$$

тогда числа

$$\beta_{n+i} = b_i - (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n) \geq 0,$$

и вектор ($\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}, \ldots, \beta_{n+m}$) будет решением СЛУ $(2.1.1')$.

Теорема доказана.

Одной из важнейших задач СЛН является задача существования решения.

[7,20,36] . Приведём без доказательства следующее утверждение:

Теорема 2. СЛН (2.1.1) не имеет решения тогда и только тогда, если следующая система,

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m = 0 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = 0 \\ b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m < 0 \end{cases} \qquad (2.1.1'')$$

имеет неотрицательное решение [7,20,36].

Отметим, что формулировке теоремы 2 последнее неравенство обычно заменяют равенством

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m = C$$

(C - произвольное отрицательное число, например, C = -1). Таким образом, задача разрешимости СЛН в общем случае сводится к задаче существования неотрицательного решения СЛУ [7,20,36].

Рассмотрим следующую систему неравенств.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \le -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 2 \end{cases}$$

Составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0 \\ y_1 - y_2 \quad + 2y_4 = -1 \end{cases},$$

которая имеет единственное решение

$$y_1 = -\frac{1}{3};\ y_2 = \frac{2}{3};\ y_3 = 1;\ y_4 = 0$$

Следовательно, по теореме 2, исходная система неравенств имеет решения.

К примеру, значения неизвестных $x_1 = -2;\ x_2 = 1$ и $x_3 = -1$, являются одним из решений СЛН.

Следует заметить, что задача существования неотрицательных решений СЛУ, сводится к задаче разрешимости какой-либо СЛН.

Теперь рассмотрим метод решения СЛН в случаях, когда $n=2$ и $m=2$.

Пусть дана общая СЛН

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Требуется найти решение этой СЛН.

В системе (2.1.5) условия $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$ требуют нахождение неотрицательных решений системы (2.1.5). Так как в практических задачах эти решения выражают понятия объёма ресурсов, потребности и предложения производимой продукции и т.д., то они заведомо не могут принять отрицательные значения.

Элементы матрицы A и координаты вектора b

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

в экономических задачах, соответственно обозначают: затрата и объём запаса, совокупность выпушенной продукции за определённый период времени, технологический процесс организации производства, стоимость товара и объём ресурсов, различные виды ограничений и подобные им условия. Следовательно, по смыслу они также являются неотрицательными величинами. Поэтому все элементы матрицы A и вектора b будем считать неотрицательными. Таким образом, решение системы будем искать в первом квадранте прямоугольной системы координат графическим методом.

Напомним, что равенства

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \text{ и } a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

соответственно делят плоскость на две части

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,\ \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1, \tag{2.1.6}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge b_2\ . \tag{2.1.7}$$

Решения уравнения

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

выражают множество точек $\{x_1; x_2\}$ плоскости, принадлежащих прямой линии L_1, проходящей через точки $(0\ ;\ \frac{b_1}{a_{12}})$ и $(\frac{b_1}{a_{11}}\ ;\ 0)$ и с угловым коэффициентом $k_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$ (рис.1).

Решения уравнения

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

обозначает множество точек $\{x_1; x_2\}$, принадлежащих прямой линии L_2, проходящей через точки $(0\ ; \frac{b_2}{a_{22}})$ и $(\frac{b_2}{a_{21}}\ ; 0)$ и с угловым коэффициентом $k_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$ (рис 1).

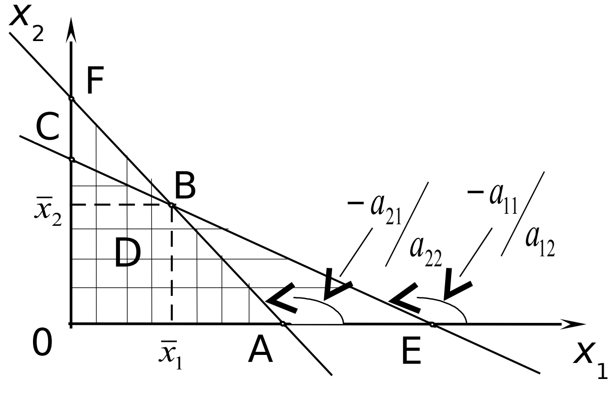

Рисунок 1

Точки, отмеченные на рисунке 1, имеют соответственно координаты: A$(\frac{b_2}{a_{21}}; 0)$, E$(\frac{b_1}{a_{11}}; 0)$, C$(0\ ; \frac{b_1}{a_{12}})$, F$(0\ ; \frac{b_2}{a_{22}})$, $B(\bar{x}_1\ ; \bar{x}_2)$.

Из рисунка 1 видно, что решениями системы (2.1.5) являются все точки $\{x_1; x_2\}$, которые удовлетворяют первому и второму неравенствам. Следовательно, на рисунке 1 область *D* – та самая область, которая расположена на пересечении областей *OCE* и *OFA*.

Таким образом, из проведенного анализа данной СЛН следует, что в случае $n=2$ - область *D* есть некоторое подмножество плоскости X_1OX_2 (двумерного пространства). Для n>2 решения СЛН являются пересечениями полупространств, которые отделяются друг от друга гиперплоскостями

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i\,;\ i = 1,2,\cdots,m\,;$$

Такие области называются многогранными множествами и характеризуются граничащими гиперплоскостями и точками пересечения гиперплоскостей – вершинами многогранного множества.

Для n=2 вершинами области *D* являются точки пересечения прямых, которые ограничивают заштрихованную область решений СЛН. На рисунке 1 имеются четыре вершины: $O(0,0)$- точка пересечения прямых $x_1=0;\ x_2=0$; *A* $(\frac{b_2}{a_{21}}\ ;0)$ - точка пересечения прямых $x_2=0$ и L_1; $B\ (\bar{x}_1\,;\bar{x}_2)$-точка пересечения прямых $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ и $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$; *C* $(0\ ;\frac{b_1}{a_{12}})$- точка пересечения прямых $x_1=0$ и L_2 .

Координаты точки $B(\bar{x}_1\,;\bar{x}_2)$ определяются из решения системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Рассмотрим ЗЛП, которая выражается с помощью СЛН:

Пусть некоторое предприятие выпускает два вида строительных материалов (виды I и II). Известно, что предприятие получает 5 у.е, дохода от реализации одной тонны строительных материалов вида I и 6 у.е. – от реализации одной тонны вида II. Для производства указанных строительных материалов предприятие использует: цемент, металл, гравий и рабочую силу. Время использования ресурсов для производства этих строительных материалов ограничено (например, сутки, месяц, квартал и т.д.). Потребность предприятия в видах сырья задаётся в таблице 2.1.1.

Таблица 2.1.1

строй. материалы	цемент	металл	гравий	рабочая сила	прибыль	план
	34	15	3	100	5	x_1
II	27	25	2	120	6	x_2
объем запасов сырья	800	1200	50	2000		

Производственный план предприятия выражается вектором $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, здесь x_1 - количество стройматериалов вида *I*; x_2 - количество вида *II*. Плановая прибыль $P(C;X)$ предприятия, согласно предусмотренному условию задачи (вектора цены *C*=(5;6)), равна

$$P(C;X) = C\cdot X = 5x_1+6x_2 .$$

Теперь рассмотрим, сколько используется запасов каждого вида сырья для выполнения плана предприятия. То есть, составим математическую модель задачи. На основании заданных условий получим СЛН

$$\begin{cases} 34x_1+27x_2\le 800 \\ 15x_1+25x_2\le 1200 \\ 3x_1+2x_2\le 50 \\ 100x_1+120x_2\le 2000 \\ x_1\ge 0;\quad x_2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX\le b \qquad (2.1.8)$$

где матрицы *A*, b, *X* соответственно равны

$$A=\begin{pmatrix}34 & 27\\ 15 & 25\\ 3 & 2\\ 100 & 120\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}800\\ 1200\\ 500\\ 2000\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

A - матрица использования ресурсов, b- вектор ограничения ресурсов и *X* - вектор количества готовой продукции.

Таким образом, при заданных ограничениях (2.1.8) нужно найти максимальное (наибольшее) число прибыли $P(C;X) = C \cdot X = 5x_1 + 6x_2$.

В экономике играют важную роль соотношения между экономическими понятиями: выпуска продукция, затрата, спроса, предложений и др.

Часто возникает необходимость выбора одного из возможных вариантов функционирования экономической системы. В таких условиях ставится вопрос о выборе наилучшего варианта критерия (цели). В количественном выражении критерий представляет собой функциональную зависимость от переменных показателей, которую в дальнейшем, будем называть целевой функцией. Наилучший вариант в таком случае соответствует наибольшему (экстремальному, оптимальному) значению функции.

Аналитическая трактовка этого направления связана с функциональной зависимостью параметров, выражающие основные производственные показатели, приводящие к понятию целевой функции (ЦФ).

Таким образом, в прикладных задачах областью изменения значений параметров являются в основном ограниченными. В связи с этим оптимальные или экстремальные (максимальные или минимальные) значения ЦФ приходится искать в ограниченных множествах.

Область исследования и создания алгоритмов нахождения решения таких задач называется направлением математического программирования (МП). Одним из основных направлений МП является линейное программирование (ЛП) в котором целевая функция линейна, и множество, на котором ищется экстремум ЦФ, задаётся системой линейных равенств и неравенств. В свою очередь в ЛП существуют классы задач, структура которых позволяет создать специальные методы и их решения, выгодно отличающиеся от методов решения задач общего характера. Например, раздел транспортных задач, блочного программирования и др. При решении ЗЛП, широко применяются методы линейной алгебры и теория матриц.

Постановка задачи**.**

Найти такой n - мерный вектор $X^*(k_1,k_2,\cdots,k_n)$, координаты, которой $k_1,k_2,\cdots,k_n$, удовлетворяли СЛН

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ \quad x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ldots;x_n \ge 0 \end{cases} \tag{2.1.9}$$

причём, линейная функция от n - переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \tag{2.1.10}$$

принимает своё максимальное или минимальное значение. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется целевой функцией и система неравенств (2.1.9) - ограничениями ЗЛП. Вектор $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ выражает коэффициентов ЦФ, координаты, которой обычно задаются.

Рассмотрим запись задачи ЛП в матричной форме.

Найти такой *n* – мерный вектор–столбец X^*, координаты, которой числа, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ удовлетворяли матричную систему неравенств

$$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge \theta \end{cases} \qquad (2.1.11)$$

и доставляли максимум (или минимум) для целевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P \cdot X = \max_x \left(\min_x\right), \qquad (2.1.12)$$

где $A = (a_{ij})_{m \times n}$ - матрица постоянных (известные параметры),

b - вектор правой части,

P - вектор коэффициентов ЦФ,

X - неизвестный вектор ЗЛП,

θ - нулевой вектор

$P \cdot X = (P, X)$ выражает скалярное произведение векторов P и *X.*

Обычно такая форма постановка задачи называется стандартной формой ЗЛП. В случаях, когда сформулирована конкретная задача нахождения $\max_x f$, или $\min_x f$, то задачу называют соответственно стандартной задачей нахождения максимума или минимума целевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

На практике некоторые ограничения в системе (2.1.19) могут задаваться равенствами

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (2.1.13)$$

Если для всех $i = 1, 2, \cdots, m$ выполняются равенства (2.1.5), тогда ЗЛП перепишется в виде

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq \theta, \end{cases} \tag{2.1.14}$$

$$f = P \cdot X \to \max_x(\min_x)$$

и последняя запись постановки задачи называется канонической формой ЗЛП.

Следует отметить, что для того чтобы стандартную задачу ЗЛП привести к канонической форме достаточно ввести новые неизвестные, и каждое неравенство в системе (2.1.19) нужно записать в виде равенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im} + z_i = b_i;\ i = 1,2,\ldots,m\ . \tag{2.1.15}$$

При этом ЦФ остаётся неизменной, она перепишется в виде

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n + 0 \cdot z_1 + \ldots + 0 \cdot z_m \tag{2.1.16}$$

Тогда задачи (2.1.14) принимает вид

$$\begin{cases} AX + Z = b \\ X \geq \theta;\ Z \geq \theta, \end{cases}, \tag{2.1.17}$$

$$f = P \cdot X \to \max_x(\min_x)$$

Z обозначает *m*-мерный неотрицательный вектор столбец с координатами $z_i \geq 0$; (*i=1,2,…, m*).

Наоборот: если ЗЛП имеет канонический вид и требуется привести к стандартному виду, то в формулах (2.1.14) выражение $AX = b$ можно заменить двумя неравенствами:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \end{cases} \qquad (2.1.18)$$

которые равносильны исходному равенству $AX = b$. Таким образом, в ЗЛП в каком виде задаются ограничения, не имеет принципиального значения.

С целью рассмотрения некоторых основных свойств ЗЛП, напомним постановку ЗЛП.

Общая задача ЛП состоит в выборе вектора X, удовлетворяющего системе неравенств (2.1.18) и максимизирующего или минимизирующего целевую функцию (2.1.16)

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

Математически ЗЛП записывается следующим образом:

найти

$$f = P \cdot X \to \max_x (\min_x) \qquad (2.1.19)$$

при заданном условии

$$AX \le b \ ; \ X \ge \theta \qquad (2.1.20)$$

Рассмотрим один из видов постановки задачи, например, $f \to \max$.

Множество векторов X, удовлетворяющее неравенствам (2.1.18) называется множеством допустимых планов или просто допустимым множеством и обозначается

$$D = \{ X : \ AX \le b; \quad X \ge \theta \}. \qquad (2.1.21)$$

Произвольный вектор $X \in D$ называется планом (допустимым планом). Вектор $X^* \in D$, который доставляет максимальное значение ЦФ, т.е.

$$\max f = \max P \cdot X = P \cdot X^{*} \tag{2.1.22}$$

называется решением ЗЛП.

Перечислим основные свойства ЗЛП.

1. Если допустимое множество D задачи ЛП является непустым ($D \neq \theta$) и ограниченным множеством, то ЗЛП имеет решение.

2. Множество D является многогранным множеством. Граничные гиперплоскости называются гранями, а точки, в которых пересекаются n или больше граней, называются вершинами (угловыми точками). Каждая грань состоит из всех точек, в которых одно из неравенств или ограничений неотрицательности выполняется как точное равенство, а каждая вершина представляет собой точку, в которой n или более ограничений - неравенств выполняются как точные равенства.

С целью более наглядного объяснения этого пункта, рассмотрим пример многогранного множества ЗЛП при *n*=3, *m*=4 (рис.2).

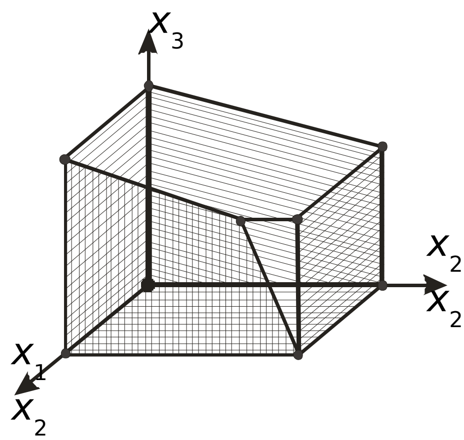

Рисунок 2

Многогранное множество имеет 7 граней и 9 вершин. В восьми из этих вершин, пересекаются по три грани, а в одной – четыре грани. Вершины связаны рёбрами, в каждом из которых пересекаются по две грани.

3. Множество точек $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых значения целевой функции одинаковы, называется соответственно линией уровня при n=2, и поверхностью уровня при $n \geq 3$

$$D_C = \{ X : f = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = C \} \tag{2.1.23}$$

и это множество представляет собой гиперплоскость в n – мерном пространстве. Если придавать в правой части формулы (2.1.23) различные значения, то получим семейство параллельных гиперплоскостей. В частности, при n=2 это будет семейство параллельных прямых, при n = 3 - семейство параллельных плоскостей.

Направление роста определяется вектором $p=(p_1, p_2,\dots, p_n)$ - где $p_1, p_2,\dots, p_n$ коэффициенты целевой функции f.

С геометрической точки зрения, задача ЛП состоит в отыскании точки (или множества точек), принадлежащей допустимому многогранному множеству D, в которой(ых) достигается поверхность набольшего уровня. Из графических представлений вытекает, что если решение существует, то оно не может быть внутренней точкой, а должно принадлежать границе допустимого множества D.

Следовательно, решением может являться точка, принадлежащая одной или нескольким граням,   или, что эквивалентно, решением является одна вершина или несколько вершин и все точки, принадлежащие прямой, соединяющей эти вершины.

4. Для отыскания решения ЗЛП достаточно найти все вершины допустимого множества D и выбрать из них ту, в которой ЦФ принимает максимальное значение.

Описываемый метод полного перебора вершин практически применим в тех случаях, когда ЗЛП имеет малую размерность. При большом числе переменных он требует большой объём вычислительной работы. Тем не менее, именно идея перебора вершин (но не полного, а упорядоченного) лежит в основе эффективного численного метода решения ЗЛП, называемого симплекс-методом.

5. В случае, когда ограничения задачи ЛП имеют вид:

$$AX=b \qquad (2.1.24)$$

$$X\ge\theta \qquad (2.1.25)$$

Запишем ограничения (16), (17) в следующем виде.

$$\sum_{j=1}^{n} A_j X_j = b, \qquad (2.1.26)$$

где A_j, m-мерные вектора, составленные из столбцов матрицы A.

Справедливы следующие утверждения:

Пусть среди векторов $A_1, A_2, \cdots, A_n$; существуют $(r \le n)$ - линейно независимых, например, $A_1, A_2, \cdots, A_r$, и существуют числа $\alpha_j > 0; j = 1,2,\cdots, r,$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \alpha_j = b$$

Тогда вектор a с координатами $a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, 0, 0, ..., 0)$ и является вершиной многогранного множества (2.1.24), (2.1.25); и, наоборот, если $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - вершина многогранного множества (2.1.24) и (2.1.25), то векторы в разложении (2.1.26), соответствующие положительным x_j, являются линейно независимыми. Так как векторы $A_1, A_2, ..., A_n$ имеют размерность m, то вершина многогранного множества имеет не более чем m положительных координат. Свойства, приведённые здесь, лежат в основе обоснования известного метода - линейного программирования – симплексного метода.

6. Задача ЛП для максимума и минимума удовлетворяет условиям: $-\min f = \max(-f)$.

Следует заметить, что на практике, наука - математическое программирование, в особенности линейное программирование, имеет широкое применение. Многие экономические задачи можно свести к задачам линейного программирования. Около 80% производственных задач решаются с помощью методов ЗЛП [1,2,29,36,38].

2.2 ПРИМЕРЫ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИТУАЦИЙ, СВОДЯЩИХСЯ К ЗАДАЧАМ ЛП

Задача 1. Предположим, что некоторая фирма (предприятие) выпускает *n* видов, продукции, при этом затрачивает *m* видов ресурсов. Технология производства описываются величинами $a_{ij};\ (i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$: a_{ij} обозначает количество i-го $i=1,2,\cdots m;$ ресурса, затрачиваемое на производство одной единицы j-го вида готовой продукции, b_i - запас $i-$го ресурса на производстве $i=1,2,\cdots m.$ Готовая продукция реализуется по заданным ценам $p_1,p_2,\cdots,p_n$, p_j выражает цену реализации одной единицы j-ой готовой продукции. .Производственный процесс удовлетворяет условиям: затраты ресурсов растут прямо пропорционально объёмам производства каждого вида продукции и суммируются по разным видам продукции. т.е. как это принято говорить производственный процесс удовлетворяет условиям линейности и аддитивности. Пусть x_j обозначает планируемый объём производства j-го вида продукции, $j=1,2,\cdots,n.$ В этих условиях для производства такого объёма продукции требуется $a_{ij}x_j$, $i-$го вида ресурса, $i=1,2,\cdots m.$ Количество планируемых объёмов выпусков всех видов продукции описываются вектором $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$. Необходимые количества каждого вида ресурсов для производства вектора X подсчитывается по формулам

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\ ;\ \ i=1,2,\cdots,m \qquad (2.2.1)$$

В условиях постоянства запасов ресурсов фирма может осуществлять только такие производственные программы $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$,. для которых достаточно имеющихся ресурсов. Этот факт задаёт ограничения в задаче составления плана производства

$$AX\le b\ ;\quad X\ge\theta \qquad (2.2.2)$$

Здесь, обычно $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$ - называется технологической матрицей или матрицей прямых затрат, вектор *b* - вектором ограничений.

Совокупность *n* – мерных векторов $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, удовлетворяющих ограничениям ЗЛП, называется допустимым планом ЗЛП, а допустимое решение, при котором целевая функция

$$f = \sum_{j=1}^{n} p_j\, x_j = P \cdot X = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \qquad (2.2.3)$$

принимает максимальное (минимальное) значение, называется оптимальным планом (решением) ЗЛП.

Считается, что вся произведённая продукция на рынке реализуется по ценам $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$.

Задачей составления производства состоит в выборе среди всех векторов *X*, удовлетворяющих ограничениям (2.2.2), такого, при котором величина (2.2.3) принимает наибольшее значение. Таким образом, получается задача

$$f = P \cdot X = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \to \max_{x}, \qquad (2.2.4)$$

при ограничениях: $AX \le b$; $X \ge \theta$. Другими словами сформулированная задача называется стандартной ЗЛП.

Задача 2. Рассмотрим пример - так называемую задачу о банке, которая посвящена применению линейной алгебры в области финансов.

Пусть собственные средства банка в сумме с депозитами составляют N учетных единиц. Часть этих средств, но не менее p процентов должна быть размещена в кредитах. Кредиты являются низколиквидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности банка в наличности, обратить кредиты в деньги без существенных потерь достаточно трудно. Ценные бумаги в деятельности банков имеют особое значение: их можно в любой момент либо выгодно продать, получив некоторую прибыль или, во всяком случае, без существенного убытка обналичить. Поэтому банки придерживаются негласного правила, согласно которому они покупают в определённой пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать низкую ликвидность кредитов. Предположим, что рассматриваемый банк организовывает свою деятельность по следующему правилу: ценные бумаги должны составлять не менее Q процентов средств, предусмотренных в кредитах и ценных бумагах; C_1 - доход банка за счёт кредитов и C_2 - доход банка за счёт ценных бумаг. Заметим, что обычно выполняется неравенство $C_1 > C_2$, потому, что ликвидность ценных бумаг выше, чем ликвидность кредитов. Пусть x_1 - средства банка (в какой-либо у.е.,), размещённые в кредитах, x_2- средства банка, вложенные в ценные бумаги. Цель банка состоит в размещении собственных средств таким образом, чтобы получить максимальный доход от кредитов и ценных бумаг.

Таким образом, мы получили ЗЛП

$$f = C_1 x_1 + C_2 x_2 \to \max_{x_1; x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le N \\ x_1 \ge \dfrac{N \cdot P}{100} \\ x_2 \ge \dfrac{Q}{100}(x_1 + x_2) \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение задачи анализируем для следующих конкретно выбранных значений параметров: $N = 100$ тыс. тенге, $P = 35$ тыс.тенге, $Q = 30$ тыс. тенге и $C_1 = 0{,}6$; $C_2 = 0{,}2$, тем самым получим ЗЛП

$$f = 0{,}6x_1 + 0{,}2x_2 \to \max_{x_1; x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 100 \\ x_1 \ge 35 \\ x_2 \ge 0{,}3(x_1 + x_2) \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вычислим уровень дохода банка в вершинах многогранного множества D : A (35; 65), B (35;15), C(70;30).

$$f(A) = 0{,}6 \cdot 35 + 0{,}2 \cdot 65 = 34 \text{ ;}$$

$$f(B) = 0{,}6 \cdot 35 + 0{,}2 \cdot 15 = 24 \text{ ;}$$

$$f(C) = 0{,}6 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 30 = 48.$$

Отсюда видно, что максимальное значение целевой функции достигается на плане $X^{\bullet} = (70;30)$ и равно $f(X^{\bullet}) = 48$ тыс. тенге.

Далее предположим, что средства банка, выделенные дополнительно для размещения в кредитах и ценных бумагах на тех же условиях, увеличились на *V* у.е.

Таким образом, получена новая задача ЛП

$$f = C_1 x_1 + C_2 x_2 \to \max_{x_1;x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le (N+V) \\ x_1 \ge \dfrac{(N+V)\cdot P}{100} \\ x_2 \ge \dfrac{Q}{100}(x_1 + x_2) \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

При *V*=10 тыс. у.е. и получим новую задачу ЛП

$$f = 0{,}6x_1 + 0{,}2x_2 \to \max_{x_1;x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 110 \\ x_1 \ge 35 \\ x_2 \ge 0{,}3(x_1 + x_2) \\ x_1; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

За счёт дополнительных средств равных 10 тыс. у. е., соответственно изменяется множество допустимых планов. Именно, за счёт параллельного перемещения прямой $x_1 + x_2 = 100$ до прямой $x_1 + x_2 = 110$. В общем случае прямая $x_1 + x_2 = N$ перемещается параллельно до прямой $x_1 + x_2 = (N+V)$, и новые вершины допустимого многогранного множества переносятся параллельно на вершины: $\overline{A}(35;75)$, $B(35;15)$, $\overline{C}(77;33)$ (в нашем примере.)

В результате, соответствующие значения целевой функции будут равны: $f(\overline{A}) = 37,\quad f(B) = 24,\quad f(\overline{C}) = 52{,}8$.

Максимальное значение ЦФ равно: $f = 52{,}8$, а прирост составит величину $\Delta f = 52{,}8 - 48 = 4{,}8$ тыс. тенге.

Задача 3. С целью организации общественного питания коллектива людей, например, в больницах, летних школьных лагерях, санаториях, в армии и т.п., возникает задача о наиболее экономном организации рациона питания, удовлетворяющем определённым нормативным (медицинским) требованиям. Пусть рацион составлен из *n* продуктов (хлеб, сахар, масло, мясо, молоко, картофель, и т.п.), в которых учитывается *m* питательных веществ (жиры, белки, углеводы, витамины и т.п.).

Пусть a_{ij} обозначает количество i-го вещества, содержащегося в единичном количестве $j-$го продукта, $i = 1,2,\cdots m;\ j = 1,2,\cdots,n;$ по условию все $a_{ij} \geq 0;$ b_i - минимальное количество i-го вещества, которое должно потребляться коллективом людей (индивидуумом) в расчёте за определённый период, скажем, на месяц, $b_i > 0;\ i = 1,2,\cdots m,$ $P_j -$закупочная цена одной единицы $j-$го продукта, например, в кг. $j = 1,2,\cdots,n.$ Обозначим через x_j количество $j-$го продукта $j = 1,2,\cdots,n.$, закупаемое для питания коллектива людей. Тогда количество i-го питательного вещества, содержащегося в совокупности купленных продуктах, будет

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n; \quad i = 1,2,\cdots,m;$$

По условиям предусмотренного рациона i-го питательного вещества должно быть не менее b_i

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \quad i = 1,2,\cdots,m. \qquad (2.2.5)$$

Среди всех рационов питания, удовлетворяющих минимальным потребностям в питательных веществах, требуется выбрать самый оптимальный. Таким образом, получается следующая задача линейного программирования, которую запишем сразу в матричной форме

$$f = P \cdot X \to \min_{X}(f); \qquad (2.2.6)$$

$$AX \geq b; \qquad (2.2.7)$$

$$X \geq \theta \qquad (2.2.7)$$

Аналогично, можно рассмотреть и другие смешанные оптимизационные задачи[37].

2.3 ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В теории линейного программирования чрезвычайно важную роль играет то обстоятельство, что каждой задаче ЛП можно сопоставить так называемую двойственную задачу.

Правила построения двойственной задачи.

Пусть исходная задача линейного программирования, называемая прямой задачей, является задачей на максимум

Постановка задачи (I): Напомним формулировку стандартной задачи ЛП: пусть

$$f = P \cdot X = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \qquad (2.3.1)$$

$$AX \le b;\ X \ge \theta \qquad (2.3.2)$$

где $P, X,$ *n*-мерные вектора, *b* обозначает *m* - мерный вектор-столбец, $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ – матрица размерности $m \times n$ (технологическая матрица).

Нужно найти такой вектор X, удовлетворяющий условию (2.3.2) и обеспечивающий максимальное значение целевой функции

$$f = P \cdot X = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \to \max_x. \qquad (2.3.3)$$

Стандартная двойственная задач (II).

Пусть

$$g = by = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \qquad (2.3.4)$$

$$A'Y \ge P\ ;\ Y \ge \theta, \qquad (2.3.5)$$

где *Y* есть *m*- мерный вектор, A' - транспонированная матрица для матрицы A. Нужно найти такой вектор Y, удовлетворяющий условию (2.3.4) и обеспечивающий минимальное значение функции (2.3.3), т.е.

$$g = by = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \to \min_y \qquad (2.3.6)$$

Задачи (I) и (II) называются друг другу двойственными задачами линейного программирования и их взаимосвязи можно выразить с помощью таблицы 2.3.1.

Таблица 2.3.1

	$x_1 \quad x_2 \cdots x_n$		
y_1	$a_{11} \quad a_{12} \cdots a_{1n}$	$\le$	b_1
y_2	$a_{21} \quad a_{22} \cdots a_{2n}$	$\le$	b_2
$\vdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$	...	...
y_m	$a_{m1} \quad a_{m2} \cdots a_{mn}$	$\le$	b_m
	$\ge \quad \ge \cdots \ge$		
	$p_1 \quad p_2 \cdots p_n$		

Если слева на право каждый элемент строки умножим на соответствующие переменные $x_1, x_1, \cdots, x_n$, а затем их сложим, тогда получим ограничения прямой задачи (I).

Если сверху вниз каждый элемент столбцов умножим на соответствующие переменные, $y_1, y_1, \cdots, y_m,$ а затем их сложим, тогда получим ограничения двойственной задачи (II).

Следует отметить, что у двойственной задачи число неизвестных равно числу ограничений и число ограничений равно числу переменных прямой задачи (здесь учитываются только существенные ограничения, а дополнительное условие не отрицательности переменных не учитываются).

Если ограничения прямой задачи показывают, что мы не можем выбирать такие X, для которых взвешенные величины

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

превышают заданные $b_i, \ i = 1,2 \cdots, m$, то в двойственной задаче мы рассматриваем только Y, для которых взвешенные величины

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

не меньше $p_j,\ j = 1,2,\cdots,n.$

Вектор правой части прямой задачи в двойственной задаче задаёт коэффициенты целевой функции и, наоборот, коэффициенты целевой функции прямой задачи в двойственной задаче определяет вектор правой части ограничений.

Пример.

Пусть дана прямая ЗЛП

(I) $f = x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 6 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ge 0 \end{cases}$$

Тогда двойственная ЗЛП будет иметь вид

(II) $g = 5y_1 + 6y_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 4 \\ y_1 + 4y_2 \ge 1 \\ y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ y_1; y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Результаты представлены в таблице 2.3.2

Таблица 2.3.2

	x_1	x_2	x_3	x_4		
y_1	3 1	2	1	1	≤	5
y_2	4	3	4	2	≤	6
	≥	≥	≥	≥		
	1	4	1	3		

Теперь сформулируем, простейшие свойства двойственной задачи линейного программирования:

1) Матрицы задачи (I) и (II) являются друг для друга взаимно транспонированными.

2) Система ограничений в обеих задачах по смыслу имеют противоположные знаки.

3) Свободные члены каждой системы являются коэффициентами ЦФ двойственных задач.

4) Если в прямой задаче требуется найти максимум ЦФ, то двойственной задаче требуется найти минимум ЦФ и наоборот.

5) Ограничение $A'Y \geq P$ можно записать в виде $Y'A \geq P'$.

Математическую связь двойственных задач можно охарактеризовать следующим образом.

Пусть D_1 - обозначает область допустимого плана задачи (I);

D_2 - обозначает область допустимого плана задачи (II).

Если

$X^* = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ - является оптимальным решением задачи (I) и

$Y^* = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ - является оптимальным решением задачи (II),

тогда задачи (I) и (II) можно переписать

$$\max_{x \in D_1}(P \cdot X) = P \cdot X^* = \max(f) \qquad (2.3.7)$$

$$\min_{y \in D_2}(B \cdot Y) = B \cdot Y^* = \min(g) \qquad (2.3.8)$$

В следующих выводах рассматривается взаимосвязи этих двух задач:

1) ЗЛП (I) и (II) имеют решение тогда и только тогда, когда множества D_1 и D_2 являются непустыми.

2) Значение целевой функции f в прямой задаче (I) не превосходит значение целевой функции g в двойственной задаче (II), т.е. если $X \in D_1; Y \in D_2$, *то*

$$f = P \cdot X \leq B \cdot Y = g \qquad (2.3.9)$$

3) Если задача (I) имеет решение, тогда D_1 *ва* D_2 являются не пустыми множествами.

4) На основании свойств 1) - 3) следует, что обе ЗЛП:

а) не имеют решение;

б) одна из них имеет только одно решение и её ЦФ не ограниченна;

в) обе задачи не имеют решения.

5) Если $X^* \in D_1$; $Y^* \in D_2$ соответственно являются оптимальными решениями задачи (I) и (II), тогда $\forall x \in D_1$ *и* $\forall y \in D_2$ выполняются неравенства

$$P \cdot X \le P \cdot X^* = B \cdot Y^* \le B \cdot Y \tag{2.3.10}$$

Из формулы (9) непосредственно следуют

а) Оптимальные значения задачи (I) и (II) равны между собой.

б) Ни какой вектор - план задачи (I) (на максимум) для целевой функции f не может давать значение больше, чем минимума значения целевой функции g двойственной задачи и наоборот: никакой вектор - план задачи (II) (на минимум) для целевой функции g не может давать значение меньшее, чем значение максимума целевой функции f прямой задачи.

Таким образом, решение задачи на $\max(f)$ относительно $X \in D_1$ означает, что нужно увеличить уровень (линии или поверхности) значения ЦФ $f = P \cdot X$, или нужно уменьшать значения $g = B \cdot Y$, $Y \in D_2$, и этот процесс нужно продолжить до тех пор, пока их значения не станут равными друг другу.

6) Пусть вектора

$$X^* = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in D_1;$$

$$Y^\bullet = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) \in D_2$$

являются оптимальными решениями соответственно задач (I) и (II), тогда выполняются следующие условия разрешимости

$$\left(P_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i\right)\alpha_j = 0; \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{2.3.11}$$

$$\beta_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\right) = 0; \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{2.3.12}$$

На основании равенств (2.3.11), (2.3.12) с учётом ограничений задачи (I) и (II) непосредственно получим

а) для каждого $j = 1,2,\cdots,n$; $\alpha_j \geq 0$, но если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i > p_j$, тогда для этих номеров j $\alpha_j = 0$.

Для каждого j, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_i \geq p_j$, но если для некоторых индексов j окажется $\alpha_j > 0$, тогда $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i = p_j$.

б) Для каждого $i = 1,2,\cdots,m$; $\beta_i \geq 0$, но если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j < b_i$ тогда для этих номеров i $\beta_i = 0$.

Для каждого $i = 1,2,\cdots,m$; $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \leq b_i$, но если для некоторых индексов i окажется $\beta_i > 0$, тогда $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i$.

Таким образом, из двойственной задачи ЛП видно: какие из переменных из задачи (I) в оптимальных точках равны нулю и какие из неравенства в этих точках выполняются как равенства.

Пример 1. Для задачи ЛП составим двойственную задачу ЛП и найдём решение

$$\begin{cases} f = 3x_1 + 11x_2 + 5x_3 + x_4 \to \min \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 \geq 7 \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Решение:

1) Составим двойственную задачу линейного программирования. В исходной задаче

$$P=(3,\ 11,\ 5,1);\quad A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3 & -1\\ 3 & 3 & -5 & -3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4\\ 7\end{pmatrix}$$

Следовательно, для двойственной задачи $Y=(y_1,y_2)$- является двумерным вектором, поэтому постановка задачи следующая

$$g=4y_1+7y_2\rightarrow\max$$

$$\begin{cases}-3y_1+3y_2\le 3\\ y_1+5y_2\le 11\\ 3y_1-5y_2\le 5\\ -y_1-3y_2\le 1\\ y_1;y_2\ge 0\end{cases}$$

2) Решение задачи, исследуя графическим методом , увидим, что вершины допустимой области D_2 будут точки; $A(0;1)$; $B(2;3)$; $C(5;2)$; $D(5/3;0)$; $O(0;0)$ и значений целевой функции будут следующими

$$4\cdot 0+7\cdot 1=7;\qquad 4\cdot 2+7\cdot 3=29;\ 4\cdot 5+7\cdot 2=34;$$
$$4\cdot 0+7\cdot 0=7;\qquad 4\cdot 5/3+7\cdot 0=20/3$$

Следовательно, оптимальное решение задачи достигается в точке C(5;2). Поэтому ограничения $y_1+3y_2\le 11$ и $3y_1-5y_2\le 5$ выполняются как равенства $5+3\cdot 2=11;$ и $3\cdot 5-5\cdot 2=5$. Третье и четвёртое неравенства выполняются как строгие неравенства т.е. $-3\cdot 5+3\cdot 2=-9<3;$ $\quad -5-3\cdot 2=-11<1$. Первое и четвёртое ограничения соответствуют переменным $x_1,\ x_4.$ Поэтому в соответствии с пунктом 6) $\alpha_1=0;\ \alpha_4=0.$ Поскольку

$\beta_1 = 5 > 0\,;\, \beta_2 = 2 > 0$, тогда ограничения – неравенства первой задачи в оптимальном плане выполняются как равенства.

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 4 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 - 3\alpha_4 = 7 \end{cases}$$

С учётом того, что $\alpha_1 = \alpha_4 = 0,$ имеем

$$\begin{cases} \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4 \\ 3\alpha_2 - 5\alpha_3 = 7 \end{cases}$$

Решая, систему получим

$$\alpha_2 = \frac{41}{14};\ \ \alpha_3 = \frac{5}{14}$$

Таким образом, решением прямой задачи является

$$\alpha_1 = 0;\ \ \alpha_2 = \frac{5}{14};\ \ \alpha_3 = \frac{41}{14};\ \ \alpha_4 = 0$$

и оптимальное значение целевой функции

$$\min(f) = 11 \cdot \frac{41}{14} + 5 \cdot \frac{5}{14} = 34$$

совпадает с оптимальным значением целевой функции двойственной задачи.

Пример 2. Решим задачу линейного программирования

$$f = 240x_1 + 240x_2 + 240x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 100 \\ 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 \le 250 \\ x_1; x_2; x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Составим двойственную задачу линейного

программирования

$$g = 100y_1 + 250y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 8y_1 + 4y_2 \geq 240 \\ 4y_1 + 8y_2 \geq 240 \\ 3y_1 + 12y_2 \geq 240 \\ y_1 \geq 0; \ \ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Найдём вершины множества D_2 : A(0;60); B(20;20); C(40;10); D(80;0). Следовательно, значения ЦФ будут следующими:

$$100 \cdot 0 + 250 \cdot 60 = 15000;\ 100 \cdot 20 + 250 \cdot 20 = 7000;$$
$$100 \cdot 40 + 250 \cdot 10 = 6500;\ 100 \cdot 80 + 250 \cdot 0 = 8000.$$

Таким образом, $Y^* = (\beta_1; \beta_2);\ \ \beta_1 = 40;\ \beta_2 = 10$ и $\min(g) = 6500$. Отсюда легко заметить, что два ограничения $4y_1 + 8y_2 \geq 240$ и $3y_1 + 12y_2 \geq 240$ выполняются как равенства $4 \cdot 40 + 8 \cdot 10 = 240;$ $3 \cdot 40 + 12 \cdot 10 = 240$, но данное ограничение $8y_1 + 4y_2 \geq 240$ в этой точке выполняется в виде строгого неравенства: $8 \cdot 40 + 4 \cdot 10 = 360 > 240;$ и $\beta_1 > 0;\ \beta_2 > 0$. Следовательно, в прямой задаче для величины X^* должно быть $\alpha_1 = 0$, и неравенства – ограничения будут выполняться как равенства.

$$4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 100$$
$$8\alpha_2 + 12\alpha_3 = 250$$
$$\alpha_2 > 0,\ \alpha_3 \geq 0$$

Решая, систему получим

$$\alpha_1 = 0;\ \alpha_2 = \frac{25}{3};\ \alpha_3 = 18{,}75$$

Тогда

$$\max f = 240 \cdot 0 + 240 \cdot {}^{25}\!/_{3} + 240 \cdot 18{,}75 = 6500$$

2.4 СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Симплексный метод (СМ) является одним из универсальных методом решения ЗЛП, так как позволяет решить практически любую задачу, представленную в каноническом виде. Этот метод впервые в 1948 был изложен в исследованиях Д. Данцига. Само понятие симплекс – метода возникло в процессе решения оптимизационных задач в симплексах

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1; \qquad x_i \geq 0 \tag{2.4.1}$$

В основном СМ является алгебраическим методом. Решение задачи начинается с помощью итерационного метода , находится решение СЛУ. В идейном плане СМ заключается в том, что, начиная с некоторого опорного решения, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям системы к оптимальному опорному решению. Значение целевой функции при таком перемещении для задачи на максимум не убывает, на минимум не возрастает. Так как число опорных решений, конечно, то через конечное число шагов оптимальное решение будет найдено.

При этом область допустимых значений решения задачи при n= 2, будет выпуклый многогранник. Если n >2, то область допустимых значений решения задачи будет выпуклый многогранник подобное симплексу (тетраэдр, пирамида, и др.).

В случаях, когда в нескольких точках целевая функция принимает равные значения, тогда решение задачи не единственно. Бывают и случаи, когда после нескольких итераций ЦФ окажется неограниченной, тогда решение задачи отсутствует. Следует заметить, что при применении СМ не обязательно рассматривать все вершины допустимого множества.

Для применения СМ к решению ЗЛП сначала первоначальную задачу

$$\begin{cases} f = c_1x_1 + c_2x_2 + ...+ c_nx_n + c \to \max \\ AX \le b; \quad A = (a_{ij}) \\ X' = (x_1, ..., x_n)' \end{cases} \qquad (2.4.2)$$

приведём к каноническому виду

$$\begin{cases} f = c_1x_1 + c_2x_2 + ...+ c_nx_n + c \to \max \\ AX = b; \quad A = (a_{ij}) \\ X' = (x_1, ..., x_n)' \end{cases} \qquad (2.4.3)$$

Канонический вид можно получить с помощью следующих простейших действий.

1. Если требуется вычислить *min(f),* то нужно воспользоваться равенством *min*(*f*) = - *max(-f*) и задачу свести к задаче максимума.

2. Если ограничения имеет знак ≤ (или≥), то к левой част … (3) … м) новь … ех неравенствах в системе (3) равенства.

3. Если в условиях задачи участвует какая-либо своб … де разн … ых $(x_k = x_k - x_k; \; x_k \ge 0; \; x_k \ge 0)$

4. ЗЛП (2) - (3) следует решать в случаях *m<n*, ибо, когд … ие или … ма или … ю *m<n* .

Этапы решения ЗЛП можно представить в виде след …

Первоначальная задача ЛП.

↓

Введение новых переменных для того, чтобы преобразовать исходные ограничения: неравенства переходили в равенства.

↓

Представление ограничений и целевой функции с использованием значений небазисных элементов, приводящих к опорному плану (переменные, равные 0 в точке решения).

↓

Нахождение допустимого базисного решения. Обычно для этого выбирают начало координат с условием, что эта точка принадлежит области допустимого решения.

↓

Если не все коэффициенты целевой функции отрицательны, то следует определить максимальное возможное увеличение каждой из небазисных переменных, а затем увеличить переменную, которая даёт максимальное приращение значения ЦФ. В результате будет найдено новое допустимое базисное решение (новая вершина) и т.д.
2. Если же все коэффициенты целевой функции отрицательны, то допустимое базисное решение становится решением задачи и представляет собою вершину, в которой ЦФ принимает своё оптимальное значение.

Для того чтобы лучше представить решение ЗЛП с помощью СМ, предварительно рассмотрим следующий пример.

Пример. Требуется найти $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max$, если выполнены условия:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (2.4.1')$$

Решение: 1) Введём неотрицательные переменные x_3 и x_4, получим каноническую задачу

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \qquad (2.4.2')$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0 \end{cases} \qquad (2.4.3')$$

2) Найдём допустимое базисное решение (опорный план). В качестве начальной допустимой вершины выберем

начало координат, так как эта точка принадлежит допустимой области решений. В этой точке $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 6; x_4 = 8;$ и $f = 0$.

3) Представим систему ограничений и ЦФ с помощью небазисных переменных x_1 и x_2

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ f = 3x_1 + 2x_2 \end{cases} \qquad (2.4.4')$$

Переход к какой-либо соседней вершине. С этой целью определим границы изменения переменных x_1 и x_2

$$0 \le x_1 \le \min\{3;\, 8\} = 3; \;\; 0 \le x_2 \le \min\{6; 4\} = 4$$
$$f = 9;\; f = 8$$

Следовательно, для ЦФ мы получили увеличение в виде двух значений. В первом случае число 9, а во втором случае число 8. В случае $x_1 = 3; x_3 = 0$ ЦФ увеличивается и $x_4 = 5$. Таким образом, мы получим новое допустимое базисное решение (новый опорный план)

$$x_1 = 3;\; x_2 = x_3 = 0; x_4 = 5;\; f = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 9$$

Здесь x_2 и x_3 являются небазисными переменными, а x_1 и x_4 - будут базисными переменными. Выше выполненное преобразование обычно называют *ведущим,* и оно является основным действием в алгоритме СМ. В результате ограничения и ЦФ выражаются в виде

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 \\ x_4 = 8 - (3 - 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3) - 2x_2 = 5 - 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \\ f = 3(3 - 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3) + 2x_2 = 9 + 0{,}5x_2 - 1{,}5x_3 \end{cases} \qquad (2.4.5')$$

Ещё раз повторим шаг 4). В этом случае из системы (2.4.5’) следует, что

$$0 \le x_2 \le \min\left\{6; \frac{10}{3}\right\} = \frac{10}{3};$$

А это способствует увеличению значения ЦФ на слагаемое $\frac{5}{3}$ (напротив, увеличение значения x_3 приводит к уменьшению значения ЦФ).

Таким образом, приходим к новому допустимому базисному решению

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3};\ \ x_2 = \frac{10}{3};\ x_3 = 0;\ x_4 = 0; \\ f = \frac{32}{3}; \end{cases} \qquad (2.4.6)$$

Здесь новыми допустимыми базисными переменными являются, x_3 и x_4. Выполним ведущее преобразование относительно коэффициента x_2 в системе (2.4.5’), получим

$$\frac{3}{2}x_2 = 5 + 0{,}5x_3 - x_4 \Rightarrow x_2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4;$$

В результате из системы (2.4.5’) имеем

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ f = \frac{32}{3} - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases} \qquad (2.4.7')$$

Из системы (2.4.7’) легко заметить, что найденное допустимое решение в (2.4.6’) оказывается оптимальным решением, поскольку в системе (2.4.7’) по мере увеличения значений переменных x_3 или x_4 приводит только к уменьшению значения ЦФ. Таким образом, решение задачи таково

$$X^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right); \qquad \max f = \frac{32}{3}.$$

Перейдём непосредственно к изложению алгоритма решения ЗЛП с помощью СМ. Будем исходить из общих условий (предположений), относящихся ко многим задачам линейного программирования (в большей части к экономическим задачам).

Найти максимальное значение целевой функции

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c \ ,$$

если выполнены следующие ограничения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (2.4.8)$$

где $a_{ij} > 0$, $b_i \ge 0;\ x_j \ge 0;\ j = 0,1,\dots,n;\quad i = 1,2,\dots,m$.

С помощью метода введения новых переменных (их обычно называют также балансовыми переменными) задачу запишем в каноническом виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{21n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \qquad (2.4.9)$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c + 0 \cdot x_{n+1} + \cdots + 0 \cdot x_{n+m} \qquad (2.4.10)$$

В системе (2.4.9) переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ - будем называть базисными. Очевидно, что они неотрицательны. Тогда из (2.4.9) получим

$$
\begin{cases}
x_{n+1} = b_1 - (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
x_{n+2} = b_2 - (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n+m} = b_m - (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)
\end{cases}
\qquad (2.4.11)
$$

Переменные $x_1, x_2, \cdots, x_n$- называют небазисными. Полагая их равными нулю, имеем: $x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2 \cdots, x_{n+m} = b_m$. Тогда получим следующий опорный вектор-план $X = (0,\, 0, \cdots, 0; b_1, b_{2,}, \cdots, b_m)$, следовательно, согласно равенству (2.4.10) имеем $f = c$. Легко видеть, что в равенстве (2.4.10) слагаемые с положительными коэффициентами при увеличении значения их неизвестных также увеличится значение ЦФ. Далее, на основании равенств системы (2.4.11) непосредственно видно, как можно определить границы допустимых значений переменных x_i. Например, для переменной x_1 находим

$$
0 \le x_1 \le \min\left\{\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \cdots, \frac{b_m}{a_{m1}}\right\}
$$

Предполагая наименьшее значение x_1 равным $\frac{b_1}{a_{11}}$, и найдя значение x_1 из первого равенства системы (2.4.11), подставим его во всех остальных равенствах системы (2.4.11) и получим

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n - \frac{x_{n+1}}{a_{11}} \\
x_{n+2} = b_2 - a_{21}(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n - \frac{x_{n+1}}{a_{11}}) - \\
\qquad - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n+m} = b_m - a_{m1}(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n - \frac{x_{n+m}}{a_{11}}) - \\
\qquad - a_{22}x_2 - \cdots - a_{mn}x_n)
\end{cases}
\qquad (2.4.12)
$$

и тогда значение ЦФ равно

$$f = c_1\left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n - \frac{x_{n+1}}{a_{11}}\right) + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c. \quad (2.4.12)$$

На основании (2.4.11) и (2.4.12) получим новый производственный план

$$X_1 = \left(\frac{b_1 \cdot c_1}{a_{11}} + c,\ 0,\ 0, \cdots, 0, b_2 - \frac{a_{21} \cdot b_1}{a_{11}}, \cdots, b_m - \frac{a_{m1} \cdot b_1}{a_{11}}\right)$$

и значение ЦФ будет равно

$$f = \frac{b_1 \cdot c_1}{a_{11}} + c.$$

После упрощения равенства (2.4.12) должно выяснится какое значение из переменных ещё можно будет увеличивать (имеется в виду среди слагаемых с положительными коэффициентами). Этот процесс продолжим до тех пор, пока не исчерпаем возможности увеличения значения ЦФ. Последнее найденное значение (в случаях, когда задача разрешима) и будет искомым максимальным значением ЦФ, и вектор $X^{\bullet} = \left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)$ выражает оптимальную вершину.

Другой способ анализа решения ЗЛП осуществляется с помощью составления симплекс – таблицы:

На основании формул (2.4.10) и (2.4.11) получим опорный производственный план $X_1 = (0, 0, \cdots, 0, b_1, b_2, \cdots, b_m)$, а затем составим соответствующую симплекс-таблицу 2.4.1.

Таблица 2.4.1

№ строки	базис	план	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}
			c_1	c_2	…	c_n	0	0	…	0
1	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0
2	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	x_{n+m}	b_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1
$m+1$	f	c	c_1	c_2	…	c_n	0	0	…	0

В таблице сначала обратим внимание к $(m+1)$ строке.

Если требуется найти максимальное (минимальное) значение ЦФ f в случае, когда все коэффициенты при неизвестных изначально являются неотрицательными, т.е. все $c_j \geq 0$ (или неположительными $c_j \leq 0$), тогда в столбце «план» - план будет оптимальный и последний элемент этого столбца показывает оптимальное значение. Если же среди элементов $(m+1)$ строки, имеется какой–либо отрицательный элемент, то найденный план для получения $\max(f)$ неоптимальный и следует найти новый допустимый план. Для этого случая составим новую симплекс - таблицу:

а) Из $(m+1)$ строки выберем наименьший отрицательный элемент, если требуется найти $\max(f)$, и наибольший положительный элемент, если требуется найти $\min(f)$. Столбец в котором находится выбранный элемент, называется ведущим столбцом. Преобразование, сделанное на этом этапе, называется ведущим преобразованием. Для определённости пусть этот столбец будет первым столбцом.

б) Элементы плана-столбца соответственно делим на положительные элементы ведущего столбца. Следовательно, получим

$$\theta_{\min} = \min\left\{\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \cdots, \frac{b_m}{a_{m1}}\right\}$$

Среди этих отношений выберем наименьшее из них, пусть оно равно $\frac{b_2}{a_{21}}$ и соответствует второй строке. Эта строка называется ведущей строкой. Элемент, находящийся на пересечении ведущей строки и столбца, называется ведущим элементом (или разрешающим).

в) В новой таблице, прежде всего, заполняем вторую (ведущую) строку. Для этой цели все элементы ведущей строки предварительно делим на разрешающий элемент. В базисном столбце вместо переменной x_{n+2} входит переменная x_1 и x_{n+2} освобождается от базиса. Во второй строке в столбце «план» записывается число $\frac{b_2}{a_{21}}$, а оставшиеся элементы второй строки новой таблицы будут следующими

$$a'_{21} \quad (\frac{a_{21}}{a_{21}} = a'_{21} = 1);$$

$$a'_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}}; \cdots ; a'_{2n} = \frac{a_{2n}}{a_{21}}.$$

г) Остальные элементы новой симплекс-таблицы заполняются на основании метода последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса). Выполнив преобразования так, чтобы все элементы столбца x_1 (он в предыдущей таблице являлся ведущим столбцом), за исключением элемента $a'_{21} = 1$, остальные должны равняться нулю и вычисляются на основании равенств

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{2j} \cdot a_{i2}}{a_{21}}; \qquad b'_i = b_i - \frac{b_2 \cdot a_{i2}}{a_{21}};$$

$$c'_j = c_j + \frac{a_{2j} \cdot c_1}{a_{21}}; \quad i = 1, 2, 3, \cdots, m; \quad j = 1, 2, 3, \cdots, n$$

В этом случае в столбце плана появляются числа, которые соответственно равны значениям переменных, находящихся в базисе. Снова обратимся к элементам (*m+1*) строки: если все элементы окажутся неотрицательными, то план окажется оптимальным; если же один из них окажется отрицательным, тогда продолжаем оптимизационный процесс до тех пор, пока все элементы (*m+1)*- строки не станут неотрицательными.

Рассмотрим одну производственную задачу на основании симплекс –метода двумя способами.

Задача (О максимальном доходе). Для изготовления двух видов продукции А и В участвуют три предприятия. Для изготовления одной единицы продукции видов А и В, соответственно, расходуют: первое предприятие по 7 и 8 часов, второе предприятие по 6 и 3 часа и третье предприятие по 5 и 1 часу. Для изготовления всего объёма требуемой продукции видов А и В, соответственно, предусматривается объём времени: для первого предприятия не более 476 часов, для второго – не более 364 часов и для третьего – не более 319 часов. От реализации одной единицы продукции видов А и В получают, соответственно, 11 у.е. и 10 у.е. прибыли.

Определить максимальную прибыль от реализации всего объёма продукции видов А и В.

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 обозначает объём продукции вида *А* и x_2 - объём продукции вида *В,* тогда система ограничений выражается в виде систем неравенств

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 \le 476 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 364 \\ 5x_1 + x_2 \le 319 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}, \tag{2.4.13}$$

а целевая функция будет иметь вид

$$f = 11x_1 + 10x_2 \to \max. \tag{2.4.14}$$

Запишем задачу в каноническом виде

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + x_3 = 476 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_4 = 364 \\ 5x_1 + x_2 + x_5 = 319 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0; x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0 \end{cases} \tag{2.4.15}$$

$$f = 11x_1 + 10x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \tag{2.4.16}$$

Здесь $x_3; x_4; x_5$- считаются базисными переменными, а $x_1;\ x_2$ - небазисными. Следовательно, из (2.4.15) получаем

$$\begin{cases} x_3 = 476 - 7x_1 - 8x_2 \\ x_4 = 364 - 6x_1 - 3x_2 \\ x_5 = 319 - 5x_1 - x_2 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0; x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0 \end{cases} \tag{2.4.17}$$

Так как начало координат входит в область допустимых значений задачи, то, полагая $x_1=0$ и $x_2=0$, находим допустимый опорный план: $x_3=476;\ x_4=364;\ x_5=319$ и в этом случае $X_0=(0,0,476,364,319),\ f=0$. Из системы (2.4.17) видно, что

$$0\le x_1\le\min\left\{\frac{476}{7};\ \frac{364}{6};\ \frac{319}{5}\right\};\quad 0\le x_2\le\min\left\{\frac{476}{8};\ \frac{364}{3};\ \frac{319}{1}\right\}.$$

В данном случае $x_1=0$, а x_2 увеличим до наименьшего допустимого значения $x_2=\frac{476}{8}=59{,}5$, (можно было бы положить $x_2=0$), а x_1 увеличивать на наименьшее значение $x_1\approx 60{,}6$, а затем повторить выше проведённые рассуждения, следовательно, имеем другой вектор-план. При рассмотрении метода применения симплексной таблицы рассмотрим задачу при $x_1\approx 60{,}6$ и $x_2=0$.

Далее, из равенства (2.4.17) найдя x_2, подставим в остальные равенства, и после упрощения получим

$$\begin{cases} x_2=59{,}5-\frac{7}{8}x_1-\frac{1}{8}x_3 \\ x_4=185{,}5-\frac{27}{8}x_1+\frac{3}{8}x_3 \\ x_5=259{,}5-\frac{33}{8}x_1+\frac{1}{8}x_3 \end{cases} \qquad (2.4.18)$$

$$f=595+\frac{9}{4}x_1-\frac{5}{4}x_3 \qquad (2.4.19)$$

Отсюда видно, что второй план несколько улучшился и $X=(0;\ 59{,}5;\ 0;\ 185{,}5;\ 259{,}5)$.

Из равенства (2.4.19) видно, что при увеличении значения x_1, увеличивается значение ЦФ. Поэтому, полагая $x_3=0$, увеличиваем x_1. Из системы (2.4.18) следует, что

$$0\le x_1\le\min\left\{\frac{59{,}5}{\frac{7}{8}};\ \frac{185{,}5}{\frac{27}{8}};\ \frac{259{,}5}{\frac{33}{8}}\right\}=\min\{68;\ 54{,}962962;\ 62{,}90909\}\approx 55.$$

Поэтому, найдя из второго равенства системы (2.4.18) x_1, подставляем в остальные (в первое и третье) равенства системы (2.4.18), и это же значение x_1, подставляя в равенство (2.4.19), получим

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1484}{27} + \frac{1}{9}x_3 - \frac{8}{27}x_4 \\ x_2 = \frac{91}{8} - \frac{2}{9}x_3 + \frac{7}{27}x_4 \\ x_5 = \frac{545}{8} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{11}{9}x_4 \end{cases} \qquad (2.4.20)$$

$$f = \frac{5750}{8} - \frac{9}{16}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \qquad (2.4.21)$$

Следовательно, третий план будет, $X = (\frac{1484}{27}; \frac{91}{8}; 0; 0; \frac{545}{8})$ и при этом имеем

$$f = 718{,}75 \qquad (2.4.22)$$

На основании (2.4.21) и (2.4.22) следует, что окончательный вектор-план будет равен

$$X^* = (\frac{1484}{27}; \frac{91}{8}; 0; 0; \frac{545}{8})$$

и $\max f = 718{,}75$. По равенству (9) видно, что дальнейшее возможности увеличения ЦФ невозможно.

Теперь решим эту задачу с помощью симплексной таблицы 2.4.2.

Таблица 2.4.2.

№ п/п	Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			11	10	0	0	0
1	x_3	476	7	8	1	0	0
2	x_4	364	6	3	0	1	0
3	x_5	319	5	1	0	0	1
4	f	0	- 11	- 10	0	0	0

В основе этой таблицы будет опорный план $X = (0; 0; 476; 364; 319)$ и значение ЦФ в этой точке $f = 0$. Согласно условию задачи необходимо найти максимальное значение ЦФ.

Таким образом, все элементы последней строки должны быть неотрицательные. С этой целью выберем ведущий столбец, это тот самый столбец, который в строке (*m+1*) содержит минимальный элемент.

В примере ведущим столбцом является столбец. x_1. Разделив все элементы столбцов плана (кроме элементов последней строки) на элементы ведущего столбца, найдём из этих отношений минимальное. Минимальное отношение соответствует второй строке. Значит, назовём эту строку ведущей. Число 6, находящееся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки (соответственно 1 столбец и 2 строка), является разрешающим элементом.

Во второй таблице в ведущем столбце x_1 заменяется на x_4 и сначала заполним эту строку. Для этого все элементы второй строки делим на число 6 и запишем полученный результат. В этом случае вместо разрешающего элемента появляется число 1. На основании метода Гаусса остальные элементы этого столбца обращаем в нуль.

С этой целью все элементы второй строки умножим на число 7 и вычтем соответственно из элементов первой строки, полученные результаты запишем в первую строку второй таблицы.

Аналогично, умножим на число 5 элементы второй строки и соответственно вычтем из элементов третьей строки, полученные результаты запишем в третью строку второй таблицы. Элементы четвёртой строки заполняется на основании правой части ЦФ.

$$f = 667{,}7 + 4{,}5 \cdot x_2 - \frac{11}{6} \cdot x_4$$

В результате получим вторую таблицу 2.4.3

Таблица 2.4.3.

№ п/п	Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			11	10	0	0	0
1	x_3	51,1	0	4,5	1	$-\frac{7}{6}$	0
2	x_1	60,7	1	0,5	0	$\frac{1}{6}$	0
3	x_5	15,5	0	-1,5	0	$-\frac{5}{6}$	1
4	f	667,7	0	-(-4,5)	0	$-(11/6)$	0

Согласно этой таблице следует, что опорный план имеет вид: $X=(60{,}7;0;51{,}1;\ 0;\ 15{,}5)$ и ЦФ, $f=667{,}7$.

Из четвёртой строки видно, что (т.е. *(m+1)*-ой), всё ещё имеется неотрицательный элемент, $\frac{11}{6}$ следовательно, найденный план не является оптимальным (т.е. коэффициент при переменной x_4 положителен и всё ещё имеется возможность, для увеличения значении ЦФ).

В пересечении последней строки и столбца x_2 имеется число «-4,5» и это число является наименьшим.

Поэтому этот столбец будет ведущим.

Найдём ведущую строку

$$\Theta=\min\left\{\frac{51{,}1}{4{,}5},\ \frac{60{,}7}{0{,}5}\right\}\approx 11{,}4.$$

Это наименьшее число соответствует первой строке, поэтому переменная x_3 исключается как базисный элемент и заменяется элементом x_2. Тогда разрешающим элементом будет 4,5. В третьей таблице заполняем сначала первую строку.

Для этой цели все элементы этой строки делим на «4,5» и получим первую строку новой таблицы. Продолжение наших действий происходит на основании метода Гаусса аналогично, как это было выше рассмотрено, и все элементы этого столбца обращаем в нуль кроме единицы. Следовательно, получим следующую таблицу 2.4.5.

Таблица 2.4.5.

№ б/т	Базис	план	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			11	10	0	0	0
1	x_2	11,4	0	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{7}{27}$	0
2	x_1	55	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{27}$	0
3	x_5	68,13	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{11}{9}$	1
4	f	718,75	0	0	$-(-\frac{2}{9})$	$-(-\frac{113}{54})$	0

Из этой таблицы следует, что новый план имеет вид

$X = (55; 11,4; 0;\ 0; 68,13)$ и ЦФ $f = 718,75$.

Кроме того, в последней строке отсутствует отрицательный элемент, и $\max\{f = 718,85 + (-\frac{2}{9})x_3 + (-\frac{113}{54})x_4\} = 718,85$.

2.5 **ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА (ТЗ)**

Одной из типовых задач математического программирования является транспортная задача. Транспортная задача, в общем случае, входит в группу задач нелинейного программирования, кроме тех случаев, когда целевая функция задаётся в линейном виде.

I. Постановка транспортной задачи.

Математическая модель транспортной задачи.

Пусть некоторый однородный груз (продукт) имеется в m складах. Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения (например, магазины) в определённых количествах. Требуется составить план перевозок груза так, чтобы максимально удовлетворить всех потребителей и вывезти груз со складов в пункты потребления при полном удовлетворении потребностей: минимизировать суммарные транспортные затраты на перевозки.

Заданы следующие параметры:

$a_i -$ запас продукта на $i-$ом складе, $a_i > 0; \; i = 1, 2, \cdots, m;$

$b_j -$ потребность в продукте в $j-$ом пункте, $b_j > 0; \; j = 1, 2, \cdots, n;$

$c_{ij} -$ стоимость перевозки единицы груза товара с $i-$го склада в $j-$ый пункт, при этом $c_{ij} \geq 0$. Планируется полностью перевезти груз со складов и полностью обеспечить потребности пункты назначения.

При этом предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2.5.1}$$

в случае выполнения равенства

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \quad i = 1,2,\cdots,m, \tag{2.5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{2.5.3}$$

x_{ij} - обозначает количество товара, перевозимого с $i-$го склада в $j-$ый пункт назначения. Другими словами, требуется так организовать перевозки груза со складов в пункты потребления продукта, чтобы при полном удовлетворении потребностей были минимальными транспортные расходы, т.е., для целевой функции обеспечить следующее условие

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_{ij}) \to \min \tag{2.5.4}$$

В большинство случаев, функция $g_{ij}(x_{ij})$ - окажется линейной функцией переменных x_{ij} ,т.е.

$$g_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}x_{ij}\,, \qquad (2.5.5)$$

где c_{ij} выражают затраты на одну единицу перевезённого груза с $i-$го склада в $j-$ый пункт назначения, при этом $c_{ij} \geq 0$.

В случаях, когда выполняется условие (2.5.5), транспортная задача становится задачей линейного программирования.

Выше рассмотренную транспортную задачу называют «закрытой моделью транспортной задачи».

В случаях, когда не выполняются равенства (2.5.1), т.е.,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

тогда соответствующие модели транспортной задачи называются «открытыми моделями ТЗ». Если функция $g_{ij}(x_{ij})$ нелинейная, то ТЗ не является линейной.

Линейную транспортную задачу представим в виде таблицы 2.5.1

Таблица 2.5.1

Склады	Потребители				Товары
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	2. 5. c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{12} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
запросы	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i = \sum$

Данную таблицу обычно называют распределительной таблицей или матрицей планирования. В соответствии с этой таблицей, целевая функция будет принимать следующий вид

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (2.5.6)$$

Следовательно, требуется найти x_{ij}, для которых при выполнении условий (1) – (3), общий транспортный расход был бы минимальным, а ЦФ принимала наименьшее значение.

Рассмотрим модель закрытой транспортной задачи. Справедливо следующее общее утверждение.

Теорема 1. Каждая линейная транспортная задача, в которой общее число запасов (товаров) равно общему числу потребностей, является всегда разрешимой.

Доказательство. На основании равенств (2.5.1) и (2.5.6) заметим, что

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M} \Rightarrow \quad 0 \le x_{ij} \le \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

и x_{ij} удовлетворяют системам ограничений (2.5.1) и (2.5.3).

Обозначим: $c' = \min c_{ij}$, $c'' = \max c_{ij}$, тогда из равенства (2.5.6) получим двойное неравенство

$$c''M \le f \le c'M$$

Следовательно, значение ЦФ на множестве плана ТЗ является ограниченной. Теорема доказана.

В общем случае, если в системе ограничений имеются два одинаковых уравнения, тогда эта система линейно зависимая. В случае, когда не учитывается одно из уравнений, система должна иметь $m+n-1$ линейно независимых уравнений, т.е. ранг матрицы системы ограничений ТЗ на единицу меньше чем числа уравнений. Следовательно, опорный план ТЗ будет состоять из $m+n-1$ положительных компонентов (элементы перевозки) и они должны быть отражены в таблице 2.5.1.

Задача составления начального плана ТЗ является сложным процессом. Однако существуют некоторые простые методы (например, метод северо–западного угла, метод наименьшей стоимости, метод двустороннего преимущества и др.), с помощью которых, можно исследовать решение ТЗ.

Предложим алгоритм одной транспортной задачи, который определяет практическое направление решения транспортных задач.

Рассмотрим транспортную задачу.

Задача. Из трёх складов A_1, A_2, A_3 нужно перевезти одинаковые товары в четыре магазина B_1, B_2, B_3 и B_4. Запасы товаров на складах соответственно равны: 90; 55 и 80 т. Потребности магазинов в товарах соответственно равны 70; 40; 70 и 45 т.

Стоимость перевозки одной тонны товара (в какой – либо у.е.) задаётся ниже таблицей 2.5.2

Таблица 2.5.2.

Склады	Потребители				Товары
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	**1**	4	**1**	90

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	
A2	2 x_{21}	3 x_{22}	3 x_{23}	2 x_{24}	55
A3	3 x_{31}	2 x_{32}	3 x_{33}	2 x_{34}	80
Запросы	70	40	70	45	225

Составить такой план перевозки товаров, чтобы её стоимость в назначенные пункты была бы минимальной.

Составляем математическую модель задачи. Обозначим через x_{ij} количество товара, перевозимого с i -го склада в j -ый магазин. В этом случае целевая функция равна

$$f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \ ,$$

где c_{ij} выражают затраты на перевозки одной тонны товара в назначенный пункт, значения которых, заданы в рассмотренной таблице. Следовательно, нужно найти минимальное значение ЦФ

$$f = 2x_{11} + x_{12} + 4x_{13} + x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + 2x_{24} + 3x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 2x_{34} \to \min$$

Перевозку товаров необходимо организовать так, чтобы при полной перевозке товаров со складов полностью удовлетворить потребности всех магазинов. Для величин x_{ij} получим системы уравнений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 55 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 70 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 45 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 225.$$

Следовательно, эта задача является закрытой моделью ТЗ. Это и есть начальный план ТЗ.

Нахождение опорного решения можно осуществить:

- по правилу «северо-западного угла»;

- нахождение опорного решения по правилу «наименьшей стоимости» (минимального элемента);

- нахождение опорного решения по правилу «двустороннего преимущества»
- метод потенциалов.

Для нахождения опорного плана из всех известных методов наиболее часто применяется относительно простой оптимизационный метод – метод потенциалов. Этот метод был предложен в 1949 г Л.В.Канторовичем и М.К.Гавуриным.

В процессе применения метода потенциалов, имеет большое значение, следующее утверждение, которое приведём без доказательства.

Теорема. Если матрица планирования ТЗ является оптимальной, тогда к ней соответствует $m+n$ чисел $U_i^\bullet$ *и* $V_j^\bullet$, удовлетворяющих условиям

$$U_i^\bullet + V_j^\bullet = C_{ij}, \quad X^\bullet > \theta$$
$$U_i^\bullet + V_j^\bullet \le C_{ij}, \quad X^\bullet = \theta$$

Числа $U_i^\bullet$ *и* $V_j^\bullet$ называют соответственно обеспечивающими и потребляющими потенциалами. Доказательство этой теоремы [20].

Следует заметить, что в открытой модели ТЗ условия (2.5.4) заменяются условиями

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i; \; i = 1,2,\cdots;m$$

Для примера рассмотрена задача об оптимальном распределении.

Пусть со стороны *n* лиц осуществляется *n* видов обслуживания за фиксированный период времени (в смысле минимального объёма затраты времени каждый обслуживающий выполняет своё обязательство).

Эта задача является частным случаем закрытой модели ТЗ, здесь $m = n$ и $a_i \equiv b_j = 1$.

Задача о загрузке транспорта

Постановка задачи. Дано *m*- единиц какого- либо вида транспорта (например автомобили), b_i - выражает возможность грузоподъёмности одной единицы транспорта в тоннах, $i = 1,2,\cdots;m$; x_j - обозначает количество различных предметов (продуктов), которые необходимо загрузить j -ый транспорт, $j = 1,2,\cdots,n$; C_j - расход погрузки одного транспорта; W_j - вес отдельного предмета j -го типа. Например, загружаются автомобили.

Требуется определить оптимальную загрузку так, чтобы стоимость перевозимого груза была минимальной.

Ясно, что стоимость всего перевозимого груза задаётся формулой (ЦФ)

$$f = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n = \sum_{j-1}^{n} C_jx_j$$

Необходимо найти такие целые числа x_j, $j = 1, 2,\cdots,n$, при которых целевая функция приняла бы минимальное значение, если выполнены неравенства

$$W_1 X_1 + W_2 X_2 + \cdots + W_n X_n = \sum_{ju1}^{n} W_j x_j \le b_i \,, \quad i = 1, 2, \cdots, m;$$

т.е. при указанных условиях, необходимо обеспечить

$$f = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min(f)\,.$$

Эти задача существенно отличается от ранее рассмотренных задач тем, что в ней искомые значения величин x_j целочисленные.

Поэтому её можно отнести к задачам целочисленного ЛП, которые исследуются различными способами (методы отсечения, комбинаторные методы, приближённые методы, и др.)

В данной работе рассмотрены только основные наиболее, часто встречающиеся задачи линейного программирования. В настоящее время методы решения ЗЛП достаточно успешно развиваются и используются в многочисленных приложениях в различных областях естественных, общественных наук.

3 ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРЫ В ТЕОРИИ «ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НАСЛЕДИЯ»

В начале приведём некоторые предварительные понятия об n-мерных «*вектор функций наследия*».

Пусть задана произвольная последовательность объектов

$$\{a_{-(k+1)}(n), a_{-k}(n), \dots, a_k(n), a_{k+1}(n), \dots \}, \tag{3.1}$$

где k-целое число, $n \geq 1$ натуральное число, а $a_j(n) = a_j(n, \dots)$ может зависеть и от других параметров, при этом обладают свойствами

$$a_k(n) = D^{-1}_1(n) \sum_{a=1}^{n} a_{k-1}(\alpha), \qquad D^{-1}_1(n) \neq 0 \tag{3.2}$$

$$a_k(n) = D^{-1}_2(n) \sum_{a=1}^{n} a_{k+1}(\alpha), \qquad D^{-1}_2(n) \neq 0. \tag{3.2′}$$

Величины $D_j(n) = D_j(n, \dots)$ соответственно будем называть «регуляторами» последовательности (3.1).

В общем случае могут иметь место (3.2) и $(3.2')$ одновременно или только один из них.

Следует отметить, что в случаях, когда

$$D_j(n) = n; \ j = 1,2$$

в равенствах (3.2) и $(3.2')$ эквивалентны соответственно следующим рекуррентным соотношениям

$$a_{k-1}(n) = D_1(n) a_k(n) - D_1(n-1) a_k(n-1), \tag{3.3}$$

$$a_{k+1}(n) = D_2(n) a_k(n) - D_2(n-1) a_k(n-1). \tag{3.3′}$$

В ряде работ [22,25] профессора Исмоилова Д.И. были рассмотрены примеры таких последовательностей и название последовательности «наследия» было введено им.

Сформулируем один общий функциональный пример таких последовательностей.

Пусть k целое число, $n \geq 1$, $-\infty < t < \infty$.

Тогда

Лемма 1. Последовательность

$$U_{-k}(n,t) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^{\alpha} C_{n-1}^{\alpha} (1+\alpha)^k e^{(\alpha+1)t} . \tag{3.4}$$

Удовлетворяет равенствам (3.2), (3.3) и

$$U_0^{(k)}(n,t) = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^{n} U_0^{(k+1)}(\alpha,t) , \tag{3.5}$$

$$U_0^{(k+1)}(n,t) = nU_0^k(n,t) - (n-1)U_0^k(n-1,t) , \tag{3.6}$$

где $U^{(k)}$-обозначает частную k-ую производную функции $U(n,t)$ по параметру *t.*

Так как порядок производной $k \geq 0$, то всюду обозначим

$$U_{-k}(n,t) = U_0^{(k)}(n,t) , \quad k = 0;1;2;\ldots;n , \quad n \geq 1 , \quad 0 < t \leq +\infty . \tag{3.7}$$

Соотношения (3.5), (3.6) с учётом (7) являются дифференциальными формулами.

Лемма 2. Пусть целое число $k \leq 0$ и $-\infty < t < 0$ функция

$$U_k(n,t) = \sum_{a=0}^{n-1} (-1)^{\alpha} C_{n-1}^{\alpha} (1+\alpha)^{-k} e^{(\alpha+1)t} , \tag{3.8}$$

удовлетворяет интегральным соотношениям

$$U_0^{[-k]}(n,t) = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^{n} U_0^{[-k+1]}(\alpha;t) , \tag{3.9}$$

$$U_0^{[-k+1]}(n,t)=nU_0^{[-k]}(n,t)-(n-1)U_0^{[-k]}(n-1,t)$$

(3.10)

в частности,

$$U_0^{[-1]}(n,t)=\int_{-\infty}^{t}U_0(n,t)d\tau$$

и

$$U_0(n,t)=\sum_{a=0}^{n-1}(-1)^{\alpha}C_{n-1}^{\alpha}e^{(\alpha+1)t}$$

с начальными условиями $U_0(1,t)=1;\ \ U_0(n,t)=0;$ при $n>1$, которую называют порождающей функцией последовательности.

В качестве приложения имеет место следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть $L_m[y]$ равно

$$L_m[y(t)]=a_0y+a_1y'+a_2y''+\dots a_my^{(m)}$$

-линейный дифференциальный оператор, функция *y(t)* зависящая от *t* , имеющая необходимое число раз дифференцируемость в рассматриваемой области.

Тогда справедливы равенства

$$L_m\left[U_0^{(k)}(n;t)\right]=\frac{1}{n}\sum_{\alpha}^{n}L_m\left[U_o^{(k+1)}(\alpha;t)\right]$$

$$L_m\left[U_0^{(k+1)}(n;t)\right]=nL_m\left[U_o^{(k)}(\alpha;t)\right]-(n-1)L_m\left[U_0^{(k)}(n-1;t)\right]$$

при любом натуральном $n\geq 1$ и $k\geq 0$.

Следствие 2. Пусть $I_m[y]$ определяет

$$I_m[y]=a_0y+a_1y^{(-1)}+\dots+a_my^{(-m)};$$

$$y_{(t)}^{(-m)}=\int_{-\infty}^{t}y^{[-m+1]}(\tau)d\tau$$

Тогда справедливы равенства

$$I_m\left[U_0^{[-k]}(n;t)\right]=\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}I_m\left[U_o^{[-k+1]}(\alpha;t)\right]$$

$$I_m\left[U_0^{[-k+1]}(n;t)\right]=nI_m\left[U_o^{[-k]}(\alpha;t)\right]-(n-1)I_m\left[U_0^{[-k]}(n-1;t)\right]$$

для всех $k=0;1;2;\ldots;\quad n=1;2;\ldots;\quad m\geq 0.$

Теперь введём следующую числовую матрицу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}.$$

Отметим ряд простейших свойств матрицы А

1) Сумма элементов каждой строки равна единице.

2) Собственные значения этой матрицы соответственно равны

$1;\quad \frac{1}{2};\quad \frac{1}{3}\quad ;\ldots;\quad \frac{1}{n}$.

Они вещественны и различны.

3) Матрица А- невырожденая и её обратная матрица, имеет вид

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -1 & 2 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & -(n-1) & n\end{pmatrix}.$$

Предположим, что функция $U_0(\alpha;t)$ в узлах $1;2;\ldots;n$ образует вектор столбец

$$E_k(\alpha;t)=\left(U_k(1;t);U_k(2;t);\ldots;U_k(n;t)\right)^T$$

$$k\in Z,\quad -\infty<t<+\infty.$$

Приведём некоторые результаты, полученные в этом направление.

Теорема 1. При вышеприведённых условиях на функцию $U_0(n;t)$, обладающей свойством наследия и матрицу А имеет место матрично-функциональные равенства

1) $AE_0(n;t) = E_1(n;t) = \left(U_1(1;t); U_1(2;t);\ldots;U_1(n;t)\right)^T$.

2) $A^k E_0(n;t) = AE_{k-1}(n;t) = E_k(n;t) = \left(U_k(1;t); U_k(2;t);\ldots;U_k(n;t)\right)^T$

при $A^{-1}E_{-1}(n;t) = E_0(n;t)$.

3) $A^{-1}E_0(n;t) = E_{-1}(n;t)$.
4)
5) $A^{-k}E_0(n;t) = E_{-k}(n;t)$.

Эти результаты доказываются прямым умножением матрицы А на $E_k(n;t)$ и обобщают ранее приведенные результаты в работах [23,24,25].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория и методы решения задач оптимизации при наличии ограничений составляет предмет исследования в данной диссертации.

В рамках данной диссертации показано, что исследования в области задач планирования и управления в отраслях народного хозяйства, а также большой объём частных прикладных задач решаются методами математического программирования, наиболее развитыми в области решения оптимизационных задач являются методы линейного программирования.

На основании проведенного обзора и анализа отобранного материала отмечено, что задачи оптимизации и классификации играют в приложениях важную роль и со временем актульность этих задач только возрастает, а разработка новых подходов решения оптимиционых задач, используя теорию алгебры является актуальной научной и практической задачей.

В диссертационной работе были поставлены и решены следующие задачи:

- выведен алгебраический метод решения задач оптимизации с применением теории определителей с последующим использованием свойства корней n-ой степени из единицы;

- получены результаты практического применения теоретических исследований в теории линейного программирования;

- выведены результаты теоретических исследований в теории «последовательностей наследия»;

- опубликованно учебное пособие «Основы линейной алгебры и линейного программирования».

Таким образом, в диссертационнй работе выведены,сформулированы и доказаны теоремы и леммы, применяемые в теории оптимизации линейной алгебры.

Перечисленные выше результаты имеют прикладное значение.

В силу простоты реализации эффективности, предложенные методы имеют преимущество перед известными и могут непосредственно быть использованы в расчетной практике при решении задач оптимизации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.Barab´asi L.-A., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science, 1999 - P. 509–512.

2.Blythe R. A., Evans M. R. Nonequilibrium steady states of matrixproduct form: a solver's guide // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2007. V. 40. N. 46.

3.Delitala M., Tosin A. Mathematical modelling of vehicular traffic: A discrete kinetic theory approach // Math. Models Methods Appl. Sci., 2007 - P. 901–932.

4.Karp R. The transitive closure of a random digraph. Random structures and algorithms, 1990 - P. 73–94.

5.Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод - М: Бином. Лаборатория знаний, 2007.

6.Антонов В. И. и др. Линейная алгебра и аналитическая геометрия – М.: Проспект, 2011. - 139 с

7.Ашманов С.А. Линейное программирование. М.:1981.

8.Ашманов С.А., Тихомиров А.Б. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: 1991.

9.Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 304 с.

10. Бокаева М.С., Исмоилов Д.И., Сарбасова Н.Д. Основы линейной алгебры и линейного программирования. Учебное пособие. - Павлодар: Инновац. Евраз. ун-т, 2011

11. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах – М.: Высшая школа, 2005.

12. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах - М: Высш. шк., 2005. —591 с

13. Босс В. Лекции по математике: линейная алгебра. - М.: КомКнига, 2005. 224 с.

14. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика - М.: Дрофа, 2004. - 284 с.

15. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А. Линейная алгебра в вопросах и задачах - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 – 248с.

16. Воеводин В. В. Линейная алгебра - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

17. Воеводин В. В. Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ - СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 544 с

18. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 560 с

19. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. - ООО "Добросвет", 1998. - 320 с.

20. Данциг Дж. Линейное программирование. М.:1966.

21. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 280 с.

22. Исмоилов Д. Лекции по линейной алгебре и элементы линейного программирования (на тадж. языке) Хучанд., 2005.

23. Исмоилов Д. Рекуррентные свойства функции Мёбиса.//Материалы международной конференции , посвящённой 50 –летию ТГНУ, Душанбе 1998,стр. 89-90.

24. Исмоилов Д. Последовательности со свойствами «наследия».// В кн.: Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений. Воронеж, 2003, стр.143-144.

25. Исмоилов Д. О последовательностях наследия// Вестник Таразского государственного педагогического института №4, 2010г., с.90-99.

26. Исмоилов Д., Сарбасова Н.Д. Применение теории определителей к оптимизации одной нелинейной прикладной задачи. Вестник ИнЕУ №1(33) 2009г., стр.139-143.

27. Исмоилов Д., Юсупов С. Методическое пособие для самостоятельных работ по аналитической геометрии. Худжанд (на тадж. языке)., 2002г.

28. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах – М.: Высшая школа, 2008

29. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. М.:1989.

30. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М.: 1976.

31. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: 1978.

32. Ляпин Е. С., Евсеев А. Б. Алгебра и теория чисел. Часть II. М.: 1978.

33. Макарова С.И., Севастьяновой С.А. Экономико- математические методы и модели –М. : КНОРУС, 2008г.
34. Малыхин В.И. Математика в экономике. – М.: ИНФРА-М, 2002.
35. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: 1971.
36. Минц М. Математическое программирование. М.: 1990.
37. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. -М,: Наука,1988.
38. Муртаф Б. Современное линейное программирование.-М,: Мир,1984.
39. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование.-М.:ВЗФЭИ,2005
40. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах – М.: Высшая школа, 2003
41. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах – М.: Высшая школа, 2003 – 544с.
42. Просветов Г. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Задачи и решения – М.: Альфа, 2009.
43. Сарбасова Н.Д. О свойствах матрицы в функцинальных пространствах// Материалы II Международной научно-практической конференции ««Наука и образование в XXI веке: динамика развития в евразийском пространстве», Павлодар, 2011.- с.58-61.
44. Сарбасова Н.Д. Об одной нелинейной прикладной задаче//Вестник Таразского государственного педагогического института №4, 2010г., с.131-133.
45. Фадеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: 1978.
46. Хол Маршал. Комбинаторика. М.:1970.