МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАГИСТРАТУРА

Кафедра «Математики и информатики»

БОКАЕВА МУНИРА САДУАКАСОВНА

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ СВОЙСТВА «НАСЛЕДИЯ»

6М060100 «Математика»

Диссертация на соискание академической степени магистра естественных наук по специальности математика

Научный руководитель

д.ф-м.н., профессор ______ Д. И. Исмоилов

Павлодар, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
1. Некоторые вопросы из теории вероятностей 7
1.1 1.1 Случайная величина и ее функция распределения 7
1.2 1.2 Основные виды распределений дискретных случайных величин 11
2.1 1.3 Функция распределения случайной величины 16
2.2 1.3.1 Функция распределения дискретной случайной величины 18
2.3 1.4 Основные числовые характеристики дискретных случайных величин 28
2.4 1.5 Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства 30
2.5 1.6 Числовые характеристики непрерывных случайных величин 31
2.6 1.7 Основные виды распределений непрерывных случайных величин 31
2.7 1.7.1 Равномерный закон распределения 31
1.7.2 Показательное распределение. Функция надежности 33
1.7.3 Нормальный закон распределения вероятностей. Нормальная кривая 35
1.8 Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теоремы Чебышева и Бернулли 37
1.9 Центральная предельная теорема Ляпунова. Предельная теорема Муавра-Лапласа. Характеристические функции 42
2. Обобщение центрально-симметрического распределения случайных величин 49
Заключение 61
Список использованных источников 62
Приложение 64

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$P\{A\}$ - вероятность появления события в одном испытании

ξ - случайная величина

$\sum$ - сумма

M(X) - математическое ожидание случайной величины

D(X) - дисперсия случайной величины

σ - среднее квадратическое ожидание

p – вероятность появления *A* в каждом испытании

q- вероятность не появления *A* в каждом испытании

C_n^m - сочетание из *n* элементов по *m* элементов

$\left(\frac{m}{q}\right)$ - символ Лежандра

Введение

Теория вероятностей в последние десятилетия превратилась в одну из самых быстро развивающихся математических наук. Новые теоретические результаты открывают новые возможности для естественно-научного и практического использования методов теории вероятностен. Более тонкое, более детальное изучение явлении природы, а также производственных, технических, экономических и иных процессов заставляет теорию вероятностей на разыскание новых методов, новых закономерностей, которые порождаются случаем.

Работа посвящена изучению законов распределения случайных величин, а также их свойств «наследия».

Возникновение теории вероятностей относится к середине семнадцатого столетня и связано с именами Ферма (1601 — 1665), Паскаля (1623-1662) и Гюйгенса (1625—1695). В работах этих ученых в первоначальном виде появились понятия вероятности случайного события и математического ожидания случайной величины. Отправным пунктом для их исследований явились задачи, связанные с азартными играми. Среди позднейших ученых, оказавших значительное влияние на развитие теории вероятностей, необходимо указать Якова Бернулли (1654—1705), А. Муавра (1667—1754), Т. Байеса (ум. 1763), П. Лапласа (1749-1827), К. Гаусса (1777-1855) и С. Пуассона (1781-1840).

Мощное развитие теории вероятностей тесно связано с традициями и достижениями русской науки. Гениальный математик П. Л. Чебышев нашел новый путь развития теории вероятностей— всестороннее изучение последовательностей независимых случайных величин. Сам Чебышев и его ученики Л. А. Марков и А. М. Ляпунов на этом пути получили фундаментальные результаты (закон больших чисел, теорема Ляпунова) [2], [6], [24].

Одной из важнейших теорем теории вероятностей является теорема Ляпунова (или иначе — центральная предельная теорема теории вероятностей).

Причина столь большого ее значения заключается в том, что значительное количество явлений, исход которых зависит от случая, в основных своих чертах протекает по следующей схеме: изучаемое явленно подвержено воздействию огромного количества независимо действующих случайных причин, каждая из которых оказывает лишь ничтожно малое влияние на течение явления в целом. Действие каждой из них выражается случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ а суммарное влияние на явление всех этих причин — суммой $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ [6], [16], [22].Так как учет влияния каждой из этих причин (иначе говоря, указание функций распределения величин ξ_k) и даже простое перечисление их практически невозможно, то ясно, насколько важно разработать методы, позволяющие изучить их суммарное действие независимо от природы каждого отдельного слагаемого. Обычные методы исследования для решения поставленной задачи бессильны, на смену должны прийти другие методы, для которых большое число действующих на явление причин было бы не препятствием, а наоборот, облегчало бы решение поставленной задачи. Эти методы должны компенсировать недостаточное знание каждой отдельной действующей причины большим их числом, их массовостью [14], [21], [24].

Центральная предельная теорема, установленная трудами, главным образом академиков П. Л. Чебышева (1821-1894), А.А. Маркова (1856-1922) и А.М. Ляпунова (1857-1918), утверждает, что если действующие причины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы, их число n очень велико и действие каждой из этих причин по сравнению с суммарным их действием невелико,то закон распределения суммы s_n лишь незначительно может отличаться от нормального закона распределения [6].

Совершенствование физической статистики, а также ряда отраслей техники поставило перед теорией вероятностей большое число совершенно новых проблем, не укладывающихся в рамки классических схем. То есть возникла настоятельная потребность в разработке общей теории случайных процессов, т.е. теории, которая изучала бы случайные величины, зависящие от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров.

Начало общей теории случайных процессов было положено фундаментальными работами русских математиков А.Н. Колмогорова и А.Я. Хинчина [6], [18].

В известном смысле эта теория развивала введенные в начале 20 века А.А. Марковым идеи изучения последовательных зависимых случайных величин, получивших название цепей Маркова. Многие ученые (С.Н. Бернштейн, в.И. Романовский, А.Н. Колмогоров, Г. Адамар, М. Фреше, В. Дёблин, Дж. Дуб, В. Феллер и др.) внесли в теорию Маркова значительный вклад.

В двадцатых годах А.Н. Колмогоров, Е.Е. Слуцкий, А.Я. Хинчин и Поль Леви нашли тесную связь между теорией вероятностей и математическими дисциплинами, изучающимим множества и общее понятие функции (теорией множеств и теорией функции действительного переменного). Открытие этой связи оказалось чрезвычайно плодотворным, а именно на этом пути удалось найти окончательное решение классических проблем, выдвинутых Чебышевым.

Наконец, следует отметить работы С.Н. Бернштейна, А.Н.Колмогорова и Мизеса по построению логически стройной теории вероятностей, способной к охвату разнообразных задач, возникающих перед ней в естествознании, технике и других областях знания. Но, несмотря на то, что работы указанных авторов значительно продвинули построение логического фундамента теории вероятностей, исследования продолжаются достаточно интенсивно в настоящее время, поэтому тема диссертационной работы является актуальной.

Как каждая прогрессирующая область знания, теория вероятностей нуждается в использовании новых подходов решения задач.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций подтверждаются: использованием фундаментальных положений теоретических основ математики: алгебры, математического анализа, теории вероятностей, математической логики и дискретной математики. Достоверность полученных результатов и выводов подтверждена выведенными теоремами и следствиями.

На защиту выносятся:

- обобщение центрально-симметрического закона распределения случайных величин;
- результаты теоретических исследований в изучении случайных величин и их свойств «наследия».

Научная новизна работы заключается в том, что разработаны:

- закон больших чисел в форме обобщенного центрально-симметрического распределения;
- выведен закон «N-сигм»
- составлена программа для расчета закона «*N*-сигм».

Практическая ценность работы:

- выведенны, сформулированы и доказаны теоремы и следствия;
- опубликованно учебное пособие «Основы линейной алгебры и линейного программирования».

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на II Международной научно-практической конференции ««Наука и образование в XXI веке: динамика развития в евразийском пространстве», Павлодар, 2011 г.

1. Некоторые вопросы из теории вероятностей

1.1 Случайная величина и ее функция распределения

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины.

Для того чтобы знать случайную величину, прежде всего, необходимо знать те значения, которые она может принимать.

Разнообразие случайных величин весьма велико. Число принимаемых ими значений может быть конечным, счетным или несчетным; значения могут быть расположены дискретно или заполнять интервалы сплошь или же не заполнять интервалы, но располагаться всюду плотно. Для того чтобы задавать вероятности значений случайных величин, столь различных по своей природе, и притом задавать их одним и тем же способом, в теории вероятностей вводят понятие функции распределения случайной величины.

Определение. Случайной величиной называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Пусть ξ - случайная величина и x – произвольное действительное число. Вероятность того, что ξ примет значение, меньшее, чем х, называется *функцией распределения вероятностей* случайной величины ξ:

$$F(x) = P\{\xi < x\} \qquad (1.1.1)$$

Условимся в дальнейшем, как правило, случайные величины обозначать греческими буквами, а принимаемые ими значения - строчными латинскими.

Пример. Событие A появляется в последовательности n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность его появления постоянна и равна p. Число появлений события A обозначим μ. В зависимости от случая μ может принимать все целочисленные значения от 0 до n включительно.

Решение.

Используя схему Бернулли, получим:

$$P_n(m) = P\{\mu = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1.1.2)$$

Функция распределения величины μ определяется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{äëÿ} \quad x \le 0 \\ \sum\limits_{k<x} P_n(k) & \text{äëÿ} \quad 0 < x \le n \\ 1 & \text{äëÿ} \quad x > n \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

Функция распределения представляет собой ступенчатую линию со скачками в точках $x = 0, 1, 2,\ldots, n$; скачок в точке $x=k$ равен $P_n(k)$.

Рассмотренный выше пример показывает, что так называемая схема Бернулли может быть включена в общую теорию случайных величин.

В соответствии с общим аксиоматическим понятием случайного события, изложим строго формальное определение случайной величины в соответствии с множеством элементарных событий Ω. Каждому элементарному событию ω поставим в соответствие некоторое число

$$\xi = f(\omega). \qquad (1.1.4)$$

Тогда ξ есть случайная величина, если функция $f(\omega)$ измерима относительно введенной в рассматриваемом множестве Ω вероятности. Иначе говоря, мы требуем, чтобы для каждого измеримого по Борелю множества A_ξ значений ξ множество A_ξ тех ω, для которых $f(\omega) \subset A_\xi$ принадлежало множеству F случайных событий и, следовательно, для него была бы определена вероятность

$$P\{\xi \subset A_\xi\} = P\{A_\omega\}.$$

В частности, если множество A_ξ совпадает с полупрямой $\xi < x$, то вероятность $P\{A_\omega\}$ есть функция переменного x

$$P\{\xi < A_\xi\} = P\{A_\omega\} = F(x), \qquad (1.1.5)$$

которую мы назвали функцией распределения случайной величины ξ.

Пример. Произведены три наблюдения за положением молекулы, двигающихся по прямой линии. Множество элементарных событий состоит из точек трехмерного евклидового пространства R_3. Множество случайных событий F состоит из всевозможных борелевских множеств пространства R_3.

Решение.

Для каждого случайного события A определим вероятность $P\{A\}$ посредством равенства

$$P\{A\} = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^3} \iiint\limits_A e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x_1-a)^2+(x_2-a)^2+(x_3-a)^2\right)} dx_1 dx_2 dx_3$$

Рассмотрим теперь функцию $\xi = f(\omega)$ элементарного события, определенную посредством равенства

$$\xi = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3).$$

Эта функция измерима относительно введенной нами вероятности, поэтому ξ является случайной величиной. Для нее функция распределения равна

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^3} \iiint\limits_{x_1+x_2+x_3<3x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{3}(x_k-a)^2} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\frac{2}{3}\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{3(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz .$$

Действия над случайными величинами сводятся к известным операциям над функциями. Так, если ξ_1 и ξ_2 являются случайными величинами, т.е. измеримыми относительно введенной вероятности функциями

$$\xi_1 = f_1(\omega), \quad \xi_2 = f_2(\omega),$$

то любая борелевская функция от них также является случайной величиной.

Пример :

а) число очков, выпавших при броске игральной кости;

б) число появлений герба при 10 бросках монеты;

в) число выстрелов до первого попадания в цель;

г) расстояние от центра мишени до пробоины при попадании.

Решение.

Можно заметить, что множество возможных значений для перечисленных случайных величин имеет разный вид: для первых двух величин оно конечно (соответственно 6 и 11 значений), для третьей величины множество значений бесконечно и представляет собой множество натуральных чисел, а для четвертой – все точки отрезка, длина которого равна радиусу мишени. Таким образом, для первых трех величин множество значений из отдельных (дискретных), изолированных друг от друга значений, а для четвертой оно представляет собой непрерывную область.

Поэтому показателю случайные величины подразделяются на две группы: дискретные и непрерывные.

Определение. Случайная величина называется дискретной, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Определение. Случайная величина называется непрерывной, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется *законом распределения* случайной величины. Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется *рядом распределения:*

Таблица 1.

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

Заметим, что событие, заключающееся в том, что случайная величина примет одно из своих возможных значений, является достоверным, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1.$$

Пример. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Составить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий после двух выстрелов.

Решение.

Очевидно, что X может принимать три значения: 0, 1 и 2. Следовательно, ряд распределения имеет вид:

Таблица 2

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде *многоугольника распределения* (рисунок 1) – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами (x_i, p_i).

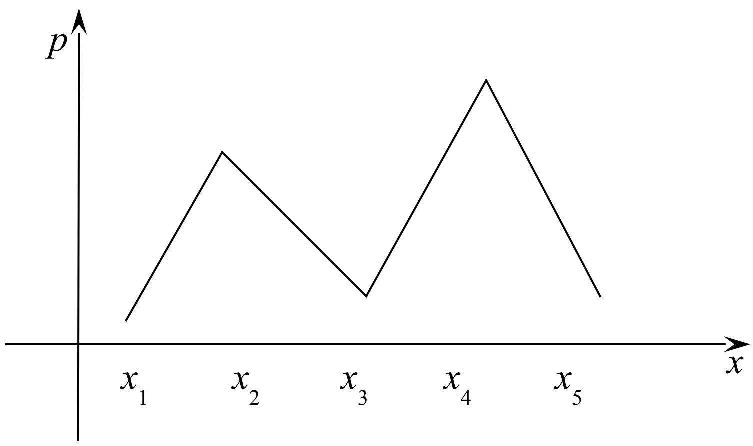

Рисунок 1.

Опишем основные законы распределения дискретных случайных величин, используемых для построения теоретико-вероятностных моделей реальных явлений

1.2 Основные виды распределений случайных величин

Вернемся к схеме независимых испытаний и найдем закон распределения случайной величины X – числа появлений события A в серии из n испытаний. Возможные значения A: 0, 1, …, n. Соответствующие им вероятности можно вычислить по формуле Бернулли:

$$p(\tilde{O} = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (1.2.1)$$

(p – вероятность появления A в каждом испытании).

Такой закон распределения называют *биномиальным*, поскольку правую часть равенства (1.2.1) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n .$$

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

Таблица 3

x_i	0	1	2	…	m	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Очевидно, что определение биномиального закона корректно, так как основное свойство распределения $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$ выполнено.

Пример. Составим ряд распределения случайной величины X – числа попаданий при 5 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8.

Решение.

Используя формулу (1.2.1)

$p(X=0) = 1 \cdot (0{,}2)^5 = 0{,}00032;$

$p(X=1) = 5 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^4 = 0{,}0064;$

$p(X=2) = 10 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^3 = 0{,}0512;$

$p(X=3) = 10 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}2048;$

$p(X=4) = 5 \cdot (0,8)^4 \cdot 0,2 = 0,4096;$

$p(X=5) = 1 \cdot (0,8)^5 = 0,32768.$

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

Таблица 4

x	0	1	2	3	4	5
p	0.00032	0.0064	0.0512	0.2048	0.4096	0.32728

Пример. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Решение.

Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных.

$$P_4(0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!} 0,1^0 \cdot 0,9^4 = 0,6561$$

2) Одна нестандартная.

$$P_4(1) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} 0,1^1 \cdot 0,9^3 = 0,2916$$

3) Две нестандартные детали.

$$P_4(2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0,1^2 \cdot 0,9^2 = 0,0486$$

4) Три нестандартные детали.

$$P_4(3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} 0,1^3 \cdot 0,9^1 = 0,0036$$

5) Четыре нестандартных детали.

$$P_4(4) = \frac{4!}{4! \cdot 0!} 0,1^4 \cdot 0,9^0 = 0,0001$$

Построим многоугольник распределения (рисунок 2)

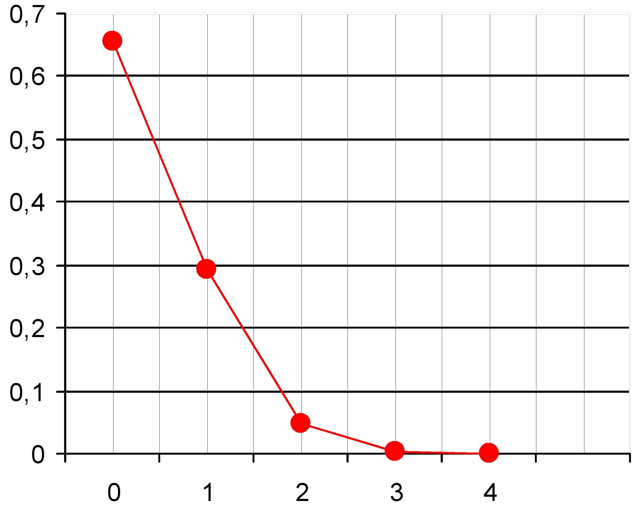

Рисунок 2

Рассмотрим дискретную случайную величину *X*, принимающую только целые неотрицательные значения (0, 1, 2,…,*m*,…), последовательность которых не ограничена. Такая случайная величина называется распределенной по *закону Пуассона*, если вероятность того, что она примет значение *m*, выражается формулой:

$$ð(\tilde{Õ} = ò) = \frac{à^{ò}}{ò\,!} å^{-à}, \qquad (1.2.2)$$

где *a* – некоторая положительная величина, называемая *параметром* закона Пуассона.

Ряд распределения Пуассона имеет вид:

Таблица 5

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	e^{λ}	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

Очевидно, что определение закона Пуассона корректно, так как основное свойство ряда распределения выполнено. Покажем, что сумма всех вероятностей равна 1:

$$\sum_{ò=0}^{\infty} ð(\tilde{O} = ò) = å^{-à} \sum_{ò=0}^{\infty} \frac{à^{ò}}{ò\,!} = å^{-à} \cdot å^{à} = 1$$

(использовано разложение в ряд Тейлора функции e^x).

Рассмотрим задачу, приводящую к распределению Пуассона. Пусть на оси абсцисс случайным образом распределяются точки, причем их распределение удовлетворяет следующим условиям:

1) вероятность попадания некоторого количества точек на отрезок длины l зависит только от длины отрезка и не зависит от его расположения на оси (то есть точки распределены с одинаковой средней плотностью);
2) точки распределяются независимо друг от друга (вероятность попадания какого-либо числа точек на данный отрезок не зависит от количества точек, попавший на любой другой отрезок);
3) практическая невозможность совпадения двух или более точек.

Тогда случайная величина X – число точек, попадающих на отрезок длины l – распределена по закону Пуассона, где a – среднее число точек, приходящееся на отрезок длины l.

Замечание. Поскольку формула Пуассона выражает биномиальное распределение при большом числе опытов и малой вероятности события. Поэтому закон Пуассона часто называют *законом редких явлений*.

Определение. Дискретная случайная величина имеет *геометрическое* распределение с параметром p, если она принимает значения 1, 2,…, m… (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$\eth(\tilde{O} = \grave{o}) = p\,q^{m-1}, \qquad (1.2.3)$$

где $0 < p < 1,\ q = 1 - p$.

Ряд геометрического распределения случайной величины имеет вид:

Таблица 6

x_i	1	2	3	…	m	…
p_i	p	pq	pq^2	…	pq^{m-1}	…

Вероятности p_i образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q (отсюда название «геометрическое распределение»).

Так как сумма ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p + pq + \ldots + pq^{m-1} + \ldots = p(1 + q + \ldots + q^{m-1} + \ldots) = p\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

(так как $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ есть сумма геометрического ряда $\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1}$ при $|q| < 1$).

Случайная величина X, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число m испытаний, проведенных по схеме Бернулли, с вероятностью p наступления события в каждом испытании до первого положительного исхода.

Пример. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа прверенных деталей, если вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

Решение.

Случайная величина X – число проверенных деталей до обнаружения бракованной – имеет геометрическое распределение с параметром p=0,1. Поэтому закон распределения имеет вид

Таблица 7

x_i	1	2	3	…	m	…
p_i	0,1	0,09	0,081	…	$0{,}9^m \cdot 0{,}1$	…

Определение. Дискретная случайная величина X имеет *гипергеометрическое* распределние с параметрами *n, M, N*, если она принимает значения 0, 1, 2,…, *m*…, *min(n, M)* с вероятностями

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \tag{1.2.4}$$

где $M \le N,\ n \le N;\ n, M, N -$ *íàòóðàëüíû å ÷èñëà*.

Гипергеометрическое распределение имеет случайная величина X= m – число объектов, обладающих заданным свойством, среди n объектов, случайно извлеченных (без возврата) из совокупности N объектов, M из которых обладает этим свойством.

Пример. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на отлично, наугад извлекают 3 работы. Составить закон распределения числа работ, оцененных на «отлично» и оказавшихся в выборке.

Решение.

Случайная величина имеет гипергеометрическое распределение, где *n=3, M=5, N=25*. Составим закон распределения

Таблица 8

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{57}{115}$	$\frac{19}{46}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{230}$

1.3 Функция распределения случайных величин

Определение. Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x:

$$F(x) = p(X < x) \tag{1.3.1}$$

Свойства функции распределения.

1)

$$0 \le F(x) \le 1$$

Действительно, так как функция распределения представляет собой вероятность, она может принимать только те значения, которые принимает вероятность.

2) Функция распределения является неубывающей функцией, то есть

$$F(x_2) \ge F(x_1) \text{ при } x_2 > x_1.$$

Это следует из того, что

$$F(x_2) = p(X < x_2) = p(X < x_1) + p(x_1 \le X < x_2) \ge F(x_1).$$

3)

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

В частности, если все возможные значения X лежат на интервале $[a, b]$, то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a \text{ и } F(x) = 1 \text{ при } x \ge b.$$

Действительно, $X < a$ – событие невозможное, а $X < b$ – достоверное.

4) Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[a, b]$, равна разности значений функции распределения на концах интервала:

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Справедливость этого утверждения следует из определения функции распределения (см. свойство 2).

Для дискретной случайной величины значение $F(x)$ в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции.

Пример. Найдем $F(x)$ для случайной величины, заданной законом распределения:

Таблица 8

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

Решение:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}12, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}12+0{,}46=0{,}58, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}58+0{,}42=1, & x > 2 \end{cases}$$

Соответственно график функции распределения имеет ступенчатый вид (рисунок 3):

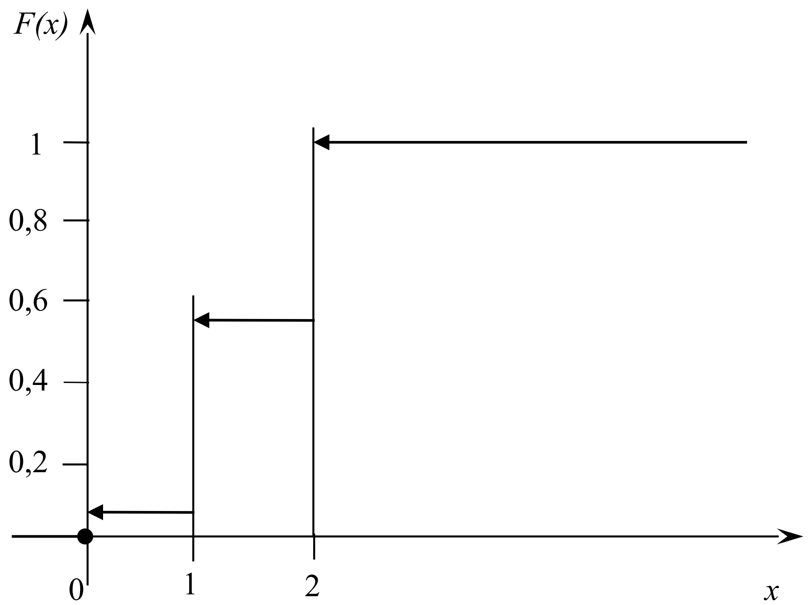

Рисунок 3

1.4 Основные числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения (функция распределения и ряд распределения) полностью описывают поведение случайной величины. Но в ряде задач достаточно знать некоторые числовые характеристики исследуемой величины (например, ее среднее значение и возможное отклонение от него), чтобы ответить на поставленный вопрос. Рассмотрим основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n \ . \qquad (1.4.1)$$

Если число возможных значений случайной величины бесконечно, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \ ,$$

если полученный ряд сходится абсолютно.

Замечание 1. Математическое ожидание называют иногда *взвешенным средним*, так как оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

Замечание 2. Из определения математического ожидания следует, что его значение не меньше наименьшего возможного значения случайной величины и не больше наибольшего.

Замечание 3. Математическое ожидание дискретной случайной величины есть *неслучайная* (постоянная) величина. В дальнейшем увидим, что это же справедливо и для непрерывных случайных величин.

Пример. Найдем математическое ожидание случайной величины X – числа стандартных деталей среди трех, отобранных из партии в 10 деталей, среди которых 2 бракованных. Составим ряд распределения для X. Из условия задачи следует, что X может принимать значения 1, 2, 3.

Решение.

$$p(1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15},$$

$$p(2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{15},$$

$$p(3) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}.$$

Тогда

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{7}{15} + 3 \cdot \frac{7}{15} = 2,4.$$

Пример. Найдем математическое ожидание случайной величины X – числа бросков монеты до первого появления герба. Эта величина может принимать бесконечное число значений (множество возможных значений есть множество натуральных чисел). Ряд ее распределения имеет вид:

Таблица 10

X	1	2	…	n	…

p	0,5	$(0,5)^2$	…	$(0,5)^n$	…

Тогда

$$M(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2^n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\ldots=1\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=1\cdot 2=2$$

Здесь при вычислении дважды использовалась формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S=\frac{b_1}{1-q},$$

откуда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1,\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2\text{)}.$$

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C)=C$$

Доказательство. Если рассматривать C как дискретную случайную величину, принимающую только одно значение C с вероятностью p = 1, то $M(C)=C\cdot 1=C$

2) Постоянный множитель можно выносит за знак математического ожидания:

$$M(CX)=CM(X)$$

Доказательство. Если случайная величина X задана рядом распределения

Таблица 11

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

то ряд распределения для CX имеет вид:

Таблица 12

Cx_i	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n

p_i	p_1	p_2	…	p_n

Тогда

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + ... + Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n) = CM(X)$$

Определение. Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая. В противном случае случайные величины зависимы.

Определение. Назовем произведением независимых случайных величин X и Y случайную величину XY, возможные значения которой равны произведениям всех возможных значений X на все возможные значения Y, а соответствующие им вероят-ности равны произведениям вероятностей сомножителей.

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Доказательство. Для упрощения вычислений ограничимся случаем, когда X и Y принимают только по два возможных значения:

Таблица 13

x_i	x_1	x_2
p_i	p_1	p_2

Таблица 14

y_i	y_1	y_2
g_i	g_1	g_2

Тогда ряд распределения для XY выглядит так:

Таблица 15

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
p	p_1g_1	p_2g_1	p_1g_2	p_2g_2

Следовательно,

$$M(XY) = x_1y_1 \cdot p_1g_1 + x_2y_1 \cdot p_2g_1 + x_1y_2 \cdot p_1g_2 + x_2y_2 \cdot p_2g_2 = y_1g_1(x_1p_1 + x_2p_2) +$$

$$+ y_2 g_2(x_1 p_1 + x_2 p_2) = (y_1 g_1 + y_2 g_2)\,(x_1 p_1 + x_2 p_2) = M(X)\cdot M(Y).$$

Замечание 1. Также можно доказать это свойство для большего количества возможных значений сомножителей.

Замечание 2. Свойство 3 справедливо для произведения любого числа независимых случайных величин, что доказывается методом математической индукции.

Определение. Определим сумму случайных величин X и Y как случайную величину $X+Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y; вероятности таких сумм равны произведениям вероятностей слагаемых (для зависимых случайных величин – произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго).

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин (зависимых или независимых) равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

Доказательство.

Вновь рассмотрим случайные величины, заданные рядами распределения, приведенными при доказательстве свойства 3. Тогда возможными значениями $X+Y$ являются

$$x_1 + y_1, x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_2 + y_2.$$

Обозначим их вероятности соответственно как p_{11}, p_{12}, p_{21} и p_{22}. Найдем

$$M(X+Y) = (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} =$$
$$= x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22})$$

Докажем, что

$$p_{11} + p_{22} = p_1.$$

Действительно, событие, состоящее в том, что $X+Y$ примет значения $x_1 + y_1$ или $x_1 + y_2$ и вероятность которого равна $p_{11} + p_{22}$, совпадает с событием, заключающемся в том, что $X = x_1$ (его вероятность – p_1). Аналогично доказывается, что

$$p_{21} + p_{22} = p_2,\ p_{11} + p_{21} = g_1,\ p_{12} + p_{22} = g_2.$$

Значит,

$$M(X+Y) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + y_1 g_1 + y_2 g_2 = M(X) + M(Y)$$

Замечание. Из свойства 4 следует, что сумма любого числа случайных величин равна сумме математических ожиданий слагаемых.

Пример. Найти математическое ожидание суммы числа очков, выпавших при броске пяти игральных костей.

Решение.

Найдем математическое ожидание числа очков, выпавших при броске одного игрального кубика:

$$M(X_1) = (1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Тому же числу равно математическое ожидание числа очков, выпавших на любой кости. Следовательно, по свойству 4

$$M(X) = 5\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Для того, чтобы иметь представление о поведении случайной величины, недостаточно знать только ее математическое ожидание. Рассмотрим две случайные величины: X и Y, заданные рядами распределения вида

Таблица 16

X	49	50	51
p	0,1	0,8	0,1

Таблица 17

Y	0	100
p	0,5	0,5

Найдем

$$M(X) = 49\cdot 0{,}1 + 50\cdot 0{,}8 + 51\cdot 0{,}1 = 50,$$

$$M(Y) = 0\cdot 0{,}5 + 100\cdot 0{,}5 = 50.$$

Как видно, математические ожидания обеих величин равны, но если для X $M(X)$ хорошо описывает поведение случайной величины, являясь ее наиболее вероятным возможным значением (причем остальные значения ненамного отличаются от 50), то значения Y существенно отстоят от $M(Y)$. Следовательно, наряду с математическим ожиданием желательно знать, насколько значения случайной величины отклоняются от него. Для характеристики этого показателя служит дисперсия.

Определение. Дисперсией (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\,(X - M(X))^2. \tag{1.4.2}$$

Пример. Найдем дисперсию случайной величины X (числа стандартных деталей среди отобранных) для дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

Таблица 18

X	1	2	3
p	1/15	7/15	7/15

Решение.

Математическое ожидание имеет вид

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{7}{15} + 3 \cdot \frac{7}{15} = 2{,}4.$$

Вычислим значения квадрата отклонения каждого возможно-го значения от математического ожидания:

$$(1 - 2{,}4)^2 = 1{,}96;\ (2 - 2{,}4)^2 = 0{,}16;\ (3 - 2{,}4)^2 = 0{,}36.$$

Следовательно,

$$D(X) = 1{,}96 \cdot \frac{1}{15} + 0{,}16 \cdot \frac{7}{15} + 0{,}36 \cdot \frac{7}{15} = \frac{28}{75} \approx 0{,}373.$$

Замечание 1. В определении дисперсии оценивается не само отклонение от среднего, а его квадрат. Это сделано для того, чтобы отклонения разных знаков не компенсировали друг друга.

Замечание 2. Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения.

Замечание 3. Существует более удобная для расчетов формула для вычисления дисперсии, справедливость которой доказывается в следующей теореме:

Теорема.

$$D(X) = M(X^2) - M^2(\tilde{O}). \tag{1.4.3}$$

Доказательство.

Используя то, что $M(X)$ – постоянная величина, и свойства математического ожидания, преобразуем формулу (1.4.2) к виду:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + M^2(X)) = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) +$$

$$+M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Вычислим дисперсии случайных величин X и Y, рассмотренных в начале этого раздела.

Решение.

$$M(X) = (49^2 \cdot 0{,}1 + 50^2 \cdot 0{,}8 + 51^2 \cdot 0{,}1) - 50^2 = 2500{,}2 - 2500 = 0{,}2.$$

$$M(Y) = (0^2 \cdot 0{,}5 + 100^2 \cdot 0{,}5) - 50^2 = 5000 - 2500 = 2500.$$

Итак, дисперсия второй случайной величины в несколько тысяч раз больше дисперсии первой. Таким образом, даже не зная законов распределения этих величин, по известным значениям дисперсии мы можем утверждать, что X мало отклоняется от своего математического ожидания, в то время как для Y это отклонение весьма существенно.

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0$$

Доказательство.

$$D(C) = M((C - M(C))^2) = M((C - C)^2) = M(0) = 0.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2D(X).$$

Доказательство.

$$D(CX) = M((CX - M(CX))^2) = M((CX - CM(X))^2) = M(C^2(X - M(X))^2) =$$

$$= C^2D(X).$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Доказательство.

$$D(X + Y) = M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 = M(X^2) + 2M(X)M(Y) +$$

$+ M(Y^2) - M^2(X) - 2M(X)M(Y) - M^2(Y) = (M(X^2) - M^2(X)) + (M(Y^2) - M^2(Y))$

$= D(X) + D(Y)$.

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины.

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Доказательство.

$$D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(X).$$

Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего; для оценки самого отклонения служит величина, называемая средним квадратическим отклонением.

Определение. Средним квадратическим отклонением σ случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \qquad (1.4.4.)$$

Пример. В предыдущем примере средние квадратические отклонения X и Y равны соответственно

$$\sigma_{\tilde{o}} = \sqrt{0,2} \approx 0,447; \quad \sigma_{\acute{o}} = \sqrt{2500} = 50.$$

Для некоторых дискретных случайных величин можно вывести свои формулы нахождения числовых характеристик

1. *Биномиальное распределение*.

Для дискретной случайной величины X, представляющей собой число появлений события A в серии из n независимых испытаний , $M(X)$ можно найти, используя свойство 4 математического ожидания.

Пусть X_1 – число появлений A в первом испытании, X_2 – во втором и т.д. При этом каждая из случайных величин X_i задается рядом распределения вида

Таблица 19

X_i	0	1

p_i	q	p

Следовательно,

$$M(X_i) = p.$$

Тогда

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Аналогичным образом вычислим дисперсию:

$$D(X_i) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1 - p),$$

откуда по свойству 4 дисперсии

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p) = npq.$$

2. *Закон Пуассона*.
Если

$$p(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

то

$$M(X) = \sum_{\grave{o}=1}^{\infty} \grave{o}\,\frac{\grave{a}^{\grave{o}}}{\grave{o}\,!}\mathring{a}^{-\grave{a}} = \grave{a}\mathring{a}^{-\grave{a}}\sum_{\grave{o}=1}^{\infty}\frac{\grave{a}^{\grave{o}-1}}{(\grave{o}-1)!} = \grave{a}\mathring{a}^{-\grave{a}}\mathring{a}^{\grave{a}} = \grave{a}$$

(использовалось разложение в ряд Тейлора функции e^x).
Для определения дисперсии найдем вначале

$$M(X^2) = \sum_{\grave{o}=1}^{\infty} \grave{o}^{\,2}\,\frac{\grave{a}^{\grave{o}}}{\grave{o}\,!}\mathring{a}^{-\grave{a}} = \grave{a}\sum_{\grave{o}=1}^{\infty} \grave{o}\,\frac{\grave{a}^{\grave{o}-1}}{(\grave{o}-1)!}\mathring{a}^{-\grave{a}} =$$

$$= \grave{a}\sum_{\grave{o}=1}^{\infty}\big((\grave{o}-1)+1\big)\frac{\grave{a}^{\grave{o}-1}}{(\grave{o}-1)!}\mathring{a}^{-\grave{a}} = \grave{a}\left(\sum_{\grave{o}=1}^{\infty}(\grave{o}-1)\frac{\grave{a}^{\grave{o}-1}}{(\grave{o}-1)!}\mathring{a}^{-\grave{a}} + \sum_{\grave{o}=1}^{\infty}\frac{\grave{a}^{\grave{o}-1}}{(\grave{o}-1)!}\mathring{a}^{-\grave{a}}\right) = \grave{a}(\grave{a}+1).$$

Поэтому

$$D(X) = a^2 + a - a^2 = a.$$

Замечание. Таким образом, обнаружено интересное свойство распределения Пуассона: математическое ожидание равно дисперсии (и равно единственному параметру *a*, определяющему распределение).

1.5 Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства.

Определение и свойства функции распределения сохраняются и для непрерывной случайной величины, для которой функцию распределения можно считать одним из видов задания закона распределения. Но для непрерывной случайной величины вероятность каждого отдельного ее значения равна 0. Это следует из свойства 4 функции распределения:

$$p(X = a) = F(a) - F(a) = 0 \,.$$

Поэтому для такой случайной величины имеет смысл говорить только о вероятности ее попадания в некоторый интервал.

Вторым способом задания закона распределения непрерывной случайной величины является так называемая плотность распределения (плотность вероятности, дифференциальная функция).

Определение. Функция $f(x)$, называемая плотностью распределения непрерывной случайной величины, определяется по формуле:

$$f(x) = F'(x) \tag{1.5.1}$$

то есть является производной функции распределения.

Свойства плотности распределения.

1) $f(x) \geq 0$, так как функция распределения является неубывающей.
2) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, что следует из определения плотности распределения.
3) Вероятность попадания случайной величины в интервал (*a, b*) определяется формулой

$$\eth(\grave{a} < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Действительно,

$$\eth(\grave{a} < X < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки). Его справедливость следует из того, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, так как $F(x) \to const$ при $x \to \pm\infty$.

Таким образом, график плотности распределения представляет собой кривую, расположенную выше оси Оx, причем эта ось является ее горизонтальной асимптотой при $x \to \pm\infty$ (последнее справедливо только для случайных величин, множеством возможных значений которых является все множество действительных чисел). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции, равна единице.

Замечание. Если все возможные значения непрерывной случайной величины сосредоточены на интервале $[a, b]$, то все интегралы вычисляются в этих пределах, а вне интервала $[a, b]$ $f(x) \equiv 0$.

Пример. Плотность распределения непрерывной случайной величины задана формулой

$$f(x) = \frac{C}{1+x^2}, \ -\infty < x < +\infty.$$

Найти: а) значение константы C;

б) вид функции распределения;

в) $p(-1 < x < 1)$

Решение.

а) значение константы C найдем из свойства 4:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{N}}{1+\tilde{o}^2} dx = \tilde{N}arctgx \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = C\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = C\pi = 1,$$ откуда $C = \dfrac{1}{\pi}$.

б) $$F(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} arctg\ t \Bigg|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(arctgx + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} arctgx + \frac{1}{2}.$$

в) $$p(-1 < x < 1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} arctgx \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5.$$

Пример. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 2 \\ \dfrac{x-2}{2}, \ 2 < x \le 4 \\ 1, \ x > 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.

Решение.

$$f(x)=\begin{cases} 0', \ x\le 2 \\ \left(\dfrac{x-2}{2}\right)', \ 2<x\le 4 \\ 1', \ x>4 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ x\le 2 \\ 0{,}5, \ 2<x\le 4 \\ 0, \ x>4. \end{cases}$$

1.6 Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Распространим определения числовых характеристик случайных величин на непрерывные случайные величины, для которых плотность распределения служит в некотором роде аналогом понятия вероятности.

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется

$$\grave{I}\ (\tilde{O})=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \qquad (1.6.1)$$

Замечание 1. Общее определение дисперсии сохраняется для непрерывной случайной величины таким же, как и для дискретной, а формула для ее вычисления имеет вид:

$$D(\tilde{O})=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X). \qquad (1.6.2)$$

Среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле (1.4.4).

Замечание 2. Если все возможные значения непрерывной случайной величины не выходят за пределы интервала $[a,\ b]$, то интегралы в формулах (1.6.1) и (1.6.2) вычисляются в этих пределах.

Пример. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ x<2 \\ -\dfrac{3}{4}(x^2-6x+8), \ \ 2\le x\le 4 \\ 0, \ x>4. \end{cases}$$

Найти $M(X),\ D(X),\sigma$.

Решение.

$$M(X)=-\frac{3}{4}\int_2^4 x(x^2-6x+8)dx=-\frac{3}{4}\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\Bigg|_2^4=3;$$

$$D(X)=-\frac{3}{4}\int_2^4 x^2(x^2-6x+8)dx-9=-\frac{3}{4}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+\frac{8x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4-9=9{,}2-9=0{,}2;.$$

$$\sigma = \sqrt{0,2} \approx 0,447$$

1.7 Основные виды распределений непрерывных случайных величин

1.7.1 Равномерный закон распределения.

Часто на практике мы имеем дело со случайными величинами, распределенными определенным типовым образом, то есть такими, закон распределения которых имеет некоторую стандартную форму. В предыдущих разделах были рассмотрены примеры таких законов распределения для дискретных случайных величин. Для непрерывных случайных величин тоже существуют часто встречающиеся виды закона распределения, и в качестве первого из них рассмотрим равномерный закон.

Определение. Закон распределения непрерывной случайной величины называется равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение ($f(x) = const$ при $a \le x \le b$, $f(x) = 0$ при $x < a, x > b$.

Найдем значение, которое принимает $f(x)$ при $x \in [a, b]$. Из условия нормировки следует, что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b cdx = c(b-a) = 1,$$

откуда

$$f(x) = c = \frac{1}{b-a}. \qquad (1.7.1)$$

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины на интервал $[\alpha, \beta]$ $(a \le \alpha < \beta \le b)$ равна при этом

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Вид функции распределения для нормального закона:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad (1.7.2)$$

Пример. Автобусы некоторого маршрута идут с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что пришедшему на остановку пассажиру придется ожидать автобуса не более 2 минут.

Решение.

Время ожидания является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале [0, 5]. Тогда

$$f(x)=\frac{1}{5},\ \ p(0\le x\le 2)=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

Для равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$ непрерывной случайной величины

$$M(X)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}, \qquad (1.7.3)$$

то есть математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины равно абсциссе середины отрезка $[a,\ b]$.

Дисперсия

$$D(X)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

или

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (1.7.4)$$

1.7.2 Показательное распределение. Функция надежности.

Определение. Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases} \qquad (1.7.5)$$

В отличие от нормального распределения, показательный закон определяется только одним параметром λ. В этом его преимущество, так как обычно параметры распределения заранее не известны и их приходится оценивать приближенно. Понятно, что оценить один параметр проще, чем несколько.

Найдем функцию распределения показательного закона:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\lambda\int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x}.$$

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0. \end{cases} \qquad (1.7.6)$$

Теперь можно найти вероятность попадания показательно распределенной случайной величины в интервал (a,b).:

$$p(a<x<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Значения функции e^{-x} можно найти из таблиц [3].

Пусть *элемент* (то есть некоторое устройство) начинает работать в момент времени $t_0 = 0$ и должен проработать в течение периода времени t. Обозначим за T непрерывную случайную величину – время безотказной работы элемента, тогда функция

$$F(t) = p(T > t)$$

определяет вероятность отказа за время t. Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время равна

$$R(t) = p(T > t) = 1 - F(t). \qquad (1.7.7)$$

Эта функция называется *функцией надежности*.

Часто длительность безотказной работы элемента имеет показательное распределение, то есть

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \qquad (1.7.8)$$

Следовательно, функция надежности в этом случае имеет вид:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}. \qquad (1.7.9)$$

Определение. Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \qquad (1.7.10)$$

где λ – интенсивность отказов.

Пример. Пусть время безотказной работы элемента распределено по показательному закону с плотностью распределения $f(t) = 0{,}1\ e^{-0{,}1t}$ при $t \geq 0$.

Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 10 часов.

Решение.

Так как $\lambda = 0{,}1$,

$$R(10) = e^{-0{,}1\cdot 10} = e^{-1} = 0{,}368 .$$

1.7.3 Нормальный закон распределения вероятностей. Нормальная кривая.

Определение.. Непрерывная случайная величина называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} . \tag{1.7.11}$$

Замечание. Таким образом, нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ.

График плотности нормального распределения называют *нормальной кривой (кривой Гаусса)*. Выясним, какой вид имеет эта кривая, для чего исследуем функцию.

1) Область определения этой функции: $(-\infty, +\infty)$.
2) $f(x) > 0$ при любом x (следовательно, весь график расположен выше оси Оx).
3) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0,$ то есть ось Оx служит горизонтальной асимптотой графика при $x \to \pm\infty$.
4) $f'(x) = -\dfrac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0$ при $x = a$; $f'(x) > 0$ при $x > a$, $f'(x) < 0$ при $x < a$. Следовательно,

$$\left(a, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \text{ - точка максимума.}$$

5) $F(x - a) = f(a - x)$, то есть график симметричен относительно прямой $x = a$.

6) $f''(x) = -\dfrac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \dfrac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) = 0$ при $x = a \pm \sigma$, то есть точки

$$\left(a \pm \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$$

являются точками перегиба.

Примерный вид кривой Гаусса изображен на рисунке 4.

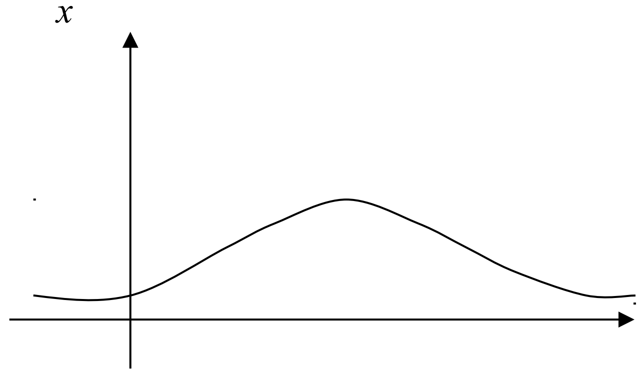

Рисунок 4

Найдем вид функции распределения для нормального закона:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \qquad (1.7.12)$$

Перед нами так называемый «неберущийся» интеграл, который невозможно выразить через элементарные функции. Поэтому для вычисления значений $F(x)$ приходится пользоваться таблицами. Они составлены для случая, когда $a = 0$, а $\sigma = 1$.

Определение. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ называется нормированным, а его функция распределения

$$\hat{O}(\tilde{o}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\tilde{o}} \mathring{a}^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (1.7.13)$$

функцией Лапласа.

Замечание. Функцию распределения для произвольных параметров можно выразить через функцию Лапласа, если сделать замену:

$$t = \frac{x-a}{\sigma}, \qquad (1.7.14)$$

тогда

$$F(\tilde{o}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \mathring{a}^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot \qquad (1.7.15)$$

Найдем вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный интервал:

$$p(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (1.7.15)$$

Пример. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами *a* = 3, σ = 2. Найти вероятность того, что она примет значение из интервала (4, 8).

Решение.

$$p(4 < x < 8) = F(8) - F(4) = \Phi\left(\frac{8-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{4-3}{2}\right) = \Phi(2,5) - \Phi(0,5) =$$

$$= 0,9938 - 0,6915 = 0,3023.$$

Для вычисления математического ожидания нормально распределенной случайной величины воспользуемся тем, что *интеграл Пуассона*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}\,. \qquad (1.7.16)$$

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| z = \frac{x-a}{\sigma} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = a \qquad (1.7.17)$$

(первое слагаемое равно 0, так как подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля).

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = (u = z, dv = z e^{-\frac{z^2}{2}}) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-0 + \sqrt{2\pi} \right) = \sigma^2\,. \qquad (1.7.18)$$

Следовательно, параметры нормального распределения (*a* и *σ*) равны соответственно математическому ожиданию и среднему квадратическому отклонению исследуемой случайной величины.

Найдем вероятность того, что нормально распределенная случайная величина примет значение из интервала (*a* - 3*σ, a* + 3*σ*):

$$p(\grave{a} - 3\sigma < x < \grave{a} + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0,9986 - 0,0014 = 0.9973.$$

Следовательно, вероятность того, что значение случайной величины окажется *вне* этого интервала, равна 0,0027, то есть составляет 0,27% и может считаться пренебрежимо малой. Таким образом, на практике можно считать, что *все* возможные значения нормально распределенной случайной величины лежат в интервале (a - 3σ, a + 3σ).

Полученный результат позволяет сформулировать правило «*трех сигм*»:

если случайная величина распределена нормально, то модуль ее отклонения от $x = a$ не превосходит 3σ.

1.8 Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теоремы Чебышева и Бернулли.

Изучение статистических закономерностей позволило установить, что при некоторых условиях суммарное поведение большого количества случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным (иначе говоря, случайные отклонения от некоторого среднего поведения взаимно погашаются). В частности, если влияние на сумму отдельных слагаемых является равномерно малым, закон распределения суммы приближается к нормальному. Математическая формулировка этого утверждения дается в группе теорем, называемой *законом больших чисел.*

Неравенство Чебышева, используемое для доказательства дальнейших теорем, справедливо как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Докажем его для дискретных случайных величин.

Теорема(неравенство Чебышева).

$$p(\,|X - M(X)| < \varepsilon\,) \geq D(X) / \varepsilon^2. \qquad (1.8.1)$$

Доказательство.

Пусть X задается рядом распределения

Таблица 20

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Так как события

$$|X - M(X)| < \varepsilon \text{ и } |X - M(X)| \geq \varepsilon$$

противоположны, то

$$p\,(\,|X - M(X)| < \varepsilon\,) + p\,(\,|X - M(X)| \geq \varepsilon\,) = 1,$$

следовательно,

$$p\ (\ |X - M(X)| < \varepsilon\ ) = 1 - p\ (\ |X - M(X)| \geq \varepsilon\ ).$$

Найдем $p\ (\ |X - M(X)| \geq \varepsilon\ )$.

$$D(X) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \ldots + (x_n - M(X))^2 p_n\ .$$

Исключим из этой суммы те слагаемые, для которых $|X - M(X)| < \varepsilon$. При этом сумма может только уменьшиться, так как все входящие в нее слагаемые неотрицательны. Для определенности будем считать, что отброшены первые k слагаемых. Тогда

$$D(X) \geq (x_{k+1} - M(X))^2 p_{k+1} + (x_{k+2} - M(X))^2 p_{k+2} + \ldots + (x_n - M(X))^2 p_n \geq \varepsilon^2\ (p_{k+1} + \\ + p_{k+2} + \ldots + p_n).$$

Отметим, что $p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots + p_n$ есть вероятность того, что $|X - M(X)| \geq \varepsilon$, так как это сумма вероятностей всех возможных значений X, для которых это неравенство справедливо. Следовательно,

$$D(X) \geq \varepsilon^2\ p(|X - M(X)| \geq \varepsilon),$$

или

$$p\ (|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq D(X)\ /\ \varepsilon^2.$$

Тогда вероятность противоположного события

$$p(\ |\ X - M(X)| < \varepsilon\ ) \geq D(X)\ /\ \varepsilon^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема (теорема Чебышева). Если $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ – попарно независимые случайные величины, дисперсии которых равномерно ограничены ($D(X_i) \leq C$), то для сколь угодно малого числа ε вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \qquad (1.8.2.)$$

будет сколь угодно близка к 1, если число случайных величин достаточно велико.

Замечание. Иначе говоря, при выполнении этих условий

$$\lim_{n \to \infty} p\left(\left| \frac{\tilde{O}_1 + \tilde{O}_2 + \ldots + \tilde{O}_{\ddot{i}}}{\ddot{i}} - \frac{\grave{I}\ \ (\tilde{O}_1) + \grave{I}\ \ (\tilde{O}_2) + \ldots + \grave{I}\ \ (\tilde{O}_{\ddot{i}})}{\ddot{i}} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим новую случайную величину

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

и найдем ее математическое ожидание. Используя свойства математического ожидания, получим, что

$$M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}.$$

Применим к $\overline{X}$ неравенство Чебышева:

$$p\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Так как рассматриваемые случайные величины независимы, то, учитывая условие теоремы, имеем:

$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)}{n^2} \leq \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Используя этот результат, представим предыдущее неравенство в виде:

$$p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon)\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1.$$

Поскольку вероятность не может быть больше 1, можно утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если X_1, X_2, …, X_n – попарно независимые случайные величины с равномерно ограничен-ными дисперсиями, имеющие одинаковое математическое ожидание, равное a, то для любого сколь угодно малого ε > 0 вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к 1, если число случайных величин достаточно велико. Иначе говоря,

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

*Вывод***:** среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин принимает значения, близкие к сумме их математических ожиданий, то есть утрачивает характер случайной величины. Например, если проводится серия измерений какой-либо физической величины, причем:

а) результат каждого измерения не зависит от результатов остальных, то есть все результаты представляют собой попарно независимые случайные величины;

б) измерения производятся без систематических ошибок (их математические ожидания равны между собой и равны истинному значению a измеряемой величины);

в) обеспечена определенная точность измерений, следовательно, дисперсии рассматриваемых случайных величин равномерно ограничены; то при достаточно большом числе измерений их среднее арифметическое окажется сколь угодно близким к истинному значению измеряемой величины.

Теорема (теорема Бернулли). Если в каждом из n независимых опытов вероятность p появления события A постоянна, то при достаточно большом числе испытаний вероят-ность того, что модуль отклонения относительной частоты появлений A в n опытах от p будет сколь угодно малым, как угодно близка к 1:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{1.8.3}$$

Доказательство.

Введем случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где X_i – число появлений A в i-м опыте. При этом X_i могут принимать только два значения:

1(с вероятностью p) и 0 (с вероятностью $q = 1 - p$).

Кроме того, рассматриваемые случайные величины попарно независимы и их дисперсии равномерно ограничены (так как $D(X_i) = pq$, $p + q = 1$, откуда

$pq \le ¼$). Следовательно, к ним можно применить теорему Чебышева при $M_i = p$:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Но

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{m}{n},$$

так как X_i принимает значение, равное 1, при появлении A в данном опыте, и значение, равное 0, если A не произошло. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Из теоремы Бернулли *не следует*, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = p.$$

Речь идет лишь о *вероятности* того, что разность относительной частоты и вероятности по модулю может стать сколь угодно малой. Разница заключается в следующем: при обычной сходимости, рассматриваемой в математическом анализе, для всех n, начиная с некоторого значения, неравенство

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

выполняется всегда; в нашем случае могут найтись такие значения n, при которых это неравенство неверно. Этот вид сходимости называют *сходимостью по вероятности.*

1.9 Центральная предельная теорема Ляпунова. Предельная теорема Муавра-Лапласа. Характеристические функции.

Закон больших чисел не исследует вид предельного закона распределения суммы случайных величин. Этот вопрос рассмотрен в группе теорем, называемых центральной предельной теоремой**.** Они утверждают, что закон распределения суммы случайных величин, каждая из которых может иметь различные распределения, приближается к нормальному при достаточно большом числе слагаемых. Этим объясняется важность нормального закона для практических приложений.

Для доказательства центральной предельной теоремы используется метод характеристических функций.

Определение . Характеристической функцией случайной величины X называется функция

$$g(t) = M(e^{itX}) \tag{1.9.1}$$

Таким образом, $g(t)$ представляет собой математическое ожидание некоторой комплексной случайной величины $U = e^{itX}$, связанной с величиной X. В частности, если X – дискретная случайная величина, заданная рядом распределения, то

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} p_k . \tag{1.9.2}$$

Для непрерывной случайной величины с плотностью распределения $f(x)$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx. \tag{1.9.3}$$

Пример. Пусть X – число выпадений 6 очков при одном броске игральной кости. Тогда по формуле (1.9.3)

$$g(t) = e^{it\cdot 0}\cdot\frac{5}{6} + e^{it\cdot 1}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5+e^{it}}{6}.$$

Пример. Найдем характеристическую функцию для нормированной непрерывной случайной величины, распределенной по нормальному закону

$$\left(f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right).$$

Решение.

По формуле

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

здесь использовалась формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2 \pm 2Bx - C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC-B^2}{A}}$$ и то, что $i^2 = -1$.

Свойства характеристических функций.

1. Функцию $f(x)$ можно найти по известной функции $g(t)$ по формуле

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g(t)dt. \qquad (1.9.4)$$

(преобразование (1.9.3) называется *преобразованием Фурье*, а преобразование (1.9.4) – *обратным преобразованием Фурье*).
2. Если случайные величины X и Y связаны соотношением $Y = aX$, то их характеристические функции связаны соотношением

$$g_y(t) = g_x(at).$$

3. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых:
для $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$

$$g_y(t) = g_{x_1}(t) \cdot g_{x_2}(t) \cdot \ldots \cdot g_{x_n}(t)$$

Теорема (центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых).

Если X_1, $X_2,\ldots$, $X_n,\ldots$ - независимые случайные величины с одинаковым законом распределения, математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ неограниченно приближается к нормальному.

Доказательство.

Докажем теорему для непрерывных случайных величин X_1, $X_2,\ldots$, X_n (доказательство для дискретных величин аналогично). Согласно условию теоремы, характеристические функции слагаемых одинаковы:

$$g_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx.$$

Тогда по свойству 3 характеристическая функция суммы Y_n будет $g_{y_n}(t) = g_x^n(t)$. Разложим функцию $g_x(t)$ в ряд Маклорена:

$$g_x(t) = g_x(0) + g_x'(0)t + \left(\frac{g_x''(0)}{2} + \alpha(t)\right)t^2,$$

где $\alpha(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Найдем

$$g_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

$$g_x'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx} f(x)dx \Big|_{t=0} = i\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{itx} f(x)dx \Big|_{t=0} = i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = im.$$

Если предположить, что m = 0 (то есть перенести начало отсчета в точку m), то $g_x'(0) = 0$.

$$g_x''(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{itx} f(x)dx \Big|_{t=0} = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = -\sigma^2$$

(так как m = 0). Подставив полученные результаты в формулу Маклорена, найдем, что

$$g_x(t) = 1 - \left(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha(t)\right)t^2.$$

Рассмотрим новую случайную величину

$$Z_n = \frac{Y_n}{\sigma\sqrt{n}},$$

отличающуюся от Y_n тем, что ее дисперсия при любом n равна 0.

Так как Y_n и Z_n связаны линейной зависимостью, достаточно доказать, что Z_n распределена по нормальному закону, или, что то же самое, что ее характеристическая функция приближается к характеристической функции нормального закона. По свойству характеристических функций

$$g_{z_n}(t) = g_{y_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(g_x\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \left(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)^n.$$

Прологарифмируем полученное выражение:

$$\ln g_{z_n}(t) = n\ln(1-k), \text{ где } k = \left(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\frac{t^2}{n\sigma^2}, \ \lim_{n\to\infty} k = 0.$$

Разложим $\ln(1-k)$ в ряд при $n \to \infty$, ограничившись двумя членами разложения, тогда

$$\ln(1 - k) \approx - k.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\ln g_{z_n}(t)=\lim_{n\to\infty} n\cdot(-k)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{t^2}{2}+\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{\sigma^2}\right)=-\frac{t^2}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma^2}\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

где последний предел равен 0, так как $\alpha(t)\to 0$ при $t\to 0$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\ln g_{z_n}(t)=-\frac{t^2}{2},$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} g_{z_n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\ -$$

характеристическая функция нормального распределения.

Итак, при неограниченном увеличении числа слагаемых характеристическая функция величины Z_n неограниченно приближается к характеристической функции нормального закона; следовательно, закон распределения Z_n (и Y_n) неограниченно приближается к нормальному. Теорема доказана.

А.М.Ляпунов доказал центральную предельную теорему для условий более общего вида:

Теорема (теорема Ляпунова). Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, для которых выполнено условие:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} D_k\right)^{\frac{3}{2}}}\ , \qquad (1.9.5)$$

где b_k – третий абсолютный центральный момент величины $X_к$, а D_k – ее дисперсия, то X имеет распределение, близкое к нормальному (условие Ляпунова означает, что влияние каждого слагаемого на сумму ничтожно мало).

Практически можно использовать центральную предельную теорему при достаточно небольшом количестве слагаемых, так как вероятностные расчеты требуют сравнительно малой точности. Опыт показывает, что для суммы даже десяти и менее слагаемых закон их распределения можно заменить нормальным.

Частным случаем центральной предельной теоремы для дискретных случайных величин является теорема Муавра-Лапласа.

Теорема (теорема Муавра-Лапласа). Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, то справедливо соотношение:

$$p\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \qquad (1.9.6)$$

где Y – число появлений события A в n опытах, $q = 1 - p$.

Доказательство.

Будем считать, что $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, где X_i – число появлений события A в i-м опыте. Тогда случайную величину

$$Z = \frac{Y - m_y}{\sigma_y}$$

можно считать распределенной по нормальному закону и нормированной, следовательно, вероятность ее попадания в интервал (α, β) можно найти по формуле

$$p(\alpha < Z < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Поскольку Y имеет биномиальное распределение,

$$\text{ð}_{\text{ó}} = \text{ïð}, \ D_y = npq, \ \sigma_y = \sqrt{npq}.$$

Тогда

$$Z = \frac{Y - np}{\sqrt{npq}}.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, получим равенство (1.9.6).

Следствие. В условиях теоремы Муавра-Лапласа вероятность $\text{ð}_n(k)$ того, что событие A появится в n опытах ровно k раз, при большом количестве опытов можно найти по формуле:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (1.9.7)$$

где

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \text{ а } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (1.9.8)$$

(значения этой функции приводятся в специальных таблицах).

Пример. Найти вероятность того, что при 100 бросках монеты число выпадений герба окажется в пределах от 40 до 60.

Решение:

Используем формулу(1.9.6), учитывая, что $p = 0{,}5$. Тогда

$$np = 100 \cdot 0{,}5 = 50,$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)} = 5.$$

Тогда, если

$$40 < Y < 60,\ -2 < \frac{Y - 50}{5} < 2.$$

Следовательно,

$$p(40 < Y < 60) = p\left(-2 < \frac{Y - 50}{5} < 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

$$= 0{,}9772 - 0{,}0228 = 0{,}9544.$$

Пример . В условиях предыдущего примера найти вероятность того, что выпадет 45 гербов.

Решение:

Найдем

$$x = \frac{45 - 50}{5} = -1,$$

тогда

$$p_{100}(45) \approx \frac{1}{5} \cdot \varphi(-1) = \frac{1}{5} \cdot \varphi(1) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}2420 = 0{,}0484.$$

2. Обобщение центрально-симметрического закона распределения случайных величин

В этом разделе рассматривается обобщение известного закона распределения непрерывной случайной величины, который традиционно называется *центрально-симметрическим законом*. Этот закон определяется как «*двусторонняя*» показательная плотность

$$\varphi_a(x) = c\, e^{-b|x-a|}, \tag{2.1}$$

где b и c – заданные положительные вещественные числа (см. ниже в теореме их значения); $|a| < +\infty$ - вещественное число.

При $a = 0$ эта плотность совпадает с центрально-симметрической плотностью, введеной Лапласом

$$\varphi_0(x) = \frac{\alpha\, e^{-\alpha|x|}}{2} \tag{2.2}$$

где $\alpha = b$ - масштабный параметр, $c = \frac{\alpha}{2}$.

Эта плотность представляет собой свертку показательной плотности $\alpha\, e^{-\alpha|x|}$ $(x > 0)$ со своим зеркальным отображением $\alpha\, e^{-\alpha|x|}\ (x < 0)$. показательная плотность является плотностью случайных величин $\xi_1 - \xi_2$, где ξ_1, ξ_2 обладают одной и той же показательной плотностью.

Во французской литературе это распределение обычно называют «вторым законом Лапласа».

Первым считается нормальное распределение с плотностью

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \qquad x = \frac{m-a}{\sigma}$$

где $\varphi_0(x)$ известная функция локальная функция Муавра-Лапласа (1.9.6), σ - среднее квадратическое отклонение, $M\xi = a$ - математическое ожидание случайной величины. функция распределения этой плотности определяется равенством

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt = p(-\infty < \xi \le x) \tag{2.3}$$

Этот закон распределения принято также называть законом Гаусса.

Функции $\varphi_0(x)$ и $\Phi_0(x)$ табулированы и их свойствами можно подробно ознакомится в учебниках по теории вероятностей [6]. Кроме того, важно заметить, что нормальное распределение является одним из основных законов распределения значений случайных величин, и предельные теоремы в основном ориентируются по этому закону. Также отметим, что один из основных предельных законов «*правило трех сигм*», который показывает, что оно является «*почти достоверным*», а именно

$$P(|\xi - p| < \varepsilon) = 0{,}997...;\ \varepsilon = 3\sigma\,.$$

При $\varepsilon > 3\sigma$, применяется как правило равенство:

$$P(|\xi - p| < \varepsilon) = 0{,}99988...$$

Тем самым нормальный закон является наиболее приемлемым в практических приложениях.

Проведя непосредственные подсчеты, получим явное значение математического ожидания случайной величины ξ

$$M\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}(t+a)e^{-\frac{\sqrt{2}|t|}{\sigma}}dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{\sqrt{2}|t|}{\sigma}}dt + \frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\sqrt{2}|t|}{\sigma}}dt \qquad (2.4)$$

Далее в первом интеграле подынтегральная функция нечетная, поэтому он равен нулю, а второй интеграл уже вычислен, следовательно

$$M\xi = a \qquad (2.5)$$

Теперь вычислим дисперсию случайной величины ξ, распределенной по центрально-симметрическому закону с математическим ожиданием $M\xi = a$. Согласно вычислительной формуле имеем

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = M\xi^2 - a^2 = \int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx - a^2;$$

Поэтому, остается вычислить второй момент $M\xi^2$.

Пусть ξ - непрерывная случайная величина с плотностью распределения $\varphi_a(\xi)$, а функция, определенная в отрезке $(-\infty < \xi \le x)$ равенством

$$p(-\infty < \xi \le x) = \Phi_a(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi_a(t)dt \qquad (2.6)$$

будем называть обобщенной функцией центрально-симметрического распределения непрерывной случайной величины ξ, если ее плотность $\varphi_a(t)$; $-\infty < t < +\infty$ равна

$$\varphi_a(t) = c\cdot e^{-b|t-a|} \qquad (2.7)$$

где *c, b* – положительные вещественные числа, $a \in R$, $|a| < +\infty$. *Так определенная функция* $\varphi_a(t)$ *называется плотностью обощенного центрально-симметрического распределения.*

Замечание: число a – является математическим ожиданием случайной величины ξ в распределении (2.1); при $a=0$, $c=\frac{\alpha}{2}$ и $b=\alpha$ равенство (2.2) совпадает с классической центрально-симметрической плотностью (вторым законом Лапласа).

Цель данной работы показать, что такой подход имеет важное значение в приложениях и в частности в вопросах изучения характеристической функции случайной величины ξ.

Сформулируем некоторые полученные результаты.

Теорема. Для любой непрерывной случайной величины ξ с функцией распределения $\Phi_a(x)$ и плотностью $\varphi_a(\tilde{o})$ справедливы равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=1; \quad (2.8)$$

при $c=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$; $b=\frac{\sqrt{2}}{\sigma}$;

$$M\xi=a;\ D\xi=\sigma^2. \quad (2.9)$$

Сравнивая с нормальным законом распределения случайной величины легко заметить, что параметры c и b имеют в определенном смысле сходство. Но здесь они являются иррациональными, в тоже время в нормальном законе присутствует трансцендентное число π.

Доказательство. Ранее мы вычислили $M\xi$ (2.5). Вычислим $M\xi^2$:

$$M\xi^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x-a|}dx;$$

Отсюда, после замены и стандартных вычислений получим:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|t|}dt+\frac{2a}{\sigma\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|t|}dt+\frac{a^2}{\sigma\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|t|}dt;$$

Теперь согласно выше приведенным рассуждениям

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}t}dt=\sigma\sqrt{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}t}dt=0$$

Следовательно

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|t|} dt$$

Вычисляя этот интеграл, получим:

$$I_2 = \int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}t} dt = \sigma\sqrt{2} \tag{2.10}$$

Для функции распределения случайной величины ξ, $\Phi_a(x)$ распределенной центрально-симметрическим законом с $M\xi = a$, $a \in R$, $|a| < +\infty$ справедливо утверждение.

Теорема. Справедлива формула

$$\Phi_a(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_a(t)dt = \frac{1}{2} + sign(x-a) \cdot \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-a)}}{2}; \tag{2.11}$$

где соответствующими функциями плотности и распределения закона Лапласа будут иметь вид:

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt = \frac{1}{2} + signx \cdot \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}x}}{2};$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x|};$$

Доказательство. Рассмотрим два случая: $x \le a$ и $x \ge a$.

Пусть $x \le a$, тогда $-|x-a| = x-a$, поэтому

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{x} \varphi_a(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{x-a} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|t|} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x-a} d\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-a)}\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}}\Bigg|_{-\infty}^{x-a} = \frac{1}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-a)} = \frac{1}{2} - \frac{1-e^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-a)}}{2}$$

Следовательно, в этом случае получим:

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{2} - \frac{1-e^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-a)}}{2};$$

или с учетом $x - a = -|x-a|$ имеем

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{2} + sign(x-a)\frac{1-e^{-\frac{\sqrt{2}|x-a|}{\sigma}}}{2}$$

Пусть теперь $x \geq a$, тогда аналогично пункту 1 получим

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-a)}dx + \int_{0}^{x-a} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-a)}dx\right) = 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-a)}$$

или с учетом $x-a=|x-a|$ имеем

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{2} + sign(x-a)\frac{1-e^{-\frac{\sqrt{2}|x-a|}{\sigma}}}{2}$$

В частности, при *a=0* как следствие из нашей теоремы получим

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{2} + sign(x)\frac{1-e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}x}}{2}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x|}$$

Приведем одно из приложений нашей теоремы.

Теорема (закон больших чисел в форме обобщенного центрально-симметрического распределения). Для любого положительного ε случайная величина ξ с плотностью распределения $\varphi_a(x)$, $a \in R$ справедлива формула

$$p(|\xi - M\xi| < \varepsilon) = 1 - e^{-\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sigma}}. \qquad (2.12)$$

Доказательство этой теоремы непосредственно выводится на основании равенства

$$p(|\xi - M\xi| < \varepsilon) = \Phi_a(a+\varepsilon) - \Phi_a(a-\varepsilon),$$

и теоремы.

Следствие 1 . В нашем случае так называемый закон «N – сигм» выглядит так

$$p(|\xi - M\xi| < N\sigma) = 1 - e^{-N\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{e^{N\sqrt{2}}}$$

где N - натуральное число.

Замечание. Подсчет на языке Delphi (см. приложение) приводит к ниже следующим результатам:

$$p(|\xi - M\xi| < 3\sigma) = 0,98563040.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 4\sigma) = 0,99650651.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 5\sigma) = 0,99915067.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 6\sigma) = 0,99979351.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 7\sigma) = 0,99994983.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 8\sigma) = 0,99998779.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 9\sigma) = 0,999977032.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 10\sigma) = 0,99999927.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 11\sigma) = 0,999999824626734.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 12\sigma) = 0,999999957363824...$$

$$p(|\xi - M\xi| < 13\sigma) = 0,999999989634432...$$

$$p(|\xi - M\xi| < 15\sigma) = 0,9999999993873350.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 16\sigma) = 0,999999999851051....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 17\sigma) = 0{,}999999999963788.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 18\sigma) = 0{,}999999999991196.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 19\sigma) = 0{,}99999999999786.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 20\sigma) = 0{,}99999999999948.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 21\sigma) = 0{,}999999999999874.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 22\sigma) = 0{,}999999999999969.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 23\sigma) = 0{,}999999999999993.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 24\sigma) = 0{,}999999999999998.....$$

$$p(|\xi - M\xi| < 25\sigma) = 1$$

$$p(|\xi - M\xi| < 26\sigma) = 1$$

Полученные расчеты свидетельствуют о том, что данное распределение «*не хуже*» чем нормальное распределение сходимость этого закона к нормальному очевидно. Преимущество этого закона в отсутствии трансцендентности.

Рассмотрим вычисление характеристической функции случайной величины *X*, распределенной по «*обобщенному центрально-симметрическому закону*».

Как известно ([6] или [16]) характеристическая функция случайной величины *X;* $\psi_{\grave{a}}(\varsigma)$ определяется как математическое ожидание величины $e^{i\varsigma x}$, где $i^2 = -1$ и $\varsigma \in R$, т.е. равенством

$$\psi_{\grave{a}}(\varsigma) = \grave{I}_{a}(e^{i\varsigma x})$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Для любого вещественного числа ς справедливо равенство

$$\psi_{\grave{a}}(\varsigma) = \frac{e^{i\varsigma a}}{1+\left(\frac{\varsigma\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}. \tag{2.13}$$

Здесь a исходная величина (т.е. $MX = a$),

$$\sigma = \sqrt{DX}\,.$$

Следствие**.** При $a = 0$

$$\psi_0(\varsigma) = \grave{I}_{\ 0}(e^{i\varsigma x}) = \grave{I}\ (e^{i\varsigma x}) = \frac{1}{1+\left(\frac{\varsigma\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

и справедливо другое равенство

$$\psi_{\grave{a}}(\varsigma) = \psi_0(\varsigma)\cdot e^{i\varsigma a}.$$

Далее сформулируем два результата относительно суммирования характеристической функции «*обобщенного центрально-симметрического закона*» в отрезке точек числовой оси.

1. Пусть $\varsigma \cdot \grave{a} = \frac{2\pi k}{q}$, здесь q – натуральное число, $k \geq 0$ - целое число. Тогда при $q \to \infty$ и любом фиксированном ς, независящее от k имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{q} \psi_a(\varsigma) = \begin{cases} \psi_0(\varsigma), & q = 1, \\ 0, & q > 1 \end{cases}.$$

Доказательство. По определению $\psi_{\grave{a}}(\varsigma)$

$$\psi_{\grave{a}}(\varsigma) = M(e^{i\zeta x}) = e^{i\xi a}\cdot\psi_0(\zeta).$$

Пусть $a = \frac{2\pi k}{\varsigma q}$; ($1 \leq k \leq q$; q - достаточно большое натуральное число $q \to \infty$), тогда

$$\sum_{k=1}^{q} \psi_0(\varsigma)\cdot e^{2\pi i\frac{k}{q}} = \psi_0(\varsigma)\cdot\sum_{k=1}^{q} e^{2\pi i\frac{k}{q}} =$$

$$= \psi_0(\varsigma)\cdot\left(1 + e^{2\pi i\frac{1}{q}} + \left(e^{2\pi i\frac{1}{q}}\right)^2 + \ldots + \left(e^{2\pi i\frac{1}{q}}\right)^{q-1}\right) =$$

$$= \psi_0(\varsigma)\cdot\frac{e^{2\pi i\frac{q}{q}} - 1}{e^{2\pi i\frac{1}{q}} - 1},$$

при $q > 1$ знаменатель отличен от нуля, а числитель равен нулю. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{q} \psi_a(\varsigma) = \begin{cases} \psi_0(\varsigma), & q = 1, \\ 0, & q > 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

Потому, что суммируя геометрическую прогрессию

$$\left(1 + e^{2\pi i \frac{1}{q}} + e^{2\pi i \frac{2}{q}} + \ldots + e^{2\pi i \frac{q-1}{q}}\right) = \frac{e^{2\pi i \frac{q}{q}} - 1}{e^{2\pi i \frac{1}{q}} - 1} = \frac{1-1}{e^{2\pi i \frac{1}{q}} - 1} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{q} e^{2\pi i \frac{k}{q}} = \begin{cases} 1, & q = 1, \\ 0, & q > 1 \end{cases}$$

2. $a \cdot \varsigma = \dfrac{2\pi\, m\, k^2}{q}$; $q \to \infty$; $1 \le k \le q$; $(m,\, q) = 1$;

m - фиксированное натуральное число

$$\sum_{1 \le k \le q}^{q} \psi_0(\varsigma) = \psi_0(\varsigma) \cdot \sum_{k=1}^{q} e^{2\pi i \frac{m k^2}{q}} = \psi_0(\varsigma) \cdot G(d; q) =$$

$$= \psi_0(\varsigma) \left(\frac{m}{q}\right) \sqrt{q}\, \frac{(1+i)(1+i^{-q})}{2};$$

где *G(q)* - классическая сумма Гаусса. Как известно (см. например, [8]) классическая сумма Гаусса точно сосчитывается и ее значение определяется равенством:

$$G(m;\, q) = \sum_{k=1}^{q} e^{2\pi i \frac{k^2}{q}} = \left(\frac{m}{q}\right) \sqrt{q}\, \frac{(1+i)(1+i^{-q})}{2}; \quad i^2 = -1;$$

где число $\left(\dfrac{m}{q}\right)$ обозначает символ Якоби, который в свою очередь определяется с помощью символа Лежандра. На этом мы ограничимся суммированием арифметической функции – характиристической функции нашего распределения. Круг суммируемых точек *a* можно значительно расширить на другие суммируемые арифметические функции, где безусловно можно применить достижения теории оценок тригогнметрических сумм.

Для полноты изложения приведем определение символа Лежандра, ее простейшие свойства, а затем определение символа Якоби. При этом мы следуем изложению книги академика И.М. Виноградова [3].

Введем в рассмотрение понятие ***символа Лежандра***. Символ Лежандра в теории чисел вводится в связи с разрешимостью двучленного сравнения второй степени по нечетному простому модулю *p*:

$$x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\, p); \qquad (a,\ p) = 1 \tag{2.15}$$

Число a называется *квадратичным вычетом* по модулю p, если (2.15) имеет решение (если (2.15) разрешимо, то оно имеет два решения).

Если же сравнение (2.15) при заданном a не имеет решений, то a называется *квадратическим невычетом*.

Пример. Пусть $p = 17$, $a = 16$.

Тогда число $\tilde{o} = \pm 4$ является решением сравнения (2.15). Следовательно a является квадратичным вычетом.

Если $p = 19$, то ни при каких $1 \le a \le 18$; сравнение не имеет решения.

Теперь дадим определение символа Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$(читается: символ a по p; a называется числителем, p знаменателем символа). Этот символ определяется для всех a, не делящихся на p, и считается

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{åñëè à êâàäðàòè÷í ûé âû÷åò ïî ìîäóëþ ð,} \\ -1, & \text{åñëè à êâàäðàòè÷í ûé íåâû÷åò ïî ìîäóëþ ð.} \end{cases}$$

Пример.

$\left(\frac{5}{29}\right) = 1; \qquad \left(\frac{3}{29}\right) = -1$

Приведем некоторые свойства символа Лежандра:

1. При a не делящемся на p, имеем

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (\mathrm{mod}\, p).$$

2. Если $a \equiv a_1 (\mathrm{mod}\, p)$, то $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a_1}{p}\right)$.

3. $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$

4. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

5. $\left(\frac{ab...l}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)...\left(\frac{l}{p}\right).$

6. $\left(\frac{ab^2}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b^2}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$

Следовательно, $\left(\frac{b^2}{p}\right)=1.$

7. $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

8. Если p и q - простые нечетные, то (закон взаимности квадратичных вычетов)

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right).$$

Обобщением символа Лежандра является *символ Якоби*.

Пусть P - нечетное, большее единицы, и $P = p_1\, p_2 \cdots p_r$ - разложение его на простые сомножители (среди них могут быть и равные). Пусть, далее, $(a,\, P)=1$.

Тогда символ Якоби $\left(\frac{a}{P}\right)$ определяется равенством

$$\left(\frac{a}{P}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)...\left(\frac{a}{p_r}\right).$$

Заключение

Развитие теории вероятностей тесон связана с Петербурской школой, видными представителями которой были Чебышев, Марков, Ляпунов. Их усилиями были значительно расширены области применения предельных теорем, которые ныне именуются законом больших чисел и центральной предельной теоремой и составляют основу теории вероятностей.

Диссертационная работа посвящена актуальным вопросам использования законов распределения в практических задачах производства, биологии, химии , экономики, генетики и др.

В диссертационной работе были поставлены и решены следующие задачи:

- получен закон больших чисел в форме обобщенного центрально-симметрического распределения;
- выведен закон «*N*-сигм»
- получены результаты практического применения теоретических исследований в изучении случайных величин и их свойств «наследия».
- составлена программа для расчета закона «*N*-сигм».
- опубликованно учебное пособие «Основы линейной алгебры и линейного программирования».

Таким образом в диссертационной работе выведены, сформулированы теоремы и следствия, применяемые в теории случайных процессов.

Для реализации практического применения составлена программа вычисления закона «*N*-сигм» на языке Delphi.

Список использованных источников

1. Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Ермаков В.И., Матвеев В.И. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб.пособие для вузов/ Л.Г.Бирюкова, Г.И.Бобрик, В.И.Ермаков и др.. - М.: ИНФРА-М, 2004, 345 с.
2. Вентцель Е.С. Овчаров П.А. «Задачи и упражениния по теории вероятностей». Учебное пособие для втузов.-М.:ВШ, 2002, 452 с.
3. Виноградов И.М. Основы теории чисел.-М.:Издательство «Лань»,2004, 175 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003.-523с.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. - М.: Едиториал, 2005, 342 с.
6. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей: Справ.пособие к решению задач. - Мн.: ТетраСистемс, 2003, 345 с.
7. Исмоилов Д. Аддитивные проблемы делителей. Монография – Павлодар, Brend Print., 2010г.-243 с.
8. Исмоилов Д. Комбинаторные свойства функции Мебиуса // Материалы научно-практ. конференции ТГУ ПБП посв.110 лет государства Саманидов и 90-летию академ. Б.Гафурова. Худжанд; 1998; стр.132-133
9. Исмоилов Д. О дифференциальных и интегральных свойствах некоторых функций. Вестник ТГУ ПБиП; №4-5; Хучанд; 2000с; стр. 90-99
10. Исмоилов Д. О последовательности «наследия». Вестник ТГУ ПБиП; №1; Хучанд; 2000с; стр. 90-99
11. Исмоилов Д. Последовательности со свойсвами «наследия» // В кн: современные проблемы функционального анализа и диф.уравнений. Воронеж. 2003. с. 143-144
12. Исмоилов Д., Бокаева М.С. О центрально-симметрическом законе распределения случайных величин; Материалы II Международной научно-практической конференции; том 2; 2011 г., 43-47 стр.
13. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971 г. – 531 с.
14. Королев В.Ю. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. - М.: ТК Велби,Изд-во Проспект, 2006;
15. Кремер Н.Ш. Теория вероятности и математическая статистика. М.: Юнити – Дана, 2002.-343с.
16. Леман Э. Проверка статистических гипотез.-М.:Наука, 1998, 223 с.
17. Лукач Е. Характеристические функции.- М.:Наука, 1998, 124 с.
18. Ниворожкина Л.И., Морозова З.А. Математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями: Учеб.пособие для вузов. - М.: Март, 2005, 254 с.
19. Ниворожкина Л.И., Морозова З.А., Герасимова И.А., Житников И.В. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов: 1999, 267 с.

20.Руководство для решения задач: Учеб.пособие для вузов/ Л.И.Новорожкина, З.А.Морозова, И.А.Герасимова и др.. - Р.н/Д.: Феникс, 1999, 267 с.

21.Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей,математической статистике и случайным процессам. - М.: Айрис пресс, 2006, 567с.

22.Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб.пособие для вузов. - М.: Физматлит, 2002, 322 с.

23.Соколов Г.А., Чистякова Н.А. Теория вероятностей: Учебник. - М.: Экзамен, 2005, 435 с.

24.Солодовников А.С. Теория вероятностей. Учеб. Пособие для втузов по спец.матем.-М.:Вербум, 1999, 26 с.

25.Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Ч.1. ч.2. – Москва. Мир. 1984.345 с.

26.Чистяков В.П. Курс теории вероятностей: Учебник для вузов. - СПб.: Лань, 2003, 273с.

27.Шапкин А.С., Шапкин В.А. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями: Учеб.пособие для вузов. - М.: Дашков и К, 2009, 342 с.

28.Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ИД ГУ ВШЭ, 2005, 219 с.

29.Шыныбеков А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.пособие. - Алматы: Экономика, 2008, 342 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls;

type
  TForm1 = class(TForm)
    Edit1: TEdit;
    Edit2: TEdit;
    Label1: TLabel;
    Button1: TButton;
    Memo1: TMemo;
    RadioButton1: TRadioButton;
    RadioButton2: TRadioButton;
    Edit3: TEdit;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure RadioButton2Click(Sender: TObject);
    procedure RadioButton1Click(Sender: TObject);
    procedure Edit1KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
    procedure Edit2KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
    procedure Edit3KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);

  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form1: TForm1;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var
N:integer;
p:real;
```

```
begin
memo1.Clear;

if radiobutton1.Checked=true then
if (edit1.Text<>'')and (edit2.Text<>'') then
for N:=strtoint(edit1.text) to strtoint(edit2.text) do begin
p:=1-1/(exp(N*sqrt(2)));
memo1.Lines.Add('p('+inttostr(N)+')= '+floattostr(p));
end
else
MessageDlg('Заполнены не все поля',mterror, [mbOk], 0);

if radiobutton2.Checked=true then
if (edit1.Text<>'') and (edit3.Text<>'') then
for N:=strtoint(edit1.text) to strtoint(edit1.text)+strtoint(edit3.text)-1 do begin
p:=1-1/(exp(N*sqrt(2)));
memo1.Lines.Add('p('+inttostr(N)+')= '+floattostr(p));
end
else
MessageDlg('Заполнены не все поля',mterror, [mbOk], 0);

end;

procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
memo1.Clear;
radiobutton1.Checked:=true;
radiobutton2.Checked:=false;
edit3.Enabled:=false;
end;

procedure TForm1.RadioButton2Click(Sender: TObject);
begin
radiobutton1.Checked:=false;
edit2.Enabled:=false;
radiobutton2.Checked:=true;
edit3.Enabled:=true;
end;

procedure TForm1.RadioButton1Click(Sender: TObject);
begin
radiobutton1.Checked:=true;
edit2.Enabled:=true;
radiobutton2.Checked:=false;
edit3.Enabled:=false;
```

```
end;


procedure TForm1.Edit1KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
begin
If not (Key in ['0'..'9',#8]) then
Key:=#0;
end;

procedure TForm1.Edit2KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
begin
If not (Key in ['0'..'9',#8]) then
Key:=#0;
end;

procedure TForm1.Edit3KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
begin
If not (Key in ['0'..'9',#8]) then
Key:=#0;
end;

end.
```