ПАВЛОДАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАГИСТРАТУРА

Кафедра "Математика"

Магистерская диссертация

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ. ТЕОРЕМА ТИХОНОВА

"Прикладная математика и информатика".

Исполнитель 25.06.04 ____________ Наурызбаева Н.Т.
(подпись, дата)

Научный руководитель
профессор 25.06.04 ____________ Аяшинов М.М.
(подпись, дата)

Допущена к защите:

Зав. кафедрой "Математика"
Профессор 25.06.04 ____________ Аяшинов М.М.
(подпись, дата)

Павлодар, 2004.

АНДАТПА

Бұл жұмыс шағын параметрлі дифференциалдық теңдеулерді асимптотикалық есептеу мәселеріне арналған. Жұмыста тұрақты және сингулярлық ауытқу теориясы баяндалады. Тихонов теоремасы дәлелдемесімен келтіріледі. Теореманың мақұлдауын растайтын есептер шығарылған.

АННОТАЦИЯ

Данная работа посвящена вопросу асимптотического решения дифференциальных уравнений с малым параметром. В работе излагается теория регулярных и сингулярных возмущений, приводится теорема Тихонова с доказательством. Решены примеры, подтверждающие утверждение теоремы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Важность асимптотических рядов в теории дифференциальных уравнений была ясно осознана математиками во второй половине девятнадцатого столетия, и значительная часть современной асимптотической теории была создана именно тогда. Однако только в последнее время стало ясно, насколько важны асимптотические ряды для понимания структуры решений дифференциальных уравнений и что они неизбежно возникают во многих вопросах прикладной математики. Асимптотические методы решения и исследования дифференциальных уравнений с малым параметром в настоящее время лежат в основе изучения математических моделей физических явлений. Число физических задач, при решении которых такие методы используются или могут быть использованы непрерывно возрастает. Сюда относятся многие вопросы квантовой механики, теории течений вязкой жидкости, упругости, электромагнитной теории, электроники, астрофизики и других областей физики.

В настоящей работе я рассмотрела асимптотические методы решения дифференциальных уравнений по малому параметру, которые являются одним из классов приближенных методов дифференциальных уравнений. Асимптотические методы ставят своей целью получение формулы, описывающей качественное поведение решения на некотором интервале изменения независимого переменного.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, списка использованных источников. Во введении обосновывается актуальность исследования; раскрывается теоретическая и практическая значимость; содержатся сведения о структуре диссертации. В первой главе "Об асимптотических методах" вводится определение асимптотического ряда, перечисляются элементарные свойства асимптотических рядов. Также рассматривается вопрос существования асимптотического разложения для функций от одной и двух переменных.

Во второй главе "Регулярные возмущения" раскрывается теория возмущений, имеющая целью обоснование асимптотики по малому параметру μ.

В реальных задачах, связанных с решением дифференциальных уравнений, начальные значения известны лишь с некоторым приближением, так как они определяются экспериментально или вычисляются, а это неизбежно связано с появлением погрешностей. Кроме того, в правые части уравнений могут входить какие-либо параметры, характеризующие физическую природу изучаемой системы (массы, заряды, упругие характеристики и т.д.), и значения данных параметров также определяются приближенно.

В качестве математической модели многих естественнонаучных задач можно взять начальную задачу

$$\frac{dy}{dt} = y(y, t, \mu)$$

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n), f = f(f_1, f_2, ..., f_n)$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = y_0, y_0 = (y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$$

Здесь $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_s)$ - вектор, описывающий параметры $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_s$ входящие в правую часть системы.

Как известно малое изменение начальных данных и правых частей уравнений системы приводят соответственно к малым изменениям решений.

Эта теория дает математическое обоснование " обычной " для физики и техники операции отбрасывания малых членов в уравнении, которые носят названия - возмущения. Возмущения подчиняющиеся условию достаточной гладкости (или, как говорят, регулярности) правой части уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu), \ \ y(0, \mu) = y_0$$

называются регулярными возмущениями. Этим разъясняется название этой главы.

Целью теории возмущений является приближенное решение задачи при малых μ, если известно решение при μ=0. Если дифференциальное уравнение и дополнительные условия зависят от параметра μ достаточно регулярно, то известные теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений гарантируют непрерывную зависимость решений от μ при μ=0 . Таким образом, в задачах с регулярными возмущениями с самого начала известно, что решение при малых μ близко к известному решению при μ=0 , и проблема состоит в улучшении этого результата с помощью более высоких приближений.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения с малым параметром, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, называется задачей с сингулярными возмущениями, если порядок дифференциального уравнения при μ=0 ниже, чем при μ≠0.

В следующей главе и содержатся сведения о теории сингулярных возмущений, которая бурно развивается в связи с потребностями таких разделов физики и механики как теория автоматического регулирования, гидродинамики, квантовая механика, кинетика, теория нелинейных колебаний и др.

В четвертой главе рассматривается теорема Тихонова, доказывающая, что при выполнении некоторых условий решение невырожденного уравнения сводится к решению вырожденного уравнения.

1. ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ

Введем определение асимптотического степенного ряда. Для этого рассмотрим наиболее известный пример асимптотического ряда, который возникает в задаче вычисления так называемого "экспоненциального интеграла "

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^{x} e^t t^{-1} dt, \; x<0 \tag{1.1}$$

Последовательным интегрированием по частям можно получить [2]:

$$Ei(x) = e^x x^{-1}\left[1 + x^{-1} + 2!x^{-2} + \ldots + m!x^{-m} + R_m(x)\right], \tag{1.2}$$

где

$$R_m(x) = (m+1)!x\int_{-\infty}^{x} e^{t-x} t^{m-2} dt \tag{1.3}$$

для любого неотрицательного m.

Очевидно, этот процесс не приводит к сходящемуся ряду, но тем не менее $R_m(x)$ мало для больших отрицательных x. В самом деле, для x<0 еще одно интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} |R_m(x)| &= \left|\left[(m+1)!xe^{t-x}t^{-m-2}\right]_{-\infty}^{x} + (m+2)!x\int_{-\infty}^{x} e^{t-x}t^{-m-3}dt\right| \le \\ &\le (m+1)!|x|^{-m-1} + (m+2)!|x|\left|\int_{-\infty}^{x} t^{-m-3}dt\right| \le 2(m+1)!|x|^{-m-1}, x<0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ограничение отрицательной действительной осью в данном примере является искусственным, так как функция Ei(x) может быть продолжена как аналитическая функция в комплексную плоскость.

В рассмотренном примере нас интересовала асимптотическая природа функции Ei(x), когда x стремилось к бесконечности предписанным образом.

Дадим общее определение, охватывающее случай, наблюдавшийся в примере.

Определение. Пусть функция f(x) определена на множества точек S комплексной плоскости X, для которого точка x = 0 является предельной точкой. Говорят, что степенной ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

асимптотически представляет функцию f(x) в S при $x \to 0$, если

$$x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m}a_r x^r\right]$$

стремится к нулю для всех $m\ge 0$, когда $x\to 0$ на множестве S.
Формулы (1.2) и (1.4) показывают, что ряды

$$\sum_{r=0}^{\infty} r!\,x^{-r}$$

асимптотически представляют функцию $f(x)=Ei(x)e^{-x}x$ при $x\to\infty$ на отрицательной действительной полуоси.
Выражение "функция g(x) стремится к нулю при $x\to 0$ в S" означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется δ_ε, такое , что $|g(x)|<\varepsilon$ для всех $x\in S$ и $|x|<\delta_\varepsilon$.

Если S является открытым сектором, то, согласно определению, асимптотическое соотношение, справедливо в любом замкнутом подсекторе. Асимптотическая связь, о которой говорится в определении, обычно записывается в виде

$$f(x)\sim\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^r\ ,\ x\in S,\ x\to 0 \qquad (1.5)$$

Если оказывается, что степенной ряд справа сходится к f(x), то соотношение (1.5), разумеется, справедливо, а в качестве S можно взять окрестность точки x=0. Из определения следует, что

$$\lim_{x\to 0}f(x)=a_0,\ x\in S, \qquad (1.6)$$

$$\lim_{x\to 0}x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m-1}a_r x^r\right]=a_m,\ m>0,\ x\in S \qquad (1.7)$$

Соотношение (1.6) является непосредственным следствием определения применительно к m = 0; (1.7) можно доказать методом индукции, заметив что

$$x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m}a_r x^r\right]=x^{-m}\left[f(x)-\sum_{r=0}^{m-1}a_r x^r\right]-a_m, m>0$$

Обратно, если (1.6) и (1.7) справедливы, то ряд (1.5) является для f(x) асимптотическим. Таким образом, эти соотношения можно взять за выше указанное определение асимптотического представления.

Асимптотические ряды обладают рядом элементарных свойств, среди которых можно выделить алгебраические и аналитические свойства.

Асимптотические ряды обладают рядом элементарных свойств, среди которых можно выделить алгебраические и аналитические свойства.

Алгебраические свойства асимптотических рядов могут быть сформулированы следующим образом [2].

Свойство 1. Функция f(x) может иметь самое большее одно степенное асимптотическое представление

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} a_r x^r ,$$

когда $x \to 0$ в заданной области S.

Асимптотическими ряды можно почленно складывать и умножать на константу, т.е. справедливо

Свойство 2. Если $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ где α и β - константы, то из представлений

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r , \; g(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$$

следует представление

$$h(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha a_r + \beta b_r) x^r$$

Свойство 3. Если

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r , g(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$$

в S, то f(x)g(x) асимптотически представляется в S рядом, получаемым формальным почленным перемножением заданных рядов.

Свойство 4. Если

$$f(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r$$

для $x \in S$,

$$g(u) \sim \sum_{s=0}^{\infty} b_s u^s$$

для $u \in T$ и если $f(x) \in T$ для $x \in S$, то

$$g[f(x)] \sim \sum_{t=0}^{\infty} c_t x^t \quad \text{для} \quad x \in S,$$

где коэффициенты c_t определяются, если формально подставить ряд для f(x) в ряд для g(u) и собрать члены при одинаковых степенях X.

Свойство 5. Если

$$h(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

и $a_0 \neq 0$ для $x \in R$, то функция *1/h(x)* определена на той части S множества R, для которой $|x| < x_0$ (x_0 - некоторое положительное число), и

$$1/h(x) \sim \sum_{t=0}^{\infty} c_t x^t, \; x \in S$$

Коэффициенты c_t могут быть последовательно вычислены, если в развернутом выражении для

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r\right)\left(\sum_{t=0}^{\infty} c_t x^t\right)$$

коэффициенты при x^s приравнять единице для s=0 и нулю для $s \neq 0$.

Теперь перейдем к рассмотрению аналитических свойств асимптотических рядов. Область, в которой оказывается справедливыми ниже – следующие теоремы, представляют собой сектор с вершиной $x=0$ (если разложение ведется по степени x). Для удобства предположим, что сектор ограничен дугой окружности. Следующая теорема объясняет, почему при рассмотрении асимптотических рядов аналитических функций естественным образом появляются секторы [2].

Теорема 1.1. Если f(x) голоморфна по всей кольцевой окрестности $0 < |x| \leq x_0$ точки $x=0$ и если

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, x \to 0$$

для всех значений аргумента X, то ряд сходится к f(x) в этой кольцевой окрестности.

Теорема 1.2. Если *f(x)* голоморфна в секторе *S*, то из асимптотического разложения

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \text{ в } S$$

следует асимптотическое разложение

$$\int_0^x f(t)dt \sim \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{r+1} x^{r+1}$$

в предположении, что путь интегрирования (за исключением точки 0) лежит в S.

Теорема 1.3. Если f(x) голоморфна в секторе S, определенном неравенством $0 < |x| \le x_0$, $\theta_1 \le \arg x \le \theta_2$, где $\theta_2 > \theta_1$, и если

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \quad x \in S$$

то

$$f'(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} r a_r x^{r-1}$$

в каждом собственном подсекторе $S^* : \theta_1 < \theta_1^* \le \arg x \le \theta_2^* < \theta_2$.

Теперь рассмотрим вопросы существования асимптотического разложения. Частичный ответ на вопрос о том, какие аналитические функции имеют асимптотическое разложение, следует непосредственно из формулы Тейлора, записанной в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(x) + \ldots \\ &\ldots + \frac{(x-\alpha)^m}{m!} f^{(m)}(\alpha) + \frac{1}{m!} \int_\alpha^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)dt \end{aligned} \tag{1.8}$$

Если сектор S таков, что f(x) в нем голоморфна и существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in s}} f^{(r)}(x), r = 0,1,\ldots,m+1$$

то в (1.8) можно устремить α к нулю. Остаточный член в формуле (1.8) ограничен величиной

$$\sup_{x \in S} f^{(m+1)}(x) \Big| \frac{1}{m!} \int_0^{|x|} |x-t|^m |dt| = \sup_{x \in S} \left| f^{(m+1)}(x) \right| \frac{|x|^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-s)^m ds$$

где t = sx. Этим доказана

Теорема 1.4. Если f(x) голоморфна в секторе S и если существуют пределы

$$f_r = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in S}} f^{(r)}(x),\ r = 0,1,... \tag{1.9}$$

то

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_r}{r!} x^r \tag{1.10}$$

Если пределы (1.9) существуют лишь для конечного числа, скажем для первых m, номеров, то f(x) имеет асимптотическое разложение, содержащее m членов. Например, функция $f(x) = e^x + x^3 \log x$ обладает асимптотическим представлением из двух членов $e^x + x^3 \log x = 1 + x + E(x,2)x^2$, но не обладает полиномиальным асимптотическим представлением с большим числом членов.

Можно поставить вопрос: каким условиям должен удовлетворять расходящийся степенной ряд, чтобы служить асимптотическим представлением некоторой аналитической функции, и как найти эту функцию? Ответ на этот вопрос, как ни удивительно, заключается в том, что не ребуется никаких ограничений: для произвольного степенного ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

и любого сектора S можно построить аналитическую функцию f(x), такую, что

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

Справедлива следующая теорема [2]

Теорема 1.5. Для всякого формального степенного ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

и любого сектора S существует функция f(x), голоморфная в S при $|x| \le x_0$ и такая, что

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \text{ в S.}$$

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с функциями двух переменных, имеющими асимптотическое разложение по одному из этих переменных. С такими разложениями следует обращаться осторожно, так как оказывается, что формально допустимые над ними операции могут привести к неверным результатам.

Функция f(x, y) обладает асимптотическим разложением

$$f(x,y) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r(y)x^r \text{ при } x \to 0 \text{ в S} \tag{1.11}$$

для всех $y \in T$.

Справедлива следующая теорема [2]

Теорема 1.6. Если f(x) голоморфна по обоим переменным в SxT и обладает равномерным асимптотическим разложением вида (1.11), то все $a_r(y)$ голоморфна в T и

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \sim \sum_{r=0}^{\infty} \frac{da_r(y)}{dy} x^r$$

равномерно на любом компактном собственном подмножестве T_1 множества T.

Сформулируем теорему, являющуюся обобщением теоремы 1.5.

Теорема 1.7. Пусть функция $\alpha_r(y), r = 0,1,...,$ голоморфна в T, где T - круг $|y| \le y_0$, и пусть S - произвольный сектор вида $\alpha \le \arg x \le \beta, 0 < |x| < x_0$. Тогда существует функция f(x, y), голоморфная по обеим переменным в SxT и такая, что имеет место равномерное в T асимптотическое представление

$$f(x,y) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r(y)x^r \text{ при } x \to 0 \text{ в S.}$$

2. РЕГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Рассмотрим случай малого коэффициента при производной высшего порядка. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра утверждает, что решение дифференциального уравнения $x'(t)=f(t,x(t),\mu)$ непрерывно зависит от параметра μ, если в рассматриваемой замкнутой области изменения t, x и μ функция f непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по x:

$$|f(t,\bar{x},\mu)-f(t,x,\mu)|\leq N|\bar{x}-x|,$$

где N не зависит от t, x и μ.

В задачах физики и механики условия этой теоремы обычно выполнены, однако случаи разрывной зависимости правой части от параметра встречается в приложениях сравнительно часто.

Рассмотрим уравнение

$$\mu\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{2.1}$$

где μ-малый параметр. Задача заключается в том, чтобы выяснить, можно ли при малых значениях $|\mu|$ пренебречь членом $\mu\frac{dx}{dt}=f(t,x)$, т. е. приближенно заменить решение уравнения $\mu\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ решением так называемого вырожденного уравнения

$$f(t,x)=0 \tag{2.2}$$

Мы не можем здесь воспользоваться теоремой о непрерывной зависимости решения от параметра, так как правая часть уравнения

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\mu}f(t,x) \tag{2.3}$$

разрывна при $\mu=0$

Предположим пока для упрощения, что вырожденное уравнение (2.2) имеет лишь одно решение $x=\varphi(t)$, предположим также для определенности, что $\mu>0$. При стремлении параметра μ к нулю производная $\frac{dx}{dt}$ решений уравнения $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\mu}f(t,x)$ в каждой точке, в которой $f(t,x)\neq 0$, будет неограниченно возрастать по абсолютной величине, имея знак, совпадающий со знаком функции f(t, x). Следовательно, касательные к интегральным кривым во всех x(t, μ) уравнения (2.3) возрастает с возрастанием t, так как $\frac{dx}{dt}>0$, а если f(t, x) < 0, то решение x(t, μ) убывает с возрастанием t, так как $\frac{dx}{dt}<0$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) Знак функции f(t,x) с возрастанием x при фиксированном t меняется при переходе через график решения x=$\varphi(t)$ вырожденного уравнения с + на -.

На рисунке 1. стрелками показано поле направлений касательных к интегральным кривым при достаточно малом μ. Поле направлений устремлено к графику корня вырожденного уравнения.

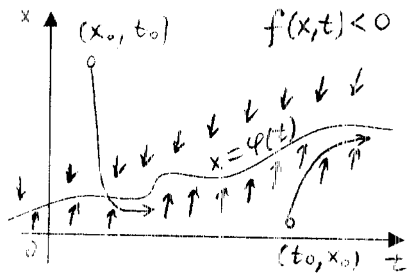

РИСУНОК 1.

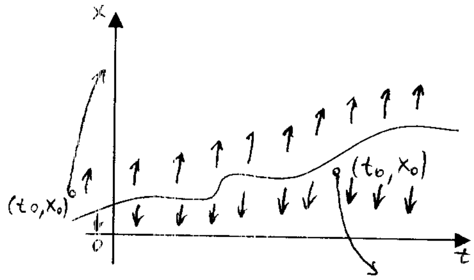

РИСУНОК 2.

Поэтому каковы бы ни были начальные значения $x(t_0)=x_0$, интегральная кривая, определяемая этими начальными значениями, будучи почти параллельной оси Ox, устремляется к графику корня вырожденного уравнения и при возрастании t уже не может покинуть окрестность этого графика. Следовательно, в этом случае при $t \geq t_1 > t_0$ при достаточно малом μ можно приближенно заменять решение $x(t,\mu)$ уравнения (2.1) решением вырожденного уравнения. В рассмотренном случае решение x=$\varphi(t)$ вырожденного уравнения называется устойчивым.

2) Знак функции f(t,x) при переходе через график решения x=$\varphi(t)$ вырожденного уравнения с возрастанием x при фиксированном t изменяется с − на +. На рис.2. изображено поле направлений, касательных к интегральным кривым при достаточно малом μ. В этом случае очевидно, что каковы бы ни были начальные значения $x(t_0)=x_0$, удовлетворяющие лишь условию $f(t_0,x_0)\neq 0$ интегральная кривая, определяемая этими значениями, при достаточно малом μ, имея почти параллельную оси Ox касательную, удаляется от графика решения $x=\varphi(t)$ вырожденного уравнения. В этом случае решение $x=\varphi(t)$ уравнения (2.2) называется неустойчивым. В неустойчивом случае нельзя заменять решение x=x(t,μ) исходного уравнения решением вырожденного уравнения, другими словами, нельзя пренебречь членом $\mu\frac{dx}{dt}$ в уравнении $\mu\frac{dx}{dt}$=f(t,x), как бы мало μ ни было.

3) Знак функции f(t, x) при переходе через график решения вырожденного уравнения не изменяется. На рис.3 изображено поле направлений в случае полуустойчивого решения $x=\varphi(t)$.

В полуустойчивом случае, как правило, тоже нельзя приближенно заменять решение исходного уравнения $x = x(t,\mu)$ решением вырожденного уравнения, так как, во-первых, интегральные кривые, определяемые начальными значениями, лежащими с одной стороны от графика решения $x = \varphi(t)$, удаляются от этого графика, во-вторых, интегральные кривые, приближающиеся к графику решения $x = \varphi(t)$, могут перейти через него на неустойчивую сторону (рис.3) и после этого удалиться от графика решения $x = \varphi(t)$.

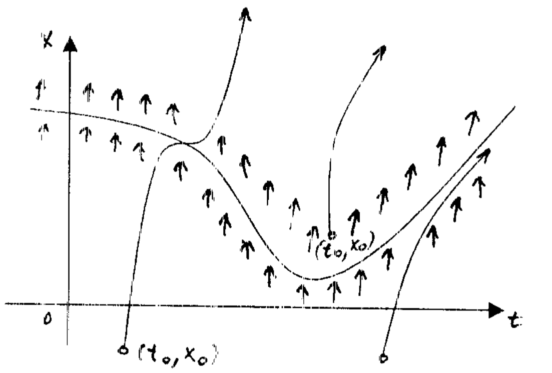

РИСУНОК 3.

Пример2.1. Выяснить стремится ли решение $x = x(t,\mu)$ уравнения $\mu \dfrac{dx}{dt} = x(t,\mu)$, $\mu>0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$ к решению вырожденного уравнения $x - t = 0$ при $t > t_0$ и $\mu \to 0$.

Решение $x = x(t,\mu)$ не стремится к решению вырожденного уравнения x = t, так как решение вырожденного уравнения неустойчиво, потому что $\dfrac{\partial(x-t)}{\partial x} = 1 > 0$.

Пример 2.2. Тот же вопрос для уравнения $\mu \dfrac{dx}{dt} = \sin^2 t - 3e^x$.

Решение вырожденного уравнения $x = 2\ln|\sin t| - \ln 3$ устойчиво, так как $\dfrac{\partial(\sin^2 t - 3e^x)}{\partial x} = -3e^x < 0$. Следовательно, решение исходного уравнения $x = x(t,\mu)$ стремится к решению вырожденного уравнения для $t > t_0$ при $\mu \to 0$.

Если даже интегральная кривая $x = x(t,\mu)$ остается в окрестности графика решения с его устойчивой стороны, то неизбежные в практических задачах возмущения могут перебросить график решения $x = x(t,\mu)$ на неустойчивую сторону графика решения вырожденного уравнения, после чего интегральная кривая $x = x(t,\mu)$ удалится от графика решения $x = \varphi(t)$.

Заметим, что если на графике решения вырожденного уравнения $\dfrac{\partial f}{\partial x} < 0$, то заведомо решение $x = \varphi(t)$ устойчиво; если же $\dfrac{\partial f}{\partial x} > 0$, то решение $x = \varphi(t)$ неустойчиво, так как в первом случае в окрестности кривой $x = \varphi(t)$ функция f убывает с возрастанием x и, следовательно, меняет знак с + на -, а во втором случае возрастает с сторону графика решения вырожденного уравнения, после чего интегральная кривая $x = x(t,\mu)$ удалится от графика решения $x = \varphi(t)$.

Заметим, что если на графике решения вырожденного уравнения $\frac{\partial f}{\partial x}$<0, то заведомо решение $x = \varphi(t)$ устойчиво; если же $\frac{\partial f}{\partial x}$>0, то решение $x = \varphi(t)$ неустойчиво, так как в первом случае в окрестности кривой $x = \varphi(t)$ функция f убывает с возрастанием x и, следовательно, меняет знак с + на -, а во втором случае возрастает с возрастанием x и, значит, при переходе через график решения $x = \varphi(t)$ функция f меняет знак с - на + .

Если вырожденное уравнение имеет несколько решений x=$\varphi_i(t)$, то каждое из них должно быть исследовано на устойчивость.

Вопрос о зависимости решения от малого параметра μ при старшей производной возникает и для уравнений n-го порядка и для систем дифференциальных уравнений. Уравнение n - го порядка может быть сведено к системе уравнений первого порядка, и следовательно, основная задача заключается в исследовании систем уравнений первого порядка с малыми коэффициентами при производных.

Рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), y(0,\mu) = y^0 \tag{2.4}$$

При этом будем считать, что μ изменяется в некоторой окрестности значения μ=0, чего тоже можно добиться соответствующим выбором начала отсчета по оси μ. При соответствующих условиях на правую часть (2.4) решение $y(t,\mu)$ задачи (2.4) существует и является непрерывной функцией от t и μ на множестве $t \in [0,T]$, $|\mu| < c$. Это заключает в себе следующую возможность построения приближенного решения задачи (2.4). Рассмотрим задачу, которая получается из (2.4), если в ней формально положить μ=0:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t,0), y(0) = y^0 \tag{2.5}$$

Задача (2.5) проще исходной задачи (2.4) и ее решение, которое обозначим $\bar{y}(t)$, исследовать проще, а возможно, даже удастся эффективно построить. На некотором сегменте $[0,T]$

$$y(t,\mu) = \bar{y}(t) + \varepsilon(t,\mu), \tag{2.6}$$

где $\varepsilon(t,\mu) \Rightarrow 0 при \mu \to 0$. Таким образом, $\bar{y}(t)$ служит для $y(t,\mu)$ приближенным выражением, а $\varepsilon(t,\mu)$ есть погрешность этого приближения.

Формула (2.6) является простейшим вариантом так называемой асимптотической формулы (асимптотического представления) решения

$y(t,\mu)$ по малому параметру μ. Асимптотическими формулами по малому параметру мы будем называть такие формулы, в которых некоторые члены, называемые остаточными членами, выписываются не точно, а указываются лишь их свойства при $\mu \to 0$, например порядок стремления к нулю при $\mu \to 0$.

В формуле (2.6) $\varepsilon(t,\mu)$ является остаточным членом. Существование производной по μ дает возможность написать

$$y(t,\mu) = \bar{y}(t) + \frac{\partial y}{\partial \mu}(t,\theta,\mu)\mu, 0 \le \theta \le 1 \tag{2.7}$$

и установить тем самым, что $\varepsilon(t,\mu) = O(\mu)$.

Здесь и в дальнейшем подобного рода равенство означает, что $|\varepsilon(t,\mu)| \le C\mu$, где С - некоторая постоянная, не зависящая от μ при достаточно малых μ.

Чем меньше μ, тем лучше $\bar{y}(t)$ приближает $y(t,\mu)$. Однако в реальных задачах μ является малой, но не бесконечно малой величиной. Поэтому асимптотическая формула произвольную степень точности обеспечить не может и это является ее принципиальным недостатком. Тем не менее асимптотические формулы очень удобны в тех случаях, когда требуется получить качественную картину решения.

Для y(t, μ) асимптотическую формулу можно получить с остаточным членом более высокого порядка малости, чем O(μ), если $f(y,t,\mu)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование n+1 непрерывных производных по μ. Сформулируем это в виде отдельной теоремы. [1]

Теорема 2.1. Пусть в некоторой области D переменных y, t, μ функция f(y, t, μ) обладает непрерывными и равномерно ограниченными частными производными по y и μ до порядка n+1 включительно. Тогда существует сегмент [0, T], на котором для решения y(t, μ) задачи (2.4) справедливо асимптотическое представление

$$y(t,\mu) = \bar{y}(t) + \mu\frac{\partial y}{\partial \mu}(t,0) + \ldots + \frac{\mu^n}{n!}\frac{\partial^n y}{\partial \mu^n}(t,0) + \varepsilon_{n+1}(t,\mu). \tag{2.8}$$

где ε_{n+1}(t, μ)=>0 при μ → 0, 0 ≤ t ≤ T, причем $\varepsilon_{n+1}(t,\mu) = O(\mu^{n+1})$.

Замечание 1. Величины $\frac{\partial^k y}{\partial \mu^k}$(t, 0) определяется из уравнения в вариациях.

Представление (2.5) можно получить и иначе. Подставим в (2.4) выражение для y в виде формального ряда

$$y = y_0(t) + \mu y_1(t) + \ldots \tag{2.9}$$

Раскладывая после подстановки величину f(y_0+μy_1+…, t, μ) также формально в степенной ряд, получим

$$\frac{dy_0}{dt}+\mu\frac{dy_1}{dt}+\ldots=$$

$$=f(y_0,t,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y_0,t,0)(\mu y_1+\ldots)+\frac{\partial f}{\partial \mu}(y_0,t,0)\mu+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\left((\mu y_1+\ldots)\frac{\partial}{\partial y}+\mu\frac{\partial}{\partial \mu}\right)^n f(y_0,t,0)+\ldots$$

$$y_0(0)+\mu y_1(0)+\ldots=y.$$

Приравнивая члены с одинаковыми степенями μ, будет иметь

$$\frac{dy_0}{dt}=f(y_0,t,0),\qquad y_0(0)=y^0. \tag{2.10`}$$

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{\partial f}{\partial y}(y_0,t,0)\,y_1+\frac{\partial f}{\partial \mu}(y_0,t,0),\qquad y_1(0)=0. \tag{2.10``}$$

……………………………………………………

Решая последовательно эти задачи, определим члены ряда (2.9). Задача (2.10`) для $y_0(t)$ совпадает с задачей (2.5), и, стало быть, в силу единственности $y_0(t)=\bar{y}(t)$. Задача (2.10") – с задачей для $\frac{\partial y}{\partial \mu}(t,0)$, и, стало быть, $y_1(t)=\frac{\partial y}{\partial \mu}(t,0)$ и т. д.

Замечание 2. Если f(y, t, μ) обладает в D непрерывными и, равномерно ограниченными производными любого порядка, то в (2.8) n является величиной произвольной. Для y(t, μ) тем самым определен ряд Маклорена с общим членом $\mu^n y_n(t)=\mu^n\frac{\partial^n y}{\partial \mu^n}(t,0)$ такой, что разность $\varepsilon_{n+1}(t,\mu)$ между частичной суммой этого ряда и решением y(t, μ) есть $O(\mu^{n+1})$. Такой ряд называется асимптотическим разложением по малому параметру μ для y(t, μ). Подчеркнем, что $\varepsilon_{n+1}(t,\mu)=O(\mu^{n+1})$ при фиксированном n и $\mu\to 0$. Если же μ фиксировано, а $n\to\infty, то\, \varepsilon_{n+1}(t,\mu)$ может предела не иметь, т.е. построенный таким образом ряд сходящимся, вообще говоря, не является.

Замечание 3. Вместо терминов "асимптотическое формула", "асимптотическое представление", "асимптотическое разложение" употребляется краткое название "асимптотика".

Замечание 4. Теорема 2.1 дает математическое обоснование "обычной" для физики и техники операции отбрасывания малых членов в уравнении. Эти малые члены часто называются возмущениями. В связи с этим уравнение (2.5) называется невозмущенным уравнением, уравнение (2.4) - возмущенным уравнением. Теория, имеющая целью обоснование асимптотики по малому параметру μ, часто называется теорией возмущений.

Теорема 2.1 справедлива при условиях достаточной гладкости (или, как говорят, регулярности) правой части (2.1) по у и μ. Возмущения, подчиняющиеся требованием теоремы 2.1, называются регулярными.

Пример 2.3. Получим справедливую на [О; Т] асимптотическую формулу с остаточным членом $O(\mu^2)$ для решения у(t, μ) задачи

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t) + \mu c(t)y^2, y(0) = O,$$

Это уравнение Риккати, решение которого эффективно получить не удается. Функции же $y_0(t)$ и $y_1(1)$ строятся квадратурами, а именно,

$$\frac{dy_0}{dt} = a(t)y_0 + b(t), y_0(0) = O$$

следовательно,

$$y_0(t) = \int_0^t b(\tau)e^{\int_\tau^1 a(\tau)dt} d\tau; \frac{dy_1}{dt} = a(t)y_1 + c(t)y_0^2, y_1(0) = 0,$$

и, следовательно,

$$y_1(t) = \int_0^t c(\tau)y_0^2(\tau)e^{\int_\tau^1 a(t)dt} d\tau y(t,\mu) = y_0(t) + \mu y_2(t) + O(\mu^2)$$

Справедливость асимптотического представления гарантируется на некотором сегменте [О, Т], определяемом свойствами правой части (2.4), одновременно с существованием и единственностью как невозмущенного, так и возмущенного уравнений.

Можно ставить вопрос иначе. Допустим, что решение невозмущенной задачи (2.5) существует, единственно и принадлежит некоторой области G пространства переменных (у, t) при 0 ≤ t ≤ Т. Величину Т в данном случае можно, например, установить непосредственно из явного вида $\bar{y}$(t). Будет ли при достаточно малых μ решение задачи (2.4) также существовать на всем [О; Т] и подчиняться формуле (2.6)? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема [1]

Теорема 2.2. Пусть в области G=$\{0 \le t \le T, |y| \le b, |\mu| \le \bar{\mu}\}$ функция f(y, t, μ) непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(y_1,t,\mu) - f(y_2,t,\mu)| \le N|y_1 - y_2|,$$

где N - одна и та же постоянная для всех μ из отрезка $|\mu| \le \bar{\mu}$. Пусть решение $\bar{y}(t)$ задачи (2.5) существует и единственно на [0, T] и принадлежит $D = \{0 \le t \le T, |y| < b\}$. Тогда при каждом достаточно малом μ решение y(t, μ) задачи (2.4) также существует и единственно на [0, T], и принадлежит D, причем имеет место равномерный относительно t предельной переход

$$\lim_{\mu \to 0} y(t,\mu) = \bar{y}(t). \tag{2.11}$$

Доказательство

Перейдём в (2.4) к новой неизвестной функции $\Delta = y - \bar{y}(t)$, которая является решением начальной задачи, получим

$$\frac{d\Delta}{dt} = [f(\bar{y}+\Delta,t,\mu) - f(\bar{y},t,\mu)] + [f(\bar{y},t,\mu) - (\bar{y},t,0)], \Delta(0) = 0.$$

(2.12)

Рассмотрим следующую область переменных Δ, t:

$$\tilde{D} = \{0 \le t \le T, |\Delta| < C\}, \text{где } C = b - \beta,\ \ \beta = \sup_{[0,T]} |\bar{y}(t)|$$

При $|\Delta| < C$ имеем $|y| < |\bar{y}| + |\Delta| < \beta + C = b$, т.е. при $|\Delta| < C$ аргументы $f(y,t,\mu)$ остаются в области G. Тогда, в силу условия Липшица:

$$|f(\bar{y}+\Delta,t,\mu) - f(\bar{y},t,\mu)| \le N|\Delta|,$$

а в силу непрерывности f(y, t, μ) заключаем, что $f(\bar{y},t,\mu) - f(\bar{y},t,0) \to 0$ при μ → 0 равномерно относительно t, т.е. существует некоторая функция ω(μ), зависящая только от μ и стремящаяся к нулю при μ → 0, такая, что

$$|f(\bar{y},t,\mu) - f(\bar{y},t,0)| < \omega(\mu).$$

Теорема существования и единственности обеспечивает существование и единственность Δ(t, μ) и выполнение неравенства $|\Delta| < C$ на некотором отрезке [0, H]. Принимая H, Δ(H, μ) за новую начальную точку, можно продолжить решение на больший отрезок [0, H_1] (H_1>H) и т. д. Пусть $[0,\bar{H})$ ($\bar{H} \le T$) – максимальный полуинтервал, на котором существует единственное решение Δ(t, μ) задачи (2.12), принадлежащее $\tilde{D}$, а $H_n \to \bar{H}$ - произвольная последовательность. Докажем, что существует $\lim_{n\to\infty} \Delta(H_n,\mu)$.

Так как для любого n на $[0, H_n]$ имеем $|\Delta(t,\mu)| < C$, то

$$\left|\frac{d\Delta}{dt}\right| \le N|\Delta| + \omega(\mu),$$

а тогда,

$$|\Delta| \le \frac{\omega(\mu)}{N}(e^{NH} - 1) = \omega_1(\mu), \tag{2.13}$$

где $\omega_1(\mu)$ обладает теми же свойствами, что и ω(μ). Следовательно,

$$\left|\frac{d\Delta}{dt}\right| \le N\,\omega_1(\mu) + \omega(\mu).$$

На основании этого неравенства доказывается существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta(H_n,\mu)$. Поскольку $|\Delta(H_n,\mu)| \le \omega_1(\mu) < C$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta(H_n,\mu) \le \omega_1(\mu) < C$. Дальнейшие рассуждения приводят к выводу, что $\overline{H} = T$ и Δ(t, μ) существует и единственно на отрезке [0, T]. Из неравенства (2.13) следует равномерное стремление Δ(t, μ) к нулю при μ → 0, т.е. следует (2.11). Теорема доказана.

3. СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

В приложениях нередко встречаются случаи, когда малый параметр μ входит в уравнение таким образом, что теория предыдущего параграфа неприменима. Рассмотрим в качестве простейшего примера движение маятника,

$$\mu y'' + \alpha y' + ky = f(t), \tag{3.1}$$

где $l = \mu$ является малым параметром. В случае, разобранном в предыдущем параграфе, в целях получения приближенного выражения для решения можно было в уравнение формально положить $\mu = 0$ и взять решение полученного таким образом упрощенного уравнения. Можно ли поступить так же в случае (3.1)?

Движение маятника в (3.1) определяется заданием начального положения и скорости $y(0) = y_0^0$, $y'(0) = y_1^0$. Полагая в (3.1) $\mu = 0$, мы получим уравнение более низкого (первого) порядка, решение которого определяется только заданием $y(0)$. Тем самым заранее ясно, что, поступая так, мы не можем учесть все факторы, определяющие решение (3.1), и по крайней мере в окрестности начальной точки правильной модели не получим.

Таким образом, выводы предыдущего параграфа в данном случае несправедливы и, стало быть, условия теорем предыдущего параграфа нарушены. Чтобы понять, какие условия нарушены, запишем (3.1) в форме (2.4) (уравнение уже будет векторным, но это не принципиально):

$$z' = \frac{-\alpha z - ky + f(t)}{\mu} = f_1(z, y, t, \mu),$$
$$y' = z = f_2(z, y, t, \mu).$$

Отсюда видно, что f_1 не является непрерывной функцией μ при $\mu = 0$, т.е. не выполнено основное требование теории предыдущего параграфа – требование непрерывности правых частей. Другими словами, можно сказать, что в данном случае правая часть зависит от μ нерегулярным, или сингулярным, образом. Поэтому возмущения типа $\mu y''$, т.е. когда малый параметр входит как множитель при старшей производной, получили в литературе название сингулярных возмущений.

Простейшие примеры показывают, что сингулярно возмущенные системы обладают рядом свойств, коренным образом отличающих их от регулярно возмущенных систем.

Рассмотрим уравнение

$$\mu y' = ay + b; \quad a = \text{const}, \ b = \text{const}, \tag{3.2}$$

при начальном условии $y(0, \mu) = y^0$. Его точное решение имеет вид

$$y(t,\mu) = (y^0 + \frac{b}{a})e^{at/\mu} - \frac{b}{a}. \qquad (3.3)$$

Полагая в уравнении (3.2) $\mu = 0$, получим $\bar{y} = - b/a$. Анализируя (3.3), можно видеть, что близость y к $\bar{y}$ имеет место лишь при выполнении некоторых специальных условий, а именно, если рассматривать решение начальной задачи вправо от $t = 0$, то $y \to \bar{y}$, если $a < 0$, а $\mu \to +0$ (или $a > 0$, а $\mu \to -0$). Если же $\mu \to 0$ произвольным образом, то ни при $a < 0$, ни при $a > 0$ решение у предела не имеет и является неограниченным. Кроме того, если даже выполнены условия $a < 0$, $\mu \to +0$ (или $a > 0$, $\mu \to -0$), предельный переход $y \to \bar{y}$ имеет место для t, строго больших нуля, так как при $t = 0$ $y(0, \mu) = y^o$, а y^o, вообще говоря, не равно $- b/a$.

Все эти факторы говорят о том, что в сингулярно возмущенных системах пренебрегать малыми членами можно лишь при выполнении особых условий.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида.

$$\mu\frac{dz}{dt} = F(z,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z,y,t), \qquad (3.4)$$

где $\mu > 0$ является малым параметром. Поставим начальную задачу

$$z(0,\mu) = z^0; \quad y(0,\mu) = y^0 \qquad (3.5)$$

Начальная задача для уравнения (3.1), очевидно, содержится здесь как частный случай.

1. Правые части (3.4) будем предполагать непрерывными вместе с частными производными по z и y в некоторой области

$$H = \{(y,t) \in \bar{D} = \{0 \le t \le T, \quad |y| \le b \}, \quad |z| \langle d\}$$

Полагая в (3.4) формально $\mu = 0$, получим невозмущенную систему уравнений, или, как ее называют в теории сингулярных возмущений, вырожденную систему, так как ее порядок ниже, чем порядок системы (3.4)

$$0 = F(z,y,t), \frac{dy}{dt} = f(z,y,t). \qquad (3.6)$$

Чтобы определить решение этой системы, надо, прежде всего, разрешить первое из уравнений (3.6), которое является конечным (не дифференциальным), относительно z. Это уравнение нелинейное и поэтому может иметь несколько решений. Мы будем предполагать, что все решения (корни) $z = \varphi\ (y,\ t)$ этого уравнения действительны и изолированы в $\bar{D}$. Надо выбрать один из корней $z = \varphi\ (y,\ t)$ и подставить его во второе уравнение (3.6). Вопрос заключается в том, какой из корней следует выбрать, чтобы обеспечить близость конструируемого нами решения системы (3.6) к решению $z\ (t,\ \mu),\ y\ (t,\ \mu)$ задачи (3.4), (3.5). Правило выбора корня $\varphi\ (y,\ t)$ будет сформировано ниже. После подстановки $z = \varphi\ (y,\ t)$ во второе уравнение (3.6) получится дифференциальное уравнение относительно y и для однозначного определения y потребуется задать начальное условие. Естественно предположить, что из двух начальных условий (3.5) следует оставить лишь одно: условие на y. Итак, мы приходим к задаче

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\varphi(\bar{y},\ t), \bar{y},\ t), \bar{y}\ (0) = y^0 \qquad (3.7)$$

где $\varphi(y,t)$ - один из корней уравнения $F(z,y,t) = 0$

2. Будем предполагать, что функция $\varphi\ (y,\ t)$ непрерывна вместе с производной по у, когда $(y,\ t) \in \bar{D}$.

Определение. Корень $z = \varphi\ (y,\ t)$ будем называть устойчивым в области D, если при $(y,\ t) \in D$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y,t), y, t) \langle 0 \qquad (3.8)$$

3. Будем предполагать, что в (3.7) $\varphi\ (y,\ t)$ является устойчивым корнем.

4. Будем предполагать, что решение $\bar{y}\ (t)$ задачи (3.7) определено на сегменте $0 \le t \le T$ и принадлежит $D = (0 \le\ t \le T,\ /y/ < b)$.

Прежде чем производить дальнейшее исследование задачи, рассмотрим один частный случай, а именно

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z), z(0,\mu) = z^0 \qquad (3.9)$$

Этот случай, во-первых, интересен своей геометрической наглядностью, а во-вторых соответствующие результаты пригодятся при рассмотрении общего случая (3.4).

Пусть $z = \varphi$ является устойчивым корнем уравнения $F\ (z) = 0$. φ в данном случае является константой, а D – любым интервалом вещественной оси. Условие устойчивости (3.8) имеет вид $\frac{dF}{dz}(\varphi)\langle 0$. Пусть кроме φ уравнение $F\ (z) = 0$ имеет еще корни $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots$, причем φ_2 и φ_1 – два ближайших к φ корня соответственно сверху и снизу. Проследим за полем направлений уравнения (3.9). При достаточно малом μ векторы, касательные к интегральным кривым, расположены почти параллельно оси z (за исключением малой окрестности корней уравнения $F(z) = 0$). «+» и «-» на рисунке указывают знак функции $F(z)$. Заметим, что, поскольку $\frac{dF}{dz}(\varphi) \neq 0$, корень φ является простым и при $z = \varphi$ происходит смена знака функции $F(z)$.

Пусть $\varphi_1 < z^0 < \varphi_2$. Рассмотрим множество точек $|z-\varphi| \leq \varepsilon$, где ε произвольно мало (ε-окрестность корня φ). Характер поля направлений сразу дает возможность заключить, что интегральная кривая, начинающаяся в точке $(0, z^0)$ ($z^0 < \varphi$ и $z^0 > \varphi$) будет резко идти вверх (*при* $z^o < \varphi$) или, наоборот, вниз (*при* $z^o > \varphi$) и достигнув ε-окрестности φ, далее из нее уже не выйдет, если только μ достаточно мало. Это и означает, что решение $z(t, \mu)$ задачи (3.9) при $\mu \to 0$ близко к решению φ вырожденного уравнения $F(z) = 0$, если не считать некоторой окрестности $t = 0$.

Из этого геометрического рассмотрения ясно также, насколько важно, чтобы начальное значение z^o лежало в области $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, называемой областью влияния (или областью притяжения) корня φ. Если, например, $z^o < \varphi_1$ и $F < 0$ при $z < \varphi_1$, то интегральная кривая уйдет вниз от φ_1 и тем самым не может приблизиться к φ, а если $z^o < \varphi_1$ и $F > 0$, то кривая приблизится к φ_1 т.е. опять-таки не к φ.

Результат полученный нами из геометрических соображений, можно сформулировать в виде следующей теоремы. [1]

Теорема. 3.1. Если φ – устойчивый корень уравнения $F(z) = 0$, а начальное значение z^o лежит в его области влияния, то решение $z(t, \mu)$ задачи (3.9) существует на сегменте $[0,T]$ и для него имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\mu \to 0} z(t, \mu) = \varphi \quad при \quad 0 < t \leq T \tag{3.10}$$

Доказательство

Приведем аналитическое доказательство утверждения (3.10). Пусть для определенности $z^0 < \varphi$. Рассмотрим прежде всего область $z^0 \leq z \leq \varphi - \varepsilon$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. В этой области рассмотрим задачу (3.9), беря z в качестве независимого переменного: $\frac{dt}{dz} = \mu \frac{1}{F(z)}, t(z^0) = 0$. Если μ достаточно мало, то, как следует из теоремы 2.2, на сегменте $[z^0, \varphi - \varepsilon]$ существует единственное решение $t(z)$ этой задачи и оно сколь угодно близко к вертикали $t=0$ (в смысле расстояния вдоль оси t). Кроме того, оно положительно в силу положительности $F(z)$. Таким образом, интегральная кривая, начинающаяся в точке $(0, z^0)$, входит в ε–окрестность $z = \varphi$ при $t = t_0$, *где* $t_0 = \omega(\mu) < \varepsilon$.

Нетрудно убедится, что, попав в ε-окрестность $z = \varphi$, интегральная кривая из нее уже не выйдет, пока $t_0 \leq t \leq T$. Введем функцию $V(z) = (z - \varphi)^2$.

Предположим, что интегральная кривая при $t = t_1 > t_0$ выходит из $\varepsilon-$ окрестности прямой $z=\varphi$. Тогда имеем $\frac{dV}{dt}|t=t_1 \geq 0$. Но с другой стороны,

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_1} = 2\left[z(t_1,\mu)-\varphi\right]\frac{F(z(t_1,\mu))}{\mu}\langle 0$$

в силу свойства $F(z)^{>}_{<}0$ при $z^{>}_{<}\varphi$, обеспеченного условием устойчивости $\frac{dF}{dz}(\varphi)<0$. Противоречие приводит к выводу, что интегральная кривая останется в ε-окрестности $z=\varphi$. Так как она попадает в эту окрестность пр $t=t_0<\varepsilon$, то в силу произвольной малости ε это фактически означает справедливость (3.10)

Утверждение (3.10) можно записать также в следующем удобном для дальнейшего форме. Введем независимое переменное $\tau=t/\mu$. Тогда (3.9) примет вид

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z) \qquad z(0)=z^0 \tag{3.11}$$

Утверждение (3.10) означает что $\lim\limits_{\tau\to\infty} z(\tau)=\varphi$, или, иначе, для любого ε существует $\tau_0(\varepsilon)$ такое, что при $\tau\geq\tau_0$ справедливо неравенство

$$\left|z(\tau)-\varphi\right|\langle\varepsilon \tag{3.12}$$

Замечание 1. Как видно из проведенных рассуждений, предельный переход (3.10) не является равномерным относительно $t\in$ *(0,T]* что хорошо иллюстрируется рис.4.

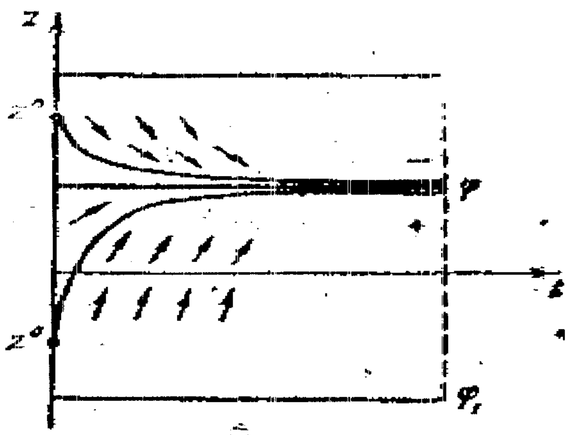

РИСУНОК 4.

Замечание 2. Термин «устойчивый корень» не является случайным. Нетрудно проследить связь проделанных построений с теорией устойчивости. Действительно, $z=\varphi$ является точным решением уравнения (3.11) причем в силу $\frac{\partial F}{dz}(\varphi)\langle 0$ это решение асимптотически устойчиво по Ляпунову. Чтобы убедится в этом, достаточно сделать замену переменных z=z-φ и взяв в качестве функции Ляпунова $V=x^2$. То, что интегральная кривая $z=z(\tau)$ остается в ε-окрестности прямой $z=\varphi$ обеспечено устойчивостью решения $z=\varphi$ уравнения $\frac{dz}{d\tau}=F(z)$.

Сопоставим задаче (3.4) (3.5) задачу

$$\mu\frac{dz_0}{dt}=F(z_0,y^0,0),\qquad z_0(0)=z^0 \tag{3.13}$$

Эта задача является исследованной уже задачей типа (3.9). $z_0=\varphi(y^0,0)$ является устойчивым корнем уравнения $F(z_0,y^0,0)=0$.

5. Будем предполагать, что начальное значение z^0 принадлежит области влияния корня $\varphi(y,0)$ уравнения $F(z^0,y^0,0)=0$.

4. ТЕОРЕМА ТИХОНОВА

Теорема 4.1. (Теорема Тихонова). Пусть выполнены следующие условия:

1) правые части дифференциального уравнения $\mu\dfrac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \dfrac{dy}{dt}=f(z,y,t)$, будем предполагать непрерывными вместе с частными производными по z и y в некоторой области

$$H=\{(y,t)\in \overline{D}=\{0\le t\le T,\quad |y|\le b\ \},\quad |z|\langle d\};$$

2) будем предполагать, что функция φ $(y,\ t)$ непрерывна вместе с производной по y, когда $(y,\ t)\in D$;

3) будем предполагать, что в задаче $\dfrac{d\overline{y}}{dt}=f(\varphi(\overline{y},\ t),\overline{y},\ t),\overline{y}\ (0)=y^0$ φ $(y,\ t)$ является устойчивым корнем;

4) будем предполагать, что решение $\overline{y}$ (t) задачи $\dfrac{d\overline{y}}{dt}=f(\varphi(\overline{y},\ t),\overline{y},\ t),\overline{y}\ (0)=y^0$ определено на сегменте $0\le t\le T$ и принадлежит $D=(0\le t\le T,\ /y/<b)$;

5) будем предполагать, что начальное значение z^0 принадлежит области влияния корня $\varphi(y,0)$ уравнения $F(z^0,y^0,0)=0$.

Тогда решение $z(t,\ \ \mu),\ \ y(t,\ \ \mu)$ задачи $\mu\dfrac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \dfrac{dy}{dt}=f(z,y,t)$, $z(0,\mu)=z^0;\ \ y(0,\mu)=y^0$ существует на $[0,T]$ и имеет место предельный переход

$$\lim_{\mu\to 0}y(t_1\mu)=\overline{y}\ (t)\qquad при\quad 0\le t\le T \tag{4.1}$$

$$\lim_{\mu\to 0}z(t,\mu)=\varphi(\overline{y}(t),t)\equiv\overline{z}(t)\quad при\quad 0< t\le T \tag{4.2}$$

где $\overline{y}\ (t)$ – решение вырожденной задачи $\mu\dfrac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \dfrac{dy}{dt}=f(z,y,t)$.

Доказательство

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1) Рассмотрим сначала окрестность точки $t=0$. Сделаем в (3.4) замену переменных $\tau=t/\mu$. Получим

$$\begin{aligned}&\frac{dz}{d\tau}=F(z,y,\tau\mu),\qquad z\big|_{\tau=0}=z^0\\&\frac{dy}{d\tau}=\mu f(z,y,\tau\mu),\qquad y\big|_{\tau=0}=y^0\end{aligned} \tag{4.3}$$

На любом конечном промежутке изменения τ эту систему можно рассматривать как регулярно возмущенную, причем соответствующая невозмущенная система имеет вид

$$\frac{dz_0}{d\tau} = F(z_0, y_0, 0) \qquad z_0\Big|_{\tau=0} = z^0$$
$$\frac{dy}{d\tau} = 0, \qquad\qquad y_0\Big|_{\tau=0} = y^0 \tag{4.4}$$

Отсюда $y_0(\tau) \equiv y^0$, а

$$\frac{dz_0}{d\tau} = F(z_0, y_0, 0) \qquad z_0\Big|_{\tau=0} = z^0 \tag{4.5}$$

Эта задача равносильна задаче (3.13) и является задачей типа (3.11). Поэтому согласно теореме 3.1 получим, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\tau_0(\varepsilon)$, при котором справедливо неравенство:

$$\left|z_0(\tau_0) - \varphi(y^0, 0)\right| \langle \varepsilon/3 \tag{4.6}$$

Сравним задачи (4.3) и (4.4). Из первого условия следует выполнение условий теоремы 2.2 о регулярном возмущении для $\tau \leq \bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ как угодно велико и фиксировано. Решение невозмущенной задачи (4.4) определено при всех τ и, в частности на $[0, \tau_0]$. Поэтому согласно теореме 2.2 (вместе с замечанием 2) получим, что для любого $\varepsilon>0$ при достаточно малых μ на $0 \leq \tau \leq \tau_0$ (или на $0 \leq t \leq \tau_0 \mu$) существует решение задачи (4.3) (или, что то же самое решение $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ задачи (3.4) и (3.5)) и справедливы неравенства

$$\left|z(t,\mu) - z_0(\tau)\right| \langle \varepsilon/3 \ , \qquad \left|y(t,\mu) - y^0\right| \langle \varepsilon/3 \tag{4.7}$$

Принимая во внимание непрерывность $\varphi(y,t)$, можно, обеспечив достаточную малость $\left|y(t,\mu) - y^0\right|$, обеспечить также неравенство

$$\left|\varphi(y(t,\mu),t) - \varphi(y^0, 0)\right| \langle \varepsilon/3 \qquad при \qquad 0 \leq t \leq \tau_0 \mu \tag{4.8}$$

Из (4.6)-(4.8) получим, что при $t = \tau_0 \mu = t_0(\mu)$

$$\left|z(t,\mu) - \varphi(y(t,\mu),t)\right| \langle \varepsilon \tag{4.9}$$

2) Обозначим $\Delta(t,\mu) = z(t,\mu) - \varphi(y(t,\mu),t)$, Соотношение (4.9) говорит о том, что $\Delta(t,\mu)$ как угодно мало при $t = t_0(\mu)$. Неравенство (4.9) будет оставаться

выполненным в некоторой окрестности справа от точки t_0. Величина этой окрестности заранее не известна. Может случиться, что неравенство (4.9) выполнено для всех $t \geq t_0$ вплоть до $t=T$, а может оказаться, что найдется значение $t_1 \leq T$, при котором (4.9) перейдет в равенство. Убедимся, что в первом случае при всех $t \in [t_0, T]$, а во втором при всех $t \in [t_0, t_1]$ величина $y(t, \mu)$ как угодно близка к $\bar{y}(t)$. Для этого перепишем второе уравнение (3.4) в виде

$$\frac{dy}{dt} = f(\varphi(y,t) + \Delta(t,\mu), y, t), \qquad y\big|_{t=t_0(\mu)} = y^0 + \delta(\mu) \tag{4.10}$$

и сравним эту задачу с задачей (3.7). Величины $t_0(\mu)$, $|\delta(\mu)|$ как угодно малы при достаточно малом μ и $t \in [t_0, T]$ или $t \in [t_0, t_1]$. Задача (4.10) является регулярно возмущенной задачей по отношению к задаче (3.7). Поэтому при $t \in [t_0, T]$ или $t \in [t_0, t_1]$ $y(t, \mu)$ существует, принадлежит D и, кроме того, для любого $\varepsilon_1 > 0$ справедливо неравенство $|y(t,\mu) - \bar{y}(t)| < \varepsilon_1$, при $t \in [t_0, T]$ или $t \in [t_0, t_1]$, если только μ достаточно мало

3) Убедимся теперь, что неравенство (4.9) выполнено для всех $t \in [t_0, T]$, т.е. из двух возможностей, указанных в 2), реализуется только одна, а предположение о существовании точки $t_1 \leq T$, для которой $|\Delta(t,\mu)| = \varepsilon$, приводит к противоречию.

Пусть при $t_1 \leq T$ достигается равенство $|\Delta(t,\mu)| = \varepsilon$. Введем в рассмотрение функцию

$$V(z,y,t) = [z - \varphi(y,t)]^2$$

В силу предположения о точке t_1 имеем $\frac{dV}{dt}\Big|_{t=t_1} \geq 0$, но

$$\frac{dV}{dt} = 2[z - \varphi(y,t)]\left\{\frac{F(z,y,t)}{\mu} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} f(z,y,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}.$$

Так как $F(z,y,t)\big|_{t=t_1} \neq 0$, то знак $\{\bullet\}$ при достаточно малых μ определяется знаком $F(z,y,t)$, а следовательно, в силу малости Δ-знаком

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y,t), y, t)[z - \varphi(y,t)]$$

Тем самым знак всего выражения $\frac{dV}{dt}$ определяется знаком $\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y,t), y, t)$.

Так как согласно полученному в предыдущем пункте y(t, μ) принадлежит D, то согласно 3 условию и (3.8)

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y(t_1,\mu), t_1), y(t_1,\mu), t_1) < 0$$

и, следовательно,

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{t=t_1} < 0$$

Противоречие приводит к выводу, что $|\Delta(t,\mu)| < \varepsilon$ при $t_0 \le t \le T$ и следовательно, $|y(t,\mu) - \bar{y}(t)| < \varepsilon_1$ при $t_0 \le t \le T$. Учитывая оба эти неравенства, а так же то, что $|y(t,\mu) - y^0| < \varepsilon/3$ при $0 \le t \le t_0$ и $|\bar{y}(t) - y^0| < \varepsilon_1$ при $0 \le t \le t_0$ получим утверждение теоремы 4.1.

Замечания. 1. Из доказательства видно, что предельный переход (4.1) является равномерным на $[0, T]$, а предельный переход (4.2), справедливый на (0, T], равномерным не является. В окрестности $t = 0$ имеется область, в которой z-компонента решения задачи (3.4), (3.5) сильно отличается от z-компоненты решения вырожденной задачи, т.е. от $\varphi\ (\bar{y}(t),\ t)$. Эта область хорошо заметная на рис. 4 для случая системы (3.11), называется пограничным слоем.

Заметим также (это опять видно из самого доказательства), что на отрезке $[t_0\ (\mu),\ T]$ (тем более на любом отрезке $[t_0,\ T]$, где t_0 как угодно мало, но фиксировано при $\mu \to 0$) оба предельных перехода (4.1) и (4.2) носят равномерный характер.

Замечание 2. Из доказательства теоремы видно, что отрицательность $\frac{\partial F}{\partial z}$, нужна фактически лишь на вырожденном решении, т.е. достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(\bar{y}(t),t),\bar{y}(t),t) < 0$$

Замечание 3. Теорема Тихонова распространяется на векторный случай. Некоторые дополнительные трудности возникают при этом с определением понятия области влияния. Что касается условия устойчивости, то оно может быть сформулировано как естественное требование, чтобы характеристические числа λ (t) матрицы $\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(\bar{y},t),\bar{y},t)$ удовлетворяли неравенству $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

Рассмотрим теперь асимптотическое разложение решения задачи (3.4), (3.5). На основании теоремы Тихонова можно написать следующее асимптотическое представление для решения задачи (3.4), (3.5):

$$y(t,\mu) = \bar{y}(t) + \varepsilon_1(t,\mu), \qquad z(t,\mu) = \bar{z}(t) + \varepsilon_2(t,\mu)$$
$$(\bar{z}(t) = \varphi(\bar{y}(t),t))$$

При этом остаточный член ε_3 (t, μ) в выражении для z (t, μ) не является равномерно малой величиной. Естественно предположить, что если к $\bar{z}(t)$ добавить разность $z_0(\tau)-\varphi(y^0,0)$, то получится формула $z(t,\mu)=\bar{z}(t)+z_0(\tau)-\varphi(y^0,0)-\varepsilon_3(t,\mu)$, где $\varepsilon_3(t,\mu)\Rightarrow 0$ на [0, T]. Убедимся что это действительно так. Величина $\varepsilon_3(t,\mu)=z(t,\mu)=\bar{z}(t)+z_0(\tau)+\varphi(y^0,0)$. Разобьем отрезок [0, T] на два участка $[0,t_0(\mu)]$ и $[t_0(\mu),T]$, где $t_0(\mu)=\tau_0\mu$ – величина, введенная при доказательстве теоремы Тихонова, τ_0 достаточно велико и фиксировано при $\mu\to 0$. На $[0,t_0(\mu)]$ представим ε_3 в виде

$$\varepsilon_3(t,\mu)=[z(t,\mu)-z_0(\tau)]-[\bar{z}(t)-\varphi(y^0,0)]$$

Здесь $|z(t,\mu)-z_0(\tau)|<\varepsilon/2$ при $\mu\to 0$ (это то же самое что (4.7)), а

$$|\bar{z}(t)-\varphi(y^0,0)|=|\bar{z}(t),-\bar{z}(0)|<\varepsilon/2$$

так как $t_0(\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$. Следовательно, на $[0,t_0(\mu)]$имеем $|\varepsilon_3|<\varepsilon$ равномерно относительно t при $\mu\to 0$. На $[t_0(\mu),T]$ представим ε_3в виде

$$\varepsilon_3(t,\mu)=[z(t,\mu)-\bar{z}(t)]-[z_0(\tau)-\varphi(y^0,0)]$$

Здесь $|z(t,\mu)-\bar{z}(t)|<\varepsilon/2$. И точно так же $|z_0(\tau)-\varphi(y^0,0)|<\varepsilon/2$, поскольку это тоже неравенство, но для частного случая (3.13), т.е. и на $[t_0(\mu),T]$ имеем $|\varepsilon_3|<\varepsilon$ равномерно относительно t при $\mu\to 0$. Таким образом, $\varepsilon_3(t,\mu)\Rightarrow 0$ при $\mu\to 0$ на [0, T].

Заметим, что разность $z_0(\tau)-\varphi(y^0,0)$ осуществляет поправку на «потерю» начального условия $z(0,\mu)=z^0$, которому не может удовлетворить $\bar{z}(t)$. Выражение $\bar{z}(t)+z_0(\tau)-\varphi(y^0,0)$ уже будет удовлетворять начальному условию при t = 0.

При достаточной гладкости правых частей (3.4) можно построить асимптотическое представление для решения задачи (3.4), (3.5) с остаточным членом $O(\mu^{n+1})$, но в отличие от регулярного случая (см. теорему 2.1), это представление будет, помимо степенных по μ (или регулярных) членов, содержать некоторые функции (так называемые пограничные члены), зависящие от μ не степенным образом; пограничные члены имеют заметную величину в окрестности t = 0, а далее с ростом t быстро убывают. Введенная выше разность $z_0(\tau)-\varphi(y^0,0)$ представляет собой пограничный член в асимптотической формуле с остаточным членом 0(μ).

После этих предварительных замечаний перейдем непосредственно к описанию общего алгоритма построения асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи (3.4), (3.5).

Представим z и y в виде суммы двух формальных рядов (здесь и в дальнейшем под x будем понимать z и y в совокупности, т. е. если выписывается некоторое соотношение для x, то это значит, что имеют место два в точности таких же соотношения для z и y)

$$x = \bar{x}(t, \mu) + \Pi x(\tau, \mu), \tag{4.11}$$

где

$$\bar{x}(t, \mu) = \bar{x}_0(t) + \mu \bar{x}_1(t) + \ldots \tag{4.12}$$

— так называемый регулярный ряд, т. е. ряд по степеням μ с коэффициентами, зависящими от t, а

$$\Pi x(\tau, \mu) = \Pi_0 x(\tau) + \mu \Pi_1 x(\tau) + \ldots \tag{4.13}$$

— так называемый пограничный ряд, представляющий собой также ряд по степеням μ, но с коэффициентами, зависящими от τ. Члены этого ряда называются пограничными членами.

Подставим (4.11) в (3.4), умножив для симметрии второе уравнение на μ:

$$\begin{aligned}
&\mu \frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d}{d\tau} \Pi z = F\left(\bar{z} + \Pi z, \bar{y} + \Pi y, t\right), \\
&\mu \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{d\tau} \Pi y = \mu f\left(\bar{z} + \Pi z, \bar{y} + \Pi y, t\right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Введем величины $\bar{F}$ и ΠF, полагая

$$\begin{aligned}
&\bar{F} = F\left(\bar{z}(t, \mu), \bar{y}(t, \mu), t\right), \\
&\Pi F = F\left(\bar{z}(\tau\mu, \mu) + \Pi z(\tau, \mu), \bar{y}(\tau\mu, \mu) + \Pi y(\tau, \mu), \tau\mu\right) - \\
&- F\left(\bar{z}(\tau\mu, \mu), \bar{y}(\tau\mu, \mu), \tau\mu\right)
\end{aligned}$$

(аналогичные величины $\bar{f}$ и Πf введем для f). Тогда (4.14) запишется в виде

$$\mu \frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d}{d\tau} \Pi z = \bar{F} + \Pi F, \mu \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{d\tau} \Pi y = \mu(\bar{f} + \Pi f) \tag{4.15}$$

Разложим теперь $\bar{F}$ и ΠF формально по степеням μ (коэффициенты этих разложений будут зависеть от t и τ соответственно): $\bar{F} = \bar{F}_0 + \mu \bar{F}_1 + \ldots$, $\Pi F = \Pi_0 F + \mu \Pi_1 F + \ldots$, после чего в (4.15) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ, причем отдельно зависящие от t и отдельно зависящие от τ:

$$\frac{d}{dt}\bar{z}_{k-1} = \bar{F}_k \qquad \frac{d}{dt}\bar{y}_k = \bar{f}_k \tag{4.16}$$

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_k z = \Pi_k F \qquad \frac{d}{d\tau}\Pi_k y = \Pi_{k-1} f \tag{4.17}$$

Тем самым мы получили уравнения для определения членов разложений (4.12) и (4.13).

Выпишем эти уравнения более детально для $k=0$. Имеем

$$0 = \bar{F}_0 = F(\bar{z}_0, \bar{y}_0, t), \frac{d\bar{y}_0}{dt} = f(\bar{z}_0, \bar{y}_0, t) \tag{4.18}$$

Эта система совпадает, как и следовало ожидать, с вырожденной системой (3.6). Имеем также (учитывая первое из уравнений (4.18)):

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_0 z = \Pi_0 F = F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0) - F(\bar{z}_0(0), \bar{y}_0(0), 0) =$$
$$= F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0), \frac{d}{d\tau}\Pi_0 y = 0 \tag{4.19}$$

Начиная с $k = 1$, уравнения (4.16) и (4.17) будут линейными относительно $\bar{z}_k, \bar{y}_k$ и $\Pi_k z, \Pi_k y$. Обратим внимание на то, что система (4.7) не содержит производную от $\bar{z}_k$, а только производную от $\bar{y}_k$, а система (4.17) имеет ту особенность, что второе уравнение в ней отделяется, так как его правая часть содержит члены только предыдущих номеров.

Для того чтобы из полученных уравнений (4.16) и (4.17) определить, члены разложений (4.12), (4.13), нужно задать начальные условия. Для этого подставим (4.11) в (3.5):

$$\bar{x}_0(0) + \mu\bar{x}_1(0) + \ldots + \Pi_0 x(0) + \mu\Pi_1 x(0) + \ldots = x^0 \tag{4.20}$$

приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ в обеих частях этих равенств. Приравнивание коэффициентов при нулевой степени μ дает

$$\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(0) = z^0 \qquad \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(0) = y^0 \tag{4.21}$$

Рассмотрим второе из этих равенств. Без каких-либо дополнительных соображений из него нельзя определить $\bar{y}_0(0)$ и $\Pi_0 y(0)$. Однако, на пограничные члены, которые призваны играть роль поправок в окрестности $t = 0$, а при $t > 0$ стремиться к нулю вместе с μ, следует наложить дополнительное условие $\Pi_0 x \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Отсюда приходим к выводу, что $\Pi_0 y(0)=0$, так как иначе (см. (4.19)) $\Pi_0 y(\tau)=\Pi_0 y(0)=const \to 0$. А тогда из (4.21)

$$\bar{y}_0(0)=y^0 \tag{4.22}$$

При этом условии решаем систему (4.18) и получаем, что $\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t)$ совпадают с решением $\bar{z}(t), \bar{y}(t)$, которые уже встречались в теореме 4.1. Из (4.18) получим $\bar{z}_0(0)=\varphi(\bar{y}(0),0)=\varphi(y^0,0)$, а тогда первое из равенств (4.21) дает начальное условие для $\Pi_0 z$.

Итак, начальные условия для системы (4.19) имеют вид

$$\Pi_0 y(0)=0, \qquad \Pi_0 z(0)=z^0-\bar{z}_0(0)=z^0-\varphi(y^0,0) \tag{4.23}$$

Поэтому $\Pi_0 y(\tau)=0$, а $\Pi_0 z(\tau)$ является решением следующей начальной задачи:

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\Pi_0 z=F(\varphi(y^0,0)+\Pi_0 z, y_0(0)),\\ \Pi_0 z(0)=z^0-\varphi(y^0,0)\end{gathered} \tag{4.24}$$

Сравнивая задачу (4.24) с задачей (4.5), нетрудно установить, что $\Pi_0 z=z_0(\tau)-\varphi(y^0,0)$. Об этой разности уже шла речь выше перед началом описания общего алгоритма. Полученное выше неравенство (4.6) означает, что $\Pi_0 z(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$.

Итак, нулевые члены разложений (4.12), (4.13) полностью определены.

Приравнивая в (4.20) коэффициенты при первой степени μ, будем иметь

$$\bar{z}_1(0)+\Pi_1 z(0)=0, \quad \bar{y}_1(0)+\Pi_1 y(0)=0 \tag{4.25}$$

Кроме того, нужно воспользоваться условием $\Pi_1 y\to 0$ при $\tau\to\infty$. Из второго уравнения (4.17) (при $k=1$) имеем

$$\Pi_1 y(\tau)=\Pi_1 y(0)+\int_0^\tau \Pi_0 f ds$$

откуда в силу условия на $\Pi_1 y$ при $\tau\to\infty$ следует

$$\Pi_1 y(0)=-\int_0^\infty \Pi_0 f ds \tag{4.26}$$

Сходимость появившегося здесь интеграла будет доказана ниже (см. (4.31)) и вообще все выкладки ведутся пока формально. С учетом (4.26) для $\Pi_1 y$ получим

$$\Pi_0 y(\tau) = -\int_0^\infty \Pi_0 f ds \tag{4.27}$$

Из второго равенства (4.25) теперь следует

$$\bar{y}_1(0) = \int_0^\infty \Pi_0 f ds \tag{4.28}$$

Это и будет начальным условием для системы (4.7) при $k = 1$, откуда определится $\bar{y}(t), \bar{z}_1(t)$. После этого из второго равенства (4.25) получим

$$\Pi_1 z(0) = -\bar{z}_1(0) \tag{4.29}$$

Это условие позволяет найти $\Pi_1 z$ из первого уравнения (4.17) при k= 1, поскольку $\Pi_1 y$ уже определено.

Совершенно аналогично определяются $\Pi_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k, \Pi_k z$ (k= 2, 3 ...) из системы (4.16), (4.17) с помощью дополнительных условий

$$\Pi_k x \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

$$\bar{y}_k(0) = \int_0^\infty \Pi_{k-1} f d\tau \qquad \Pi_k z(0) = -\bar{z}_k(0) \tag{4,30}$$

Тем самым описание построения ряда (4.11) закончено.

В теории сингулярных возмущений доказывается, что для $\Pi_k x$ имеет место оценка

$$|\Pi_k x| < Ce^{-xt/\mu}, \quad \text{k} = 0, 1, \dots \tag{4.31}$$

где $C > 0$, $x > 0$ — некоторые постоянные. Эта оценка означает экспоненциальное стремление $\Pi_k x$ к нулю при $\tau \to \infty$, это же неравенство обеспечивает сходимость интегралов в (4.30).

Основное утверждение, относящееся к только что проведенным построениям, заключается в том, что ряд (4.11) является асимптотическим рядом для решения $x(t, \mu)$ задачи (3.4), (3.5), а именно, в теории сингулярных возмущений доказывается, что разность между $x(t, \mu)$ и n-й частичной суммой ряда (4.11) имеет порядок $O(\mu^{n+1})$. Приведем доказательство асимптотического представления для решения задачи (3.4), (3.5) с остаточным членом $O(\mu)$, а именно, докажем, что $z(t,\mu)=\bar{z}_0(t)+\Pi_0(z)+O(\mu), y(t,\mu)=\bar{y}_0(t)+O(\mu)$. Доказательство представления с остаточным членом $O(\mu^{n+1})$сложнее лишь в чисто техническом отношении.

Положим $\Delta=z-\bar{z}_0-\Pi_0 z$, $\delta=y-\bar{y}_0$ и перейдем в (3.4) и (3.5) к переменным Δ и δ:

$$\mu\frac{d\Delta}{dt}=F(\bar{z}_0+\Pi_0 z+\Delta,\bar{y}_0+\delta,t)-\mu\frac{d\bar{z}_0}{dt}-\frac{d\Pi_0 z}{d\tau}, \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial\delta}{dt}=f(\bar{z}_0+\Pi_0 z+\Delta,\bar{y}_0+\delta,t)-\frac{d\bar{y}_0}{dt}, \tag{4.33}$$
$$\Delta(0,\eta)=0,\delta(0,\mu)=0$$

Дадим формулировку соответствующей теоремы [1].

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия:

1. F(z, y, t) u f(z, y, t) непрерывны по совокупности аргументов в некоторой области H.
2. На сегменте [0, T] определено решение $\bar{y}_0(t),\bar{z}_0(t)$, задачи (4.18), (4.22) и это решение принадлежит H.
3. $F_z(\bar{z}_0(t),\bar{y}_0(t),t)$, существует, непрерывна и отрицательна при $\varphi(y^0,0)$
4. z^0 принадлежит области влияния $\varphi(y^0,0)$
5. При $0\le t\le T$, $|\Delta|<\varepsilon,|\delta|<\varepsilon$ (ε - некоторое, может быть достаточно малое, но фиксированное, не зависящее от μ число) функции

$$F(\bar{z}_0+\Pi z+\Delta,\bar{y}_0+\delta,t),\quad f(\bar{z}_0+\Pi z+\Delta,\bar{y}_0+\delta,t),$$

непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно по Δ и δ.

Тогда на $0\le t\le T$ справедливы равномерные относительно t оценки

$$z(t,\mu)-\bar{z}_0(t)-\Pi_0 z(t/\mu)=O(\mu) \tag{4.32}$$

$$y(t,\mu)-\bar{y}_0=O(\mu) \tag{4.33}$$

Сформулируем ряд лемм на которых основано доказательство теоремы 4.2.

Лемма 4.1. Имеет место неравенство

$$|\Pi_0 z|<Ce^{-xt/\mu} \tag{4.34}$$

где C > 0, x > 0 — некоторые постоянные,

Лемма 4.2. Справедливы оценки

$$R_1(t,u)=O(\mu) \qquad R_2(t,\mu)=O\left(e^{-\varkappa t/\mu}\right)$$

Доказательство теоремы 4.2.

Положим $\Delta = z - \bar{z}_0 - \prod_0 z, \delta = y - \bar{y}_0$

Вычитая (4.35) из (3.4), получим

$$\begin{aligned} \mu\frac{d\Delta}{dt} &= F(\bar{z}_0 + \textstyle\prod_0 z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t) - F(\bar{z}_0 + \prod_0 z, \bar{y}_0, t) + R_1 \\ \frac{d\delta}{dt} &= f(\bar{z}_0 + \textstyle\prod_0 z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t) - f(\bar{z}_0 + \prod_0 z, \bar{y}_0, t) + R_2 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Очевидно

$$\Delta(0,\mu)=0 \qquad \delta(0,\mu)=0\,. \tag{4.37}$$

Систему уравнений (4.27) можно переписать в виде

$$\mu\frac{d\Delta}{dt} = a_{11}\Delta + a_{12}\delta + R_1 \qquad \frac{d\Delta}{dt} = a_{21}\Delta + a_{22}\delta + R_2 \tag{4.38}$$

где

$$a_{11}(\Delta,\delta,t,\mu) = \int_0^1 F_z(\bar{z}_0 + \textstyle\prod_0 z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t)\,d\theta,$$

$$a_{12}(\Delta,\delta,t,\mu) = \int_0^1 F_y(\bar{z}_0 + \textstyle\prod_0 z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t)\,d\theta,$$

a_{21} и a_{22} имеют аналогичную структуру. Равенство правых частей (4.36) в (4.38) легко проверить непосредственно, если заметить, что под интегралом в выражении для a_{11} стоит величина $\frac{1}{\Delta}\frac{dF}{d\theta}(\bar{z}_0 + \prod_0 z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t)$ и применить аналогичные соображения к остальным коэффициентам a_{1k}.

Из первого уравнения (4.38) выразим Δ через δ (будем в дальнейшем употреблять обозначение $\Delta(t), \delta(t)$, опуская зависимость от μ):

$$\Delta(t) = \int_0^t \frac{e^{\frac{1}{\mu}\int_\xi^1 a_{11}\,dt}}{\mu}\left(a_{12}\delta(\xi) + R_1\right)d\xi \tag{4.39}$$

Подставим результат во второе уравнение:

$$\frac{d\delta}{dt} = a_{22}\delta + a_{21}\int_0^t \frac{e^{\frac{1}{\mu}\int_\xi^1 a_{11}dt}}{\mu}\left(a_{12}\delta(\xi) + R_1\right)d\xi + R_2$$

Отсюда получим

$$\delta(t) = \int_0^t e^{\frac{1}{\mu}\int_\xi^1 a_{22}dt} R_2 d\xi + \int_0^t e^{\frac{1}{\mu}\int_\xi^1 a_{22}dt} a_{21}d\xi \int_0^t \frac{e^{\frac{1}{\mu}\int_\eta^1 a_{11}dt}}{\mu}\left(a_{12}\delta(\eta) + R_1\right)d\eta$$

Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом, приведем это уравнение к следующему виду:

$$\delta(t) = \int_0^t K(t,\eta,\mu)\delta(\eta)d\eta + R \tag{4.40}$$

где $K(t,\eta,\mu) = a_{12}q(t,\eta,\mu)$

$$q(t,\eta,\mu) = \int_\eta^t a_{21} e^{\int_\xi^t a_{22}dt} \frac{e^{\frac{1}{\mu}\int_\eta^\xi a_{11}dt}}{\mu} d\xi \tag{4.41}$$

$$R = \int_0^t e^{\int_\xi^t a_{22}dt} R_2 d\xi + \int_0^t R_1 q d\eta \tag{4.42}$$

Следует заметить, что в уравнении (4.40) величины $K(t,\eta,\mu)$ на самом деле зависит от Δ и δ, поскольку a_{ik} зависят от Δ и δ, но входящие в a_{ik} величины Δ и δ, мы рассматриваем как известные функции t.

Оценим теперь величины q и R, пользуясь уже доказанным в начале данного пункта равномерным стремлением к нулю Δ и δ. Сначала оценим q. В силу равномерного стремления Δ и δ к нулю при $\mu \to 0$ получим $a_{11} = F(z_0 + \Pi_0 z, y_0, t) - \gamma(t,\mu)$, где $\gamma(t,\mu) \Rightarrow 0$ при $\mu \to 0$. Нетрудно получить:

$$e^{\frac{1}{\mu}\int_\eta^\xi a_{11}dt} < Ce^{\frac{x_1}{\mu}(\xi - \eta)} \tag{4.43}$$

Действительно, согласно третьему условию имеем $F_z(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t) < 0$. В силу малости $\Pi_0 z$ при $t \geq \tau_0 \mu$, где τ_0 достаточно велико, а $\mu \to 0$ равномерной малости $\gamma(t,\mu)$ при $\mu \to 0$, имеем $a_{11} < -x_1 < 0$.

Итак, имеет место (4.43). Далее, очевидно, первый экспоненциальный сомножитель в выражении, стоящем под знаком интеграла в q, ограничен по модулю, не зависящей от μ константой C, и поэтому

$$|q| < \int_\eta^t L \frac{e^{\frac{x_1}{\mu}(\xi - \eta)}}{\mu} d\xi < C \tag{4.44}$$

Оценим теперь R. В силу леммы 4.2 имеем

$$|R| < \int_0^t Ce^{-x\xi/\mu} d\xi + \int_0^t C\mu d\eta < C\mu \tag{4.45}$$

другими словами, $R = O(\mu)$.

Обратимся теперь к уравнению (4.40). Пользуясь оценками (4.44) и (4.45) получим неравенство

$$|\delta| < C\int_0^t |\delta| d\eta + C\mu \tag{4.46}$$

Введем $u = \int_0^t |\delta| d\eta$. Тогда $\frac{du}{dt} = |\delta|$, $\left|\frac{du}{dt}\right| = |\delta|$ и (4.46) дает

$$\left|\frac{du}{dt}\right| < C|u| + C\mu \tag{4.47}$$

Пользуясь леммой о дифференциальных неравенствах, получим

$$|u| < \mu\left(e^{Ct} - 1\right) \leq \mu\left(e^{CT} - 1\right) < C\mu \tag{4.48}$$

Следовательно, в силу (4.47) $\left|\frac{du}{dt}\right| < C\mu$, т.е.

$$|\delta| < C\mu \tag{4.49}$$

Пользуясь теперь (4.39), оценкой (4.49), тем что $|R_1| < C\mu$, и оценкой (4.43).

$$|\Delta| < \int_0^t \frac{e^{-\frac{x_1}{\mu}(t-\xi)}}{\mu} C\mu d\xi < C\mu \qquad (4.50)$$

Оценки (4.49) и (4.50) и составляют утверждение теоремы 4.2, которая таким образом, доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тихонов А.Н , Васильева А.Б, Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения.- М.: Наука , 1980.
2. .Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1968.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. - М.: Наука,1965.
4. Киселев А. И., Краснов М. Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям - М.: Высшая школа, 1967